Problema 1

¿Qué variación experimenta el área de un círculo cuando su radio aumenta en 2 cm.? ¿Qué variación experimenta la longitud de una circunferencia cuando su radio disminuye en 1 cm.?

$$\text{Círculo} \;\rightarrow\; \left.\begin{array}{l} S = \pi \cdot R^2 \\ S' = \pi \cdot (R+2)^2 \end{array}\right\} \; S' - S = \pi \cdot R^2 + 4\pi \cdot R + 4\pi - \pi \cdot R^2 = 4\pi \cdot R + 4\pi = 4\pi \cdot (R+1)$$

$$\text{Circunferencia} \;\rightarrow\; \left.\begin{array}{l} L = 2\pi R \\ L' = 2\pi (R-1) \end{array}\right\} \; L' - L = 2\pi \cdot (R-1) - 2\pi R = 2\pi R - 2\pi - 2\pi R = -2\pi$$

Problema 2

Debido a unas pésimas condiciones ambientales, una colonia de 1 millón de bacterias no comienza su reproducción hasta pasados dos meses. La función que representa la población de la colonia al variar el tiempo (expresado en meses) viene dada por:

$$\mathbf{f(t)} = \begin{cases} \mathbf{10^6} & \mathbf{0 \le t \le 2} \\ \mathbf{10^6 \cdot e^{t-2}} & \mathbf{t > 2} \end{cases}$$

a) Calcula la tasa de variación media de la población en los intervalos $[0,2]$ y $[0,4]$.

b) Calcula la tasa de variación instantánea en $t = 4$, comparándola con la última tasa de variación media obtenida. Justificar los resultados obtenidos.

a) $T.V.M.[0,2] = \dfrac{f(2) - f(0)}{2-0} = \dfrac{10^6 - 10^6}{2} = 0$

$$T.V.M.[0,4] = \frac{f(4) - f(0)}{4-0} = \frac{10^6 \cdot e^2 - 10^6}{4} = 1'59726 \cdot 10^6$$

b) La tasa de variación instantánea en $t = 4$ es:

$$f'(t) = 10^6 \cdot e^{t-2} \;\rightarrow\; f'(4) = 10^6 \cdot e^{4-2} = 7'3890561 \cdot 10^6$$

Se observa que en $[0,2]$ no hubo variación, y así la tasa de variación es cero.

En $[0,4]$ la tasa de variación es grande por aumentar la función exponencialmente. La tasa instantánea tiene también un crecimiento exponencial. Como se toma en el punto final de $[2,4]$ es apreciablemente mayor que la tasa media $[0,4]$.

Problema 3

Calcular b para que la tasa de variación media de la función $f(x)=\ln(x+b)$ en el intervalo $[0,2]$ valga $\ln 2$. Calcular, a continuación, la tasa de variación instantánea en los extremos de dicho intervalo.

$$T.V.M.[0,2]=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{\ln(2+b)-\ln b}{2}=\ln 2 \Rightarrow \ln\frac{2+b}{b}=\ln 2^2 \Rightarrow \frac{2+b}{b}=4 \to b=\frac{2}{3}$$

$$f(x)=\ln\left(x+\frac{2}{3}\right) \to f'(x)=\frac{1}{x+\frac{2}{3}} \to f'(0)=\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2} \to f'(2)=\frac{1}{2+\frac{2}{3}}=\frac{3}{8}$$

Problema 4

Si la demanda de cortes de pelo viene expresada por la función $c(p)=100-p^2$, donde p indica el precio en cientos de pesetas, calcula:

a) La tasa de variación media de la demanda cuando el precio pase de 700 pts a 900 pts.

b) La variación instantánea para el precio de 700 pts.

a)

$$T.V.M.[700{,}900]=\frac{c(900)-c(700)}{900-700}=\frac{100-900^2-\left(100-700^2\right)}{200}=\frac{-320.000}{200}=-1.600$$

lo que indica que la demanda disminuirá en 16 cortes de pelo por cada incremento de 100 pts en el precio.

b) $c'(p)=-2p \quad \to \quad c'(700)=-1.400$

es decir que para un mínimo aumento desde 700 pts la disminución será de 14 cortes de pelo.

Problema 5

En el ministerio de Sanidad se ha calculado que tras la aparición de una determinada enfermedad contagiosa el número de personas atacadas cada día por dicha enfermedad viene expresado por la función $p(d)=33d^2-d^3$, siendo d el número de días, desde el primer caso.

a) ¿A qué velocidad de propagación se está extendiendo en el día 10º?

b) ¿Cuándo se estará propagando a razón de 120 personas por día?

c) ¿Cuánto tiempo tardará hasta que deje de propagarse?

a) $p'(d) = 66d - 3d^2 \quad \rightarrow \quad p'(10) = 660 - 300 = 360$ personas por día

b) $p'(d) = 66d - 3d^2 = 120 \quad \rightarrow \quad 3d^2 - 66d + 120 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} d = 2 \\ d = 20 \end{cases}$

La enfermedad se propaga a 120 personas por día en los días 2º y 20º

c) $p'(d) = 0 \quad \rightarrow \quad 3d^2 - 66d = 0 \quad \rightarrow \quad 3d(d-22) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} d = 0 \\ d = 22 \end{cases}$

Es decir, a los 22 días dejará de propagarse. La enfermedad habrá desaparecido a los 33 días: $p(33) = 0$

Problema 6

Un objeto desciende en caída libre desde una altura de 100 m, siendo su altura en el instante t, $s(t) = 100 - 5t^2$.

a) Halla su velocidad media entre $t = 1$ y $t = 2seg$.

b) Determina la expresión que da su velocidad y su aceleración en el instante t. ¿Cuánto valen pata $t = 1$ y $t = 2seg$?

a) $v_{media} = \dfrac{s(2) - s(1)}{2 - 1} = \dfrac{80 - 95}{1} = -15 \dfrac{m}{seg}$

b) $v(t) = s'(t) = -10t \qquad a(t) = v'(t) = s''(t) = -10 \dfrac{m}{sg^2}$

$v(1) = -10 \qquad v(2) = -20 \qquad a(1) = -10 \qquad a(2) = -10$

Problema 7

La temperatura de un alimento, (en ºC), dentro de un frigorífico, viene dada por la fórmula $T(t) = 8 \cdot \left(\dfrac{2t^2 + t + 2}{5t^2 + 2t + 1} \right)$ donde t mide el tiempo en horas. Halla:

a) La temperatura en el momento de meterlo en el frigorífico.

b) La tasa de variación media entre la 1ª y 3ª horas.

c) La variación instantánea en $t = 1$ y $t = 3$.

a) $T(0) = 16°C$

b) $TVM[1,3] = \dfrac{T(3) - T(1)}{3-1} = \dfrac{3'54 - 5}{3-1} = -0'73$

Significa que se enfría 0'73 ºC cada hora (entre la 1ª y 3ª horas).

c) $T'(t) = 8 \cdot \left(\dfrac{-t^2 - 16t - 3}{(5t^2 + 2t + 1)^2} \right)$ Si $\begin{cases} t = 1 \Rightarrow T'(1) = -2'5 \\ t = 3 \Rightarrow T'(3) = -0'178 \end{cases}$

Esto significa que en el instante $t = 1$ se está enfriando a razón de $2'5\ °C/h$; y a razón de $0'178\ °C/h$ en el instante $t = 3$. Observa que a medida que está más frío la tasa de enfriamiento decrece, teniendo a $16/5 = 3'2\ °C$ cuando el tiempo de permanencia en el frigorífico se hace muy grande.

Problema 8

Una población de 300 bacterias se introduce en un cultivo. Si su número crece según la expresión $n(t) = 300 \cdot (1 + \ln(t^2 + 1)$, siendo t el tiempo en horas. Calcula:

a) El número y la tasa de crecimiento de las bacterias al cabo de 5 horas.

b) El instante en el que la velocidad de crecimiento es de 300 bacterias/hora.

a) $n(5) = 300 \cdot (1 + \ln 26) = 1.277$

La tasa de crecimiento es $n'(t) = \dfrac{600t}{t^2 + 1} \rightarrow n'(5) = 115'38$ bac./hora

b) Si $n'(t) = 300 \Rightarrow \dfrac{600t}{t^2 + 1} = 300 \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow t = 1$

Problema 9

Un líquido caliente sigue una ley exponencial, con exponente negativo, cuando se enfría hasta la temperatura ambiente. Es la ley de enfriamiento de Newton. Supongamos que en un cierto caso un líquido inicialmente a 70º se enfría hasta los 20 º según la función: $T(t) = 20 + 50 \cdot e^{-0'1t}$ donde T es la temperatura del líquido al cabo de t minutos de enfriamiento.

a) Calcula la velocidad de enfriamiento, a los 12 minutos de iniciarse éste.

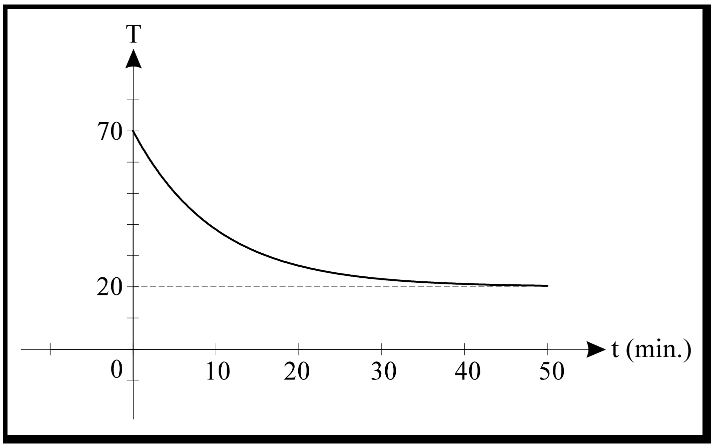
b) ¿En qué momento el líquido perderá temperatura a razón de medio grado por minuto?

a) En este caso concreto, la derivada mide la variación de temperatura por unidad de tiempo, es decir, la velocidad a la que el líquido cambia su temperatura.

Si derivamos tenemos:

$$T'(t) = -5e^{-0'1t}$$

El signo negativo de la derivada confirma que la temperatura es siempre decreciente, como corresponde a un líquido enfriándose.



$T'(12) = -5 \cdot e^{-1'2} = -1'50^{\circ}/\text{min.}$

En el instante $t = 12$ min., el líquido está bajando su temperatura a razón de grado y medio por minuto.

b) $-0'5 = -5 \cdot e^{-0'1t} \quad \rightarrow \quad e^{-0'1t} = \dfrac{0'5}{5} = 0'1 \quad \rightarrow \quad -0'1t \cdot \ln e = \ln 0'1 \quad \rightarrow \quad t = \dfrac{\ln 0'1}{-0'1} = 23\,\text{min.}$

Hay que advertir que el valor del coeficiente de t, que nosotros hemos supuesto 0'1, depende de la naturaleza del líquido, forma y material del recipiente, etc.

