Los límites que intervienen en los problemas que siguen, se han resuelto con la calculadora cuando su complejidad lo ha requerido.

En las funciones definidas a trozos, cuando estudiemos la derivabilidad en un punto, si la función es continua en dicho punto las derivadas laterales las podemos calcular utilizando la tabla de derivadas, para lo cual es necesario haber estudiado previamente la continuidad. En caso contrario, debemos calcular las derivadas laterales aplicando la definición.

Ejemplo 1

Estudiar la derivabilidad de la función $\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{-3x^2 + 4x} & \mathbf{si} \quad \mathbf{x \le 2} \\ \mathbf{ax^2 + b} & \mathbf{si} \quad \mathbf{x > 2} \end{cases}$ **en todos sus puntos.**

En $x = 2$

Continuidad

$$f(2) = -12 + 8 = -4$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \left(ax^2 + b\right) = 4a + b \\ \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \left(-3x^2 + 4x\right) = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 4a + b = -4 \quad \Rightarrow \quad b = -4 - 4a$$

Derivabilidad

Si $f(x)$ es continua para $b = -4 - 4a$, podemos derivar utilizando la tabla de derivadas:

La derivada por la izquierda de la función $f(x)$ en el punto $x = 2$ es:

$$f'(x) = -6x + 4 \quad \to \quad f'_-(2) = -8$$

La derivada por la derecha de la función $f(x)$ en el punto $x = 2$ es:

$$f'(x) = 2ax \quad \to \quad f'_+(2) = 4a$$

Para que sea derivable en $x = 2$ tiene que verificarse que las derivadas laterales sean iguales.

$$f'_-(2) = f_+(2) \quad \to \quad -8 = 4a \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases}$$

por tanto:

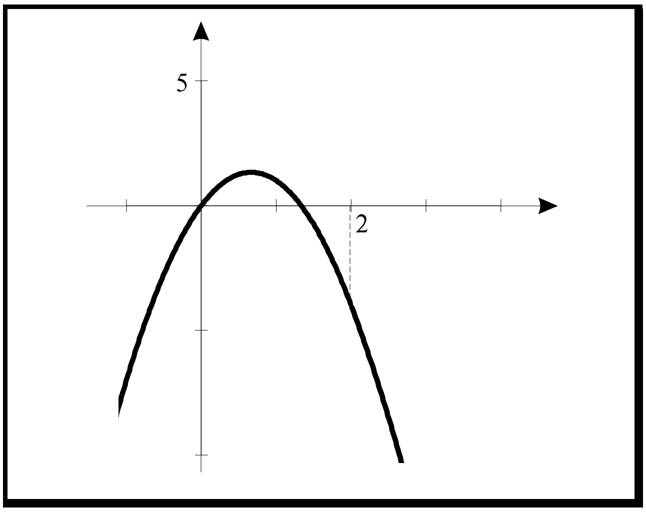
$$f'_-(2) = f'_+(2) = -8$$

Luego para que la función sea derivable en $x = 2$ debe de ser

$$f(x) = \begin{cases} -3x^2 + 4x & \text{si} \quad x \le 2 \\ -2x^2 + 4 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

La función derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} -6x + 4 & \text{si} \quad x < 2 \\ -8 & \text{si} \quad x = 2 \\ -4x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$



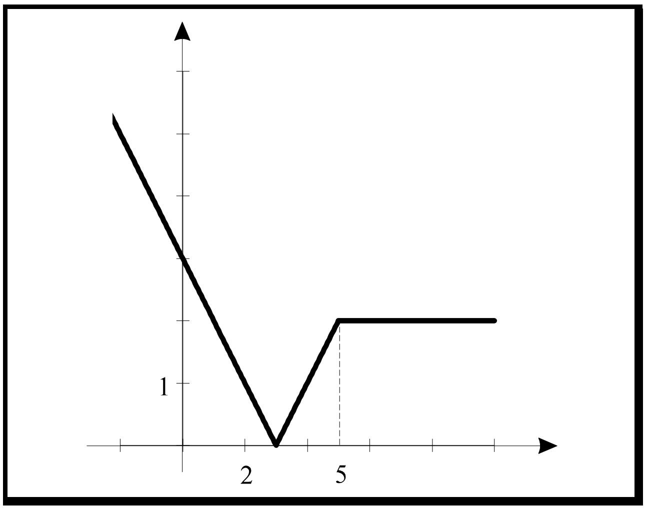
Ejemplo 2

Estudiar la continuidad de la función: $\mathbf{f(x)} = \begin{cases} |3-x| & \textbf{si} \quad x \le 5 \\ \ln e^2 & \textbf{si} \quad x > 5 \end{cases}$

$$|3-x| = \begin{cases} -(3-x) & \text{si} \quad 3-x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad 3-x = 0 \\ 3-x & \text{si} \quad 3-x > 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad |3-x| = \begin{cases} -x+3 & \text{si} \quad x < 3 \\ 0 & \text{si} \quad x = 3 \\ x-3 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -x+3 & \text{si} \quad x < 3 \\ 0 & \text{si} \quad x = 3 \\ x-3 & \text{si} \quad 3 < x \le 5 \\ 2 & \text{si} \quad x > 5 \end{cases}$$

Como $|3-x|$ es una función continua en R y $\ln e^2 = 2$ es también continua, el único problema es saber cómo empalman.



