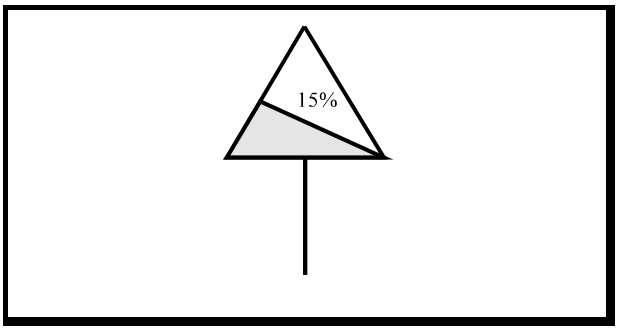
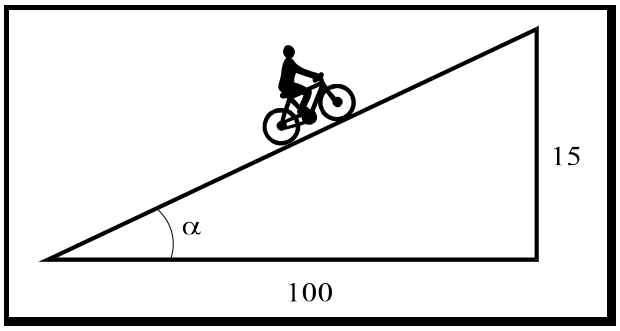
Plano inclinado. Pendiente

Pendiente ***En un plano inclinado, lo empinado es la relación entre el cambio en la altura y el cambio en la distancia horizontal. Esta relación (un número) recibe el nombre de*** **pendiente.**

Supongamos que un ciclista sube una cuesta tal que la altura aumenta 15 m. cada 100 m.. Esto significa que el ciclista se mueve 15 m. hacia arriba y 100 m. en horizontal de donde la pendiente es $\frac{15}{100} = 0'15$. Cuanto mayor es la pendiente más cuesta llegar hasta arriba. Si la pendiente es cero, es un paseo, y cuando la pendiente es negativa es cuesta abajo.





Pendiente de una recta

Sabemos que la representación gráfica de la función afín es una recta de ecuación $y = mx + n$. Dicha recta determina con la dirección positiva del eje de abscisas un ángulo que recibe el nombre de ***inclinación*** de la recta.

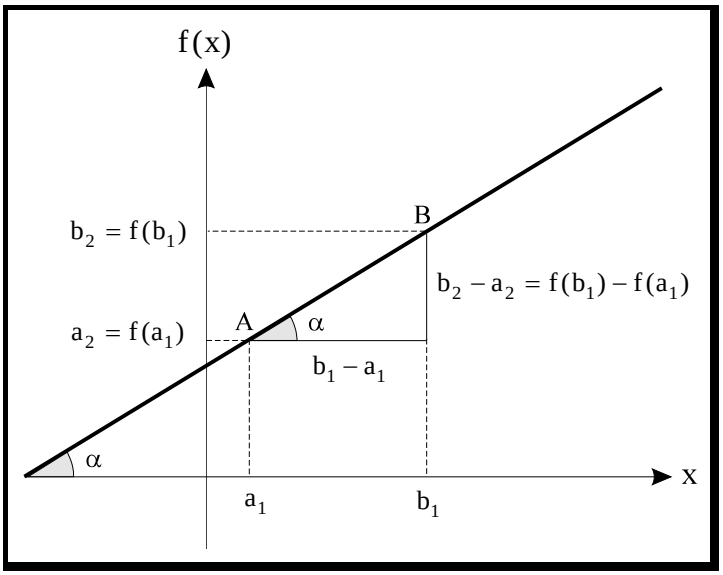
Si $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$ son dos puntos distintos de la recta de ecuación $y = mx + n$, entonces se verifica:

$$\text{Como} \quad A(a_1, a_2) \in y = mx + n \quad \Rightarrow \quad a_2 = ma_1 + n$$

$$\text{Como} \quad B(b_1, b_2) \in y = mx + n \quad \Rightarrow \quad b_2 = mb_1 + n$$

Restando ambas expresiones se obtiene $b_2 - a_2 = mb_1 - ma_1$ es decir:

$$m = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} = \frac{f(b_1) - f(a_1)}{b_1 - a_1}$$



Observando la figura se deduce que

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} = \frac{f(b_1) - f(a_1)}{b_1 - a_1} \Rightarrow$$

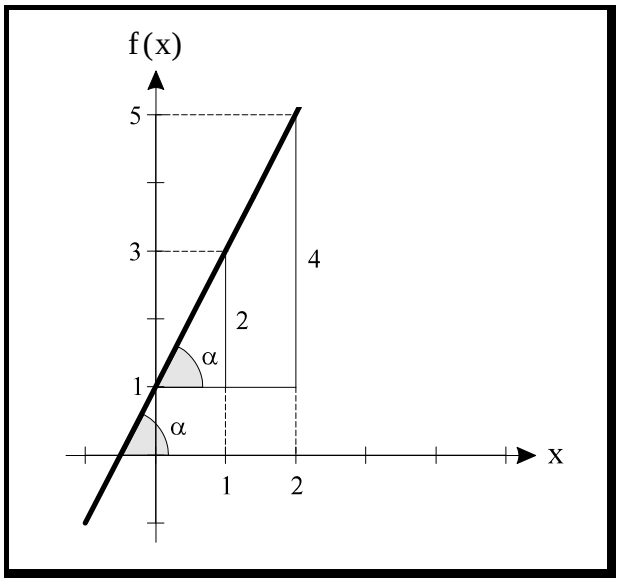
$$\mathbf{m = tg\,\alpha = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} = \frac{f(b_1) - f(a_1)}{b_1 - a_1}}$$

El coeficiente m se llama pendiente de la recta y es la tangente del ángulo que dicha recta forma con la dirección positiva del eje de abscisas.

Si el ángulo está comprendido entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ entonces la pendiente es positiva, y si está comprendido entre $\frac{\pi}{2}$ y π la pendiente es negativa.

Se llama pendiente de una recta a lo que aumenta la función cuando la variable independiente (x) aumenta una unidad.

Ejemplo: Sea la función $y = 2x + 1$



En nuestro ejemplo, la pendiente es 2, y si observamos la gráfica coincide con

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = 2$$

Ecuación punto pendiente de la recta

Consideremos una recta de la que se conoce su pendiente m y que pasa por el punto $P(a, f(a))$. Como la ecuación de la recta es de la forma $y = mx + n$ y m es conocido, se puede determinar el valor de n sabiendo que el punto $P(a, f(a))$ pertenece a la recta.

Como $P(a, f(a)) \in y = mx + n \quad \Rightarrow \quad f(a) = ma + n \quad \Rightarrow \quad n = f(a) - ma$

Por tanto la ecuación de la recta es $y = mx + f(a) - ma$ es decir:

$$\mathbf{y - f(a) = m(x - a) \quad o \quad f(x) - f(a) = m(x - a)}$$

Tasa de variación o incremento

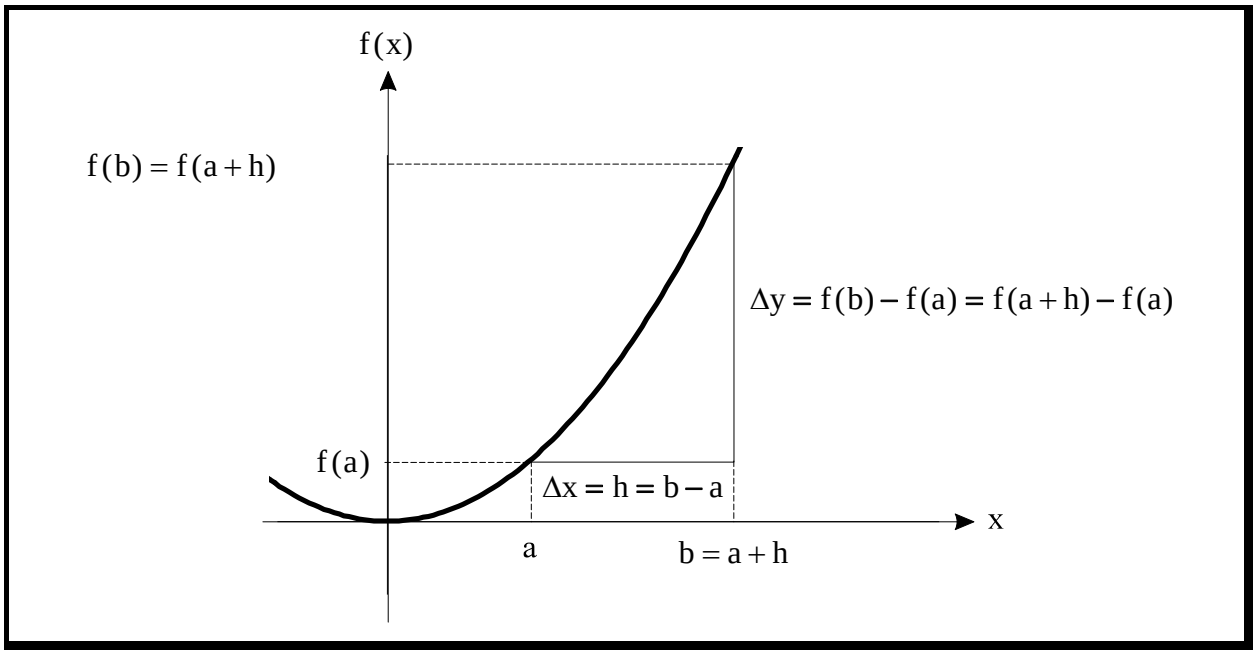
Dada una función $y = f(x)$, si la variable x pasa de tomar el valor "a" a tomar el valor "b" entonces la variable y, o $f(x)$, pasa de $f(a)$ a $f(b)$.

El incremento, tanto de una como de otra variable, se designa con el símbolo Δ, de modo que:

$$\mathbf{\Delta x = b - a}$$
$$\mathbf{\Delta y = f(b) - f(a)}$$

A veces, el incremento se designa con la letra "h", es decir $b - a = h$ y por tanto $b = a + h$, y las expresiones anteriores quedan de la forma

$$\mathbf{\Delta x = h}$$
$$\mathbf{\Delta y = f(a + h) - f(a)}$$



El incremento de la función se llama tasa de variación; mide el cambio de la función al pasar de un punto a otro. Su valor depende del punto x y del incremento h.

La tasa de variación de una función tiene múltiples interpretaciones, dependiendo del fenómeno a que se refiera.

- Si la función representa el espacio recorrido por un móvil, la tasa de variación es el espacio recorrido entre dos tiempos.

- Si f(x) es la función del crecimiento de una población, entonces la tasa de variación es el aumento o disminución de la población entre dos tiempos determinados.

- La tasa de variación también puede interpretarse como el incremento que se experimenta al pasar de un estado a otro, tal como sucede en la dilatación, expansión de los gases, cambio de salario, cambios de la bolsa, etc.

Ejemplo: **Sea la función $f(x) = x^2 - 6x + 5$. Calcular el incremento de la función en el punto $x_0 = 3$, para un incremento de la variable independiente igual a 0'01.**

Sabemos que el incremento en a para un incremento h de la variable independiente es $f(a + h) - f(a)$.