Problema 10

Derivar las siguientes funciones:

a) $y = e^{-3x}$ **b)** $y = \sqrt{x-5}$ **c)** $y = 2tg(3x-2)$ **d)** $y = \cos e^{x}$ **e)** $y = 5sen\dfrac{x}{2}$ **f)** $y = \sqrt[4]{3x}$

g) $y = \ln(senx)$ **h)** $y = tg\dfrac{3}{x}$ **i)** $f(x) = e^{3x}$ **j)** $y = (\ln x)^2$ **k)** $y = \ln x^2$ **l)** $y = sen(\cos x)$

m) $f(t) = \cos\left(\dfrac{t+8}{3}\right)$ **n)** $f(t) = \dfrac{sen(6t)}{3}$ **o)** $f(t) = e^{t^2}$ **p)** $f(t) = \ln\left(\dfrac{1}{t}\right)$ **q)** $f(x) = 8tg(xe^{x})$

a) $y' = -3 \cdot e^{-3x}$ b) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x-5}}$ c) $y' = 2 \cdot \dfrac{1}{\cos^2(3x-2)} \cdot 3 = \dfrac{6}{\cos^2(3x-2)}$

d) $y' = -sen(e^{x}) \cdot e^{x} = -e^{x} \cdot sen(e^{x})$ e) $y' = 5 \cdot \cos\dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2} \cdot \cos\dfrac{x}{2}$

f) $y' = \dfrac{3}{4\cdot\sqrt[4]{(3x)^3}}$ g) $y' = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\cdot\cos x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{cotg} x$ h) $y' = \dfrac{1}{\cos^2\frac{3}{x}}\cdot\left(\dfrac{-3}{x^2}\right) = \dfrac{-3}{x^2\cdot\cos^2\frac{3}{x}}$

i) $f'(x) = e^{3x}\cdot 3 = 3e^{3x}$ j) $y' = 2\ln x\cdot\dfrac{1}{x} = \dfrac{2\ln x}{x}$

k) $y' = \dfrac{1}{x^2}\cdot 2x = \dfrac{2}{x}$ l) $y' = \cos(\cos x)\cdot(-\operatorname{sen} x) = -\operatorname{sen} x\cdot\cos(\cos x)$

m) $f'(t) = -\operatorname{sen}\dfrac{t+8}{3}\cdot\dfrac{1}{3} = -\dfrac{1}{3}\cdot\operatorname{sen}\dfrac{t+8}{3}$ n) $f'(t) = \dfrac{1}{3}\cdot\cos(6t)\cdot 6 = 2\cos(6t)$

o) $f'(t) = e^{t^2}\cdot 2t = 2t\cdot e^{t^2}$ p) $f'(t) = \dfrac{1}{\frac{1}{t}}\cdot\left(-\dfrac{1}{t^2}\right) = -\dfrac{1}{t}$

q) $f'(x) = 8\cdot\dfrac{1}{\cos^2(xe^x)}\cdot\left(e^x + x\cdot e^x\right) = \dfrac{8e^x + 8xe^x}{\cos^2\left(xe^x\right)}$

Problema 11

Derivar las siguientes funciones:

a) $y = \ln\left(\cos x^3\right)$ **b)** $y = \dfrac{\operatorname{sen}^3(6x-1)}{8}$ **c)** $y = \dfrac{x}{2} + \sqrt[3]{3x^2+5}$ **d)** $y = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$

e) $y = \dfrac{1-e^x}{1+e^x}$ **f)** $f(x) = x\cdot\operatorname{arctg} x$ **g)** $f(x) = \ln\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$ **h)** $y = \operatorname{sen}^2 x\cdot\operatorname{sen} x^2$

i) $f(x) = \sqrt{x}\cdot\left(x^3 - \sqrt{x} + 1\right)$ **j)** $y = \left(\sqrt[3]{x} + 2x\right)\bullet\left(1 + \sqrt[3]{x^2} + 3x\right)$ **k)** $y = \dfrac{1-x^3}{\sqrt{\pi}}$ **l)** $f(x) = \dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$

a) $y' = \dfrac{1}{\cos x^3}\cdot\left(-\operatorname{sen} x^3\right)\cdot 3x^2 = \dfrac{-3x^2\operatorname{sen} x^3}{\cos x^3} = -3x^2\cdot\operatorname{tg} x^3$

b) $y' = \dfrac{1}{8}\cdot 3\operatorname{sen}^2(6x-1)\cdot\cos(6x-1)\cdot 6 = \dfrac{9}{4}\cdot\operatorname{sen}^2(6x-1)\cdot\cos(6x-1)$

c) $y' = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\cdot\left(3x^2+5\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot 6x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2x}{\sqrt[3]{\left(3x^2+5\right)^2}}$

d) $y' = 0$ (ya que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$) e) $y' = \dfrac{-e^x \cdot (1+e^x) - (1-e^x)\cdot e^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{-2e^x}{(1+e^x)^2}$

f) $f'(x) = \operatorname{arctg} x + x \cdot \dfrac{1}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + \dfrac{x}{1+x^2}$

g) $f(x) = \ln 1 - \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = 0 - \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

$$f'(x) = -\frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{-\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

h) $y' = 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x \cdot \operatorname{sen} x^2 + \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x^2 \cdot 2x$

i) $f(x) = \sqrt{x^7} - x + \sqrt{x}$ $\quad f'(x) = \dfrac{7x^6}{2\sqrt{x^7}} - 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{7x^3}{2\sqrt{x}} - 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

j) $y = \sqrt[3]{x} + 3x + 3\cdot\sqrt[3]{x^4} + 2\cdot\sqrt[3]{x^5} + 6x^2$ $\quad y' = \dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}} + 3 + 4\cdot\sqrt[3]{x} + \dfrac{10}{3}\cdot\sqrt[3]{x^2} + 12x$

k) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\left(-3x^2\right) = \dfrac{-3x^2}{\sqrt{\pi}}$ $\quad$ l) $f'(x) = \dfrac{-\frac{1}{x}\cdot(1+\ln x) - (1-\ln x)\cdot\frac{1}{x}}{(1+\ln x)^2} = \dfrac{-2}{x\cdot(1+\ln x)^2}$

Problema 12

a) $\mathbf{y = x \cdot \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2}}$ **b)** $\mathbf{y = \operatorname{arctg}[\ln(ax+b)]}$ **c)** $\mathbf{y = \ln \operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}}$

d) $\mathbf{y = \arccos\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}}$ **e)** $\mathbf{y = 2^{\frac{x}{\ln x}}}$ **f)** $\mathbf{y = x^3 - 3^x}$ **g)** $\mathbf{y = e^{\sqrt{x-1}}}$ **h)** $\mathbf{f(x) = e^{-x^2} \cdot \ln x}$

i) $\mathbf{y = x \cdot 10^{\sqrt{x}}}$ **j)** $\mathbf{y = \ln\dfrac{1-e^x}{e^x}}$

a) $y' = \operatorname{arcsen} x + x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x) = \operatorname{arcsen} x$

b) $y' = \dfrac{1}{1+[\ln(ax+b)]^2}\cdot\dfrac{1}{ax+b}\cdot a = \dfrac{a}{(ax+b)\cdot\left(1+[\ln(ax+b)]^2\right)}$

c) $y' = \dfrac{1}{\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}}\cdot\dfrac{1}{1+\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x = \dfrac{x}{\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}\cdot\left(2+x^2\right)\cdot\sqrt{1+x^2}}$

d) $y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{-2}{\sqrt{3-4x^2+4x-1}} = \dfrac{-2}{\sqrt{-4x^2+4x+2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{-2x^2+2x+1}}$

e) $y' = 2^{\frac{x}{\ln x}} \cdot \dfrac{\ln x - x \cdot \dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2} \cdot \ln 2 = \dfrac{2^{\frac{x}{\ln x}} \cdot \ln 2 \cdot (\ln x - 1)}{(\ln x)^2}$

f) $y' = 3x^2 - 3^x \cdot \ln 3$ g) $y' = e^{\sqrt{x-1}} \cdot \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{x-1}} = \dfrac{e^{\sqrt{x-1}}}{2 \cdot \sqrt{x-1}}$

h) $f'(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x) \cdot \ln x + e^{-x^2} \cdot \dfrac{1}{x} = -2x \cdot e^{-x^2} \cdot \ln x + \dfrac{e^{-x^2}}{x} = e^{-x^2} \cdot \left(-2x \cdot \ln x + \dfrac{1}{x}\right)$

i) $y' = 10^{\sqrt{x}} + x \cdot 10^{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln 10 = 10^{\sqrt{x}} \cdot \left(1 + \dfrac{x \cdot \ln 10}{2\sqrt{x}}\right)$

j) $y' = \dfrac{1}{\dfrac{1-e^x}{e^x}} \cdot \dfrac{-e^x \cdot e^x - (1-e^x)e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{-e^x}{(1-e^x) \cdot e^x} = \dfrac{-1}{1-e^x}$

Problema 13

a) $y = \operatorname{cosc}^2(1-x)$ b) $y = \cos^2(\operatorname{arcsec} x^2)$ c) $y = \operatorname{arcsen} \dfrac{x+1}{x-1}$ d) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{x+a}{1-ax}$

e) $y = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x^2) + \arccos(\cos x^2)$ f) $y = x \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \cdot \operatorname{arcsen} \dfrac{x}{a}$

g) $y = \dfrac{8x^4-3}{32} \cdot \operatorname{arcsen} x + \dfrac{2x^3+3x}{32} \cdot \sqrt{1-x^2}$ h) $y = e^x \cdot (x-1) \cdot [(x+1) \cdot \cos x + (x-1) \cdot \operatorname{sen} x]$

a) $y = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2(1-x)}$ $y' = \dfrac{-2\operatorname{sen}(1-x) \cdot \cos(1-x) \cdot (-1)}{\operatorname{sen}^4(1-x)} = \dfrac{2 \cdot \cos(1-x)}{\operatorname{sen}^3(1-x)}$

b) Podemos sustituir $\operatorname{arcsec} x^2$ por una expresión más familiar a través de los siguientes pasos:

$$\operatorname{arcsec} x^2 = z \rightarrow \sec z = x^2 \rightarrow \frac{1}{\cos z} = x^2 \rightarrow \cos z = \frac{1}{x^2} \rightarrow z = \arccos \frac{1}{x^2}$$

La función a derivar es entonces: $y = \cos^2\left(\arccos \dfrac{1}{x^2}\right) = \left(\cos\left(\arccos \dfrac{1}{x^2}\right)\right)^2 = \dfrac{1}{x^4}$

$$y' = \frac{-4x^3}{x^8} = -\frac{4}{x^5}$$

c) $$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{\sqrt{\frac{-4x}{(x-1)^2}} \bullet (x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)\cdot\sqrt{-x}}$$

d) $$y' = \frac{1}{1+\left(\frac{x+a}{1-ax}\right)^2} \cdot \frac{(1-ax)-(x+a)\cdot(-a)}{(1-ax)^2} = \frac{1+a^2}{(1-ax)^2+(x+a)^2} = \frac{1+a^2}{1+a^2x^2+x^2+a^2} =$$

$$\frac{1+a^2}{1+a^2+x^2(1+a^2)} = \frac{1+a^2}{(1+a^2)(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$$

e) $y = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x^2) + \arccos(\cos x^2) = x^2 + x^2 = 2x^2 \qquad y' = 4x$

f) $$y' = \sqrt{a^2-x^2} + x\cdot\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}\cdot(-2x) + a^2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\cdot\frac{1}{a} = \sqrt{a^2-x^2} - \frac{2x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}} +$$

$$\frac{a}{\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2}}} = \sqrt{a^2-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{2\left(a^2-x^2\right)}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sqrt{a^2-x^2}$$

g) $$y' = x^3\cdot\operatorname{arcsen} x + \frac{8x^4-3}{32}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{6x^2+3}{32}\cdot\sqrt{1-x^2} + \frac{2x^3+3x}{32}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x) =$$

$$x^3\cdot\operatorname{arcsen} x + \frac{8x^4-3}{32\sqrt{1-x^2}} + \frac{\left(6x^2+3\right)\cdot\sqrt{1-x^2}}{32} - \frac{4x^4+6x^2}{64\sqrt{1-x^2}} =$$

$$x^3\cdot\operatorname{arcsen} x + \frac{16x^4-6-4x^4-6x^2}{64\cdot\sqrt{1-x^2}} + \frac{\left(6x^2+3\right)\cdot\sqrt{1-x^2}}{32} =$$

$$x^3\cdot\operatorname{arcsen} x + \frac{3\left(2x^4-1-x^2\right)}{32\sqrt{1-x^2}} + \frac{3\left(2x^2+1\right)\cdot\sqrt{1-x^2}}{32}$$

h) $y = e^x\cdot\left(x^2-1\right)\cdot\cos x + e^x\cdot(x-1)^2\cdot\operatorname{sen} x$

$$y' = e^x \cdot \left(x^2 - 1\right) \cdot \cos x + e^x \cdot 2x \cdot \cos x + e^x \cdot \left(x^2 - 1\right) \cdot (-\operatorname{sen} x) + e^x \cdot (x-1)^2 \cdot \operatorname{sen} x +$$

$$e^x \cdot 2 \cdot (x-1) \cdot \operatorname{sen} x + e^x \cdot (x-1)^2 \cdot \cos x = 2x^2 \cdot e^x \cdot \cos x$$