En $x = 5$

$$\left.\begin{array}{l} f(5) = 2 \\ \left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to 5^-} (x-3) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 5^+} 2 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 5} f(x) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{La función } f(x) \text{ es continua } \forall x \in R.$$

Ejemplo 3

Se considera la función $f: R \longrightarrow R$ definida por $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$

a) Estudiar en qué puntos es continua y en cuáles es derivable.

b) Encontrar $f''(x)$.

a) Lo mejor es descomponer la función distinguiendo los intervalos correspondientes, con lo que resultará más fácil responder a las cuestiones que se proponen.

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x} & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \dfrac{x}{1+x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

<u>Continuidad</u>

La función $\dfrac{x}{1-x}$ es claramente continua en $x<0$ y la función $\dfrac{x}{1+x}$ es también continua en $x>0$.

<u>En $x=0$</u>

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0 \\ \left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{1-x} = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{1+x} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \end{array}\right\} \quad f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ es continua en } x=0$$

<u>Derivabilidad</u>

Como $f(x)$ es continua en $x=0$, podemos derivar utilizando la tabla de derivadas:

La derivada por la izquierda de la función $f(x)$ en el punto $x=0$ es:

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \rightarrow \quad f'_-(0) = 1$$

La derivada por la derecha de la función $f(x)$ en el punto $x=0$ es:

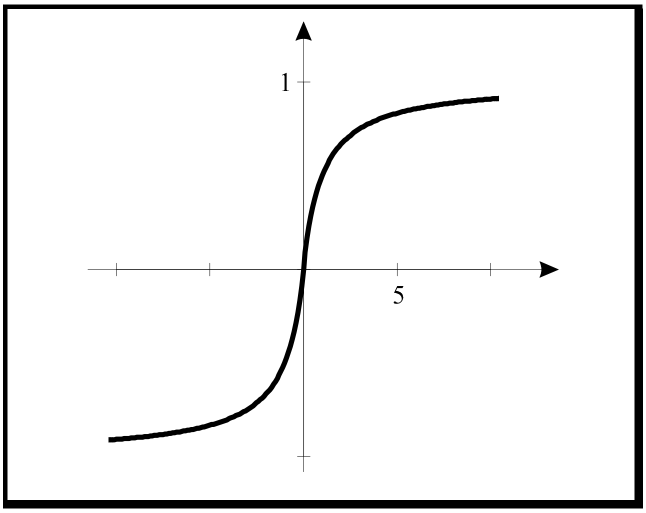
$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad \rightarrow \quad f'_+(0) = 1$$

Como $f'_-(0) = f'_+(0) = 1$, la función $f(x)$ es derivable en $x = 0$.

Por tanto la derivada existe $\forall x \in R$ y es:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ \dfrac{1}{(1+x)^2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Si representamos gráficamente $f(x)$ vemos que es derivable en todos sus puntos:



b) Ya que tenemos $f'(x)$, será sencillo obtener $f''(x)$ allí donde exista.

En $x = 0$

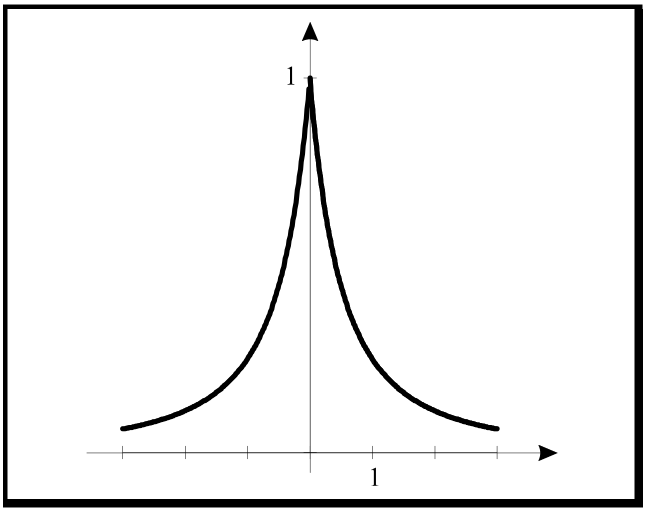
$$\left.\begin{array}{l} f''_-(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\dfrac{1}{(1-x)^2} - 1}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{2 - x}{(1-x)^2} = 2 \\ f''_+(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\dfrac{1}{(1+x)^2} - 1}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-2 - x}{(1+x)^2} = -2 \end{array}\right\}$$

Como $f''_-(0) \neq f''_+(0)$, la función $f'(x)$ no es derivable en $x = 0$.