En nuestro caso $a = 3$ y $h = 0'01$, por tanto tendremos:

$$f(3 + 0'01) - f(3) = f(3'01) - f(3) = 3'01^2 - 6 \cdot 3'01 + 5 - (3^2 - 6 \cdot 3 + 5) = 0'0001$$

Tasa de variación media (T.V.M.)

Se llama tasa de variación media o razón de cambio de una función $y = f(x)$ correspondiente al intervalo $[a,b]$ (y escribiremos T.V.M.$[a,b]$) al cociente

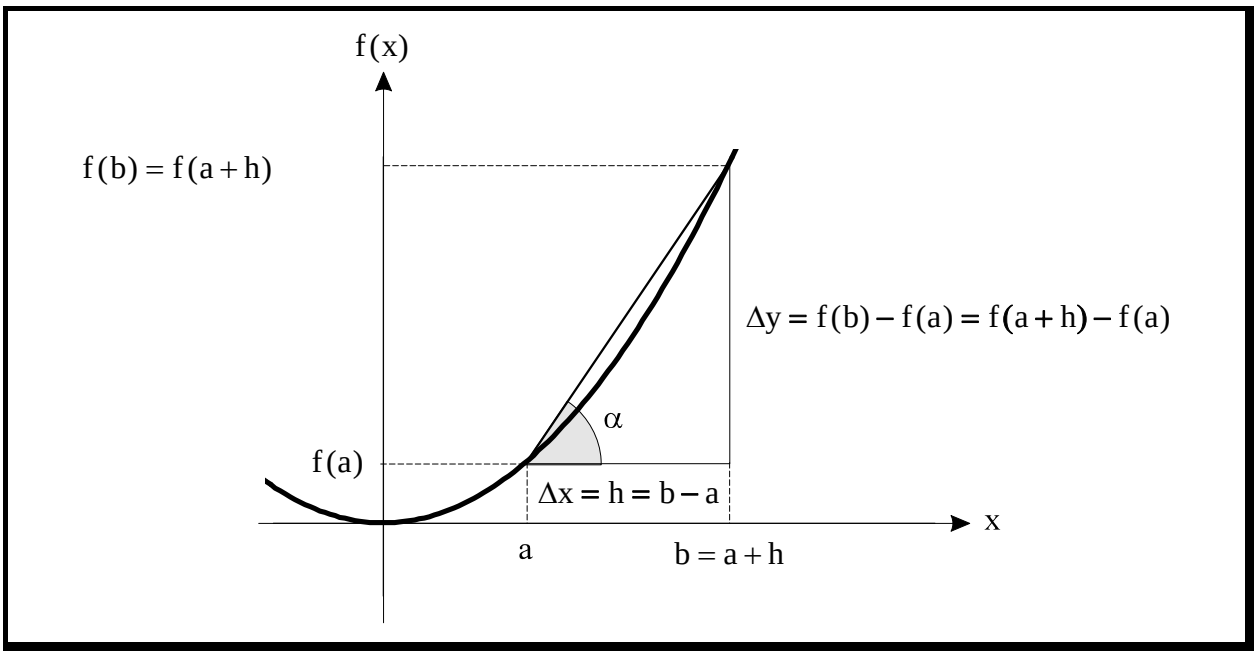
$$\text{T.V.M.}[a,b] = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Es decir**, al cociente entre la variación de las ordenadas y la variación de las abscisas en ese intervalo.**

La tasa de variación media puede ser positiva, nula o negativa, dependiendo de la tasa de variación o incremento Δy.

La T.V.M. de una función en el intervalo $[a,b]$ es también la pendiente del segmento cuyos extremos son los puntos $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$, ya que la pendiente coincide con la tangente del ángulo que forma el segmento con el eje de abscisas.

$$\text{T.V.M.}[a,b] = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \text{tg}\,\alpha = m$$



La tasa de variación de una función da una primera idea de la rapidez con que crece o decrece en un intervalo, aunque no lo suficientemente precisa. La tasa de variación media afina este concepto.

Dependiendo del fenómeno que represente la función, la tasa de variación media recibe nombres particulares como:

- Velocidad media, aceleración media.
- Tasa de crecimiento anual de una población.
- Ritmo de respiración.

Ejemplo: Calcular la T.V.M. de la función $f(x) = x^2$ en los intervalos $[2,4]$ y $[4,6]$

$$T.V.M.[2,4] = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{4^2 - 2^2}{4 - 2} = \frac{16 - 4}{2} = 6$$

$$T.V.M.[4,6] = \frac{f(6) - f(4)}{6 - 4} = \frac{6^2 - 4^2}{6 - 4} = \frac{36 - 16}{2} = 10$$

Como se observa, la tasa de variación o incremento Δy no es igual en los dos casos, aun siendo iguales los Δx.

Ejemplo: Los costes de producción de una fábrica responden a la expresión

$$C(x) = 0'002x^3 - 0'5x^2 + 50x + 2000$$

donde x es el número de unidades producidas, y $C(x)$ se mide en miles de pesetas. Se pide:

a) El incremento producido en los costes cuando se pasa de fabricar 10 a fabricar 20 unidades del artículo.

b) El coste producido por cada unidad adicional entre 10 y 20.

c) El coste de la décimo primera unidad.

a) $C(20) = 2816 \qquad C(10) = 2452 \qquad C(20) - C(10) = 364$ miles de pesetas

b) $\dfrac{C(20) - C(10)}{10} = 36'4$ miles de pesetas

c) $C(11) - C(10) = 2492'162 - 2452 = 40'162$

Ejemplo: **El Producto Nacional Bruto (P.N.B.) de cierto país entre 1945 y 1965 responde a la función**

$$\mathbf{P.N.B. = 3 + 0'2t + 0'001t^2}$$

en miles de millones de dólares, donde t se mide en años, desde 0 hasta 20.

Hallar el incremento medio anual del P.N.B. en ese intervalo de tiempo.

$$\frac{P.N.B.(20) - P.N.B.(0)}{20 - 0} = 0'22 \text{ miles de millones de dólares}$$

Ejemplo: **La población de una pequeña comunidad rural varía de acuerdo con la función**

$$\mathbf{y = \frac{10.000}{1 + 4\,e^{-0'1t}}}$$

Encontrar el incremento de población en los primeros 10 años, y en los primeros 5 años. Hallar, en ambos casos, los correspondientes incrementos medios anuales de población.

$$y(10) - y(0) = 2046 \qquad \frac{y(10) - y(0)}{10 - 0} = 204'6$$

$$y(5) - y(0) = 919 \qquad \frac{y(5) - y(0)}{5 - 0} = 183'8$$

Ejemplo: **La relación entre el precio de un bien de consumo y el número de unidades demandadas de ese bien viene dado por la fórmula**

$$\mathbf{x = \frac{500}{\sqrt{p + 2}}}$$

Determinar la variación del número de unidades demandadas por unidad de variación del precio, cuando éste pasa de 16 a 25. ¿Cuál es, en ese caso, la variación del ingreso obtenido?

$$\frac{x(25) - x(16)}{25 - 16} = -2'4$$

La demanda disminuye en 2 ó 3 unidades

$$I = p \cdot x = \frac{500p}{\sqrt{p + 2}} \qquad \frac{I(25) - I(16)}{25 - 16} = 57'78$$

Pese a que la demanda disminuye, los ingresos aumentan.

Ejemplo: **El volumen de ventas de un L.P. en función del tiempo, medido en semanas, es**

$$\mathbf{N(t) = 20000 + 1000\,t - 100\,t^2}$$

Hallar la tasa de cambio de N si $\mathbf{t = 0}$, $\mathbf{4}$ y $\mathbf{12}$.

$$\frac{N(4) - N(0)}{4 - 0} = \frac{22.400 - 20.000}{4} = 600$$

$$\frac{N(12) - N(0)}{12 - 0} = \frac{17.600 - 20.000}{12} = -200$$

Ejemplo: **La altura en metros, alcanzada al cabo de t segundos por una piedra lanzada verticalmente hacia arriba, viene dada por la función $\mathbf{f(t) = 20t - 2t^2}$. Hallar la velocidad media en el intervalo de tiempo comprendido entre $\mathbf{t = 0}$ y $\mathbf{t = 5}$ segundos.**

Suponemos, como veremos más adelante, que la piedra sube durante todo el tiempo entre los instantes $t = 0$ y $t = 5$, por tanto:

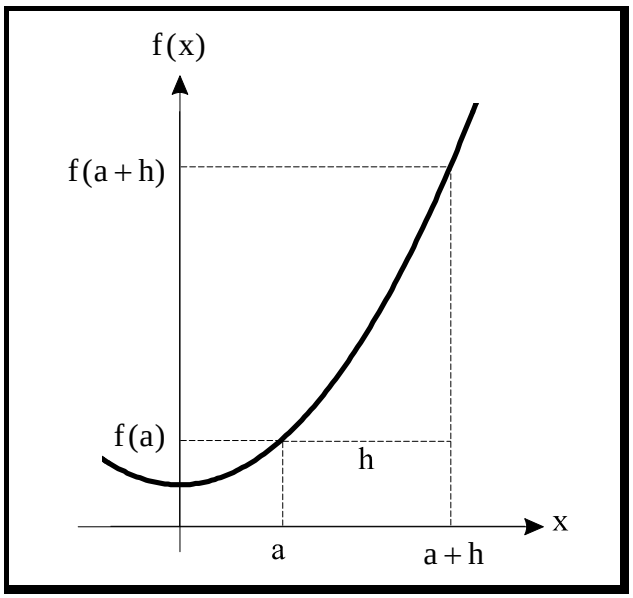
$$v_{media} = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{100 - 50 - 0}{5 - 0} = 10 \text{ m/s}$$

Tasa de variación instantánea. Derivada de una función en un punto.

La tasa de variación media en un intervalo $[a, a+h]$ permite estudiar pendientes, velocidades medias, etc. Muchas veces también es interesante y útil conocer el comportamiento de estas magnitudes en cada punto.

- Si se trata del movimiento de un coche, lo que ahora nos preguntamos es la velocidad en cada instante; es decir, la velocidad que marca el velocímetro en cada momento. En física se conoce con el nombre de velocidad instantánea o simplemente velocidad.

- Si es una carretera, se trata de ver la pendiente en cada punto de la misma; es decir, nos preguntamos qué letrero con la leyenda de pendiente habría que colocar en cada punto.



