Límite de una función en un punto

Diremos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ si podemos lograr que los valores de $f(x)$ sean tan próximos a "b" como queramos, con tal de tomar valores de x tan próximos a "a" como sea preciso.

Podemos dar una definición más formal con la ayuda del concepto de entorno:

Diremos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ ***si, prefijado un entorno de b, por ejemplo*** $]b-\varepsilon, b+\varepsilon[$***, por pequeño que sea, es posible determinar un entorno del punto "a"*** $]a-\delta, a+\delta[$ ***tal que si*** $x \in]a-\delta, a+\delta[$ ***y*** $x \neq a$ ***entonces*** $f(x) \in]b-\varepsilon, b+\varepsilon[$.

Diremos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ **si** $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ **tal que** $0 < |x-a| < \delta$ **se deduce que** $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Continuidad de una función en un punto

Una función f(x) es continua en un punto si existe límite en él y coincide con el valor que toma la función en ese punto.

$$\boxed{f(x) \text{ es continua en } x = a \iff \lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$$

La continuidad de $f(x)$ en $x = a$ implica que se cumplan estas tres condiciones:

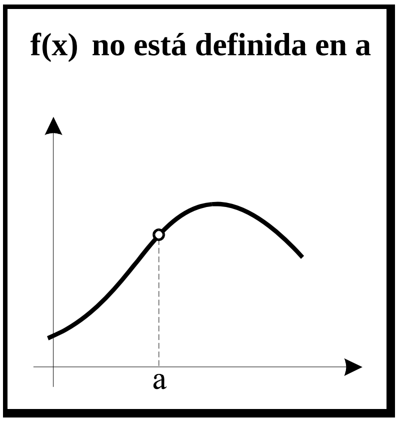
1) Existe el límite de la función $f(x)$ **en** $x = a$**, es decir, existe** $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

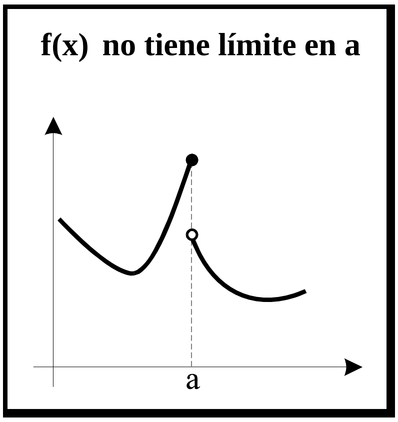
2) La función está definida en $x = a$**; es decir, existe** $f(a)$.

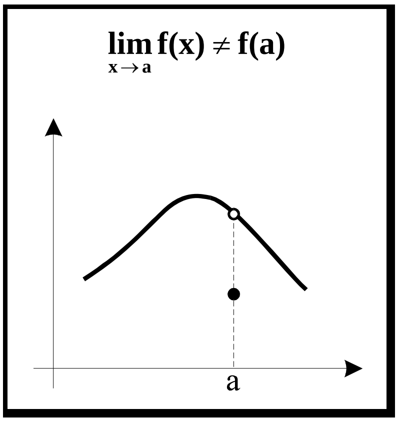
3) Los dos valores anteriores coinciden, es decir, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Una función tiene límite en un punto solamente si los dos límites laterales existen y son iguales. En tal caso, el límite coincide con los límites laterales.

Por tanto, una función puede dejar de ser continua en un punto por no cumplir alguna de estas condiciones:

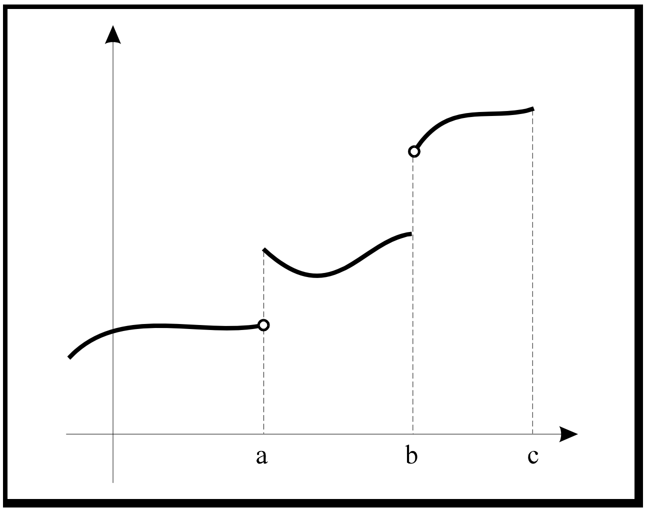






Cuando una función* $\mathbf{f(x)}$ *es continua en todos los puntos del intervalo abierto* $\mathbf{]a,b[}$ *se dice que* $\mathbf{f(x)}$ *es continua en el intervalo $\mathbf{]a,b[}$**.** En los puntos donde no sea continua la función decimos que es ***discontinua***.

Cuando el intervalo es cerrado, hay que hacer una pequeña salvedad. La función $f(x)$ de la figura adjunta no es continua en **a** ni en **b**, pero sí lo es si la consideramos definida solamente en $[a,b]$ por lo que podemos decir que es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$. En cambio no sería continua en $[b,c]$, ya que $\lim_{x\to b^+} f(x) \neq f(b)$.



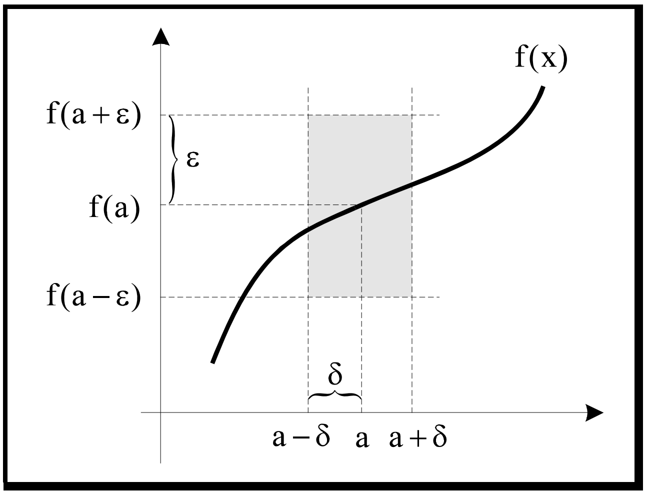
Definición métrica de continuidad

Algunas veces, sobre todo para demostraciones, es conveniente utilizar la siguiente definición de continuidad equivalente a la dada y que expresa de otra forma que a valores próximos al punto $x = a$ le corresponden valores funcionales próximos a $f(a)$. Esta definición deriva de la correspondiente definición de límite.