La función derivada segunda es:

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(1-x)^3} & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{-2}{(1+x)^3} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Si representamos gráficamente $f'(x)$ observamos como en x = 0 hay un punto anguloso:



Ejemplo 4

a) Dibujar y estudiar la continuidad de la función definida al margen.

b) Estudiar en qué puntos no es derivable.

c) Calcular $f''(x)$

$$f(x)=\begin{cases} \cos x+2 & \text{si} \quad x\le 0 \\ \dfrac{2}{\pi}\cdot x+1 & \text{si} \quad 0<x<\dfrac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen} x+1 & \text{si} \quad \dfrac{\pi}{2}\le x \end{cases}$$

a)

Continuidad

En $x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=\cos 0+2=3 \\ \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-}(\cos x+2)=3 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{2}{\pi}\cdot x+1\right)=1 \end{array}\right\} \to\ 3\neq 1\ \Rightarrow\ \nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x) \end{array}\right\}\ \text{No es continua en } x=0$$

En $x=\dfrac{\pi}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}+1=2 \\ \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\left(\dfrac{2}{\pi}\cdot x+1\right)=2 \\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+}(\operatorname{sen} x+1)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x)=2 \end{array}\right\}\ \text{Es continua en } x=\dfrac{\pi}{2}$$

La función $f(x)$ es continua $\forall x\in\left]-\infty,0\right[\cup\left]0,\infty\right[$

b)

Derivabilidad

En $x = 0$ No es derivable por no ser continua.

En $x=\dfrac{\pi}{2}$

Como la función es continua en $x=\dfrac{\pi}{2}$, podemos obtener las derivadas laterales a través de la tabla de derivadas.

La derivada por la izquierda de la función $f(x)$ en el punto $x = \dfrac{\pi}{2}$ es:

$$f'(x) = \frac{2}{\pi} \quad \rightarrow \quad f'_{-}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$$

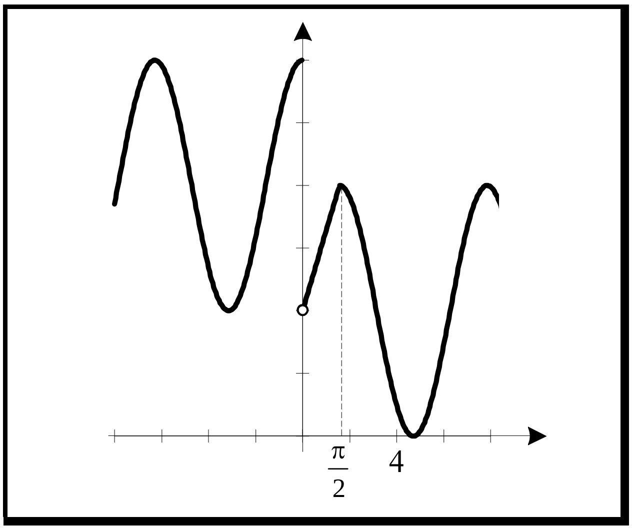
La derivada por la derecha de la función $f(x)$ en el punto $x = \dfrac{\pi}{2}$ es:

$$f'(x) = \cos x \quad \rightarrow \quad f'_{+}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Como $f'_{-}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \neq f'_{+}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, la función $f(x)$ no es derivable en $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Por tanto, la función derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} -\operatorname{sen} x & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{2}{\pi} & \text{si} \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{si} \quad \dfrac{\pi}{2} < x \end{cases}$$



c) Como $f'(x)$ no está definida en $x = 0$ ni en $x = \dfrac{\pi}{2}$, la derivada es:

$$f''(x) = \begin{cases} -\cos x & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ -\operatorname{sen} x & \text{si} \quad \dfrac{\pi}{2} < x \end{cases}$$

Ejemplo 5

a) Calcular los valores de a y b para que la función $f(x)=\begin{cases}\ln(e+\operatorname{sen}x) & \text{si} \quad x<0\\ x^3+ax+b & \text{si} \quad x\geq 0\end{cases}$ sea derivable en $x=0$.

b) Calcular $f'(x)$.

c) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de la función $f'(x)$ en $x=0$.

a)

Continuidad en $x=0$

Para que la función sea derivable en $x=0$ tiene que ser continua en dicho punto. Para que la función sea continua, los límites laterales tienen que coincidir.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}\ln(e+\operatorname{sen}x)=\ln e=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+}(x^3+ax+b)=b\end{array}\right\} \Rightarrow \quad b=1$$

Derivabilidad en $x=0$

Para que la función sea derivable en $x=0$, las derivadas laterales en dicho punto tienen que coincidir.