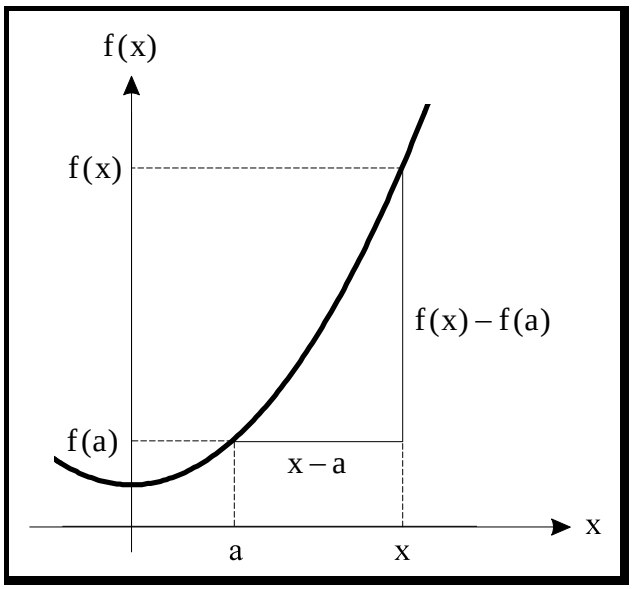
La solución se reduce a estudiar la variación instantánea en un punto cualquiera "a"; para ello basta tomar intervalos $[a, a+h]$, cada vez más pequeños; es decir, hacer que h se aproxime hacia 0.

Se define la tasa de variación instantánea o derivada de una función $y = f(x)$ en un punto de abscisa $x = a$ como el límite de la T.V.M. cuando la amplitud del intervalo tiende a cero, y se expresa con la notación:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Para designar la derivada de la función $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$ las notaciones más usuales son: $f'(a)$ e $y'(a)$.

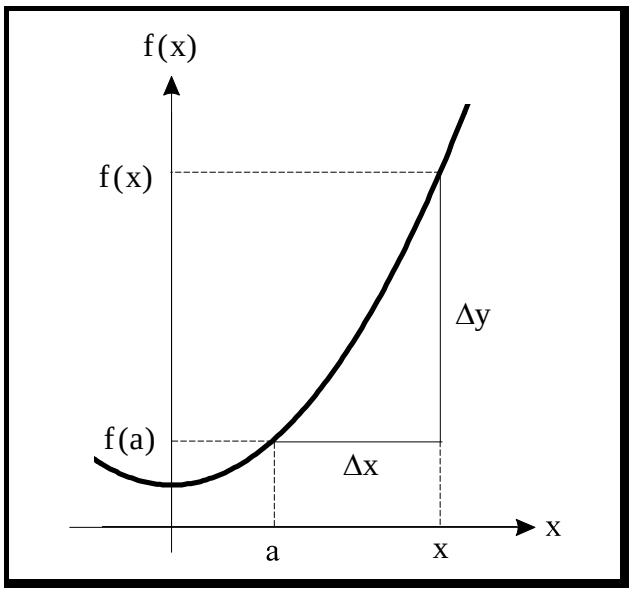
Otras formas de escribir la derivada de una función en un punto



Si hacemos $x = a + h \rightarrow h = x - a$ con lo que $x \rightarrow a$ cuando $h \rightarrow 0$.

Sustituyendo estos valores en la fórmula anterior se obtiene una segunda forma de expresar la derivada:

$$\mathbf{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$



Utilizando tasas de variación o incrementos se obtiene una tercera forma de expresar la derivada, empleada sobre todo en las ciencias experimentales.

$$\begin{cases} \Delta y = f(x) - f(a) \\ \Delta x = x - a \end{cases}$$

$$\mathbf{f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

En el cálculo de derivadas puede emplearse cualquiera de las expresiones anteriores según convenga, como se indica a continuación:

$$\mathbf{y'(a) = f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Ejemplo: **Dada la función $y = 3x^2 - 2x + 4$, calcular su derivada en el punto de abscisa -2.**

1ª forma

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \rightarrow \quad f'(-2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$$f'(-2) = \lim_{h\to 0} \frac{3\cdot(-2+h)^2 - 2\cdot(-2+h) + 4 - \left[3\cdot(-2)^2 - 2\cdot(-2) + 4\right]}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{3\cdot\left(4 - 4h + h^2\right) + 4 - 2h + 4 - 12 - 4 - 4}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3h^2 - 14h}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{h(3h-14)}{h} = \lim_{h\to 0} (3h - 14) = -14$$

2ª forma

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \rightarrow \quad f'(-2) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)}$$

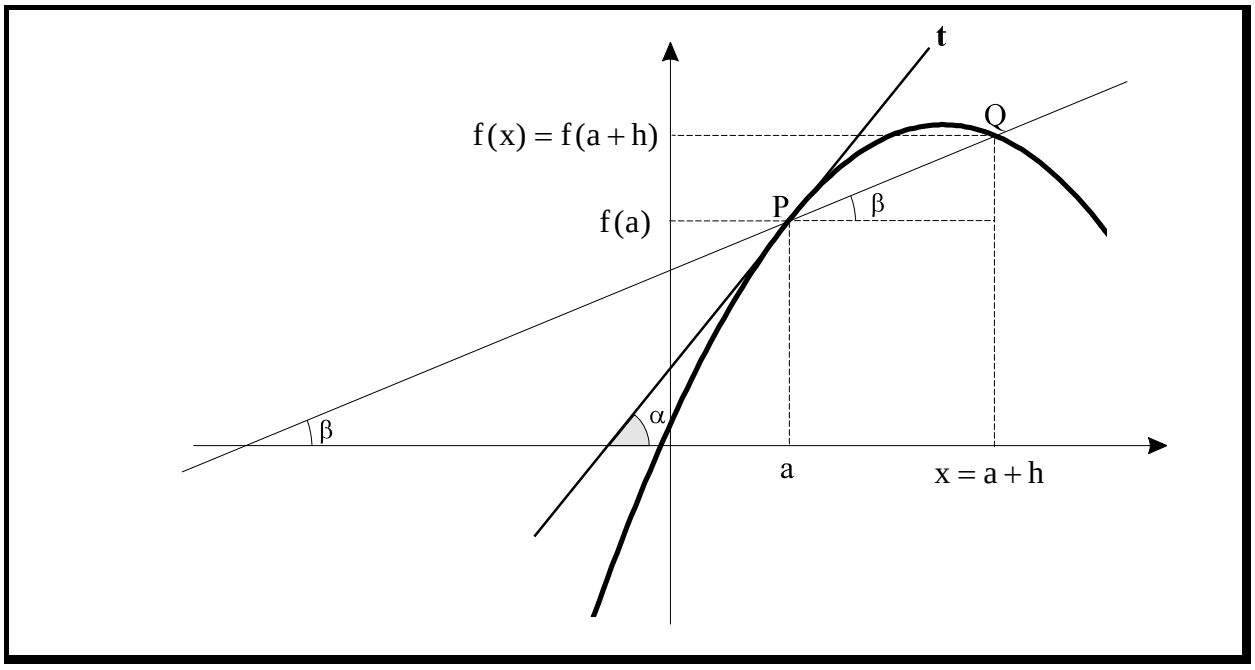
$$f'(-2) = \lim_{x\to -2} \frac{3x^2 - 2x + 4 - \left[3\cdot(-2)^2 - 2\cdot(-2) + 4\right]}{x - (-2)} = \lim_{x\to -2} \frac{3x^2 - 2x - 16}{x + 2} =$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{3\cdot\left(x - \frac{16}{6}\right)\cdot(x+2)}{x+2} = \lim_{x\to -2} 3\cdot\left(x - \frac{16}{6}\right) = -14$$

Las siguientes situaciones son otros ejemplos en los que se presenta el concepto de derivada de una función en un punto:

- La presión del agua en cada uno de los puntos de una presa.
- La presión de un avión en el momento de aterrizar.
- La pendiente que tiene una carretera de montaña en cada punto.

Interpretación geométrica de la derivada



Sea $y = f(x)$ la función representada en la figura y fijémonos en un punto concreto $P(a, f(a))$. La recta tangente **t**, como cualquier recta, queda determinada al conocer un punto de la misma y su pendiente. El punto ya lo tenemos $(a, f(a))$. Veamos ahora como se obtiene la pendiente.

Si Q es un punto de la curva próximo a P y su abscisa es $a + h$, su ordenada es $f(a + h)$, por lo tanto sus coordenadas son $Q(a + h, f(a + h))$.

Aparece ahora la secante PQ cuya pendiente es la tangente trigonométrica del ángulo β

$$tg\beta = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Si ahora movemos el punto Q sobre la curva y lo vamos acercando a P, el desplazamiento hace que las secantes se aproximen a la recta tangente, de modo que β llegará a confundirse con α y $tg\beta$ lo hará con $tg\alpha$.

Como este desplazamiento se consigue haciendo tender h a cero, no nos queda mas que escribir

$$\lim_{h\to 0} tg\beta = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = tg\alpha = m$$

Que el punto Q se aproxime al punto P es lo mismo que obtener las T.V.M. correspondientes a intervalos con un extremo en a y que tienden a cero.

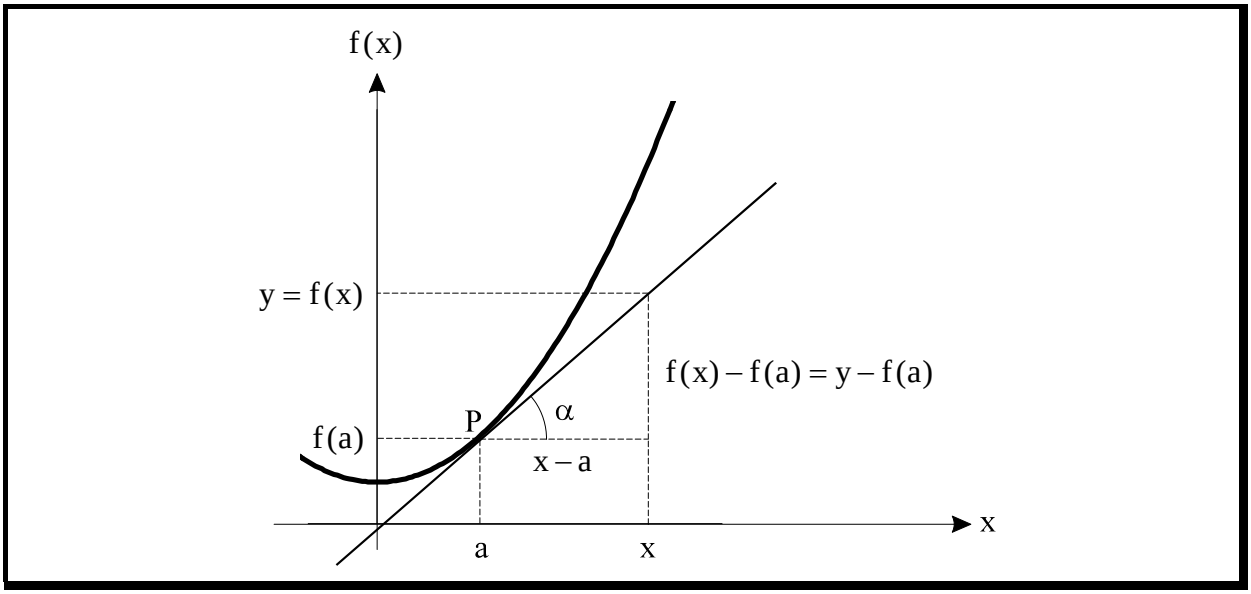
La derivada de la función $y = f(x)$ en el punto de abscisa "a" representa la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto.

$$\mathbf{f'(a) = tg\alpha = m}$$

Derivada positiva equivale a $\operatorname{tag}\alpha$ *positiva y esto significa que* α *es agudo, lo que significa que la función crece. Por el contrario, derivada negativa equivale a* $\operatorname{tag}\alpha$ *negativa y por tanto* α *es obtuso y la función decrece.*

Ecuación de la recta tangente a una curva en un punto

En el caso de la recta tangente a una curva en un punto P, conocemos el propio punto $P(a, f(a))$, y gracias a la derivada conocemos también la pendiente $m = f'(a)$.