Una función es continua en el punto* $\mathbf{x = a}$ *si y sólo si, dado un número real positivo* $\varepsilon > \mathbf{0}$ *podemos encontrar otro número real positivo* $\delta > \mathbf{0}$ *tal que:

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}, \quad |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{f(x)} - \mathbf{f(a)}| < \varepsilon$$

o bien, si $\mathbf{x} \in \mathbf{E}(\mathbf{a}, \delta)$ **entonces** $\mathbf{f(x)} \in \mathbf{E}(\mathbf{f(a)}, \varepsilon)$



Gráficamente, la continuidad significa que, dada una banda de centro $f(a)$ paralela al eje de abscisas y de anchura 2ε, existe una banda de centro "a" paralela al eje de ordenadas y de anchura 2δ, tal que la gráfica de $f(x)$ se encuentra en la intersección de ambas.

Continuidad lateral

Dada una función $f(x)$ y un punto "a" perteneciente a su dominio, puede ocurrir que no exista un entorno abierto y centrado en "a", con lo cual no puede existir el límite de $f(x)$ en "a", sin embargo puede existir algún límite lateral en "a".

- La función $f(x)$ es continua por la izquierda en el punto "a" si y sólo si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$, es decir:

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists\delta > 0 \quad \text{tal que} \quad \forall x \in R \quad \text{con} \quad a - x < \delta \quad \text{se verifica que} \quad \left| f(x) - f(a) \right| < \varepsilon$$

- La función $f(x)$ es continua por la derecha en el punto "a", si y sólo si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$, es decir:

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists\delta > 0 \quad \text{tal que} \quad \forall x \in R \quad \text{con} \quad x - a < \delta \quad \text{se verifica que} \quad \left| f(x) - f(a) \right| < \varepsilon$$

Una función continua en un punto es continua por la izquierda y por la derecha de ese punto, y viceversa.

Continuidad de las funciones elementales

Recordando que el ***Dominio*** de una función $f(x)$, es el conjunto de números reales para los que $f(x)$ puede calcularse, tenemos:

- Las ***funciones constantes*** son continuas, lo mismo que la ***función identidad*** $y = x$.
- Las ***funciones polinómicas*** son siempre continuas, ya que se obtienen de la función $y = x$ mediante productos y sumas repetidos.
- Se llaman funciones racionales a las que se expresan como cocientes de dos funciones polinómicas:

$$f(x)=\frac{a_n x^n+\cdots\cdots\cdots+a_o}{b_m x^m+\cdots\cdots\cdots+b_o}$$

Las ***funciones racionales*** son continuas en todo punto de su dominio excepto en aquellos valores de **x** que anulen el denominador.

- La ***función exponencial*** $y=e^x$ es continua en todo R.
- La ***función logarítmica*** $y=\ln x$ es continua en todo su dominio R^+.
- Las ***funciones trigonométricas*** $y=\operatorname{sen} x$ e $y=\cos x$ son continuas en todo R.
- La ***función trigonométrica*** $y=\operatorname{tg} x$ es continua en todo R excepto en los puntos $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ en los que tiene límite infinito.
- Las ***funciones definidas a trozos*** serán continuas si en los puntos de unión lo son. Además, cada función deberá ser continua en su trozo correspondiente.
- En general, una función será ***discontinua*** en todos los puntos que no pertenezcan a su dominio.

Álgebra de las funciones continuas

Casi todas las funciones con las que se trabaja están formadas a partir de otras más sencillas, mediante las operaciones de suma, producto, cociente y composición. Interesa entonces saber hasta qué punto se conserva la continuidad cuando se opera con funciones. En respuesta a este interrogante, vamos a recordar unas propiedades, que ya conocemos de cursos anteriores.

I. La suma y el producto de dos funciones continuas es otra función continua. Más concretamente:

Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en “a”, las funciones $f(x)+g(x)$ y $f(x)\cdot g(x)$ son continuas en “a”.

II. El cociente de dos funciones continuas es una función continua excepto para aquellos valores de x que anulan el denominador.

Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en “a”, la función $\frac{f(x)}{g(x)}$ también es continua en “a”, siempre que $g(a)\neq 0$.

III. La composición de dos funciones continuas es otra función continua:

Consideremos la siguiente composición:

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g[f(x)]$$

Si f es continua en "a" y g lo es en $f(a)$, la función compuesta $y = g[f(x)]$ es continua en "a".

Discontinuidades de una función

Una función es discontinua en un punto cuando no existe límite en él o, existiendo, no coincide con el valor de la función en el mismo.

Para la clasificación de las discontinuidades en un punto tendremos en cuenta la existencia o no de los límites laterales en el mismo..

Discontinuidad evitable

Una función tiene una discontinuidad evitable en un punto cuando existe límite en él y no coincide con el valor de la función en el mismo.

El valor que deberíamos dar a la función en dicho punto para que fuera continua en él se llama ***verdadero valor de la función*** en el mismo.

Ejemplo: Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 3 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$

Esta función es continua en todos los puntos distintos de 1. Veamos qué sucede en $x = 1$.

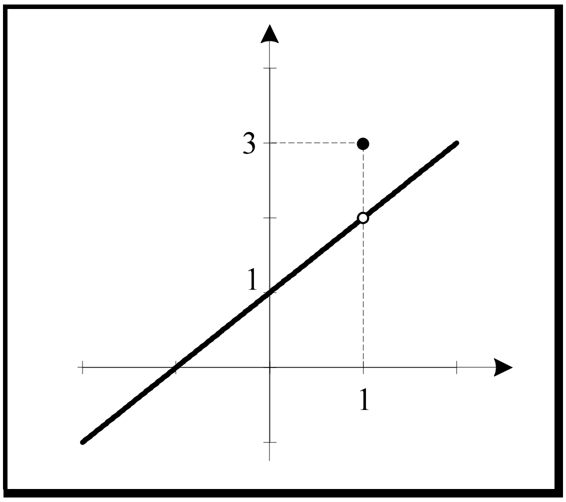
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} =$$

$$\lim_{x\to 1} (x+1) = 2$$

Como $f(1) = 3$, se verifica que

$$\lim_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$$

La función presenta una discontinuidad en $x = 1$.