Si sustituimos $b=1$ en la función $f(x)$ obtenemos $f(x)=\begin{cases}\ln(e+\operatorname{sen}x) & \text{si} \quad x<0\\ x^3+ax+1 & \text{si} \quad x\geq 0\end{cases}$

La derivabilidad en $x=0$ la podemos calcular de dos formas:

Aplicando la tabla de derivadas (ya que la función es continua en $x=0$)

La derivada de la función $f(x)$ en $x\neq 0$ es: $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x}{e+\operatorname{sen}x} & \text{si} \quad x<0\\ 3x^2+a & \text{si} \quad x>0\end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l}f'_-(0)=\dfrac{\cos 0}{e+\operatorname{sen}0}=\dfrac{1}{e}\\ f'_+(0)=3\cdot 0^2+a=a\end{array}\right\}$$

Como se tiene que verificar que $f'_-(0)=f'_+(0) \Rightarrow a=\dfrac{1}{e}$, luego $f'(0)=\dfrac{1}{e}$

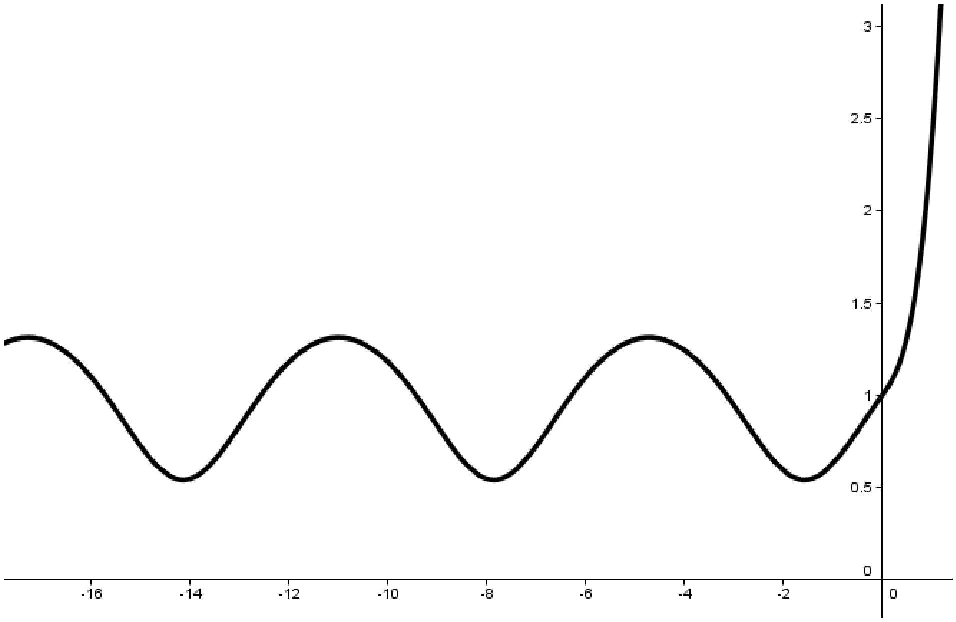
Por tanto, para que la función sea derivable en $x=0$ se tiene que verificar que $a=\dfrac{1}{e}$ y $b=1$ y la función es:

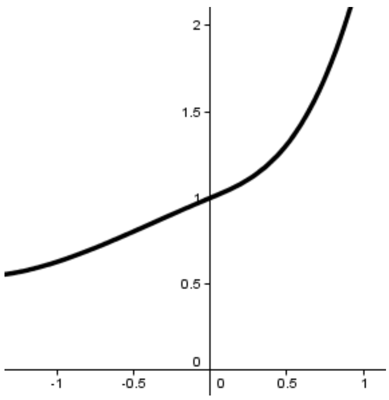
$$f(x)=\begin{cases}\ln(e+\operatorname{sen}x) & \text{si} \quad x<0\\ x^3+\dfrac{1}{e}x+1 & \text{si} \quad x\geq 0\end{cases}$$

Aplicando la definición de las derivadas laterales

$$\left.\begin{array}{l} f'_-(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\ln(e+\operatorname{sen}x) - f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\ln(e+\operatorname{sen}x)-1}{x} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\dfrac{\cos x}{e+\operatorname{sen}x}}{1} = \dfrac{1}{e} \\ f'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^3+ax+1-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^3+ax+1-1}{x} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{3x^2+a}{1} = a \end{array}\right\} \Rightarrow a = \frac{1}{e}$$