Se tiene pues que $f'(a) = m = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \dfrac{y - f(a)}{x - a}$ es decir:

$$\mathbf{f(x) - f(a) = f'(a)\cdot(x - a) \quad o\ bien \quad y - f(a) = f'(a)\cdot(x - a)}$$

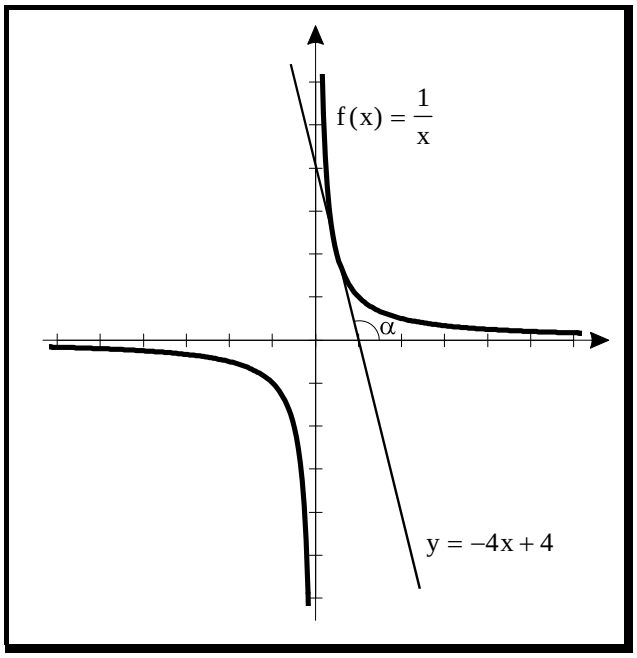
donde $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$.

La expresión anterior es efectivamente una recta ya que tanto a como $f(a)$ y como $f'(a)$ son números.

Ejemplo: Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = \frac{1}{x}$ en el punto de abscisa $x = 0'5$. ¿Qué ángulo forma dicha recta con el eje de abscisas?

$$m = f'(0'5) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0'5+h) - f(0'5)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{0'5+h} - \frac{1}{0'5}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0'5-(0'5+h)}{(0'5+h)\cdot 0'5}}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{0'5-0'5-h}{0'5\cdot h\cdot(0'5+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{0'5\cdot h\cdot(0'5+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{0'5\cdot(0'5+h)} = -\frac{1}{0'25} = -4$$



La ecuación de la recta tangente es:

$$y - f(0'5) = f'(0'5)\cdot(x - 0'5)$$

$$y - 2 = -4\cdot(x - 0'5)$$

$$y = -4x + 4$$

El ángulo lo obtenemos a partir de la derivada:

$$f'(0'5) = -4 = \operatorname{tg}\alpha$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}(-4) = 104^{\circ}2'10''$$

Función derivada

Supongamos que una función **$f:]a, b[\longrightarrow \mathbf{R}$ es derivable en todo punto $x \in]a, b[$**. Entonces, para cada $x \in]a, b[$, existe el número $f'(x)$. Esto nos permite definir la función $x \longrightarrow f'(x)$ que escribiremos $f'(x)$, que está definida en todo el intervalo $]a, b[$ y que recibe el nombre de **función derivada de $f(x)$ en el intervalo $]a, b[$**.

Una derivada es el valor al que se acerca un cociente incremental cuando el divisor tiende a cero. Antes de alcanzar el cero, sus pequeños valores se expresan con la letra griega Δ.

Δy es un pequeño incremento de y, e Δx es un pequeño incremento de x, así que $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es un cociente de dos números pequeños. Cuando esos números se acercan a cero el cociente se convierte en una derivada y los Δ en un nuevo símbolo $\frac{dy}{dx}$.

Frecuentemente aparece la notación de Leibniz $\frac{dy}{dx}$ **o** $\frac{df}{dx}$ que se lee derivada de y o f respecto de x, y proviene de la notación de la tasa de variación media: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Este símbolo hay que considerarlo como un todo inseparable que designa la derivada de una función; dy y dx no son numerador y denominador de una fracción que pueda simplificarse. La notación de Leibniz es útil, sobre todo cuando en un problema aparecen varias variables, ya que con ella se indica respecto a qué se deriva. Esta notación es la más común en física.

Para calcular la función derivada, simplemente habrá que aplicar la definición de derivada de la función en un punto para un valor genérico x. La función derivada se representa con las siguientes notaciones:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

El cálculo diferencial, descubierto por Newton y Leibniz, es la matemática de utilizar derivadas. Calcular una derivada se llama diferenciación.

Derivada infinita de una función en un punto

Sea $y = f(x)$ una función continua en un intervalo I, y sea $a \in I$. **Si se verifica que**

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \pm\infty$$

se dice que $y = f(x)$ tiene derivada infinita en $x = a$. En este caso la recta $x = a$ es tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$.

¡OJO!

El hecho de que exista recta tangente a una curva en un punto no implica necesariamente que la función sea derivable en dicho punto, como se observa en el ejemplo que sigue a continuación.

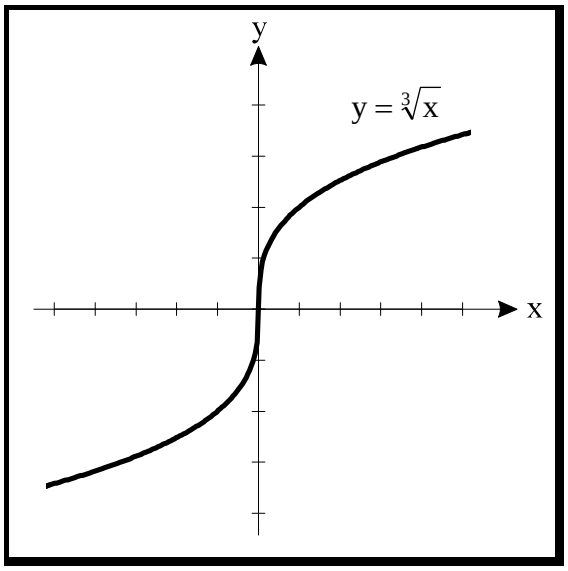
Ejemplo: Calcular la derivada de $y = \sqrt[3]{x}$ en el punto de abscisa 0.

La función es continua en dicho punto. Veamos si es derivable:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{0+h}-\sqrt[3]{0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty$$

Si aplicamos la expresión equivalente vemos que nos sale lo mismo

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{0}}{x-0} = +\infty$$



La recta tangente a la gráfica de f(x) en x = 0 es vertical, es decir, tiene pendiente infinita.

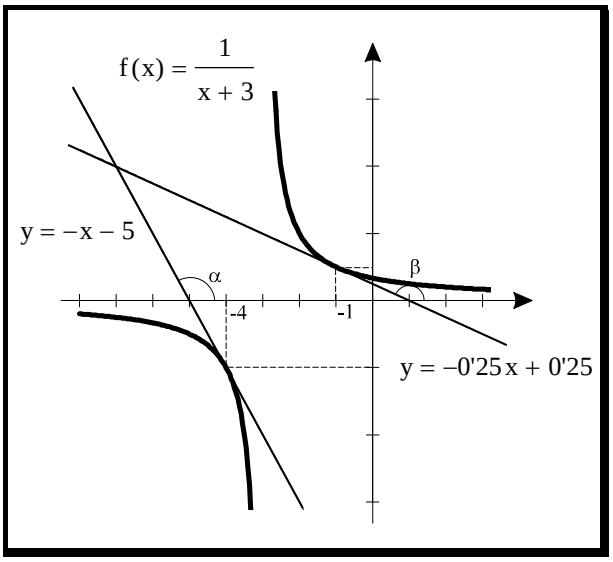
Ejemplo 1

Calcular la derivada de la función $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$. Calcular $f'(-4)$, $f'(-1)$ y hacer una interpretación geométrica de los resultados obtenidos.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{x+h+3}-\dfrac{1}{x+3}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{x+3-(x+h+3)}{(x+h+3)\cdot(x+3)}}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{x+3-x-h-3}{h\cdot(x+3)\cdot(x+h+3)}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h\cdot(x+3)\cdot(x+3+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+3)\cdot(x+3+h)}=\frac{-1}{(x+3)^2}$$

Para cada valor de x obtenemos la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$ en dicho punto como se observa en la gráfica.



Como $f'(-4)=-1 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=-1$

$$\alpha=\operatorname{arctg}(-1)=135^{o}$$

Por tanto, la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x=-4$ forma un ángulo de 135º con el eje de abscisas. La ecuación de la recta tangente en dicho punto es:

$$y-f(-4)=f'(-4)\cdot\big(x-(-4)\big)$$

$$y=-x-5$$

Como $f'(-1)=-0'25 \Rightarrow \operatorname{tg}\beta=-0'25 \Rightarrow \beta=\operatorname{arctg}(-0'25)=165^{o}57'49''$

Por tanto, la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x=-1$ forma un ángulo de 165º 57' 49" con el eje de abscisas. La ecuación de la recta tangente en dicho punto es:

$$y-f(-1)=f'(-1)\cdot\big(x-(-1)\big) \quad \rightarrow \quad y=-0'25x+0'25$$

Ejemplo 2

Demuestra que la derivada de la función $y=\sqrt{x}$ es $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\left[\sqrt{x}\right]'=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left[\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right]\cdot\left[\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right]}{h\cdot\left[\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right]}=\lim_{h\to 0}\frac{\left[\sqrt{x+h}\right]^2-\left[\sqrt{x}\right]^2}{h\cdot\left[\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right]}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h\cdot\left[\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right]}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Ejemplo 3

Demuestra que la derivada de la función $f(x)=\ln x$ con $x>0$ es $f'(x)=\dfrac{1}{x}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\dfrac{x+h}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\cdot\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)\right]=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\cdot\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)\right]=$$

$$\frac{1}{x}\cdot\lim_{h\to 0}\left[\ln\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}}\right]=\frac{1}{x}\cdot\ln\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}}\right]=\frac{1}{x}\cdot\ln e=\frac{1}{x}$$

Ejemplo 4

Demuestra que la derivada de $f(x)=\operatorname{sen} x$ es $f'(x)=\cos x$

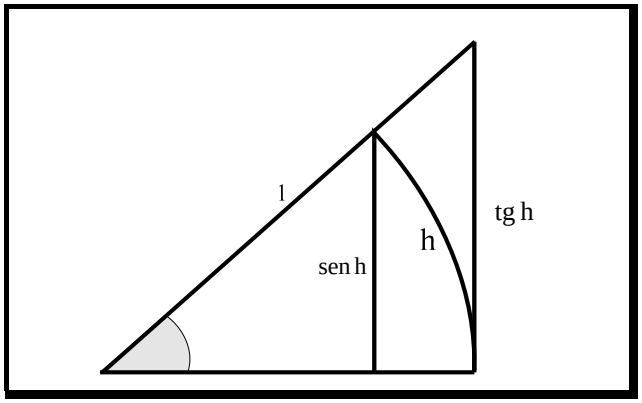
Previo a todo, veamos un límite interesante del que haremos uso enseguida.