Si en vez de $f(1) = 3$ hubiéramos tomado $f(1) = 2$, la función $f(x)$ sería continua en toda la recta real. En este sentido decimos que la discontinuidad es evitable.

Discontinuidad inevitable

Una función tiene una discontinuidad inevitable en un punto cuando existen los límites laterales en él y son distintos.

Si $f(x)$ es discontinua en el punto $x=a$, el valor:

$$\left| \lim_{x\to a^+} f(x) - \lim_{x\to a^-} f(x) \right|$$

se llama ***salto de la función*** en ese punto, y puede ser finito, si es un número real, o infinito.

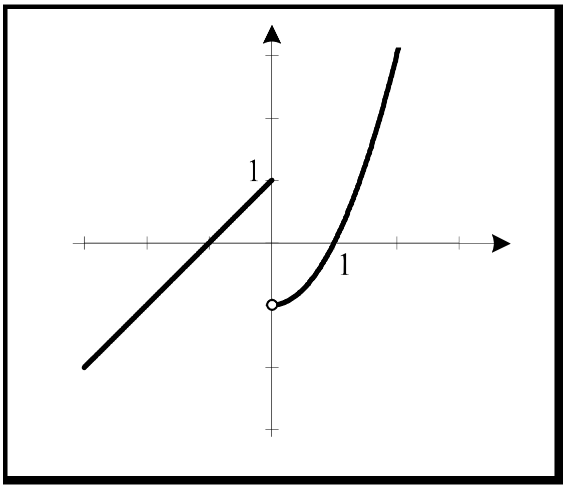
Ejemplo: Estudiar la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x\le 0 \\ x^2-1 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$

Esta función es continua en todos los puntos distintos de 0. Veamos qué sucede en $x=0$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x+1) = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^2-1) = -1$$

La función presenta en $x=0$ una discontinuidad inevitable de salto finito.



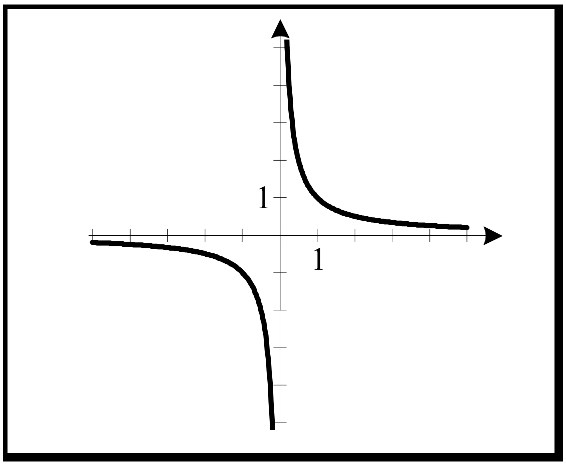
Ejemplo: Estudiar la continuidad de la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$

Esta función es continua en todos los puntos distintos de 0. Veamos qué sucede en $x=0$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

La función presenta en $x=0$ una discontinuidad inevitable con salto infinito.



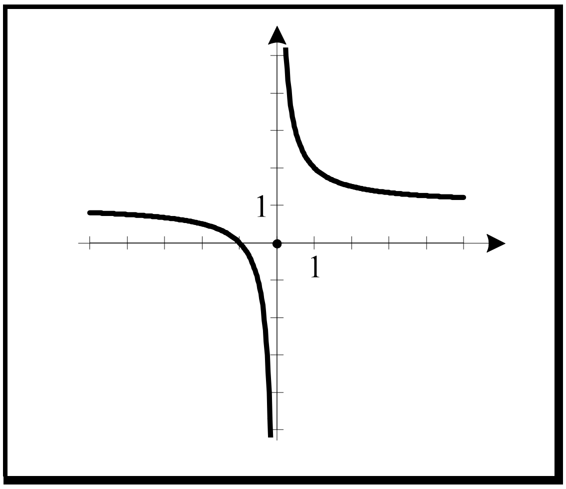
Ejemplo: Estudiar la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$

Esta función es continua en todos los puntos distintos de 0. Veamos qué sucede en $x=0$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x+1}{x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+1}{x}=+\infty$$

La función presenta en $x=0$ una discontinuidad inevitable con salto infinito.



Ejemplo: **Estudiar la continuidad de la función $f(x)$ en el intervalo $[-2,3]$**

$$\mathbf{f(x)}=\begin{cases}\mathbf{x+1} & \mathbf{si}\quad \mathbf{-2\le x<1}\\ \mathbf{x} & \mathbf{si}\quad \mathbf{1\le x<2}\\ \mathbf{-x+4} & \mathbf{si}\quad \mathbf{2\le x\le 3}\end{cases}$$

La función está definida para todos los puntos del intervalo $[-2,3]$. Por ser una función polinómica definida a trozos, es continua en cada subintervalo.

Habrá que estudiar la continuidad en los puntos de separación de los subintervalos, ya que en dichos puntos los límites laterales pueden ser distintos.

En $x=1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)=2\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} x=1\end{array}\right\}\Rightarrow\ \nexists\lim_{x\to 1} f(x)$$

Por tanto en el punto $x=1$ la función no tiene límite, luego es discontinua en $x=1$.

En $x=2$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} x=2\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(-x+4)=2\end{array}\right\}\Rightarrow\ \lim_{x\to 2} f(x)=2$$

$f(2) = -2 + 4 = 2$

Como $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = 2$ la función es continua en $x = 2$.

Conclusión

La función es continua en todos los puntos de su dominio excepto para $x = 1$.

Ejemplo: Estudiar los puntos de discontinuidad de la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3 - x}$

La función $f(x)$ es el cociente de dos funciones continuas puesto que son funciones polinómicas, luego es una función continua salvo en los puntos donde se anula el denominador.

$$x^3 - x = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Veamos qué tipo de discontinuidad hay en cada punto.

En $x = -1$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x^3 - x} = \lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to -1} \frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{2}$$

En $x = -1$ la función $f(x)$ presenta una discontinuidad evitable.

En $x = 0$

En este caso tenemos que estudiar los límites laterales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x+1}{x^3 - x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x+1}{x^3 - x} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 0} f(x)$$

En $x = 0$ la función $f(x)$ presenta una discontinuidad inevitable con salto infinito.

En $x = 1$

En este caso tenemos que estudiar los límites laterales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+1}{x^3-x}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+1}{x^3-x}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\ \nexists\lim\limits_{x\to 1} f(x)$$

En $x=1$ la función $f(x)$ presenta una discontinuidad inevitable con salto infinito.