Problema 14

aa) $\mathbf{y = \ln \sqrt{\frac{1+2senx}{1-2senx}}}$ **b)** $\mathbf{y = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(tg\frac{x}{2}\right) - \frac{cosx}{2\,sen^2 x}}$ **c)** $\mathbf{y = \ln \frac{1+tg\frac{x}{2}}{1-tg\frac{x}{2}}}$

d) $\mathbf{f(x) = \frac{1}{3} \cdot arcsen\frac{3+4senx}{4+3sen\,x}}$ **e)** $\mathbf{f(x) = \frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}}$

f) $\mathbf{y = \sqrt{x^2+1} - \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}$

a) $y = \ln\left(\dfrac{1+2\operatorname{sen} x}{1-2\operatorname{sen} x}\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2} \cdot \ln\dfrac{1+2\operatorname{sen} x}{1-2\operatorname{sen} x}$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1+2\operatorname{sen} x}{1-2\operatorname{sen} x}} \cdot \frac{2\cos x \cdot (1-2\operatorname{sen} x) - (1+2\operatorname{sen} x) \cdot (-2\cos x)}{(1-2\operatorname{sen} x)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-2\operatorname{sen} x}{1+2\operatorname{sen} x} \cdot \frac{4\cos x}{(1-2\operatorname{sen} x)^2} =$$

$$\frac{4\cos x}{2-8\operatorname{sen}^2 x} = \frac{2\cos x}{1-4\operatorname{sen}^2 x}$$

b) $y' = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{tg\frac{x}{2}} \cdot \dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \dfrac{1}{2} - \dfrac{-\operatorname{sen} x \cdot 2 \cdot \operatorname{sen}^2 x - \cos x \cdot (2 \cdot 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x)}{4 \cdot \operatorname{sen}^4 x} =$

$$\frac{1}{4 \cdot \operatorname{sen}\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}} + \frac{2\operatorname{sen}^3 x + 4\operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x}{4 \cdot \operatorname{sen}^4 x} = \frac{1}{2 \cdot \operatorname{sen} x} + \frac{\operatorname{sen}^2 x + 2 \cdot \cos^2 x}{2\operatorname{sen}^3 x} =$$

$$\frac{2\operatorname{sen}^2 x + 2\cos^2 x}{2\operatorname{sen}^3 x} = \frac{1}{\operatorname{sen}^3 x}$$

c) $$y' = \frac{1}{\dfrac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}} \cdot \frac{\dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \left(1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) - \left(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) \cdot \left(-\dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\right) \cdot \dfrac{1}{2}}{\left(1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^2} =$$

$$\frac{\dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{\cos x}$$

d) $$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{3+4\operatorname{sen} x}{4+3\operatorname{sen} x}\right)^2}} \cdot \frac{4\cos x \cdot (4+3\operatorname{sen} x) - (3+4\operatorname{sen} x)\cdot(3\cos x)}{(4+3\operatorname{sen} x)^2} =$$

$$\frac{16\cos x + 12\operatorname{sen} x \cdot \cos x - 9\cos x - 12\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{3 \cdot \sqrt{\dfrac{16+24\operatorname{sen} x + 9\operatorname{sen}^2 x - 9 - 24\operatorname{sen} x - 16\operatorname{sen}^2 x}{(4+3\operatorname{sen} x)^2}} \cdot (4+3\operatorname{sen} x)^2} =$$

$$\frac{7\cos x}{3\cdot\sqrt{7-7\operatorname{sen}^2 x}\cdot(4+3\operatorname{sen} x)} = \frac{7\cos x}{3\sqrt{7}\cos x \cdot (4+3\operatorname{sen} x)} = \frac{\sqrt{7}}{3(4+3\operatorname{sen} x)}$$

e) $$f'(x) = \frac{\left(a+\sqrt{a^2-x^2}\right) - x\cdot\left(\dfrac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}\cdot(-2x)\right)}{\left(a+\sqrt{a^2-x^2}\right)^2} = \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}}{\left(a+\sqrt{a^2-x^2}\right)^2} =$$

$$\frac{a\cdot\sqrt{a^2-x^2}+a^2-x^2+x^2}{\sqrt{a^2-x^2}\cdot\left(a+\sqrt{a^2-x^2}\right)^2} = \frac{a\cdot\left(\sqrt{a^2-x^2}+a\right)}{\sqrt{a^2-x^2}\cdot\left(a+\sqrt{a^2-x^2}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}\cdot\left(a+\sqrt{a^2-x^2}\right)}$$

f) $$y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x - \frac{1}{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}\cdot\left(\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1}{x}}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2}}}\cdot\left(-\frac{2}{x^3}\right)\right) =$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{\sqrt{x}}{2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(-\frac{2}{x^3}\right)\right)=$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(1+\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

Problema 15

Calcular las derivadas de las funciones

a) $\mathbf{y=sen^2\,x+sen\,x^2}$ **b)** $\mathbf{y=\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$ **c)** $\mathbf{y=x^2 arcsenx^2+3cosec^2(x+1)}$

a) $y'=2\,\mathrm{sen}\,x\cdot\cos x+\cos x^2\cdot 2x=2\cos x\cdot(\mathrm{sen}\,x+x\cdot\cos x)$

b) $y=\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ $\qquad y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}=\frac{-2}{2\left(1-x^2\right)}=\frac{-1}{1-x^2}$

c) $y=x^2\cdot\mathrm{arcsen}\,x^2+\frac{3}{\mathrm{sen}^2(x+1)}$

$$y'=2x\cdot\mathrm{arcsen}\,x^2+x^2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\cdot 2x+\frac{-3\cdot 2\,\mathrm{sen}(x+1)\cdot\cos(x+1)}{\mathrm{sen}^4(x+1)}=$$

$$2x\cdot\mathrm{arcsen}\,x^2+\frac{2x^3}{\sqrt{1-x^4}}-\frac{6\cdot\cos(x+1)}{\mathrm{sen}^3(x+1)}$$

Problema 16

Calcular las derivadas de las funciones

a) $\mathbf{y=sen^3\sqrt{tg^2\frac{2\pi^2+5}{3}}}$ **b)** $\mathbf{y=sen^3\,x\cdot\left(\sqrt{tg^2\frac{2\pi^2+5}{3}}\right)}$ **c) Calcular** $\mathbf{y''(0)}$ **en** $\mathbf{y=\frac{x^2-x}{e^x}}$

a) $y'=0$ por ser una constante

b) $y'=3\cdot\mathrm{sen}^2\,x\cdot\cos x\cdot\sqrt{\mathrm{tg}^2\frac{2\pi^2+5}{3}}+\mathrm{sen}^3\,x\cdot 0=3\cdot\mathrm{sen}^2\,x\cdot\cos x\cdot\sqrt{\mathrm{tg}^2\frac{2\pi^2+5}{3}}$

c) $y' = \dfrac{(2x-1)\cdot e^x - \left(x^2 - x\right)\cdot e^x}{\left(e^x\right)^2} = \dfrac{e^x\,(2x - 1 - x^2 + x)}{e^{2x}} = \dfrac{3x - 1 - x^2}{e^x}$

$$y'' = \dfrac{(3-2x)\cdot e^x - \left(3x - 1 - x^2\right)\cdot e^x}{\left(e^x\right)^2} = \dfrac{4 - 5x + x^2}{e^x} \quad \Rightarrow \quad y''(0) = 4$$

Problema 17

Calcular las derivadas de las funciones

a) $\mathbf{y = \ln\sqrt{\dfrac{e^{3x-5}}{\operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{3}}}}$ **b)** $\mathbf{y = \log\left(tg^2\,\dfrac{\sqrt{2x-1}}{3x-1}\right)}$ **c)** $\mathbf{y = \ln\left(\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{arcsen}^2 x\right)}$

d) $\mathbf{y = \log_a \dfrac{x^2 - 2\sqrt{x} + 3}{\operatorname{sen}^2 (3x+5)}}$ **e)** $\mathbf{y = \ln\left(\dfrac{10^{3x+1}}{2x+8}\right)^x}$ **f)** $\mathbf{y = \dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6}\cdot e^x \cdot \cos\dfrac{\pi}{6}\cdot e^x}{\sqrt{x^2+1}}}$

a) $y = \ln\sqrt{\dfrac{e^{3x+5}}{\operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{3}}} = \ln\left(\dfrac{e^{3x+5}}{\operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\cdot\ln\dfrac{e^{3x+5}}{\operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{3}}$

$$y' = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{e^{3x-5}}{\operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{3}}}\cdot\dfrac{e^{3x-5}\cdot 3\cdot\operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{3} - e^{3x-5}\cdot\cos\dfrac{\pi x}{3}\cdot\dfrac{\pi}{3}}{\operatorname{sen}^2\dfrac{\pi x}{3}} = \dfrac{e^{3x-5}\left(3\operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{3} - \cos\dfrac{\pi x}{3}\cdot\dfrac{\pi}{3}\right)}{2\left(\dfrac{e^{3x-5}}{\operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{3}}\right)\cdot\operatorname{sen}^2\dfrac{\pi x}{3}} =$$

$$\dfrac{e^{3x-5}\left(3\operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{3} - \cos\dfrac{\pi x}{3}\cdot\dfrac{\pi}{3}\right)}{2\,e^{3x-5}\cdot\operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{3}} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{\pi}{6}\cdot\operatorname{cotg}\dfrac{\pi x}{3}$$

b) $y = \log\left(tg\,\dfrac{\sqrt{2x-1}}{3x-1}\right)^2 = 2\log\left(tg\,\dfrac{\sqrt{2x-1}}{3x-1}\right)$

$$y' = 2\cdot\frac{1}{\mathrm{tg}\,\frac{\sqrt{2x-1}}{3x-1}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{\sqrt{2x-1}}{3x-1}}\cdot\frac{\frac{1}{2\sqrt{2x-1}}\cdot 2\cdot(3x-1)-3\cdot\sqrt{2x-1}}{(3x-1)^2}\cdot\log e =$$

$$\frac{2\cdot\left[3x-1-3(2x-1)\right]\cdot\log e}{\mathrm{tg}\,\frac{\sqrt{2x-1}}{3x-1}\cdot\cos^2\frac{\sqrt{2x-1}}{3x-1}\cdot(3x-1)^2\cdot\sqrt{2x-1}} = \frac{(-6x+4)\cdot\log e}{\mathrm{sen}\,\frac{\sqrt{2x-1}}{3x-1}\cdot\cos\frac{\sqrt{2x-1}}{3x-1}\cdot(3x-1)^2\cdot\sqrt{2x-1}}$$

c) $$y' = \frac{1}{\mathrm{sen}^2\,x+\mathrm{arcsen}^2\,x}\cdot\left(2\,\mathrm{sen}\,x\cdot\cos x + 2\,\mathrm{arcsen}\,x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) =$$

$$\frac{2\left[\mathrm{sen}\,x\cdot\cos x\cdot\sqrt{1-x^2}+\mathrm{arcsen}\,x\right]}{\left[\mathrm{sen}^2\,x+\mathrm{arcsen}^2\,x\right]\cdot\sqrt{1-x^2}} = \frac{\left(1-x^2\right)\cdot\mathrm{sen}\,2x+2\cdot\sqrt{1-x^2}\cdot\mathrm{arcsen}\,x}{\left(1-x^2\right)\cdot\left(\mathrm{sen}^2\,x+\mathrm{arcsen}^2\,x\right)}$$

d) $$y' = \frac{\left[\left(2x-2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\cdot\mathrm{sen}^2\,(3x+5)-\left(x^2-2\sqrt{x}+3\right)\cdot 2\,\mathrm{sen}\,(3x+5)\cdot\cos(3x+5)\cdot 3\right]\cdot\log_a e}{\left(\frac{x^2-2\sqrt{x}+3}{\mathrm{sen}^2\,(3x+5)}\right)\cdot\mathrm{sen}^4\,(3x+5)} =$$

$$\frac{\left[\left(2x-2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\cdot\mathrm{sen}^2\,(3x+5)-\left(x^2-2\sqrt{x}+3\right)\cdot 2\,\mathrm{sen}\,(3x+5)\cdot\cos(3x+5)\cdot 3\right]\cdot\log_a e}{\left(x^2-2\sqrt{x}+3\right)\cdot\mathrm{sen}^2\,(3x+5)} =$$

$$\left[\frac{2\cdot\sqrt{x^3}-1}{\sqrt{x}\cdot\left(x^2-2\sqrt{x}+3\right)}-6\,\mathrm{cot\,g}\,(3x+5)\right]\cdot\log_a e$$

e) $$y = \ln\left(\frac{10^{3x+1}}{2x+8}\right)^x = x\cdot\ln\left(\frac{10^{3x+1}}{2x+8}\right)$$

$$y' = \ln\left(\frac{10^{3x+1}}{2x+8}\right)+x\cdot\frac{1}{\frac{10^{3x+1}}{2x+8}}\cdot\frac{10^{3x+1}\cdot\ln 10\cdot 3\cdot(2x+8)-2\bullet 10^{3x+1}}{(2x+8)^2} =$$

$$\ln\left(\frac{10^{3x+1}}{2x+8}\right)+\frac{x\cdot\ln 10\cdot 3\cdot(2x+8)-2x}{(2x+8)}$$

f) $$y'=\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{e^{2x}\cdot 2\cdot\sqrt{x^2+1}-e^{2x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x}{x^2+1}=$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{e^{2x}\cdot 2\cdot\left(x^2+1\right)-x\cdot e^{2x}}{\left(x^2+1\right)\cdot\sqrt{x^2+1}}=\frac{\sqrt{3}\cdot e^{2x}\cdot\left[2x^2-x+2\right]}{4\cdot\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}$$