Lema $\quad\lim_{h\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} h}{h}=1$

La interpretación es simple: a medida que disminuye el arco, arco y seno se confunden, de modo que su cociente es la unidad. Es importante hacer notar que el ángulo ha de medirse en radianes. Sólo de esta manera puede identificarse con la longitud del segmento curvilíneo sobre la circunferencia de radio unidad.

Demostración

Supongamos que $h>0$. Es geométricamente claro que $\operatorname{senh} < h < \operatorname{tag} h$.



Al dividir entre $\operatorname{sen} h$ (que es positivo por serlo h), el sentido de la desigualdad no cambia:

$$\frac{\operatorname{senh}}{\operatorname{senh}}<\frac{h}{\operatorname{senh}}<\frac{\operatorname{tagh}}{\operatorname{senh}}$$

$$1<\frac{h}{\operatorname{senh}}<\frac{1}{\cosh}$$

Tomando límites en la desigualdad:

$$\lim_{h\to 0} 1 \le \lim_{h\to 0} \frac{h}{\operatorname{senh}} \le \lim_{h\to 0} \frac{1}{\cosh} \quad \Rightarrow \quad 1 \le \lim_{h\to 0} \frac{h}{\operatorname{senh}} \le 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{h\to 0} \frac{h}{\operatorname{senh}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{senh}}{h} = 1$$

Si $x < 0$ el razonamiento sólo difiere del expuesto en que se invierte el sentido de todas las desigualdades.

Nota: *Hay que huir de la tentación de sustituir el seno por su arco, pues, aunque el método funciona en los casos más simples, es erróneo.*

Por ejemplo, se prueba que $\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \frac{1}{6}$ pero si sustituimos $\operatorname{sen} x$ por x se obtiene un resultado falso:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^3} = 0$$

Demostración de que si $f(x) = \operatorname{sen} x$ entonces $f'(x) = \cos x$

Partimos de la definición de derivada $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h}$. En este caso el límite presenta una indeterminación de $\frac{0}{0}$ y se resuelve transformando en producto la diferencia de senos, es decir:

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{sen}(\alpha+\beta) & - & \operatorname{sen}(\alpha-\beta) & = & 2\cos\alpha \cdot \operatorname{sen}(\beta) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \\ \operatorname{sen}(x+h) & - & \operatorname{sen} x & = & 2\cos(?)\operatorname{sen}(?) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \alpha+\beta = x+h \\ \alpha-\beta = x \\ \hline 2\alpha \quad = 2x+h \end{array} \qquad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{2x+h}{2} \qquad \beta = \alpha - x = \frac{h}{2}$$

Luego

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\frac{2x+h}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \cos\frac{2x+h}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = (\cos x)\cdot 1 = \cos x$$

como queríamos demostrar.

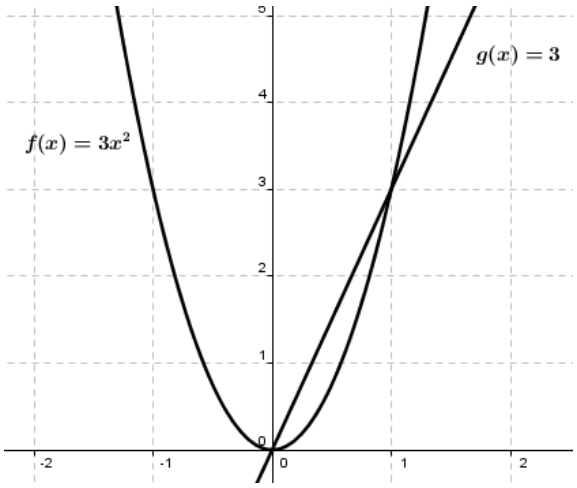
Ritmo de cambio de una función. Derivada

Toda función relaciona dos cantidades variables: y = f(x).

La derivada es una medida de la rapidez con la que cambia la variable dependiente "y" con respecto a la variable independiente "x". Cuando la derivada es positiva, "y" crece con "x", tanto más deprisa cuanto mayor sea la derivada. Si por el contrario es negativa, "y" disminuye al aumentar "x".

La pregunta que da lugar a la noción de derivada surge de modo natural: **¿Cómo expresar el grado de intensidad de la dependencia del efecto en relación con la causa? ¿En cuánto se modifica el efecto por cada unidad de cambio de la causa?**

En general, el cambio de una función después de un período largo puede no ser muy informativo sobre el modo como se realiza el cambio. Las dos funciones siguientes cambian lo mismo en una unidad, pero mientras f(x) no cambia casi nada al principio y mucho en el tramo final, g(x) cambia de modo mucho más igualmente repartido, uniforme.



Decir que las dos funciones cambian lo mismo, 3 en una unidad, no nos informa mucho sobre la rapidez con la que se ha producido ese cambio. Si "y" representase el efecto y "x" la causa, se puede decir que, a pesar de que cuando la causa pasa de 0 a 1 el efecto pasa de 0 a 3 tanto en el caso del fenómeno representado por f como en el representado por g, sin embargo, cambios de la causa en la zona cercana a 0 apenas afectan el valor de f y sí considerablemente el valor de g.

Por eso viene bien considerar la pregunta anterior ***localmente***. Para el valor 7 de la causa, ¿cuánto varía el efecto para variaciones pequeñas de la causa? El concepto de derivada viene a dar sentido a esta pregunta. Se trata con él de calibrar, mediante un número, la rapidez del cambio alrededor de un instante determinado o bien la intensidad de la influencia de una causa sobre un efecto alrededor de un valor determinado de la causa.

En la gráfica anterior se puede comprobar fácilmente que la mayor o menor rapidez del cambio o intensidad de influencia de la causa se corresponde con la mayor o menor inclinación de la tangente a la curva que representa el cambio. De este modo una buena representación gráfica de la función nos hace capaces de decidir con una simple mirada en qué instantes el crecimiento es positivo o negativo, más o menos rápido, etc.

Si una magnitud "y" depende de otra "x", según una ley conocida, por ejemplo $y = \frac{3x^3}{1+x^2}$ nos podemos preguntar: cuando x vale 2, ¿cuál es la influencia sobre y de pequeñas variaciones de x? Es decir, para un cambio de x pequeño, Δx, ¿cuánto valdrá el cambio Δy experimentado por y? La derivada nos da la respuesta aproximada:

$$\Delta y \approx y'(2)\cdot\Delta x$$

y como

$$y'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{3x^3}{1+x^2}-\frac{24}{5}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{15x^3-24(1+x^2)}{5(1+x^2)}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{15x^3-24x^2-24}{5\cdot(1+x^2)\cdot(x-2)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(15x^2+6x+12)}{(1+x^2)\cdot 5\cdot(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{15x^2+6x+12}{5\cdot\left(1+x^2\right)}=3'36$$

resulta aquí $\Delta y \approx 3'36\cdot\Delta x$ que es una información bien útil.

Las derivadas no sólo se aplican a los cuerpos en movimiento. Se puede calcular también una derivada que represente el ritmo de cambio de una población de delfines con relación a la temperatura del océano, o del volumen de un globo respecto al área de su superficie o a la variación en el precio de una pizza respecto a su diámetro. En otras palabras ***las derivadas se puede calcular para casi toda situación en la que haya variación en alguna cantidad cuando otra de las cantidades aumente o disminuya***.

Desde el punto de vista físico la derivada sirve, naturalmente, para estudiar aquello para lo que inicialmente se inventó, la rapidez del movimiento y la rapidez de los cambios en general, así como la cuantificación de la influencia de una causa sobre sus efectos.

La derivada es el ritmo de cambio de cualquier función en un determinado punto o instante.

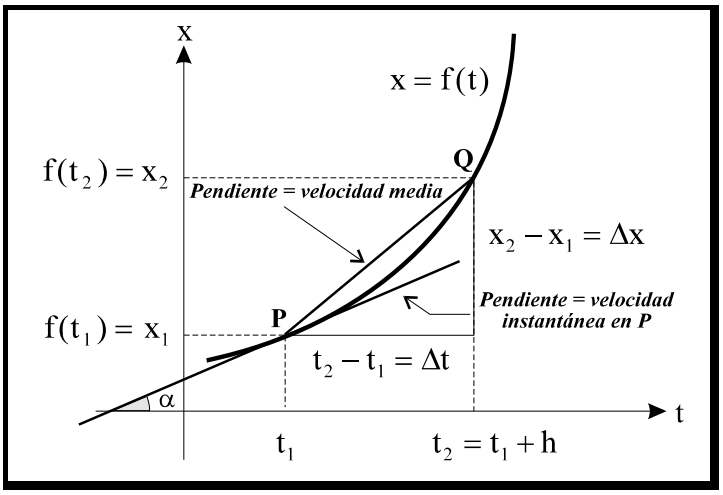
Hay muchas máquinas contemporáneas que calculan derivadas. Un velocímetro o cuentakilómetros es una máquina que deriva, y da la derivada de la distancia recorrida en cada instante a lo largo del camino. El ritmo de cambio de posición es la velocidad instantánea expresada en Km/h. Cuando el vehículo no se mueve no recorre ninguna distancia. Aquí la posición es constante y la derivada de una constante es cero.

Movimiento rectilíneo. Velocidad media. Veloc. instantánea.

Se dice que un móvil posee un movimiento rectilíneo cuando el conjunto de puntos por los que va pasando están alineados, esto es, cuando la trayectoria es una línea recta. Un ejemplo sencillo de movimiento monodimensional es un coche moviéndose a lo largo de una carretera plana, recta y estrecha.

Para describir estos movimientos tomaremos un eje x coincidente con la recta en la que se desarrolla el movimiento. Elegimos un punto O como origen. A su derecha las abscisas serán positivas y a su izquierda negativas.

La posición del móvil viene fijada por el valor de la abscisa x del punto en que se encuentra. Describir un movimiento rectilíneo será pues encontrar una función $x(t)$ que nos de en cada instante cuál es la posición del móvil.



Para un móvil que se mueve a lo largo del eje x, la curva de la figura adjunta es una gráfica de su abscisa x en función del tiempo $x(t)$.

Si la posición del móvil en el instante t_1 es x_1 y la posición h segundos después, esto es, en el instante $t_2 = t_1 + h$, es x_2, la diferencia $\Delta x = x_2 - x_1$ se llama desplazamiento del móvil correspondiente a un intervalo de tiempo de h segundos.

Velocidad media

Se define la velocidad media $\mathbf{v_m}$ ***de un móvil en un intervalo de h segundos como el cociente entre el desplazamiento*** $\mathbf{\Delta x}$ ***correspondiente a esos h segundos y el intervalo de tiempo*** $\mathbf{\Delta t = t_2 - t_1}$

$$\mathbf{v_m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

o también

$$\mathbf{v_m = \frac{f(t_1 + h) - f(t_1)}{h} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}}$$

Obsérvese que el desplazamiento y la velocidad media pueden ser positivos o negativos, dependiendo de si x_2 es mayor o menor que x_1 (suponiendo Δt positivo). Un valor positivo indica un movimiento hacia la derecha y negativo hacia la izquierda.