Es decir que $f'(0) = \frac{1}{e}$. La gráfica de la función $f(x)$ para esos valores de a y b es:





b) Según el apartado a) la derivada de la función $f(x)$ es:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x}{e+\operatorname{sen}x} & \text{si } x<0 \\ \dfrac{1}{e} & \text{si } x=0 \\ 3x^2+\dfrac{1}{e} & \text{si } x>0 \end{cases} \quad \text{ó} \quad f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x}{e+\operatorname{sen}x} & \text{si } x<0 \\ 3x^2+\dfrac{1}{e} & \text{si } x\geq 0 \end{cases} \quad \text{ó} \quad f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x}{e+\operatorname{sen}x} & \text{si } x\leq 0 \\ 3x^2+\dfrac{1}{e} & \text{si } x>0 \end{cases}$$

c) La función $f'(x)$ es continua en $x=0$, ya que se verifica:

a) $f'(0)=3\cdot 0^2+\frac{1}{e}=\frac{1}{e}$

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\cos x}{e+\operatorname{sen} x}=\frac{1}{e} \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\left(3x^2+\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f'(x)=\frac{1}{e}$

<u>Derivabilidad en $x=0$</u>

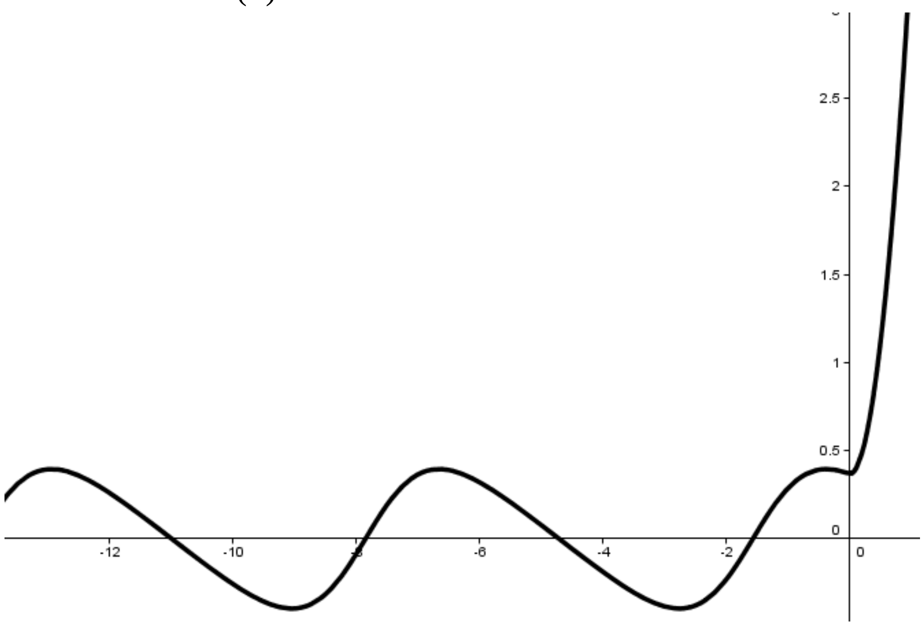
Calculamos $f''(x)$ para $x\neq 0$. $f''(x)=\begin{cases}\dfrac{-e\cdot\operatorname{sen} x-\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x}{(e+\operatorname{sen} x)^2} & \text{si } x<0 \\ 6x & \text{si } x>0\end{cases}$

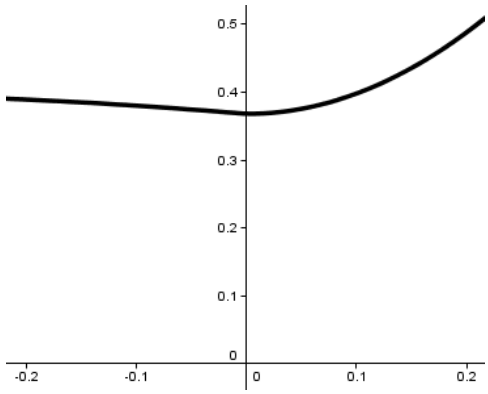
Como $f'(x)$ es continua en $x=0$, aplicando la tabla de derivadas tenemos:

$\left.\begin{array}{l} f''_-(0)=\dfrac{-e\cdot\operatorname{sen}0-\operatorname{sen}^2 0-\cos^2 0}{(e+\operatorname{sen}0)^2}=-\dfrac{1}{e^2} \\ f''_+(0)=6\cdot 0=0\end{array}\right\}$

Como $f''_-(0)\neq f''_+(0) \Rightarrow$ No existe $f''(0)$ lo que significa que la función $f''(x)$ no es derivable en $x=0$.