Ejemplo: **Dibujar la función $f(x)=\text{Ent}(x)$ (parte entera de x). ¿En qué puntos es discontinua? ¿Qué tipo de discontinuidad tiene?**

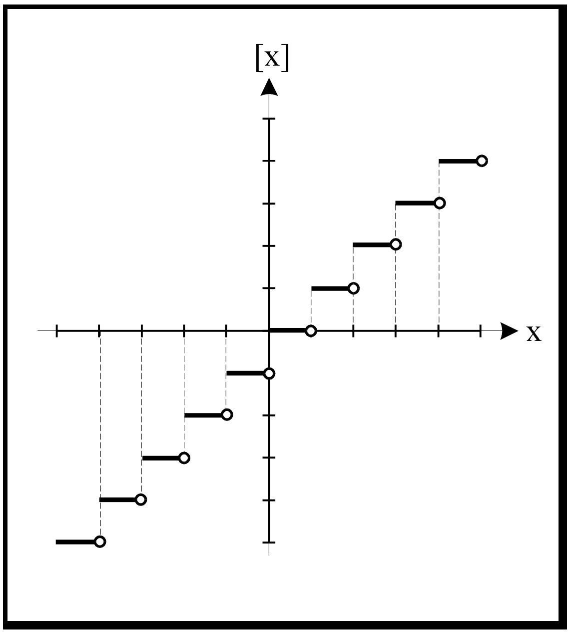
<u>*Se representa con el símbolo $[\,x\,]$ y se define como el mayor número entero que sea menor o igual a x.*</u>

$$\boxed{\mathbf{f(x)=Ent\,(x)=[x]}}$$

Esta función es discontinua en todos los puntos de abscisa entera.

En estos puntos hay un salto de valor 1, de discontinuidad inevitable.

La función es continua por la derecha en $x=a^+,\ a\in Z$.

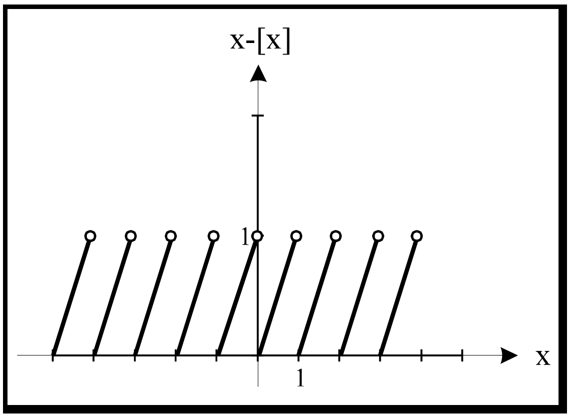


Ejemplo: **Dibujar la función $f(x)=\text{dec}(x)$ (parte decimal de x). ¿En qué puntos es discontinua? ¿Qué tipo de discontinuidad tiene?**

Su expresión es:

$$\boxed{\mathbf{f(x)=x-[x]}}$$

La función es continua por la derecha en $x=a^+,\ a\in Z$.



Ejemplo: **Estudiar en el campo real la continuidad de la función** $\mathbf{f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x}{e^x+1} & \text{si} \quad x\le 0\\ x^2+1 & \text{si} \quad x>0\end{cases}}$

Se trata de una función a trozos. Las dos funciones parciales son continuas en sus dominios. Hay que estudiar el comportamiento de la función en el punto de unión, fijando las condiciones para que resulte continua en él.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^x}{e^x+1}=0'5\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^2+1=1\end{array}\right\}\Rightarrow\ \nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)\ \Rightarrow\ f(x)\text{ no es continua en } x=0.$$

Ejemplo: **Hallar los valores de a y b y el valor de $f(0)$ para que la función $f(x)$, que se define a continuación, pueda ser continua.**

$$\mathbf{f(x)=\begin{cases}a(x-1)^2 & \text{si} \quad x\le 0\\ \mathrm{sen}(b+x) & \text{si} \quad 0<x<\pi\\ \dfrac{\pi}{x} & \text{si} \quad x\ge\pi\end{cases}}$$

<u>Se trata de una función a trozos. Las funciones parciales son continuas en sus dominios. Se trata de estudiar el comportamiento de la función en los puntos de unión, fijando las condiciones para que resulte continua en ellos.</u>

<u>En $x=0$</u>

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} a(x-1)^2=a\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{sen}(b+x)=\mathrm{sen}\,b\end{array}\right\}\Rightarrow\quad a=\mathrm{sen}\,b$$

<u>En $x=\pi$</u>

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to \pi^-} f(x)=\lim\limits_{x\to \pi^-} \mathrm{sen}(b+x)=\mathrm{sen}(b+\pi)\\ \lim\limits_{x\to \pi^+} f(x)=\lim\limits_{x\to \pi^+} \dfrac{\pi}{x}=1\end{array}\right\}\Rightarrow\quad \mathrm{sen}(b+\pi)=1$$

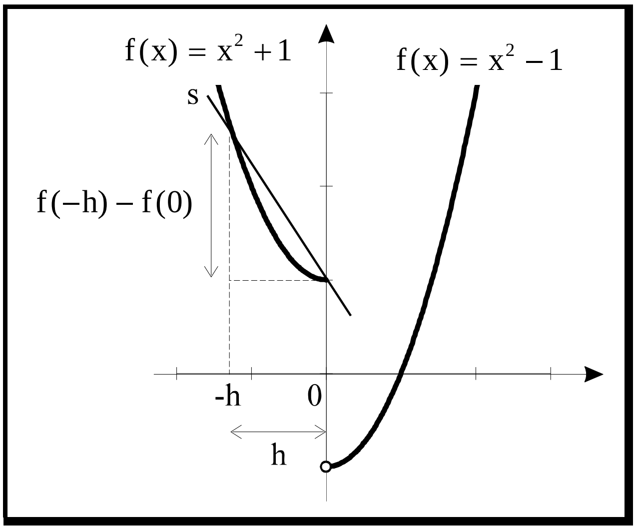
De estas dos relaciones se tiene:

Si $\mathrm{sen}(b+\pi)=1 \ \rightarrow\ b+\pi=\mathrm{arcsen}\,1=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k \ \Rightarrow\ b=\dfrac{3\pi}{2}+2\pi k$

$$a=\mathrm{sen}\,b=\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)=-1$$

Derivadas laterales de una función en un punto

La función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ no es una función derivable en x = 0, porque no es continua en ese punto.