En la figura anterior se ha dibujado un segmento de recta desde el punto (t_1, x_1) al punto (t_2, x_2). Este segmento es la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos Δx e Δt. El cociente $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ se denomina *pendiente* de esta recta. En términos geométricos es una medida de la inclinación de la recta en el gráfico. Dado un Δt determinado, cuanto mayor sea la inclinación de la recta, mayor será el valor de $\frac{\Delta x}{\Delta t}$. Como la pendiente de esta recta es precisamente la velocidad media en el intervalo de tiempo Δt, tenemos así una interpretación geométrica de la velocidad media. ***La velocidad media es la pendiente de la recta que pasa por los puntos*** (t_1, x_1) ***y*** (t_2, x_2).

Velocidad instantánea

A primera vista puede parecer imposible definir la velocidad de un móvil en un sólo instante, es decir, en un tiempo específico. En un instante t_1, la partícula está en un sólo punto x_1. Si está en un sólo punto ¿cómo puede estar moviéndose? Por otra parte, si no se está moviendo, ¿no debería permanecer en el mismo punto? Esto constituye una antigua paradoja que puede resolverse cuando nos damos cuenta que para observar el movimiento y así definirlo, debemos observar la posición del objeto en más de un instante. Entonces resulta posible definir la velocidad en un instante mediante un proceso de paso al límite.

Supongamos que se desea encontrar la velocidad instantánea de la partícula en el punto P de la figura anterior. La velocidad media entre los puntos P y Q está ligada al desplazamiento completo Δx y a todo el intervalo de tiempo Δt. Imaginemos que el segundo punto Q se toma cada vez más próximo al primero P, y supongamos que se calcula la velocidad media correspondiente a estos desplazamientos e intervalos de tiempo cada vez más pequeños. La velocidad instantánea en el primer punto puede así definirse como el valor límite de la velocidad media cuando el segundo punto tiende a coincidir con el primero. Aunque el desplazamiento se hace entonces infinitamente pequeño, el intervalo de tiempo por el cual ha de dividirse es también infinitamente pequeño y el cociente toma, en general, un valor finito.

La velocidad instantánea es el límite del cociente $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ ***cuando*** Δt ***tiende a cero.*** Este límite se denomina derivada de x respecto a t en el punto t_1. La notación usual para la derivada es $\frac{dx}{dt}$.

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Una velocidad positiva indica un movimiento hacia la derecha a lo largo del eje x, si utilizamos el convenio habitual de signos.

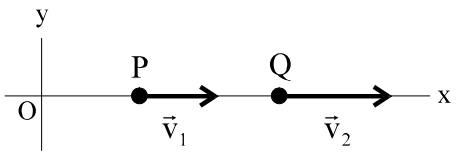
Cuando el punto Q se aproxima al P en las dos figuras de anteriores, en el límite, la pendiente de la cuerda PQ es igual a la pendiente de la tangente a la curva en el punto P. ***La velocidad instantánea en cualquier punto de una gráfica abscisa-tiempo es, por tanto, igual a la pendiente de***

su tangente en dicho punto. Si la tangente sube hacia la derecha, la pendiente es positiva, la velocidad es también positiva, y el movimiento, hacia la derecha. Si la tangente desciende hacia la derecha, la velocidad es negativa. En un punto donde la tangente sea horizontal, la pendiente es nula, y la velocidad también es cero.

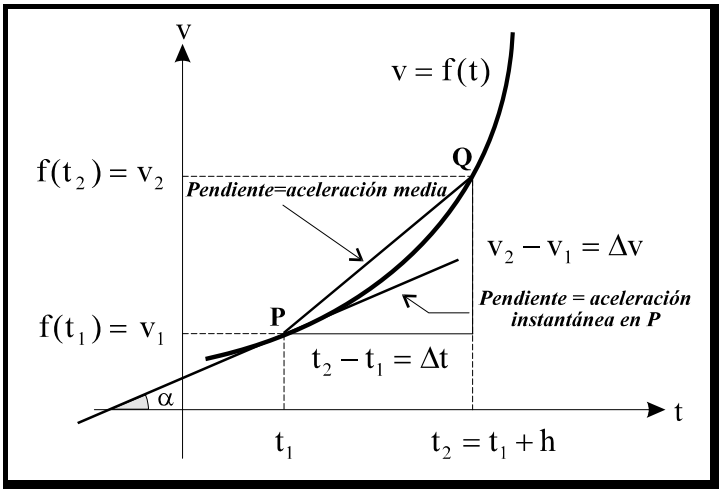
$$\mathbf{v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = tg\,\alpha}$$

Aceleración.

Cuando la velocidad instantánea de una partícula está variando con el tiempo, se dice que el móvil está acelerando. Decimos que un vehículo es capaz de una gran aceleración, no cuando alcanza grandes velocidades, sino cuando puede aumentar mucho su velocidad en un intervalo pequeño de tiempo. Según esto es evidente que un coche "en primera" puede lograr mayor aceleración que en "cuarta", a pesar de que la velocidad que se alcanza es menor.



La figura muestra una partícula móvil a lo largo del eje x. El vector $\vec{v}_1$ representa su velocidad instantánea en el punto P y el $\vec{v}_2$ la velocidad instantánea en el punto Q.



Para un móvil que se mueve a lo largo del eje x, la curva de la figura adjunta es una gráfica de su velocidad en función del tiempo $v(t)$.

Si la velocidad del móvil en el instante t_1 es v_1 y la velocidad en el instante $t_2 = t_1 + h$, es v_2, la diferencia $\Delta v = v_2 - v_1$ representa el cambio de velocidad del móvil correspondiente a un intervalo de tiempo de h segundos.

Aceleración media

Se define la aceleración media $\mathbf{a_m}$ ***de un móvil cuando se mueve de P a Q, en un intervalo de h segundos como el cociente entre el cambio de velocidad y el tiempo transcurrido.***

$$\mathbf{a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}}$$

o también

$$\mathbf{a_m = \frac{f(t_1 + h) - f(t_1)}{h} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}}$$

En la figura anterior se ha dibujado un segmento de recta desde el punto (t_1, v_1) al punto (t_2, v_2). Este segmento es la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos Δv e Δt. El cociente $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ se denomina *pendiente* de esta recta. En términos geométricos es una medida de la inclinación de la recta en el gráfico. Dado un Δt determinado, cuanto mayor sea la inclinación de la recta, mayor será el valor de $\frac{\Delta v}{\Delta t}$. Como la pendiente de esta recta es precisamente la aceleración media en el intervalo de tiempo Δt, tenemos así una interpretación geométrica de la aceleración media. ***La aceleración media es la pendiente de la recta que pasa por los puntos*** (t_1, v_1) ***y*** (t_2, v_2).

Aceleración instantánea

La aceleración instantánea de un cuerpo (esto es, su aceleración en cierto instante o en cierto punto de su trayectoria) se define del mismo modo que la velocidad instantánea. Tomemos el punto Q cada vez más próximo al punto P en la figura anterior, y calculemos la aceleración media sobre intervalos de tiempo menores cada vez. Se define la aceleración instantánea en el punto P como el límite de la aceleración media cuando el punto Q tiende a coincidir con el primero.

La aceleración instantánea es el límite del cociente $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ ***cuando*** Δt ***tiende a cero.*** Este límite se denomina derivada de v respecto a t en el punto t_1. La notación usual para la derivada es $\frac{dv}{dt}$.

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Esto es, la ***aceleración es la derivada de la velocidad respecto al tiempo.*** Como la velocidad es también la derivada de la posición x respecto a t, la aceleración es la derivada segunda de x respecto a t.

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Si la velocidad es constante, la aceleración es cero, puesto que $\Delta v = 0$ en todos los intervalos de tiempo. En este caso no varía la pendiente de la curva $x - t$.

Cuando el punto Q se aproxima al P, en el límite, la pendiente de la cuerda PQ es igual a la pendiente de la tangente a la curva en el punto P. ***La aceleración instantánea en cualquier punto de una gráfica velocidad-tiempo es, por tanto, igual a la pendiente de la tangente en dicho punto.***

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = tg\,\alpha$$

Ley de la gravedad o ley de la caída de los cuerpos

La ley de la gravedad dice que ***"En el vacío, todos los cuerpos caen con la misma aceleración constante"*** o lo que es lo mismo, ***"el efecto de la gravedad en todos los cuerpos es siempre el mismo, con independencia de su peso".***

Desde Galileo a Isaac Newton y hasta Albert Einstein éste fue uno de los mayores misterios de la Física.

Ahora bien, entender esto sería casi imposible si no contáramos con un dispositivo matemático llamado **derivada**.

Aunque esto nos parezca muy profundo e interesante, esta ley está violentando nuestra más simple intuición, porque esto que decimos sucede en el vacío y no en el mundo que nos es familiar.

Seguramente para todos nosotros nuestro primer contacto con las leyes de la naturaleza habrá sido el efecto de la fuerza de la gravedad en la Tierra. Entendamos o no cómo funciona la fuerza de la gravedad tenemos un temor innato a sus efectos. ¿Pero qué es exactamente ése efecto de la gravedad? Hay cuerpos que caen con rapidez y de forma rectilínea (saltador de trampolín en una piscina), pero hay otros en cambio que tienen un comportamiento diferente (hoja que cae de un árbol). En algunos casos casi no se puede definir cómo y por qué caen los cuerpos. Debemos distinguir el efecto de la gravedad sobre un cuerpo que cae, del efecto de oposición del aire por donde cae. En otras palabras tenemos que imaginarnos un cuerpo que cae en el vacío.

Por ejemplo, si una moneda y una pluma caen simultáneamente desde la misma altura se comportarán como esperábamos. Han caído a diferente velocidad. Pero eso es sólo a causa de la resistencia del aire sobre ambos objetos. En el vacío, una moneda, una pluma y cualquier otro objeto caerían a la misma velocidad.

El vacío desde el punto de vista de la Física es un espacio que no contiene en su interior ni la más pequeña partícula de materia. En realidad, el vacío es la nada por definición. Lo más parecido al vacío absoluto se podría encontrar en el espacio intergaláctico, donde se estima que sólo hay una molécula por centímetro cúbico. El mayor grado de vacío que se ha conseguido alcanzar artificialmente todavía contiene más de 300.000 moléculas por centímetro cúbico, que, no obstante es un vacío considerable si se compara con los 30 billones $\left(3\cdot 10^{19}\right)$ de moléculas que hay normalmente en un centímetro cúbico de aire al nivel del mar.

El vacío se consigue extrayendo todo el gas, o todo el que sea posible, de un recipiente, e impidiendo que la presión atmosférica permita que este gas regrese nuevamente al interior de aquél. La presión atmosférica se debe al peso del aire de la atmósfera terrestre; si se extrae el gas de un recipiente, en su interior habrá una presión menor que en su exterior

Si introducimos la moneda y la pluma en un tubo de cristal sin prácticamente aire, es decir en el vacío, las dos caen exactamente a la misma velocidad. Sin el efecto que produce la resistencia del aire todos los cuerpos, independientemente de su peso, caen a la misma velocidad.