La gráfica de la función $f'(x)$ es:





Ejemplo 6

Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2+mx+1 & \text{si } x\le 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x>0 \end{cases}$ **estudiar su continuidad y derivabilidad en el intervalo** $[-3,-1]$**.**

Continuidad en $x=0$

Para que la función sea continua, los límites laterales tienen que coincidir.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+mx+1)=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{1+x}}{1}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=1 \qquad f(0)=1$$

Como la función $g(x)=x^2+mx+1$ es continua $\forall x<0$ (por ser polinómica) y la función $g(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ es continua $\forall x>0$ se verifica que la función $f(x)$ es continua $\forall x\in R$.

Derivabilidad en $x=0$

Para que la función sea derivable en $x=0$, las derivadas laterales en dicho punto tienen que coincidir. Aplicando la tabla de derivadas (ya que la función es continua en $x=0$)

La derivada de la función $f(x)$ en $x\neq 0$ es: $f'(x)=\begin{cases} 2x+m & \text{si } x<0 \\ \dfrac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2} & \text{si } x>0 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} f'_-(0)=m \\ f'_+(0)=\dfrac{0}{0} \end{array}\right\}$$

Como al calcular la derivada lateral por la derecha se presenta una indeterminación, no tenemos más alternativa que aplicar la definición de derivada lateral en un punto.

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\ln(1+x)-x}{x}}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\frac{0}{0}=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-1}{(1+x)^2}}{2}=-0'5$$

Como se tiene que verificar que $f'_-(0)=f'_+(0) \Rightarrow m=-0'5$, luego $f'(0)=-0'5$

$$f(x)=\begin{cases} x^2-0'5x+1 & \text{si} \quad x\le 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si} \quad x>0 \end{cases} \qquad f'(x)=\begin{cases} 2x-0'5 & \text{si} \quad x\le 0 \\ \dfrac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

Como no hay ningún punto de discontinuidad y las dos funciones son derivables en sus intervalos respectivos se verifica que $f(x)$ es derivable $\forall x\in R$.

Ejemplo 7

Sea la función definida por $\mathbf{f(x)=\begin{cases} x^2+2x & \text{si} \quad x<0 \\ ax^3-\frac{3}{2}x^2+bx+c & \text{si} \quad 0\le x\le 2 \\ -x^2+d(x-1) & \text{si} \quad x>2 \end{cases}}$

Halla razonadamente los valores de a, b, c y d para que la función sea continua y derivable para todo x real.

Continuidad en $x=0$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^-}(x^2+2x)=0 \\ &\lim_{x\to 0^+}\left(ax^3-\frac{3}{2}x^2+bx+c\right)=c \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad c=0$$

Continuidad en $x=2$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 2^-}\left(ax^3-\frac{3}{2}x^2+bx\right)=8a-12+2b \\ &\lim_{x\to 2^+}\left[-x^2+d(x-1)\right]=-4+d \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad 8a-6+2b=-4+d \quad \rightarrow \quad 8a+2b-d=2$$

Derivabilidad en $x=0$ y $x=2$

La derivada de la función $f(x)$ si $x\ne 0$ y $x\ne 2$ es:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+2 & \text{si} \quad x<0 \\ 3ax^2-3x+b & \text{si} \quad 0<x<2 \\ -2x+d & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} f'_-(0)=2 \\ f'_+(0)=b \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad b=2 \qquad\qquad \left.\begin{aligned} f'_-(2)=12a-6+b \\ f'_+(2)=-4+d \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad 12a-4=-4+d$$

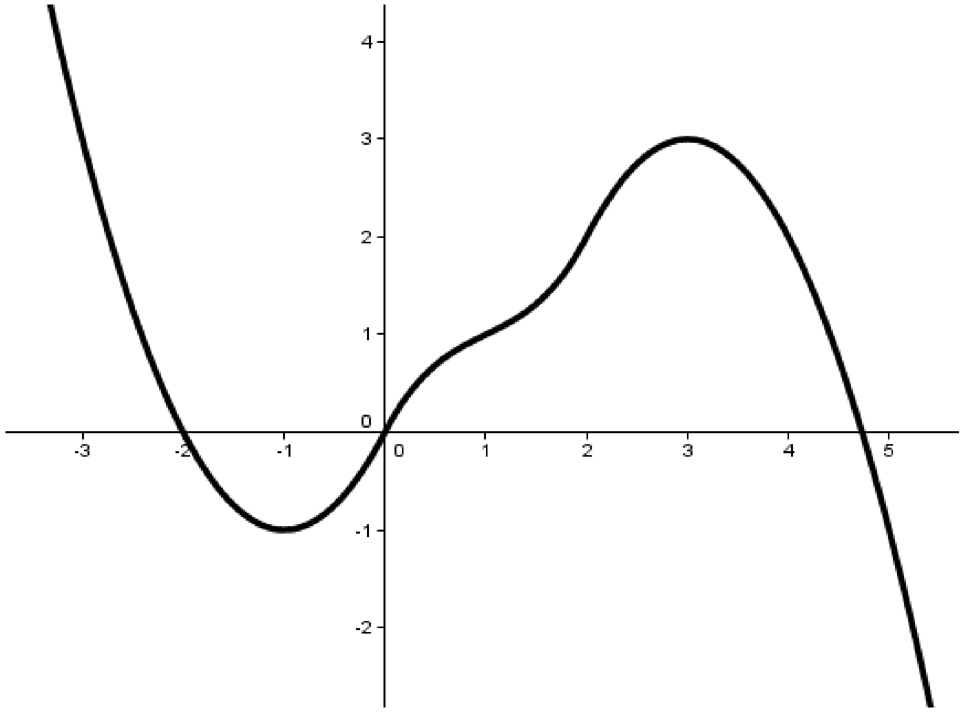
Resolviendo el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 8a+2b-d=2 \\ 12a=d \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 8a-d=-2 \\ 12a=d \end{array}\right\} \rightarrow 8a-12a=-2 \Rightarrow a=\frac{1}{2} \Rightarrow d=6$$