Problema 18

Calcular las derivadas de las funciones

a) $\mathbf{f(x)=arctg\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$ **b)** $\mathbf{f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ **c)** $\mathbf{f(x)=\sqrt{a^2-x^2}+a\cdot arcsen\left(\dfrac{x}{a}\right)}$

a) $$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}-x\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)}{1-x^2}=$$

$$\frac{1-x^2+x^2}{\left(1+\frac{x^2}{1-x^2}\right)\cdot\left(1-x^2\right)\cdot\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\frac{1}{1-x^2}\cdot\left(1-x^2\right)\cdot\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

b) $$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right)$$

c) $$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}\cdot(-2x)+a\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\cdot\frac{1}{a}=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2}}}=\frac{-x+a}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

Problema 19

¿En qué punto la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x) = x \cdot \ln x - x$ vale 0?

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x$$

Se debe de verificar que $f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \ln x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = e^0 = 1$

La ordenada es $f(1) = 1 \cdot \ln 1 - 1 = -1$ Luego el punto es $P(1,-1)$

Problema 20

Comprobar que no existe ningún valor de x que anule la primera derivada de la función $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$, y que para x = 0 se anula la segunda derivada.

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot (1+e^x) - e^x \cdot e^x}{\left(1+e^x\right)^2} = \frac{e^x \cdot \left(1+e^x - e^x\right)}{\left(1+e^x\right)^2} = \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^x \neq 0$$

$$f''(x) = \frac{e^x \cdot \left(1+e^x\right)^2 - e^x \cdot 2\left(1+e^x\right) \cdot e^x}{\left(1+e^x\right)^4} = \frac{e^x \cdot \left(1+e^x\right) - e^x \cdot 2e^x}{\left(1+e^x\right)^3} = \frac{e^x \cdot \left(1-e^x\right)}{\left(1+e^x\right)^3} = 0$$

$$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad e^x \cdot \left(1-e^x\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} e^x = 0 \quad \rightarrow \quad e^x \neq 0 \\ 1-e^x = 0 \quad \rightarrow \quad e^x = 1 \quad \rightarrow \quad x = 0 \end{cases}$$

Problema 21

Derivar las siguientes funciones

a) $f(x) = \left(e^x\right)^2$ **b)** $f(x) = e^{\left(e^x\right)}$ **c)** $f(x) = e^{e^{\left(e^x\right)}}$ **d)** $f(x) = e^{7x^2 + \operatorname{sen} x}$ **e)** $f(x) = e^{x^x}$

f) $g(x) = \left(e^x\right)^x$ **g)** $f(x) = e^{\ln\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}}$ **h)** $y = e^{\frac{1}{\ln x}}$

a) $f(x) = e^{2x} \qquad f'(x) = 2 \cdot e^{2x}$

b) $f'(x) = e^{e^x} \cdot e^x$

c) $f'(x) = e^{e^{\left(e^x\right)}} \cdot e^{\left(e^x\right)} \cdot e^x$

d) $f'(x) = e^{7x^2+\operatorname{sen} x} \cdot (14x + \cos x)$

e) Hacemos $h(x) = x^x$. Por lo tanto tendremos $f'(x) = e^{x^x} \cdot h'(x)$

$h'(x)$ lo calculamos tomando logaritmos neperianos $\ln[h(x)] = \ln x^x = x \cdot \ln x$

$$\frac{1}{h(x)} \cdot h'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 \quad \Rightarrow \quad h'(x) = (\ln x + 1) \cdot h(x) = (\ln x + 1) \cdot x^x$$

$$f'(x) = e^{x^x} \cdot (\ln x + 1) \cdot x^x$$

f) $g(x) = e^{x^2} \qquad g'(x) = e^{x^2} \cdot 2x$

g) $f(x) = e^{\ln\sqrt{\cos^2 x}} = e^{\ln \cos x} = \cos x \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = -\operatorname{sen} x$

h) $y' = e^{\frac{1}{\ln x}} \cdot \dfrac{-\dfrac{1}{x}}{\ln^2 x} = -\dfrac{e^{\frac{1}{\ln x}}}{x \cdot \ln^2 x}$

Problema 22

Deriva y simplifica al máximo las funciones:

a) $\mathbf{f(x) = \operatorname{arcsen}\sqrt{1-\cos^2 3x^5}}$ **b)** $\mathbf{f(x) = \cos^2 \dfrac{5\sqrt{x}}{e^x} + \operatorname{sen}^2\left(e^{-x}\sqrt{25x}\right)}$

a) Si nos fijamos bien, antes de derivar podemos obtener una expresión equivalente a la dada y mucho más simple.

$$f(x) = \operatorname{arcsen}\sqrt{\operatorname{sen}^2 3x^5} = \operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen} 3x^5\right) = 3x^5 \qquad f'(x) = 15x^4$$

b) $f(x) = \cos^2 \dfrac{5\sqrt{x}}{e^x} + \operatorname{sen}^2 \dfrac{\sqrt{25x}}{e^x} = \cos^2 \dfrac{5\sqrt{x}}{e^x} + \operatorname{sen}^2 \dfrac{5\sqrt{x}}{e^x} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = 0$

Problema 23

Aplicando la derivación logarítmica, calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$$\textbf{a) } y = x^{\sec x} \qquad \textbf{b) } y = \left(\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right)^{\sqrt{\frac{x}{1-x}}} \qquad \textbf{c) } f(x) = (\arccos x)^{tg\ (1-x)} \qquad \textbf{d) } y = \log_x\ tg\,x$$

a) $\ln y = \dfrac{1}{\cos x}\ln x = \dfrac{\ln x}{\cos x}$ $\qquad \dfrac{y'}{y} = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot\cos x - (-\operatorname{sen} x)\cdot \ln x}{\cos^2 x}$

$$y' = y\cdot\frac{\frac{1}{x}\cdot\cos x - (-\operatorname{sen} x)\cdot\ln x}{\cos^2 x} = x^{\sec x}\cdot\frac{\frac{1}{x}\cdot\cos x + \operatorname{sen} x\cdot\ln x}{\cos^2 x} = x^{\sec x}\cdot\left[\frac{1}{x\cdot\cos x} + \frac{\operatorname{sen} x\cdot\ln x}{\cos^2 x}\right]$$

b) $\ln y = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}\cdot\ln\left(\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}\right)$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{1-x}}}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}\cdot\ln\left(\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right) + \sqrt{\frac{x}{1-x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{x}{1-x}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{1-x}}}\cdot\frac{1}{(1-x)^2} =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{1-x}}}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}\cdot\ln\left(\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{1-x}}}\cdot\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{\ln\left(\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right)+1}{2\cdot\sqrt{\frac{x}{1-x}}\cdot(1-x)^2} \quad\Rightarrow$$

$$y' = y\cdot\frac{\ln\left(\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right)+1}{2\sqrt{\frac{x}{1-x}}\cdot(1-x)^2} = \left(\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right)^{\sqrt{\frac{x}{1-x}}}\cdot\frac{\ln\left(\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right)+1}{2\sqrt{\frac{x}{1-x}}\cdot(1-x)^2}$$

c) $\ln f(x) = tg\,(1-x)\cdot\ln(\arccos x)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\cos^2(1-x)}\cdot(-1)\cdot\ln(\arccos x) + tg\,(1-x)\cdot\frac{1}{\arccos x}\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x) = (\arccos x)^{tg\,(1-x)}\cdot\left[\frac{-\ln(\arccos x)}{\cos^2(1-x)} - \frac{tg\,(1-x)}{\arccos x\cdot\sqrt{1-x^2}}\right]$$

d)

Por derivación logarítmica

Aplicando la definición de logaritmo $x^y = \operatorname{tg} x$

Tomando logaritmos neperianos en los dos miembros tenemos: $\ln x^y = \ln \operatorname{tg} x \quad y \ln x = \ln \operatorname{tg} x$

Derivando implícitamente: $y' \cdot \ln x + y \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \qquad y' = \dfrac{\frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x} - \frac{y}{x}}{\ln x}$

$$y' = \dfrac{\frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x} - \frac{\log_x (\operatorname{tg} x)}{x}}{\ln x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x \cdot \ln x} - \frac{\log_x (\operatorname{tag} x)}{x \cdot \ln x}$$

Aplicando el cambio de base al logaritmo

$$y = \log_x (\operatorname{tg} x) = \frac{\ln (\operatorname{tg} x)}{\ln x}$$

$$y' = \dfrac{\frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \ln x - \frac{1}{x} \cdot \ln (\operatorname{tg} x)}{(\ln x)^2} = \frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x \cdot \ln x} - \frac{\ln (\operatorname{tg} x)}{x \cdot (\ln x)^2}$$

Problema 24

Calcula la derivada de la función $f(x) = \ln|x|$

$$f(x) = \ln|x| = \begin{cases} \ln x & \text{si} \quad x > 0 \\ \ln(-x) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} f'(x) = \frac{1}{x} & \text{si} \quad x > 0 \\ f'(x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Luego en todo caso $f'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 0$

Problema 25

Dadas las siguientes funciones, calcular: $f'(x)$; $f''(x)$; $f'(3)$

$$\mathbf{a)}\ f(x)=\frac{6x}{1+x^2}\qquad \mathbf{b)}\ f(x)=e^{x^2+7x}\qquad \mathbf{c)}\ f(x)=\frac{4^x}{x}$$

a) $f'(x)=\dfrac{6\cdot\left(1+x^2\right)-6x\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2}=\dfrac{6\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}\qquad f'(3)=-\dfrac{48}{100}=-0'48$

$$f''(x)=\frac{-12x\cdot\left(1+x^2\right)^2-\left(6-6x^2\right)\cdot 2\cdot\left(1+x^2\right)\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^4}=\frac{12x\cdot\left(x^2-3\right)}{\left(1+x^2\right)^3}$$

b) $f'(x)=e^{x^2+7x}\cdot(2x+7)\qquad f'(3)=e^{30}\cdot 13=1'389243\cdot 10^{14}$

$$f''(x)=e^{x^2+7x}\cdot(2x+7)^2+e^{x^2+7x}\cdot 2=e^{x^2+7x}\cdot\left(4x^2+28x+51\right)$$

c) $f'(x)=\dfrac{4^x\cdot\ln 4\cdot x-4^x}{x^2}\qquad f'(3)=\dfrac{64\cdot\ln 4\cdot 3-64}{9}=22'4630$

$$f''(x)=\frac{\left(4^x\cdot\ln^2 4\cdot x+4^x\cdot\ln 4-4^x\cdot\ln 4\right)\cdot x^2-2x\cdot\left(4^x\cdot\ln 4\cdot x-4^x\right)}{x^4}=$$

$$\frac{\left(4^x\cdot\ln^2 4\cdot x\right)\cdot x-2\cdot\left(4^x\cdot\ln 4\cdot x-4^x\right)}{x^3}=\frac{4^x\cdot\left(x^2\cdot\ln 4-2x\cdot\ln 4+1\right)}{x^3}$$