Sin embargo, se puede considerar una familia de intervalos de la forma $[-h, 0]$ con $h \in R^+$, y su respectiva familia de rectas secantes a la gráfica de la función en los puntos: $[-h, f(-h)]$ y $[0, f(0)]$.

Si se consideran valores de h tendentes a 0, se observa que las rectas secantes se aproximan sucesivamente a una única recta tangente por la izquierda.

Por tanto, las pendientes de las rectas secantes tienden al valor de la pendiente de la recta tangente por la izquierda al contraer el intervalo $[-h, 0]$ al punto 0.

Las rectas secantes **s** tienen por pendiente $\dfrac{f(-h) - f(0)}{-h}$ ó $\dfrac{f(0) - f(-h)}{h}$, así pues, la pendiente de la recta tangente por la izquierda es

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0) - f(-h)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{1 - \left(h^2 + 1\right)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h^2}{h} = 0$$

La recta tangente por la izquierda es $y - 1 = 0$, y de la existencia de ésta se obtiene la extensión del concepto de derivada, que sigue a continuación. De forma análoga se introduce el concepto de recta tangente por la derecha.

Sea y = f(x) una función cuyo dominio de definición es D, y sea $a \in D$ tal que existe un intervalo de extremo superior "a" contenido en D.

La función f(x) es derivable por la izquierda en el punto de abscisa $x = a$ si existe, y es finito, el siguiente límite:

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Suele denotarse en límites $x \to a^-$ para significar $x < a$ y $x \to a$

Si una función es derivable por la izquierda, entonces el límite anterior es un número, al cual se le denomina derivada de f(x) por la izquierda en el punto de abscisa x = a y se denota por $f'_-(a)$, es decir:

$$\mathbf{f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

Sea y = f(x) una función cuyo dominio de definición es D, y sea $a \in D$ tal que existe un intervalo de extremo inferior "a" contenido en D.

La función f(x) es derivable por la derecha en el punto de abscisa x = a si existe, y es finito, el siguiente límite:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{\mathbf{f(x) - f(a)}}{\mathbf{x - a}}$$

Suele denotarse en límites $x \to a^+$ para significar $x > a$ y $x \to a$.

Si una función es derivable por la derecha, entonces el límite anterior es un número, al cual se le denomina derivada de f(x) por la derecha en el punto de abscisa x = a y se denota por $f'_+(a)$, es decir:

$$\mathbf{f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

Con esta extensión del concepto de función derivable en un punto se puede decir que una función f(x) es derivable en un intervalo cerrado [a, b]. Esto significa que la función es derivable en $]a, b[$ y derivable por la izquierda en a y por la derecha en b respectivamente.

La condición necesaria y suficiente para que una función y = f(x) sea derivable en un punto de abscisa x = a es que existan las derivadas laterales en ese punto y éstas sean iguales.

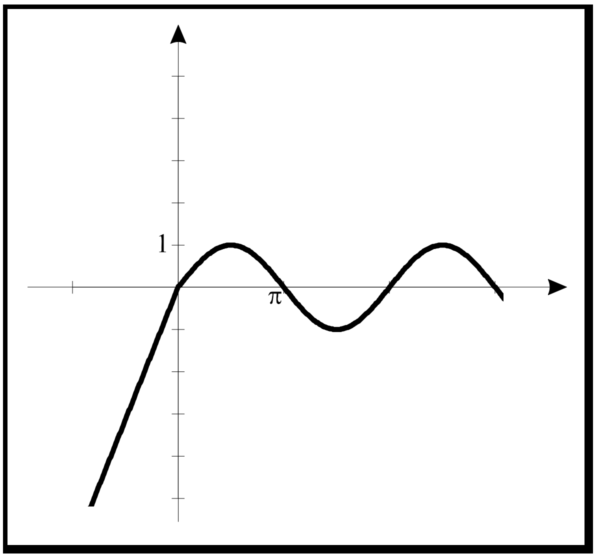
$$\mathbf{f'_+(a) = f'_-(a) = f'(a)}$$

__**Teorema**__

Toda función derivable por la izquierda (derecha) en un punto es continua por la izquierda (derecha) en ese punto.

Ejemplo: ¿Es derivable la función $\mathbf{f(x) = \begin{cases} senx & si \quad x \geq 0 \\ 2x & si \quad x < 0 \end{cases}}$ **en x = 0?**

Como estas funciones están definidas por una función distinta a cada lado de $x = 0$, entonces se estudia la derivabilidad lateral.



$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{2x - \operatorname{sen} 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x}{x} = 2$$

En el punto $x = 0$ la función no es derivable, ya que $f'_+(0) \neq f'_-(0)$

Continuidad y Derivabilidad

<u>Teorema</u>

Si una función y = f(x), cuyo dominio de definición es D, es derivable en a∈D entonces también es continua en x = a.

<u>Demostración</u>

Hemos de probar que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) + \lim_{x\to a} \left[f(x) - f(a)\right] = f(a) + \lim_{x\to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a)\right]$$

Como $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ es un número, por ser f(x) derivable en a, y $\lim\limits_{x\to a} (x - a) = 0$ se tiene:

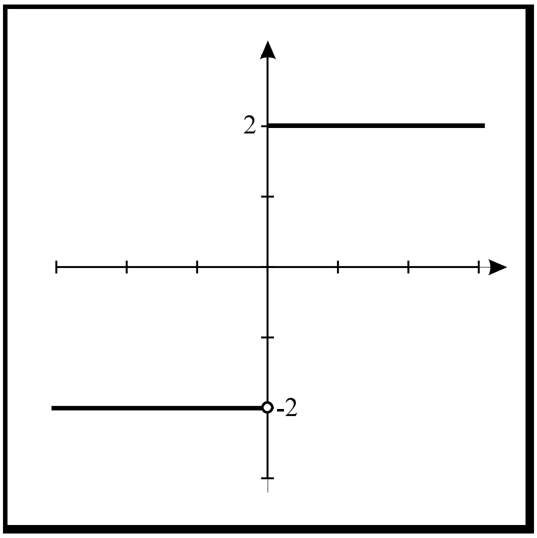
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) + \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x\to a} (x - a) = f(a) + f'(a) \cdot 0 = f(a)$$

Derivabilidad

La derivada de una función en un punto es un límite y puede ser que no exista. En ese caso se dice que la función no es derivable. Ello puede ocurrir en tres casos:

a) La función no es continua

Ejemplo: Estudiar la derivabilidad de la función $\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{2} & \mathbf{si} \ \ \mathbf{x \geq 0} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{si} \ \ \mathbf{x < 0} \end{cases}$ **en** $\mathbf{x = 0}$