Hace casi 400 años, cuando todo el mundo pensaba que los cuerpos pesados caían con más rapidez que los ligeros, Galileo se dio cuenta de que en el vacío todos los cuerpos caerían a la misma velocidad. Por supuesto Galileo no podía conseguir un vacío, pero pudo imaginar uno.

Pintó un cuerpo pesado unido a otro ligero. Éste cuerpo compuesto ¿caería más deprisa o más despacio que el cuerpo pesado sólo? Si el cuerpo ligero caía más despacio retardaría la caída del cuerpo pesado, pero al mismo tiempo un cuerpo compuesto tiene que pesar más que uno sólo pesado, por lo tanto el cuerpo compuesto tendría que caer más deprisa que el cuerpo pesado sólo pero nunca más despacio. Es obvio que la idea que un cuerpo pesado cae con más rapidez sólo conduce a una ineludible contradicción.

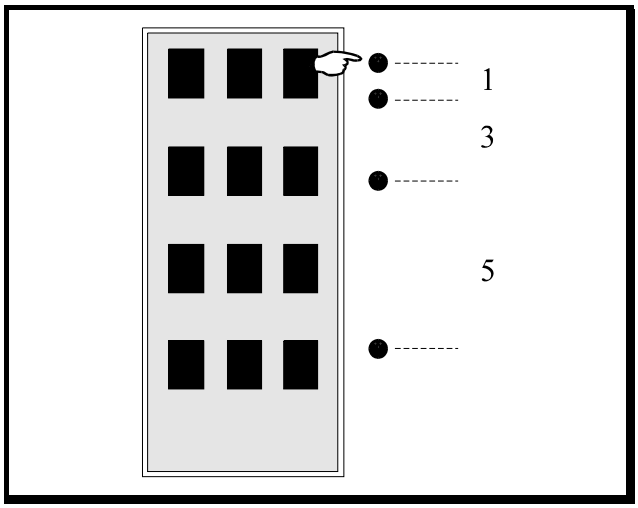
Galileo se dio cuenta entonces de que la única opinión lógicamente aceptable era que todos los cuerpos caen a la misma velocidad cuando se suprime la resistencia del aire. Si todos los cuerpos caen en el vacío a la misma velocidad, la siguiente pregunta es ¿y cual es exactamente ésa velocidad?

Por nuestras propias experiencia sabemos que la velocidad de un cuerpo al caer aumenta durante la caída, lo cual significa que acelera, cayendo cada vez con más rapidez.

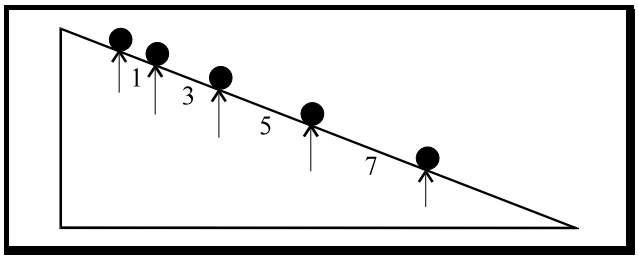
Incluso antes de Galileo, algunos eruditos ya habían intentado dar una explicación a ése movimiento de aceleración. Aproximadamente 100 años antes, Leonardo Da Vinci ya había hecho su propio estudio de la caída de los cuerpos animado quizá por su sueño de volar. Más que preguntarse por la rapidez de la caída de los cuerpos, Da Vinci se preguntaba cuánto caerían en los sucesivos intervalos de tiempo.

Su teoría del movimiento acelerado era que un cuerpo recorrería cayendo mayores distancias en intervalos posteriores. Después concluyó con la teoría de que las distancias seguían la ley de los números enteros, es decir, una unidad de distancia en el primer intervalos de tiempo, dos unidades en el segundo intervalo de tiempo, etc.

Galileo adoptó el método de descripción de Leonardo da Vinci, pero llegó a una conclusión diferente de cómo crecían las distancias. En lugar de crecer de ése modo, Galileo tenía la teoría de que las distancias estaban relacionadas con los números impares. Una unidad de distancia en el primer intervalo de tiempo, tres unidades de distancia en el segundo intervalo, cinco unidades de distancia en el tercer intervalo, etc. En otras palabras, según Galileo, la distancia recorrida en cada intervalo es proporcional a los números impares.



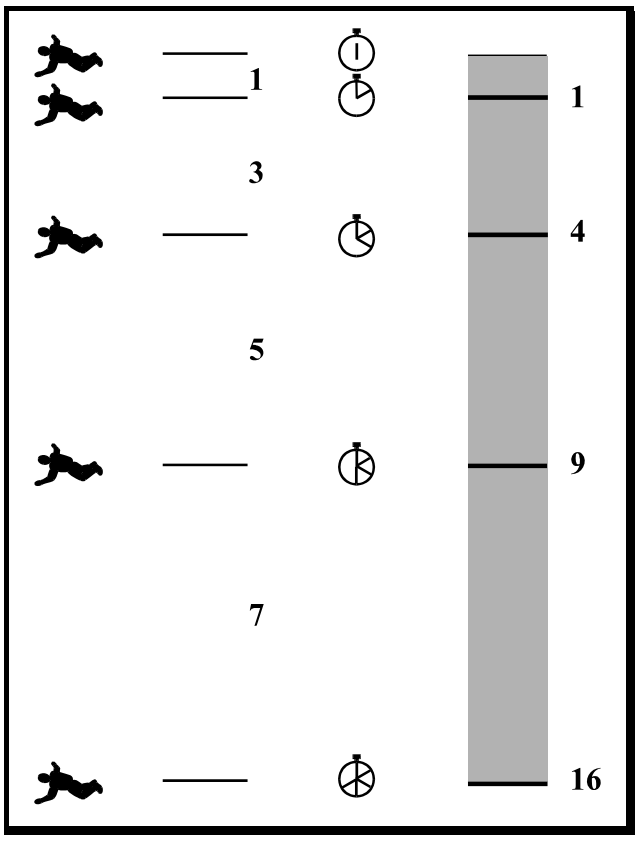
Galileo llegó a sus conclusiones después de realizar una brillante serie de experimentos en los que medía el tiempo que rodaba una bola por planos inclinados cada vez más empinados.



La ley de los números impares de Galileo se puede ver en acción en una caída libre a través del espacio bajo la influencia de la gravedad.

En sucesivos intervalos de tiempo, las distancias recorridas cayendo siguen los números impares. Aquí hay algo más que Galileo también vio. Si nos fijamos en la distancia total recorrida en un instante, después del primer intervalo de tiempo una unidad de distancia, después del segundo intervalo 4 unidades de distancia, después del tercer intervalo 9 unidades de distancia, después del cuarto 16 unidades. En otras palabras, al final de cada intervalo la distancia total recorrida cayendo es de 1, 4, 9, 16, 25,..... y así sucesivamente. Y esos números son, por supuesto, cuadrados perfectos, o sea, que la distancia recorrida en la caída es proporcional al cuadrado del tiempo, y de este modo la ley de Galileo se puede escribir en una simple ecuación utilizando **s** para la distancia y **t** para el tiempo:

$$\mathbf{s(t) = k \cdot t^2}$$



que quiere decir que estamos hablando de la distancia como función del tiempo.

Esta constante **k** numéricamente es igual a la distancia que recorre el cuerpo cayendo durante el primer segundo, aproximadamente 4'9 m.

En cualquier punto de la caída, la distancia es igual a k veces el cuadrado del tiempo. Así, después de 2 seg. la distancia recorrida cayendo es igual a k veces 2 al cuadrado, es decir:

$$s(2) = k \cdot 2^2 = 4k$$

Si tomamos el valor 4'9 para k sabemos que ha caído $s(2) = 4 \cdot 4'9 \cong 19'6\text{m}.$

De nuevo esta fórmula quiere decir, que para cualquier instante t se puede encontrar el valor de s. En este punto nos podemos preguntar cuánto ha recorrido en la caída en cada instante. Y también queremos saber con qué rapidez está cayendo. Se divide entonces la distancia que recorre cayendo entre el tiempo que ha empleado. Por ejemplo, como durante los 2 primeros segundos cayó 19'6 m. su velocidad media será de 9'8 m. por segundo.

$$\text{velocidad media} = \frac{19'6\,\text{m.}}{2\,\text{seg.}} = 9'8\,\text{m/seg}$$

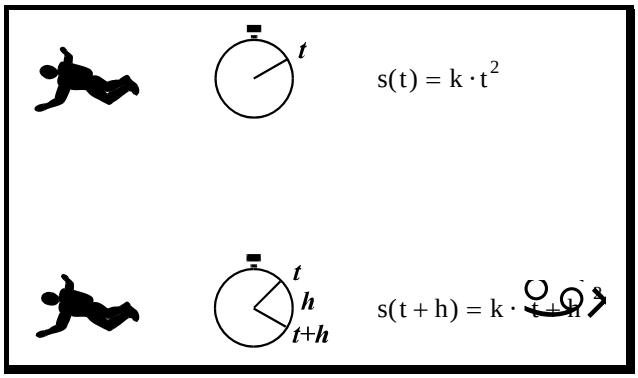
Pero eso es sólo su velocidad media. Al comienzo estábamos parados. Después de 2 seg estamos cayendo mucho más deprisa que 9'8 m/seg. Pero lo que realmente deseamos saber no es nuestra velocidad media sino nuestra velocidad exacta o instantánea en cualquier instante dado.

Sin embargo, si queremos utilizar la misma ecuación dividiendo la variación de distancia por la variación de tiempo se nos plantea un serio problema.

$$\text{velocidad media} = \frac{\text{cambio en la distancia}}{\text{cambio en el tiempo}}$$

En cualquier instante durante la caída, digamos a 1'5 seg., la variación en la distancia y en el tiempo es exactamente cero. Así, una fórmula que determine la velocidad dividiendo la variación en el tiempo, no es útil cuando se tiene un punto A pero no un punto separado B para trabajar con él. Y para complicar aún más las cosas, el máximo y el mínimo del cociente serían cero. Dividir por cero es un desastre matemático. Tal vez la expresión velocidad instantánea sea una contradicción en sus términos. Sin embargo, el propio sentido común nos dice que un objeto en movimiento debe tener una cierta velocidad en cada instante. El problema es mucho más que un juego ingenioso de palabras, es un dilema que ha importunado durante miles de años a todos los matemáticos, pero no había modo de resolverlo.

En lugar de pedir la velocidad instantánea en un tiempo exacto **t** pida cuál es la velocidad media entre el tiempo **t** y un tiempo **h** segundos más tarde, el tiempo $\mathbf{t+h}$. El cambio en el tiempo es **h** segundos. Si la distancia recorrida cayendo en un tiempo t es igual a $s(t) = k \cdot t^2$, la distancia recorrida cayendo en un tiempo $t+h$ es igual a $s(t+h) = k \cdot (t+h)^2$



$$\text{velocidad media} = \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \frac{k \cdot (t+h)^2 - k \cdot t^2}{h} = \frac{2kth + kh^2}{h} = 2kt + kh$$

Hemos resuelto el problema, y ahora ya podemos calcular la velocidad media comenzando en cualquier instante para cualquier intervalo h. Pero h puede ser un segundo, medio segundo, una décima de segundo o incluso 0, porque ahora no estamos dividiendo por cero.