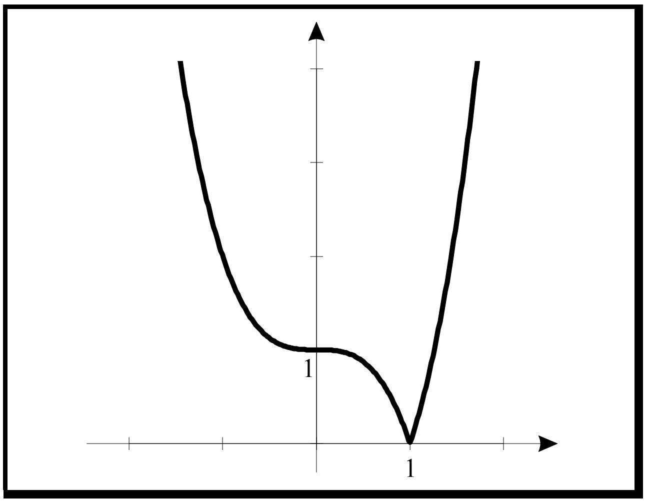
$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x & \text{si} \quad x<0 \\ \frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x & \text{si} \quad 0\le x\le 2 \\ -x^2+6x-6 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+2 & \text{si} \quad x<0 \\ \frac{3}{2}x^2-3x+2 & \text{si} \quad 0\le x\le 2 \\ -2x+6 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

La gráfica de la función $f(x)$ es:



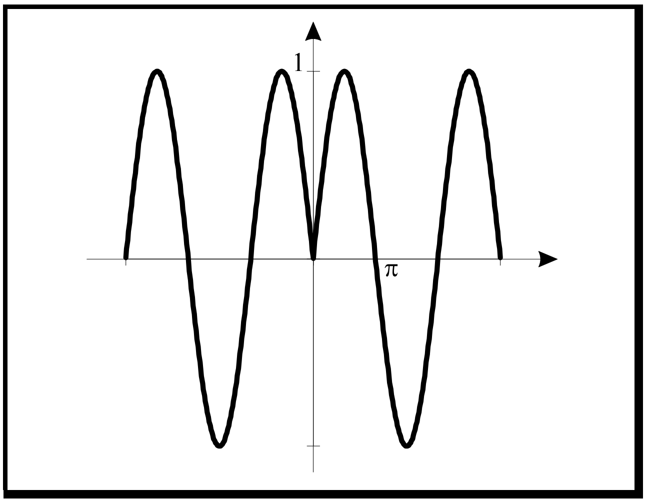
Estudio de la derivabilidad de algunas funciones a través de sus gráficas



La gráfica corresponde a la función

$$\mathbf{y = |x^3 - 1|}$$

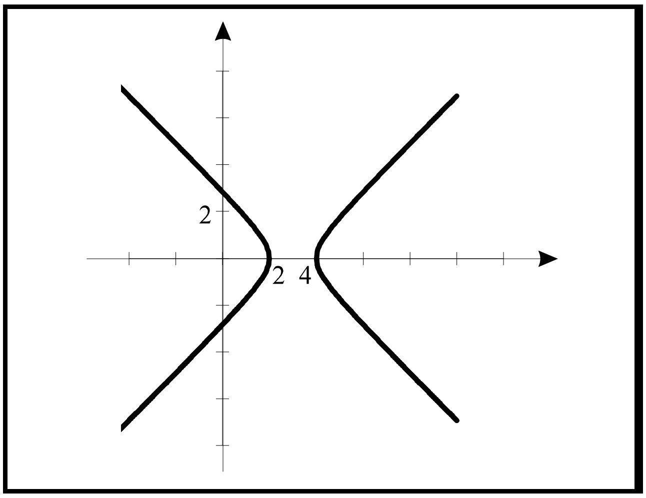
No es derivable en $\mathbf{x = 1}$ (punto anguloso), pero sí es continua en dicho punto.