Problema 26

a) Comprobar que la función $y=2\operatorname{sen}2x+\cos 2x+2x$ verifica $y''+4y=8x$.

b) Comprobar que la función $y=\dfrac{1}{x}+2x^2$ verifica $x^3y''-x^2y'=3$

a) $y'=4\cos 2x-2\operatorname{sen}2x+2\qquad y''=-8\operatorname{sen}2x-4\cos 2x$

$$x^3-8\operatorname{sen}2x-4\cos 2x+4\cdot(2\operatorname{sen}2x+\cos 2x+2x)=$$
$$-8\operatorname{sen}2x-4\cos 2x+8\operatorname{sen}2x+4\cos 2x+8x=8x$$

b) $y' = -\dfrac{1}{x^2} + 4x \qquad y'' = \dfrac{2}{x^3} + 4$

$$x^3 \cdot \left(\frac{2}{x^3} + 4\right) - x^2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2} + 4x\right) = 2 + 4x^3 + 1 - 4x^3 = 3$$

Problema 27

a) Comprobar que la función $y = ax^3 + c$ verifica la ecuación $2y' - xy'' = 0$

b) Comprobar que la función $y = e^{3x} + e^{-x} - \dfrac{1}{3} \cdot e^{2x}$ verifica la ecuación $y'' - 2y' - 3y = e^{2x}$

a) $y' = 3ax^2 \qquad y'' = 6ax \qquad 2 \cdot 3ax^2 - x \cdot 6ax = 0$

b) $y' = 3e^{3x} - e^{-x} - \dfrac{2}{3}e^{2x} \qquad y'' = 9e^{3x} + e^{-x} - \dfrac{4}{3}e^{2x}$

$$9e^{3x} + e^{-x} - \frac{4}{3}e^{2x} - 2 \cdot \left(3e^{3x} - e^{-x} - \frac{2}{3}e^{2x}\right) - 3 \cdot \left(e^{3x} + e^{-x} - \frac{1}{3} \cdot e^{2x}\right) =$$

$$9e^{3x} + e^{-x} - \frac{4}{3}e^{2x} - 6e^{3x} + 2e^{-x} + \frac{4}{3}e^{2x} - 3e^{3x} - 3e^{-x} + e^{2x} = e^{2x}$$

Problema 28

En un cierto instante los móviles cuyas trayectorias siguen, respectivamente, las ecuaciones $s(t) = t^3 - 45t + 100$ y $e(t) = 3t^2 + 60t - 439$ están en el mismo lugar y con la misma velocidad. Di cuál es ese instante y los valores correspondientes del lugar, de la velocidad y de la aceleración de cada uno de ellos.

$s'(t) = 3t^2 - 45 \qquad e'(t) = 6t + 60 \qquad s'(t) = e'(t) \;\rightarrow\; 3t^2 - 45 = 6t + 60 \;\rightarrow\; 3t^2 - 6t - 105 = 0$

$$t^2 - 2t - 35 = 0 \;\Rightarrow\; t = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 140}}{2} = \frac{2 \pm 12}{2} \;\Rightarrow\; \begin{cases} t = 7 \\ t = -5 \end{cases}$$

$$t = 7 \;\Rightarrow\; \begin{cases} s(7) = e(7) = 128 \\ s'(t) = e'(7) = 102 \end{cases}$$

$$s''(t) = 6t \qquad e''(t) = 6 \qquad t = 7 \;\Rightarrow\; \begin{cases} s''(7) = 42 \\ e''(7) = 6 \end{cases}$$

Problema 29

En un cierto instante los móviles cuyas trayectorias siguen, respectivamente, las ecuaciones $s(t) = t^3 - 45t + 100$ y $e(t) = 3t^2 + 60t - 439$ están en el mismo lugar y con la misma velocidad. Di cuál es ese instante y los valores correspondientes del lugar, de la velocidad y de la aceleración de cada uno de ellos.

$$s'(t) = 3t^2 - 45 \qquad e'(t) = 6t + 60 \qquad s'(t) = e'(t) \quad \to \quad 3t^2 - 45 = 6t + 60 \quad \to \quad 3t^2 - 6t - 105 = 0$$

$$t^2 - 2t - 35 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 140}}{2} = \frac{2 \pm 12}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t = 7 \\ t = -3 \end{cases}$$

$$t = 7 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s(7) = e(7) = 128 \\ s'(t) = e'(7) = 102 \end{cases}$$

$$s''(t) = 6t \qquad e''(t) = 6 \qquad t = 7 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s''(7) = 42 \\ e''(7) = 6 \end{cases}$$

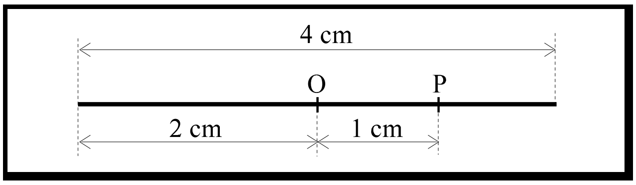
Problema 30

Una cierta población crece de acuerdo con la ecuación $y = 1 + 0'2 \cdot e^{0'1t}$ donde t es tiempo en meses e y es número de individuos en miles. Calcula la velocidad de crecimiento de la población al cabo de 24 meses.

$$y'(t) = 0'2 \cdot e^{0'1t} \cdot 0'1 \qquad y'(24) = 0'220463$$

Problema 31

Una partícula móvil recorre un segmento horizontal de 4 cm. de longitud con una frecuencia de 10 Hz.



a) Deduce la expresión de la elongación si se empieza a contar el tiempo en el instante en el que la partícula se halla en P, a 1 cm. de distancia a la derecha del punto de equilibrio O.

b) Halla la velocidad de la partícula al pasar por el punto P.

Movimiento armónico simple (M.A.S.) es el movimiento que tiene una partícula que recorre una trayectoria rectilínea en torno a un punto fijo situado en medio del segmento recorrido, de modo que su separación respecto a ese punto viene dada por la expresión:

$$x = A\cdot \text{sen}(\omega t+\theta) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x & \text{es la } \textbf{elongación} \text{ (o separación del punto)} \\ A & \text{es la } \textbf{amplitud} \text{ (o máxima elongación)} \\ \omega & \text{es la pulsación} \begin{cases} \dfrac{\omega}{2\pi} = f \text{ es la } \textbf{frecuencia} \\ \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{1}{f} = T \text{ es el } \textbf{período} \end{cases} \\ \theta & \text{es la correción de } \textbf{fase} \end{cases}$$

a) $x = A\cdot \text{sen}(\omega t+\theta) = A\cdot \text{sen}(2\pi f\cdot t+\theta) = 2\cdot \text{sen}(2\pi\cdot 10\cdot t+\theta)$

$x = 1\text{cm.}$ cuando $t = 0\text{seg}$, por tanto: $1 = 2\cdot \text{sen}(0+\theta) = 2\cdot \text{sen}\,\theta \Rightarrow \theta = \arcsen\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{6}$

Por tanto la expresión de la elongación es: $x = 2\,\text{sen}\left(20\pi t + \dfrac{\pi}{6}\right)$ cm.

b) La velocidad es: $v = \dfrac{de}{dt} = \dfrac{dx}{dt} = 2\cdot 20\pi\cdot \cos\left(20\pi t + \dfrac{\pi}{6}\right)$

$$v = 40\pi\cdot\sqrt{1-\text{sen}^2\left(20\pi t + \frac{\pi}{6}\right)} = 40\pi\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} = 20\pi\cdot\sqrt{4-x^2}$$

Al pasar por el punto P la elongación es 1 por tanto:

$$v = \pm 20\pi\cdot\sqrt{3}\ \frac{\text{cm.}}{\text{seg}}$$

Problema 32

a) Si $f(x) = \log_a x$, determina el valor de a con la condición de que $f'(2) = 0'25$.

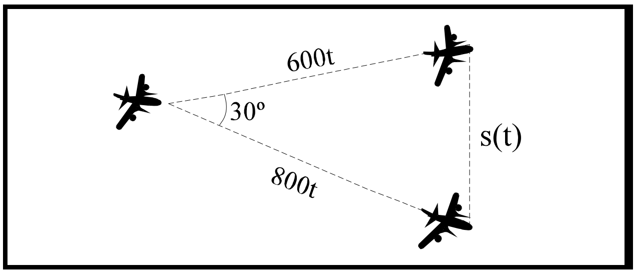
b) Halla la derivada de la función $f(x) = \log_x a$.

a) $f'(x) = \dfrac{1}{x}\cdot\log_a e = \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\ln e}{\ln a} = \dfrac{1}{x\cdot\ln a} \rightarrow f'(2) = 0'25 = \dfrac{1}{2\cdot\ln a} \rightarrow \ln a = \dfrac{1}{0'5} = 2 \Rightarrow a = e^2$

b) $f(x) = \log_x a = \dfrac{\ln a}{\ln x} \rightarrow f'(x) = \dfrac{-\ln a\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2 x} = -\dfrac{\ln a}{x\cdot\ln^2 x}$

Problema 33

Dos aviones parten de un mismo punto con velocidades de 600 y 800 Km/h. Sus trayectorias forman un ángulo de 30º. ¿A qué velocidad se separan?



Consideramos el origen de tiempos $(t=0)$ en el momento de partida de los aviones. Medimos el tiempo en horas. Llamamos $s(t)$ a la distancia que separa los aviones en el instante t. Por el teorema del coseno:

$$s(t)=\sqrt{(800t)^2+(600t)^2-2\cdot 800t\cdot 600t\cdot\cos 30^{\circ}}=410'63\cdot t$$

La velocidad de separación es la derivada de la distancia respecto al tiempo:

$$v=s'(t)=410'63\ \text{km}/\text{h}$$

Problema 34

De un petrolero accidentado se desprenden 500 l/s de crudo. La mancha de petróleo resultante tiene forma circular y un espesor medio de 3 mm. Calcula:

a) La velocidad con que aumenta el radio de la mancha.

b) La velocidad con que aumenta la superficie.

c) La velocidad con que aumenta el perímetro.

Medimos la longitud en metros y el tiempo en segundos, por tanto: $500\ \frac{l}{s}=0'5\ \frac{m^3}{s}$

El volumen de la mancha es $V(t)=0'5t\ m^3$. Si $r(t)$ es el radio de la mancha, tenemos:

$$0'5t=\pi[r(t)]^2\cdot 0'003,\ \text{luego: } r(t)=\sqrt{\frac{0'5t}{0'003\pi}}=7'28\sqrt{t}$$

a) La velocidad de crecimiento del radio es la derivada de $r(t)$ respecto al tiempo, es decir:

$$r'(t)=\frac{3'64}{\sqrt{t}}$$

b) La superficie de la mancha es: $S(t)=\pi[r(t)]^2=\dfrac{0'5t}{0'003}$. La velocidad de crecimiento de dicha superficie es por tanto:

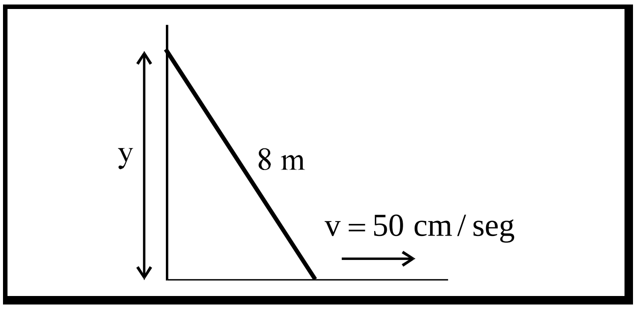
$$S'(t)=\frac{0'5}{0'003}\ \frac{m^2}{seg}$$

c) El perímetro mide $p(t)=2\pi r(t)=45'74\sqrt{t}$ m. La velocidad de crecimiento del perímetro es

$$p'(t)=\frac{22'87}{\sqrt{t}}\ \frac{m}{seg}$$

Problema 35

Una escalera de mano de 8 m. de longitud se apoya en el suelo y en una pared. El pie resbala a una velocidad de 50 cm./seg. Calcula la velocidad instantánea a la que desciende el extremo superior de la escalera en el momento en que el pie dista 3 m de la pared.