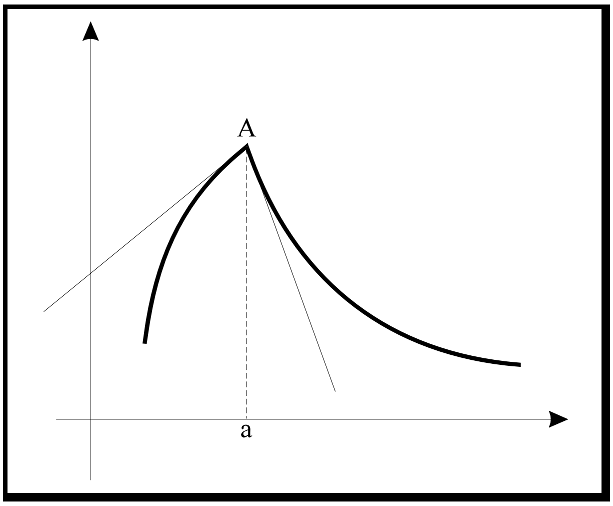
$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \ \ x \geq 0 \\ -2 & \text{si} \ \ x < 0 \end{cases}$$

<u>Continuidad</u>

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (-2) = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \ 2 \neq -2 \ \Rightarrow \ \nexists \ \lim\limits_{x \to 0} f(x) \ \Rightarrow$$

La función no es continua en $x = 0$ y por tanto no es derivable en dicho punto.

b) La función presenta un punto anguloso

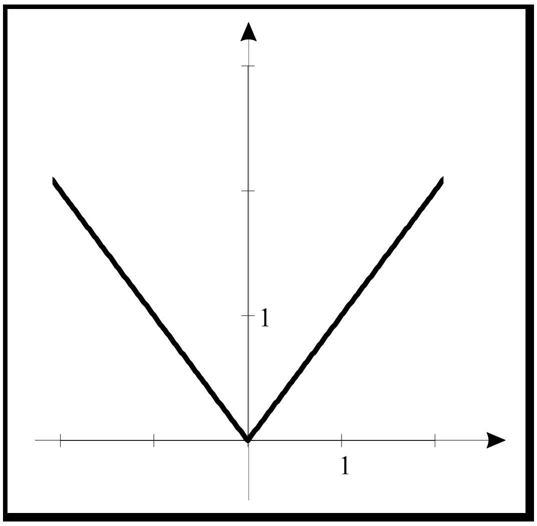


Si se da el caso que $f'_-(a)$ y $f'_+(a)$ *existen pero son distintas, entonces no podrá existir* $f'(a)$ *y, por tanto, en el punto A la gráfica no tendrá recta tangente.*

En realidad, sucederá que hay dos semitangentes, como se observa en la gráfica adjunta, y por esa razón se dice que A ***es un punto anguloso de la gráfica de*** $\mathbf{f(x)}$.

Intuitivamente, no admitimos que una gráfica que tenga tangente en un punto esté rota en ese punto, es decir, debe ser continua.

Ejemplo: Estudiar la derivabilidad de la función $f(x) = |x|$



$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La función $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$ pero no es derivable en dicho punto como se comprueba calculando las derivadas laterales:

$$\left.\begin{aligned} f'_{+}(0) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-0}{x-0} = 1 \\ f'_{-}(0) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x-0}{x-0} = -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f'_{-}(0) \neq f'_{+}(0) \Rightarrow \text{no existe } f'(0)$$

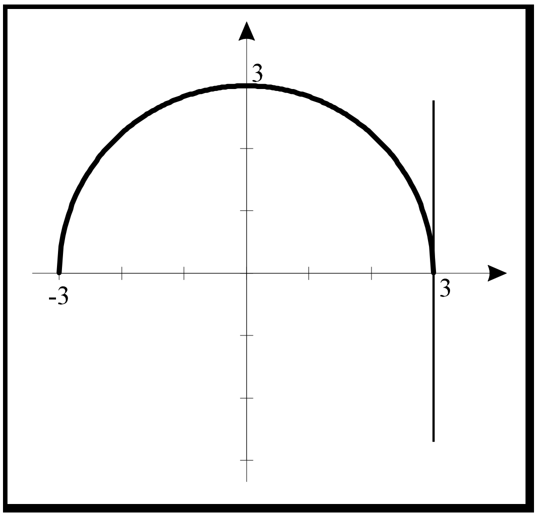
En realidad habrá dos semitangentes en el punto de abscisa 0. Una de ecuación $y = x$ y la otra de ecuación $y = -x$.

c) La tangente es vertical (sin pendiente o con pendiente infinita)

Ejemplo: Hallar una ecuación de la recta tangente a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 9 = 0$ en el punto $(3,0)$.

Sabemos que la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $(3,0)$ es $m = y'(3)$, por tanto:

$$2x + 2yy' = 0.$$



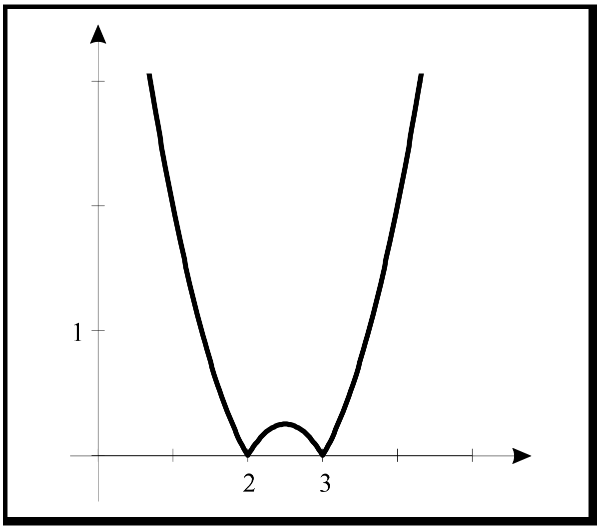
En el punto $(3,0)$ tenemos:

$$2\cdot 3 + 2\cdot 0\cdot y' = 0 \quad \Rightarrow$$

$$y' = \frac{-6}{0} \to -\infty \quad \Rightarrow$$

La curva no es derivable en el punto dado.