La gráfica corresponde a la función

$$\mathbf{y = sen\ |x|}$$

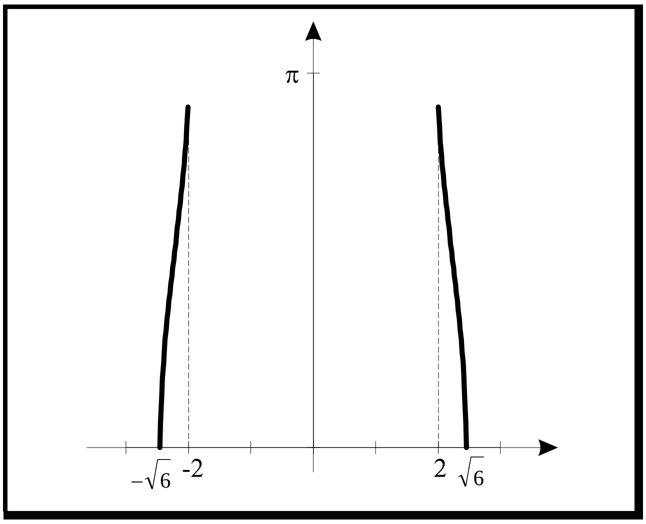
No es derivable en $\mathbf{x = 0}$ (punto anguloso), pero sí es continua en dicho punto.



La gráfica corresponde a la función

$$\mathbf{f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8}}$$

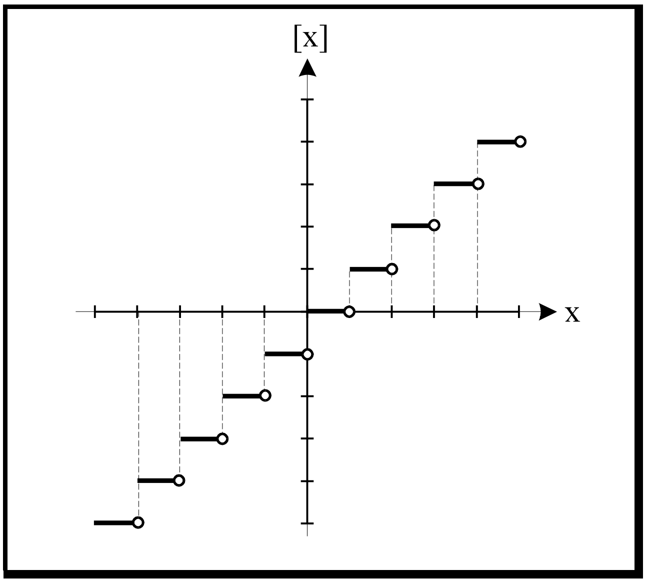
No es derivable $\forall \mathbf{x} \in [\mathbf{2,4}]$



La gráfica corresponde a la función

$$\mathbf{y = arccos\left(x^2 - 5\right)}$$

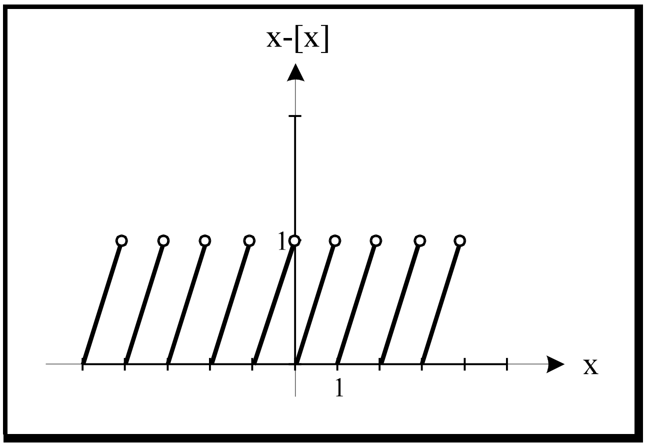
Es derivable $\forall \mathbf{x} \in \left]-\sqrt{6}\,,-2\right[\cup \left]2\,,\sqrt{6}\right[$



La gráfica corresponde a la función **parte entera de x**

$$\mathbf{y = Ent\,(x) = \left[x\right]}$$

$\mathbf{y' = 0}$ **salvo para** $\mathbf{x \in Z}$ **que son los puntos en los que no es derivable ni continua**



La gráfica corresponde a la función **parte decimal de x.**

$$\mathbf{y = x - \left[x\right]}$$

$\mathbf{y' = 1}$ **salvo para** $\mathbf{x \in Z}$