Medimos la longitud en cm. y el tiempo en seg.

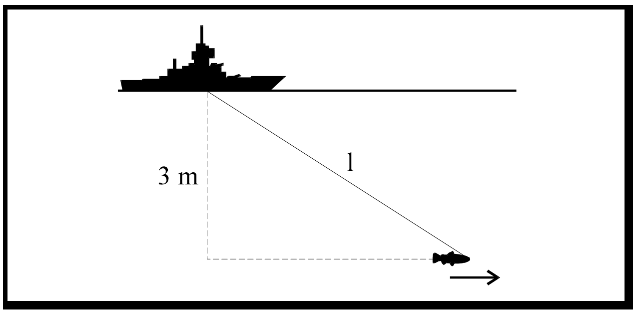
$$y^2+(50t)^2=800^2 \qquad y(t)=\sqrt{640.000-2.500t^2}$$

El pie de la escalera distará 3 m. de la pared cuando $v=\dfrac{e}{t}\ \rightarrow\ t=\dfrac{e}{v}=\dfrac{300}{50}=6\,seg$

$$y'(t)=\frac{-5000t}{2\sqrt{640.000-2.500t}}\ \rightarrow\ y'(6)=-20'22\ \frac{cm}{seg}$$

Problema 36

Un atún ha picado el anzuelo y huye con él en la boca, a una velocidad de 2 m/seg, en línea recta y a 3 m bajo la superficie del agua. ¿A qué velocidad se suelta el sedal en el carrete en el instante en que el atún dista 6 m del pescador?



Medimos la longitud en metros y el tiempo en segundos. El origen de tiempos se toma en el momento en que el atún está en la vertical del barco.

El tiempo que tarda el atún en recorrer los 6 m es: $e = v \cdot t \quad \to \quad 6 = 2t \quad \to \quad t = 3$ seg

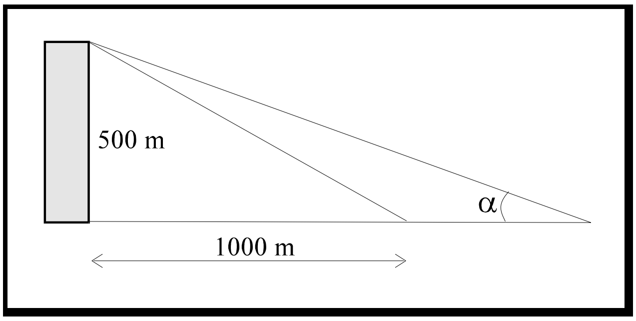
La longitud del sedal en el instante t es: $l(t) = \sqrt{3^2 + (2t)^2} = \sqrt{9 + 4t^2}$

La velocidad pedida es la derivada de la longitud del sedal con respecto al tiempo:

$$v(t) = l'(t) = \frac{8t}{2\sqrt{9+4t^2}} = \frac{4t}{\sqrt{9+4t^2}} \quad \to \quad v(3) = 1'78\ \frac{m}{seg}$$

Problema 37

Una torre está al final de una calle. Un hombre se dirige en automóvil hacia la torre a razón de 15 m/seg. Sabiendo que la torre tiene 500 m de altura, ¿con qué velocidad varía el ángulo del observador respecto de la cumbre de la torre cuando el observador se encuentra a 1000 m de la torre?



$$v = \frac{e}{t} \quad \to \quad 15 = \frac{e}{t} \quad \to \quad e = 15t$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{500}{15t} \quad \to \quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{500}{15t} \quad \to \quad \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\dfrac{-500 \bullet 15}{(15t)^2}}{1+\left(\dfrac{500}{15t}\right)^2} = \frac{-500 \cdot 15}{(15t)^2 + 500^2} = \frac{-300}{9t^2 + 10000}$$

$$x = 1000\,m \quad \to \quad t = \frac{1000}{15} = \frac{200}{3} \qquad \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{3}{500} = -0'006 \qquad v = 0'006\ \frac{rad}{seg}$$

Problema 38

La altura de un proyectil t segundos después de haber lanzado hacia arriba a partir del suelo y con una velocidad inicial $v_o\ \dfrac{m}{seg}$, está dada por la fórmula $f(t) = v_o t - 5t^2$.

a) Prueba que la velocidad media del proyectil durante el intervalo de tiempo de t a $t+h$ es $v_o - 10t - 25h\ \dfrac{m}{seg}$ y que la velocidad instantánea en el instante t es $v_o - 10t\ \dfrac{m}{seg}$.

b) Calcula (en función de v_o) el tiempo necesario para que la velocidad se anule.

c) ¿Cuál es la velocidad de regreso a la Tierra?

d) ¿Cuál debe ser la velocidad inicial del proyectil para que regrese a la Tierra al cabo de 1 seg?, ¿y al cabo de 10 seg?, ¿y al cabo de t seg?

e) Prueba que el proyectil se mueve con aceleración constante.

a) $v_M = \dfrac{f(t+h)-f(t)}{(t+h)-t} = \dfrac{v_o(t+h)-5(t+h)^2-\left[v_ot-5t^2\right]}{h} =$

$$\frac{v_ot+v_oh-5t^2-10th-5h^2-v_ot+5t^2}{h} = v_o-10t-5h\ \frac{m}{seg}$$

$$v_i = f'(t) = v_o - 10t\ \frac{m}{seg}$$

b) $f'(t)=0 \quad \to \quad v_o - 10t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{v_o}{10}$ seg

c) $-v_o$

d) $0=-v_o+10\cdot 1 \quad \to \quad v_o = 10\ \dfrac{m}{seg}$ $\qquad 0=-v_o+10\cdot 10 \quad \to \quad v_o = 100\ \dfrac{m}{seg}$

$$0=-v_o+10\cdot t \quad \to \quad v_o = 10t\ \frac{m}{seg}$$

e) $a = f''(t) = \dfrac{dv}{dt} = -10\ \dfrac{m}{seg^2}$

Problema 39

Se lanza un proyectil verticalmente desde el suelo a una velocidad de $v=50\ \dfrac{m}{seg}$. En un instante t su altura viene dada por $f(t)=50t-5t^2$ $\left(g=10\ \dfrac{m}{seg^2}\right)$. Halla:

a) El instante t en que deja de subir.

b) El tiempo que está moviéndose.

c) El punto más alto que alcanza.
d) La velocidad y la aceleración en el instante $t=3$ seg.

a) Deja de subir cuando la velocidad es cero.

$$f'(t) = 50 - 10t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 5\,seg$$

b) Dado que la trayectoria es una parábola y tarda en llegar al punto más alto 5 seg, el total invertido será de 10 seg.

c) El punto más alto lo alcanza a los 5 seg, por tanto $f(5) = 50 \cdot 5 - 5 \cdot 25 = 125$ m

d) La velocidad es $f'(t) = 50 - 10t \qquad f'(3) = 20\ \frac{m}{seg}$

La aceleración es $f''(t) = -10\ \frac{m}{seg^2}$

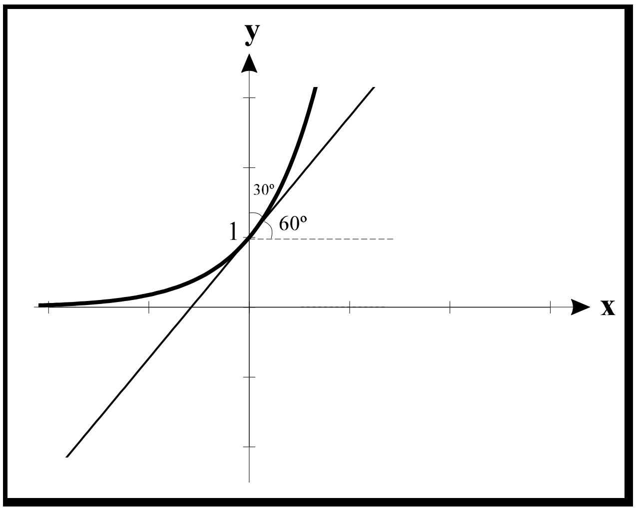
Problema 40

Determinar el valor de k para que la gráfica de la función $f(x) = e^{kx}$ corte al eje de ordenadas bajo un ángulo de 30º.

Si la gráfica de la función corta al eje de ordenadas bajo un ángulo de 30º significa que la tangente en el punto de corte, que es el $(0,1)$, forma 60º con el eje de abscisas.

$$f'(0) = tg\,60^\circ = \sqrt{3}$$

$$f'(x) = k \cdot e^{kx} \quad \rightarrow \quad f'(0) = k \cdot e^0 = k = \sqrt{3}$$



Problema 41

¿Cuánto tiene que valer la base de una función exponencial $y = a^x$ para que ésta sea tangente a la recta $y = 2x$?

Para que sean tangentes, la pendiente de la recta tiene que coincidir con la derivada de la función.

$$y' = a^x \cdot \ln a = 2 \quad \rightarrow \quad a^x = \frac{2}{\ln a}$$

Por otro lado, el punto de tangencia se obtiene resolviendo el sistema formado por la ecuación de la recta y la ecuación de la exponencial.

$$\left.\begin{array}{l} y=a^x \\ y=2x \end{array}\right\} \rightarrow a^x = 2x \rightarrow \frac{2}{\ln a} = 2x \rightarrow x=\frac{1}{\ln a}$$

$$a^x=\frac{2}{\ln a} \rightarrow a^{\frac{1}{\ln a}}=\frac{2}{\ln a} \rightarrow \log_a a^{\frac{1}{\ln a}}=\log_a \frac{2}{\ln a} \rightarrow \frac{1}{\ln a}=\log_a \frac{2}{\ln a}$$

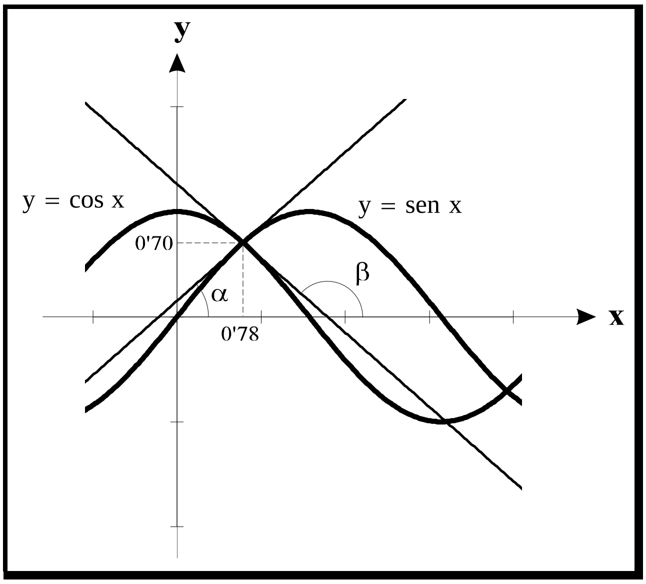
Como $\frac{1}{\ln a}=\log_a e \Rightarrow \log_a e = \log_a \frac{2}{\ln a} \rightarrow e=\frac{2}{\ln a} \rightarrow \ln a = \frac{2}{e} \rightarrow a=e^{\frac{2}{e}}$

Problema 42

Hallar el ángulo bajo el que se cortan las curvas $y=\operatorname{sen} x$ e $y=\cos x$

$$\left.\begin{array}{l} y=\operatorname{sen} x \\ y=\cos x \end{array}\right\} \quad \operatorname{sen} x=\cos x \rightarrow \sqrt{1-\cos^2 x}=\cos x \rightarrow 1-\cos^2 x=\cos^2 x \rightarrow \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x=\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4} \quad \rightarrow \quad y=\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$



El punto de corte de las dos curvas es

$$P\left(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=P(0'78, 0'70)$$

El ángulo bajo el que se cortan ambas curvas es el ángulo que forman las rectas tangentes a dichas curvas en el punto de corte.