Ejemplo: Estudiar la derivabilidad de la función $y = |x^2 - 5x + 6|$



Si representamos la función $y = x^2 - 5x + 6$ vemos que tiene una parte negativa para $x \in]2,3[$, sin embargo

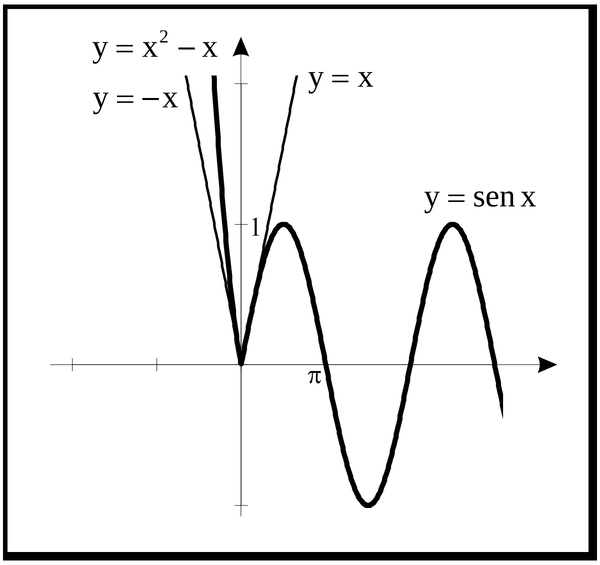
$$y = |x^2 - 5x + 6|$$

será positiva en todo su dominio de definición R.

La función dada presenta dos puntos angulosos, en $(2,0)$ y en $(3,0)$. En ellos no podemos trazar una recta tangente única. La función es derivable en todos sus puntos excepto en $(2,0)$ y $(3,0)$.

Ejemplo: En la siguiente función calcular las derivadas laterales en el punto de abscisa 0. ¿Qué significado geométrico tienen $f'_+(0)$ y $f'_-(0)$ en nuestro ejemplo?

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 - x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 - x - \operatorname{sen} 0}{x - 0} = -1$$

Dado que $f'_+(0) \neq f'_-(0) \quad \Rightarrow \quad$ no existe $f'(0)$

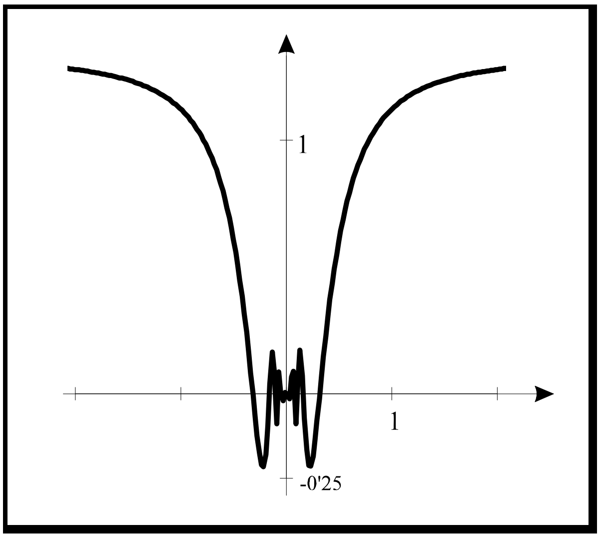
Es obvio que no se puede hablar geométricamente de tangente en el punto $x = 0$. No obstante, si consideramos las dos ramas de que consta la gráfica en el entorno del punto x = 0 podemos trazar las semirrectas $y = x$ e $y = -x$ que podemos calificar de semitangentes a cada una de las ramas. Las ecuaciones serán:

$$y - \operatorname{sen} 0 = 1 \cdot (x - 0) \quad \text{es decir} \quad y = x \quad \text{si} \quad x \geq 0$$

$$y - \operatorname{sen} 0 = -1 \cdot (x - 0) \quad \text{es decir} \quad y = -x \quad \text{si} \quad x < 0$$

Ejemplo: **En la siguiente función, comprueba que $f'(0)$ no está definida.**

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{x \cdot \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}} & \mathbf{si} \quad \mathbf{x \neq 0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{si} \quad \mathbf{x = 0} \end{cases}$$



De acuerdo con la definición de derivada:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{h \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}$$

Este último límite no existe, ya que $\operatorname{sen} \frac{1}{h}$ oscila indefinidamente cuando h tiende a 0.

Por lo tanto la función f(x) no es derivable en $x = 0$, aunque sí es continua en dicho punto.

Ejemplo: Estudiar la derivabilidad de la función $f(x)=\left|3x+5\right|$.

$$3x+5=0 \Rightarrow x=-\frac{5}{3} \qquad f(x)=\begin{cases}-3x-5 & \text{si } x\le -\frac{5}{3}\\ 3x+5 & \text{si } x>-\frac{5}{3}\end{cases}$$

- Utilizando la definición de derivada $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$$f'_-\left(-\frac{5}{3}\right)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f\left(-\frac{5}{3}+h\right)-f\left(-\frac{5}{3}\right)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-3\left(-\frac{5}{3}+h\right)-5-\left[-3\left(-\frac{5}{3}\right)-5\right]}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{-3h}{h}=-3$$

$$f'_+\left(-\frac{5}{3}\right)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f\left(-\frac{5}{3}+h\right)-f\left(-\frac{5}{3}\right)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{3\left(-\frac{5}{3}+h\right)+5-\left[3\left(-\frac{5}{3}\right)+5\right]}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{3h}{h}=3$$

Como $f'_-\left(-\frac{5}{3}\right)\neq f'_+\left(-\frac{5}{3}\right)$ la función no es derivable en $x=-\frac{5}{3}$

- Utilizando la definición de derivada $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$$f'_-\left(-\frac{5}{3}\right)=\lim_{x\to -\frac{5}{3}^-}\frac{f(x)-f\left(-\frac{5}{3}\right)}{x-\left(-\frac{5}{3}\right)}=\lim_{x\to -\frac{5}{3}^-}\frac{-3x-5-\left[-3\left(-\frac{5}{3}\right)-5\right]}{x+\frac{5}{3}}=\lim_{x\to -\frac{5}{3}^-}\frac{-3x-5}{x+\frac{5}{3}}=$$

$$\lim_{x\to -\frac{5}{3}^-}\frac{-3\left(x+\frac{5}{3}\right)}{x+\frac{5}{3}}=\lim_{x\to -\frac{5}{3}^-}\frac{-3\left(x+\frac{5}{3}\right)}{x+\frac{5}{3}}=-3$$

$$f'_+\left(-\frac{5}{3}\right)=\lim_{x\to -\frac{5}{3}^+}\frac{f(x)-f\left(-\frac{5}{3}\right)}{x-\left(-\frac{5}{3}\right)}=\lim_{x\to -\frac{5}{3}^+}\frac{3x+5-\left[3\left(-\frac{5}{3}\right)+5\right]}{x+\frac{5}{3}}=\lim_{x\to -\frac{5}{3}^+}\frac{3x+5}{x+\frac{5}{3}}=$$

$$\lim_{x \to -\frac{5}{3}^+} \frac{3\left(x + \frac{5}{3}\right)}{x + \frac{5}{3}} = 3$$

- Estudiando primero la continuidad de la función en dicho punto. Si no es continua implica que no es derivable en ese punto. Si es continua entonces calculamos las derivadas laterales utilizando la tabla de derivadas directamente.

Continuidad en $x = -\frac{5}{3}$

a) $f\left(-\frac{5}{3}\right) = 0$

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\frac{5}{3}^-} (-3x - 5) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\frac{5}{3}^+} (3x + 5) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\frac{5}{3}} f(x) = 0$

c) $f\left(-\frac{5}{3}\right) = \lim\limits_{x \to -\frac{5}{3}} f(x) = 0$ por tanto la función es continua en $x = -\frac{5}{3}$

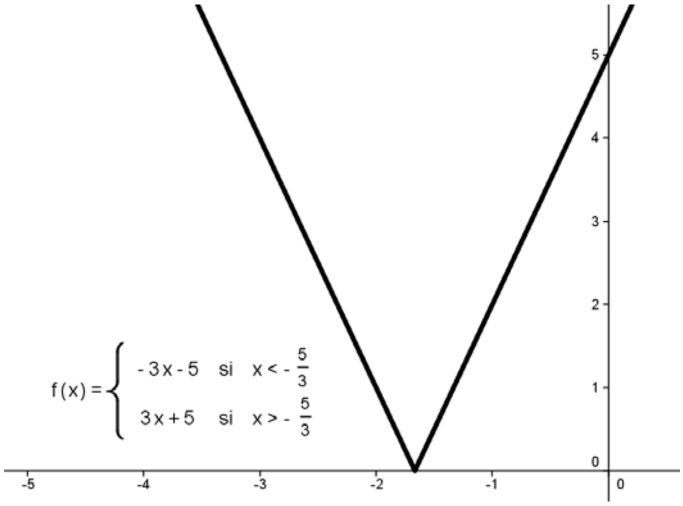
Derivabilidad en $x = -\frac{5}{3}$

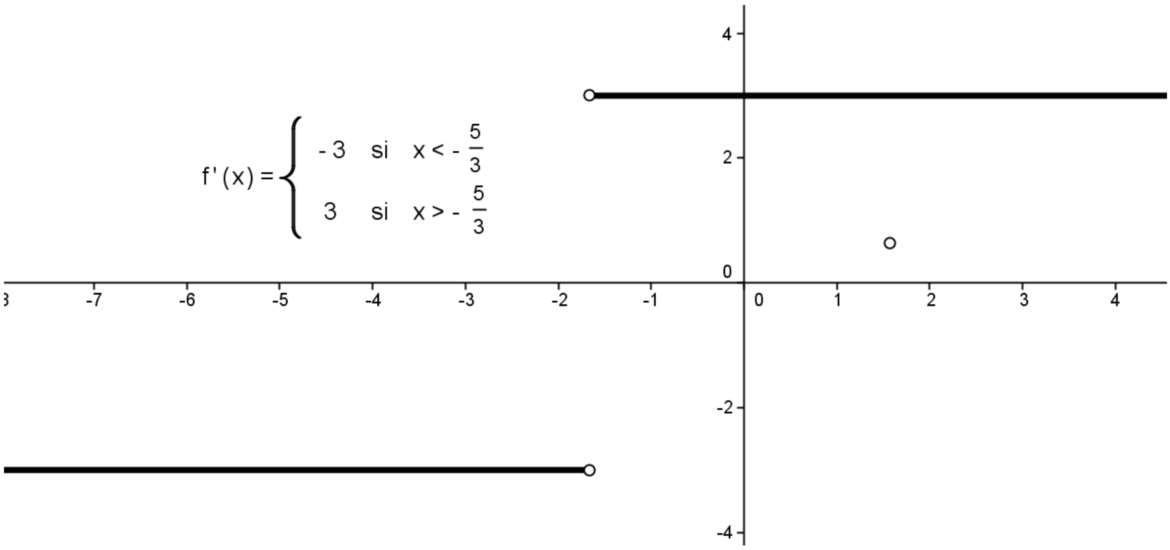
La derivada de la función $f(x)$ exceptuando el punto $x = -\frac{5}{3}$ es:

$$f'(x) = \begin{cases} -3 & \text{si} \quad x < -\frac{5}{3} \\ 3 & \text{si} \quad x > -\frac{5}{3} \end{cases}$$

Calculamos las derivadas laterales:

$$\left.\begin{array}{l} f'_-\left(-\frac{5}{3}\right) = -3 \\ f'_+\left(-\frac{5}{3}\right) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ la función no es derivable en } x = -\frac{5}{3}$$





Ejemplo: Calcular la función derivada de la función $\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{\cos x} & \mathbf{si} \quad \mathbf{x \le 0} \\ \mathbf{x^2} & \mathbf{si} \quad \mathbf{0 < x \le 1} \\ \mathbf{1 + \ln x} & \mathbf{si} \quad \mathbf{1 < x} \end{cases}$

Continuidad en $x = 0$

a) $f(0) = \cos 0 = 1$

b) $\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \cos x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$ no existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 \Rightarrow f(x)$ no es continua en $x = 0$

y por tanto no es derivable en dicho punto.

Continuidad en $x = 1$

a) $f(1) = 1^2 = 1$

b) $\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} (1+\ln x) = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$

c) $f(1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1 \Rightarrow$ la función es continua en $x = 1$.

Derivabilidad en $x = 1$

La derivada de la función $f(x)$ exceptuando el punto $x = 1$ es:

$$f'(x) = \begin{cases} -\operatorname{sen} x & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad 1 < x \end{cases} \qquad f'_-(1) = 2 \quad \text{y} \quad f'_+(1) = 1$$

Como $f'_-(1) \neq f'_+(1)$, la función no es derivable en $x = 1$, por tanto, la función $f(x)$ es derivable $\forall x \in R - \{0, 1\}$.