Sabemos que:

$$y=\operatorname{sen} x \rightarrow y'=\cos x \rightarrow y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=0'7070 \rightarrow \operatorname{tg}\alpha=0'7070$$

$$\alpha=\operatorname{arctg} 0'7070 = 35^{\circ}15'52''$$

$$y=\cos x \quad \rightarrow \quad y'=-\operatorname{sen} x \quad \rightarrow \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)=-0'7071 \quad \rightarrow \quad \operatorname{tg}\beta=-0'7071$$

$$\beta=\operatorname{arctg}(-0'7071)=144^{\circ}\,44'9''$$

Llamando γ a uno de los ángulos que forman las tangentes entre sí, tenemos:

$$\gamma+\alpha+180-\beta=180 \quad \rightarrow \quad \gamma=\beta-\alpha=144^{\circ}\,44'9''-35^{\circ}\,15'37''=109^{\circ}\,28'32''$$

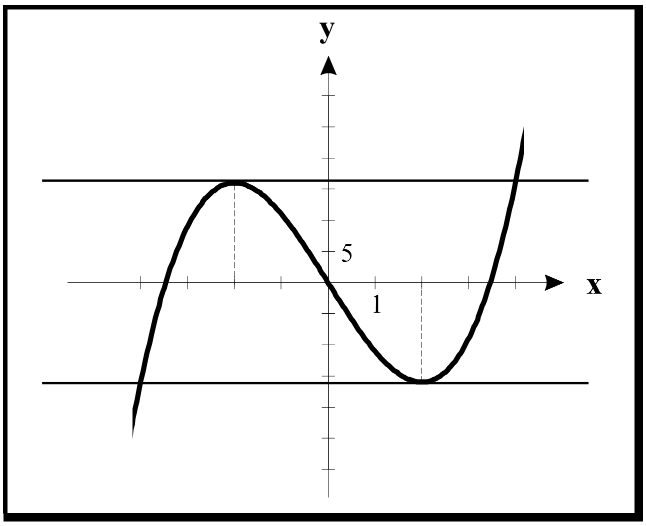
Considerando que el ángulo que forman las curvas es el menor de los que forman las tangentes tenemos:

$$\frac{360^{\circ}-2\cdot(109^{\circ}\,28'32'')}{2}=70^{\circ}\,31'28''$$

Problema 43

Dada la función $y=x^3-12x$ ¿En qué puntos la tangente es paralela al eje de abscisas? Halla las coordenadas de los puntos de dicha curva en los que la tangente forma con el eje de abscisas un ángulo de 45º.

Los puntos en los que la tangente es paralela al eje de abscisas son aquellos en los que la derivada es cero.



$$m=\operatorname{tg}0^{\circ}=0=y'$$

$$y'=0 \quad \rightarrow \quad y'=3x^2-12=0 \quad \rightarrow \quad x=\pm 2$$

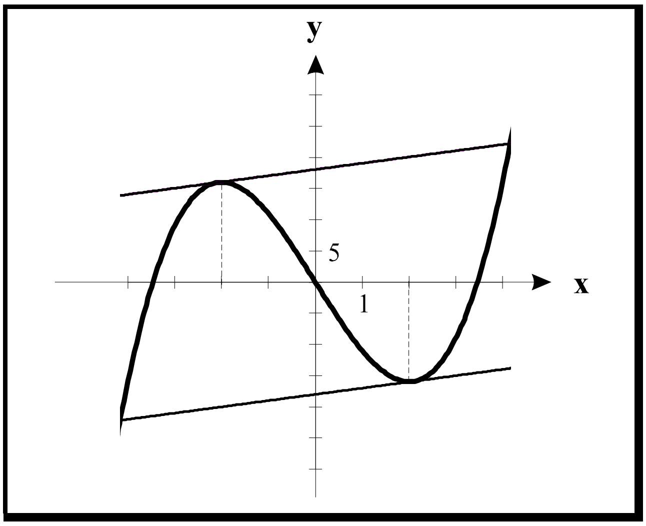
$$x=2 \quad y(2)=8-24=-16 \quad \Rightarrow$$

$$P(2,-16)$$

$$x=-2 \quad y(-2)=-8+24=16 \quad \Rightarrow$$

$$P(-2,16)$$

Los puntos en los que la tangente forma con el eje de abscisas un ángulo de 45º son aquellos en los que la derivada vale 1.



$$m = tg\,45^o = 1 = y'$$

$$3x^2 - 12 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2'0816$$

$$x = 2'08 \quad y(2'08) = -15'95 \quad \Rightarrow$$

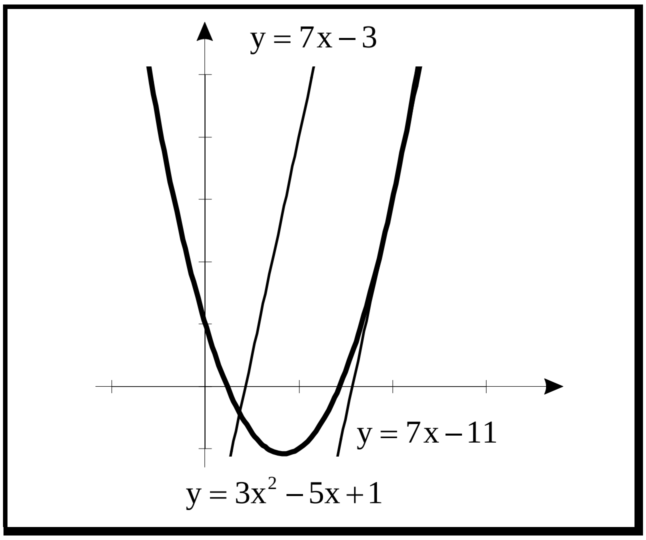
$$P(2'08, -15'95)$$

$$x = -2'08 \quad y(-2'08) = 15'95 \quad \Rightarrow$$

$$P(-2'08, 15'95)$$

Problema 44

¿En qué punto la curva de ecuación $y = 3x^2 - 5x + 1$ tendrá una recta tangente paralela a la recta de ecuación $y = 7x - 3$?



Al ser paralelas, la recta tangente y la recta de ecuación $y = 7x - 3$ tendrán la misma pendiente, luego $m = y' = 7$.

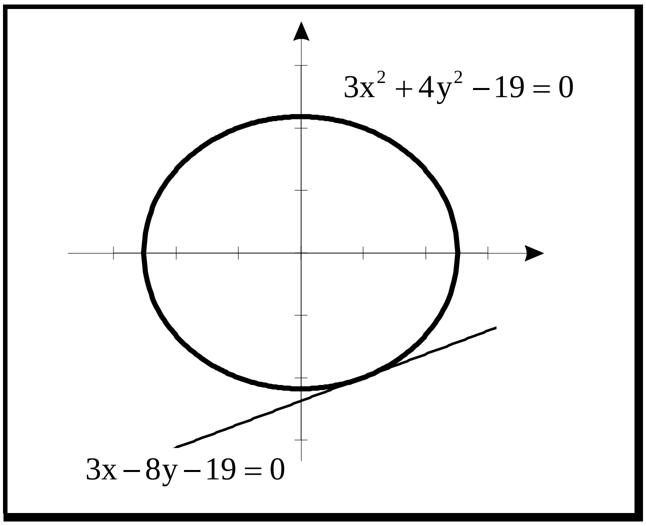
Por tanto:

$$y' = 6x - 5 = 7 \quad \Rightarrow \quad x = 2.$$

Luego el punto es el $(2, 3)$

Problema 45

Hallar la ecuación de la recta tangente a la elipse de ecuación $3x^2 + 4y^2 - 19 = 0$ en el punto de coordenadas $(1, -2)$.



La pendiente será $m = y'(1)$.

Derivamos la función implícitamente

$$6x + 8yy' = 0 \xrightarrow{\text{en el punto } (1,-2)}$$

$$6 - 16y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

La ecuación es entonces:

$$y + 2 = \frac{3}{8}(x-1) \quad \rightarrow \quad 3x - 8y - 19 = 0$$

Problema 46

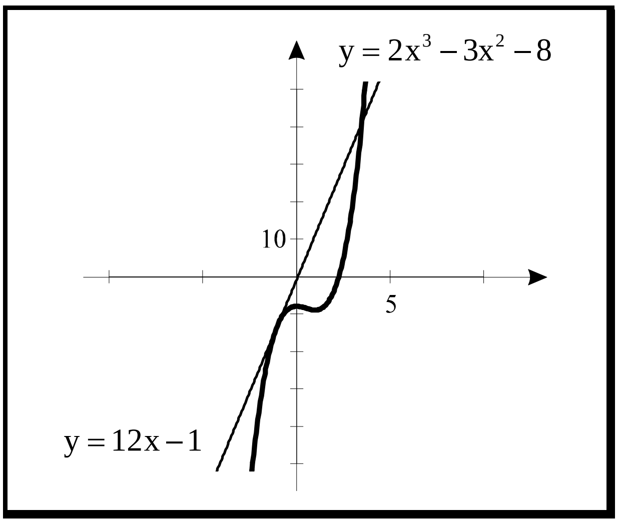
Hallar el valor de a para que la curva de ecuación $y = 2x^3 - 3x^2 + a$ y la recta de ecuación $y = 12x - 1$ sean tangentes. ¿Cuál es el punto de tangencia?

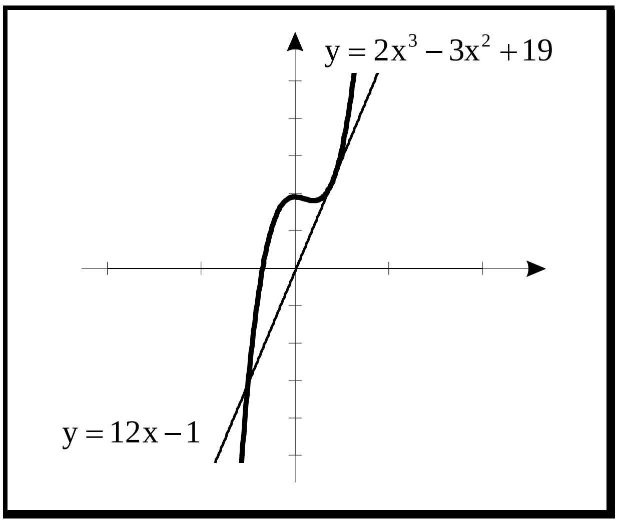
Si son tangentes, la pendiente de la recta debe coincidir con la derivada de la curva.

$$y' = 6x^2 - 6x = 12 \quad \text{es decir} \quad x^2 - x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_1 = 23 \\ y_2 = -13 \end{cases}$$

Cuando las coordenadas del punto de tangencia son $(-1, -13) \quad \Rightarrow \quad a = -8$

Cuando las coordenadas del punto de tangencia son $(2, 23) \quad \Rightarrow \quad a = 19$

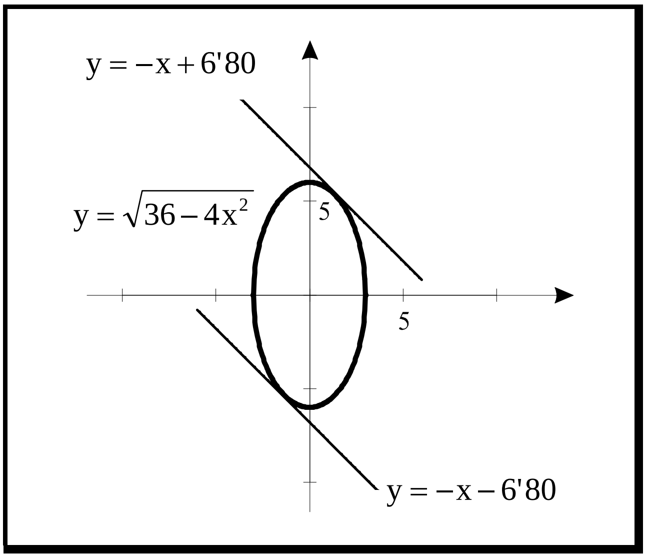




Problema 47

Halla el punto de la curva de ecuación $y=\sqrt{36-4x^2}$ en el que la recta tangente sea paralela a la bisectriz del segundo y cuarto cuadrante.

La pendiente de la bisectriz del segundo cuadrante es $y' = m = \text{tag}\,135^{\circ} = -1$, luego



$$y' = \frac{-8x}{2\sqrt{36-4x^2}} = -1$$

$$-8x = -2\sqrt{36-4x^2}$$

$$64x^2 = 4\left(36-4x^2\right)$$

$$80x^2 = 144 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x_1 = 1'34 \\ x_2 = -1'34 \end{cases} \;\Rightarrow$$

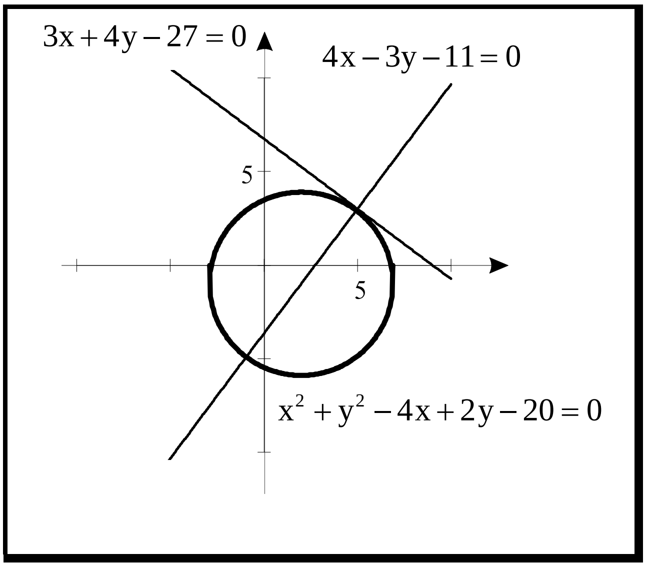
$$\begin{cases} y_1 = 5'36 \\ y_2 = -5'36 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} P_1\ (1'34,\ 5'36) \\ P_2\ (-1'34,\ -5'36) \end{cases}$$

Problema 48

Hallar la ecuación de la recta que contiene al diámetro de la circunferencia de ecuación $x^2+y^2-4x+2y-20=0$ trazado por el punto $(5,\ 3)$.

El punto $(5,\ 3)$ pertenece a la circunferencia, luego el diámetro será perpendicular a la tangente a la circunferencia trazada por ese punto.

La pendiente de la recta tangente a la circunferencia en el punto $(5,\ 3)$ es



$$2x + 2yy' - 4 + 2y' = 0 \xrightarrow{\text{en el punto } (5,\,3)}$$

$$10 + 6y' - 4 + 2y' = 0 \quad y' = -\frac{3}{4}$$

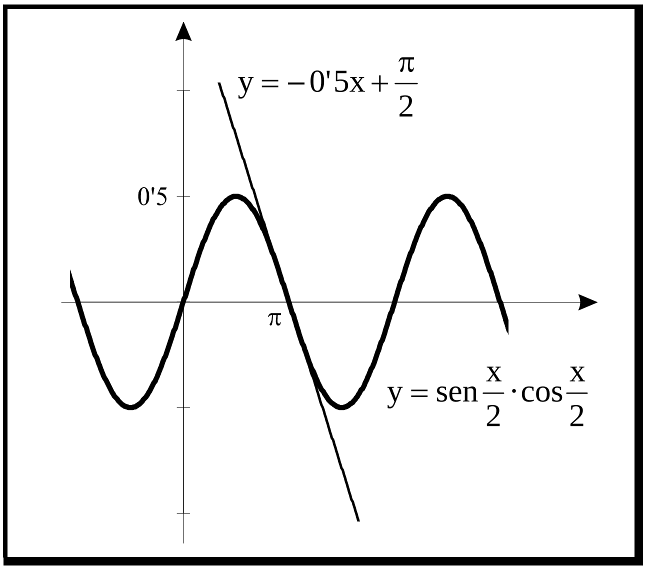
El diámetro está contenido en la recta que pasa por el punto $(5,\ 3)$ y es perpendicular a la recta tangente trazada por el punto $(5,\ 3)$, luego la pendiente de la perpendicular es la inversa cambiada de signo de la pendiente de la recta tangente, es decir:

$$m = \frac{4}{3}$$ luego la ecuación es:

$$y-3=\frac{4}{3}(x-5) \quad \Rightarrow \quad 4x-3y-11=0$$

Problema 49

Calcular la ecuación de la recta tangente a la función $y=\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$ en el punto de abscisa $x=\pi$



El punto tiene de coordenadas

$$x=\pi \quad e \quad y=\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2}=0 \qquad P(\pi,0)$$

La pendiente será la derivada de la función en dicho punto

$$y'=\frac{1}{2}\cos^2\frac{x}{2}+\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)$$

$$y'(\pi)=-\frac{1}{2}$$

La ecuación es entonces

$$y-0=-\frac{1}{2}(x-\pi) \qquad y=-0'5x+\frac{\pi}{2}$$

Problema 50

Calcular la ecuación de la recta tangente a la función $x^y\cdot y^x-1=0$ en el punto (1, 1).

Para calcular y' tomaremos logaritmos neperianos en los dos miembros

$$x^y\cdot y^x=1 \qquad \ln\left(x^y\cdot y^x\right)=\ln 1=0 \qquad \ln x^y+\ln y^x=0 \qquad y\ln x+x\ln y=0$$

Derivando implícitamente tenemos

$$y'\cdot\ln x+y\cdot\frac{1}{x}+\ln y+x\cdot\frac{1}{y}\cdot y'=0 \xrightarrow{\text{en el punto } (1,1)} 0+1+0+y'=0 \Rightarrow y'=-1$$

La ecuación es pues $y-1=-(x-1) \qquad y=-x+2$

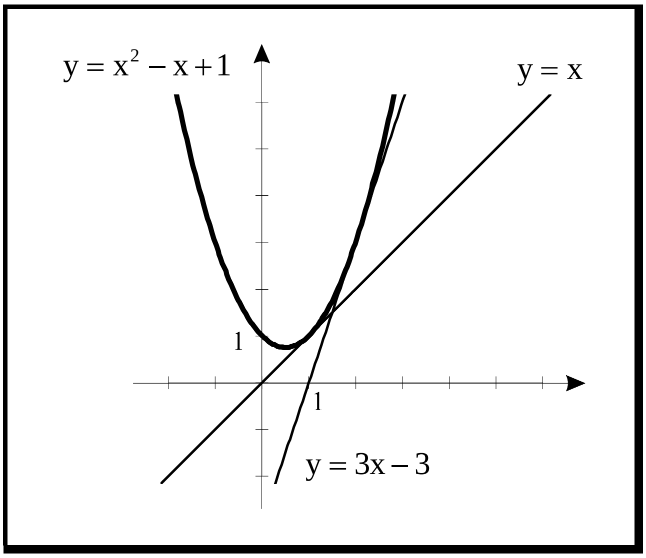
Problema 51

La parábola $y = x^2 + bx + c$ es tangente a la recta y = x en el punto $(1,1)$. Encuentra la ecuación de la tangente a la parábola en el punto de abscisa 2.

La parábola pasa por el punto $(1,1)$ luego $1 = 1 + b + c \Rightarrow b + c = 0 \Rightarrow b = -c$

Por otra parte, la pendiente de la recta y = x, que es 1, coincide con la derivada de la función $y = x^2 + bx + cx$ en el punto $(1,1)$, luego $y'(1) = 1$.

$$y' = 2x + b \quad \rightarrow \quad y'(1) = 2 \cdot 1 + b = 1 \quad \Rightarrow \quad b = -1 \quad \Rightarrow \quad c = 1\ .$$



Por tanto, la ecuación de la parábola es

$$y = x^2 - x + 1$$

La ordenada en el punto de abscisa 2 es $y(2) = 3$, y la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto es:

$$y'(2) \quad \text{luego} \quad y' = 2x - 1 \quad \Rightarrow \quad y'(2) = 3$$

La ecuación de la tangente en dicho punto es: $y - 3 = 3 \cdot (x - 2)$ es decir

$$y = 3x - 3$$

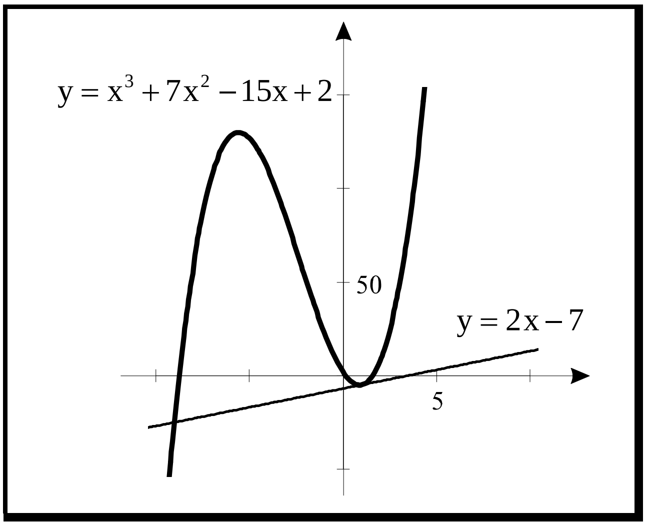
Problema 52

La recta $y = 2x - 7$ es tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ en el punto $[1, f(1)]$. Hállense a y b.

De la recta $y = 2x - 7$ tenemos $y(1) = -5 = f(1)$ $\qquad f(1) = -5$ luego

$$1 + a + b + 2 = -5 \Rightarrow a + b = -8$$

Por otra parte, la derivada de la función en dicho punto coincide con la pendiente de la recta tangente a la curva en el mismo punto, es decir $f'(1) = 2$.



$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$3 + 2a + b = 2 \quad \Rightarrow \quad 2a + b = -1$$

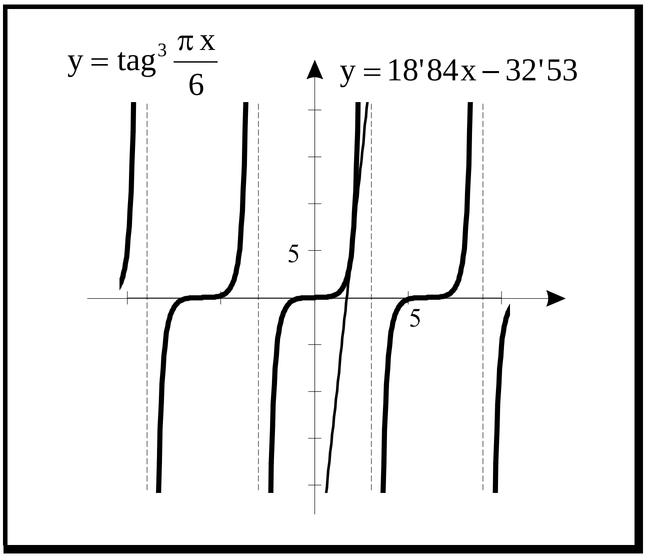
Resolviendo el sistema

$$\left.\begin{array}{r} a + b = -8 \\ 2a + b = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 7 \;\; b = -15$$

$$f(x) = x^3 + 7x^2 - 15x + 2$$

Problema 53

Ecuación de la tangente a la curva $y = tg^3 \dfrac{\pi x}{6}$ en $x_0 = 2$



$$y_0 = tag^3 \frac{2\pi}{6} = 5'19$$

$$y' = 3tag^2 \frac{\pi x}{6} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi x}{6}} \cdot \frac{\pi}{6}$$

$$y'(2) = 3tag^2 \frac{2\pi}{6} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{2\pi}{6}} \cdot \frac{\pi}{6} = 18'84$$

$$y - 5'19 = 18'84 \cdot (x - 2)$$

$$y = 18'84x - 32'53$$