Ahora podemos reducir el intervalo y hacerlo muy pequeño hasta llegar al límite. En ése instante hemos calculado una derivada ya que el intervalo se ha reducido a cero. Si h es exactamente cero, nos encontramos con que en un instante t cualquiera existe una velocidad instantánea y la llamaremos **v**.

$$v = \lim_{h\to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k\cdot(t+h)^2 - k\cdot t^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2kth + kh^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2kt + kh) = 2kt$$

Si seguimos utilizando el valor 4'9 para k podemos afirmar que la distancia que hemos recorrido es sólo $s(t) = 4'9\cdot t^2$ metros y su velocidad en cada instante ha sido $v(t) = 9'8\cdot t$ metros por segundo.

En el lenguaje común derivada quiere decir que deriva de algo, como por ejemplo en la frase el dulce de chocolate es derivado del chocolate. Pero en matemáticas ésa palabra tiene un significado técnico muy concreto. Es el ritmo con el que algo está cambiando. La velocidad de nuestra caída era la derivada de la distancia desde lo alto, en otras palabras, la velocidad es la derivada de la distancia.

Al principio cuando hablamos de la velocidad media estábamos haciendo Álgebra, simplemente dando valores a la ecuación $\text{velocidad media} = \dfrac{\text{cambio en la distancia}}{\text{cambio en el tiempo}}$, pero cuando comenzamos a trabajar con un intervalo de duración h y lo hicimos tender a 0 estábamos calculando una derivada y entramos en el mundo del cálculo diferencial.

Para ir de la distancia a la velocidad tuvimos que calcular una derivada, pero ¿y qué pasa con la aceleración de un cuerpo al caer? Pues que para ir de la velocidad a la aceleración hacemos exactamente lo mismo.

$$v(t) = 2kt \qquad v(t+h) = 2k\cdot(t+h)$$

$$\text{aceleración media} = \lim_{h\to 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2k\cdot(t+h) - 2kt}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2kh}{h} = 2k$$

$$a(t) = 2k$$

Veamos lo que ha ocurrido:

- La distancia **s** se mantiene creciendo con el tiempo $\mathbf{s(t) = k\cdot t^2}$. Si hay variación en t hay variación también en s.
- La velocidad **v** también crece con el tiempo $\mathbf{v(t) = 2kt}$.
- La aceleración **a** no depende en absoluto del tiempo. Es sencillamente una constante $\mathbf{a(t) = 2k}$. Independiente del valor de t, **a** es siempre la misma. Por fin lo hemos conseguido. Hemos obtenido que el resultado de la gravedad es una aceleración constante.

Teníamos tres preguntas sobre la caída de los cuerpos: ¿Cuánto caían? ¿Con qué velocidad? y ¿Con qué rapidez variaba su velocidad?

Con bastante facilidad pudimos saber la distancia recorrida. La velocidad media se obtuvo por medio del Álgebra, y luego para saber a qué velocidad caía exactamente el cuerpo en cada instante y con qué rapidez variaba su velocidad tuvimos que utilizar el instrumento matemático llamado **derivada**.

Usando la derivada hemos podido explicar el movimiento de caída de los cuerpos. Los cuerpos caen con aceleración constante. Como ésa aceleración es muy importante tiene su símbolo propio: $\mathbf{g = 2k}$**.** Y ahora ya podemos escribir *las tres expresiones de la ley de la gravedad* en su forma definitiva cambiando k por $\frac{g}{2}$.

$$\mathbf{s(t) = \frac{1}{2}gt^2} \qquad \mathbf{v(t) = gt} \qquad \mathbf{a(t) = g}$$

Según la **ley de la gravedad**: ***un cuerpo cae con una aceleración constante a una velocidad proporcional al tiempo y recorre en la caída una distancia proporcional al cuadrado del tiempo.*** Este tipo de movimiento se llama **movimiento uniformemente acelerado.**

Es difícil pero no imposible llegar a conocer esos tres hechos sobre el movimiento uniformemente acelerado sin hacer uso del cálculo diferencial. Pero Galileo comprendió los tres hechos. En realidad casi 300 años antes de Galileo un erudito francés llamado Nicole Oresme trabajó sobre el comportamiento del movimiento uniformemente acelerado. Oresme y Galileo utilizaron casi idénticos métodos matemáticos para analizar el problema. Dichos métodos se basaban no en ecuaciones algebraicas sino en proporciones entre cantidades y en figuras geométricas.

Aproximadamente 25 años después de la muerte de Galileo (1564-1642), Sir Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) descubrieron el **cálculo diferencial**. Su poder deriva de la idea que le sustenta, **la derivada**. La derivada es para la cinemática lo que las ruedas son para un viaje. Con este nuevo y poderoso método de análisis se pueden analizar tipos aún más complicados de movimientos. Describir el movimiento uniformemente acelerado llega a ser incluso muy fácil.

Sin las derivadas es muy difícil entender qué significa aceleración y menos aún describir el movimiento uniformemente acelerado y explotar a fondo sus consecuencias. Y sin embargo Oresme y Galileo lo hicieron. Describieron el movimiento uniformemente acelerado y sacaron sus consecuencias. Fueron verdaderos genios.

Si yo dejo caer algo, cae bajo la influencia de la gravedad de la Tierra. Al caer su movimiento ha sufrido una cierta influencia debido a la oposición del aire. Si ahora imagino que puedo deshacerme del aire y dejo caer el objeto en el vacío enseguida descubro un dramático y a la vez sorprendente hecho, "*Todos los cuerpos caen a la misma velocidad*".

¿Cuál es la naturaleza de la gravedad que lleva a tan extraño comportamiento? Esa cuestión es una de las más profundas de la física. Duró hasta nuestro propio siglo y fue el punto de partida para la teoría general de la relatividad de Albert Einstein (1879-1955).

Tenemos en realidad tres proposiciones matemáticas precisas de la ley de la gravedad: *todos los cuerpos caen con la misma aceleración constante, y la aceleración es el ritmo de cambio de la velocidad y la velocidad es el ritmo de cambio de la distancia. Se relacionan entre sí por medio de un grande y crucial descubrimiento de la historia de las matemáticas, el* ***cálculo diferencial***, el suceso más importante en matemáticas durante miles de años.

La derivada en la Física

En la siguiente tabla se muestran las principales magnitudes de la física que se expresan con el concepto de derivada.

La derivada proporciona información acerca de cómo varía una función respecto a su variable. Esta información tiene un significado físico distinto para cada par de magnitudes relacionadas.

MAGNITUDES	Forma vectorial	Forma escalar
Velocidad	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	$v = \frac{ds}{dt}$
Aceleración	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	$a = \frac{dv}{dt}$
Velocidad angular	$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}$	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
Aceleración angular	$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
Densidad		$\rho = \frac{dM}{dV}$
Presión	$\vec{p} = \frac{d\vec{F}}{dS}$	$p = \frac{dF}{dS}$
Potencia mecánica		$p = \frac{dW}{dt}$
Campo gravitatorio	$\vec{g} = -\frac{dv}{dr} \cdot \vec{u}_r$	$g = -\frac{dv}{dr}$
Segunda ley de Newton	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$	$F = \frac{dp}{dt} = ma$
Rotación de un sólido alrededor de un eje	$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$	$M = \frac{dL}{dt}$
Segunda ley de Kepler	$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{k}$	$\frac{dA}{dt} = cte.$
Campo eléctrico conservativo	$\vec{E} = -\frac{dV}{dr} \cdot \vec{u}_r$	$E = -\frac{dV}{dr}$
Intensidad de la corriente eléctrica		$I = \frac{dQ}{dt}$
Densidad superficial de carga		$\sigma = \frac{dQ}{dA}$
Ley de Faraday-Lenz		$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt}$
Constante radiactiva		$= -\frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{dt}$

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

Funciones	Derivadas
$f(x) = k \qquad k \in R$	$\mathbf{f'(x) = 0}$
$f(x) = x^k$	$\mathbf{f'(x) = k \cdot x^{k-1}}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbf{f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}$
$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$\mathbf{f'(x) = \dfrac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}}$
$f(x) = \ln x$	$\mathbf{f'(x) = \dfrac{1}{x}}$
$f(x) = \log_a x \quad a > 0 \quad a \neq 1$	$\mathbf{f'(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \log_a e}$
$f(x) = e^x$	$\mathbf{f'(x) = e^x}$
$f(x) = a^x \quad a > 0 \quad a \neq 1$	$\mathbf{f'(x) = a^x \cdot \ln a}$
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$\mathbf{f'(x) = \cos x}$
$f(x) = \cos x$	$\mathbf{f'(x) = -\operatorname{sen} x}$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$\mathbf{f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}}$
$f(x) = \operatorname{arcsen} x$	$\mathbf{f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$
$f(x) = \arccos x$	$\mathbf{f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}}$
$f(x) = \operatorname{arctg} x$	$\mathbf{f'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}}$

Derivada de la suma

Supongamos que un pintor pinta $\frac{dA_1}{dt} = 90\ \frac{m^2}{hora}$, y otro pintor pinta $\frac{dA_2}{dt} = 100\ \frac{m^2}{hora}$. Esos son los ritmos a los que las superficies de pared cambian de color, en otras palabras, son las derivadas, por consiguiente cada hora se han pintado

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA_1}{dt} + \frac{dA_2}{dt} = 190\ \frac{m^2}{hora}$$

Así es como funciona la regla de la suma

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones derivables en un mismo intervalo I, entonces la función suma $f(x) \pm g(x)$ es derivable en I y su derivada es

$$\boxed{\left[f(x) \pm g(x)\right]' = f'(x) \pm g'(x)}$$

La derivada de una suma de funciones es igual a la suma de las derivadas de dichas funciones.

Demostración

$$\left[f(x) \pm g(x)\right]' = \lim_{h \to 0} \frac{\left[f(x+h) \pm g(x+h)\right] - \left[f(x) \pm g(x)\right]}{h} =$$

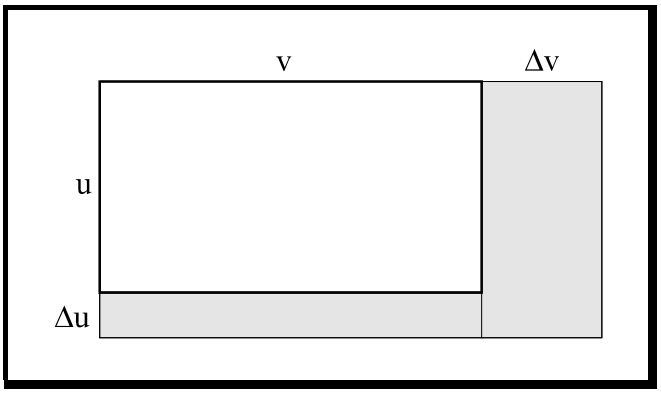
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) \pm g'(x)$$

Generalizando a tres o más funciones tenemos

$$\left[f \pm g \pm h\right]' = f' \pm g' \pm h'$$

Derivada del producto

El área de un tablero es el producto de su largo por su ancho. Área = largo·ancho.

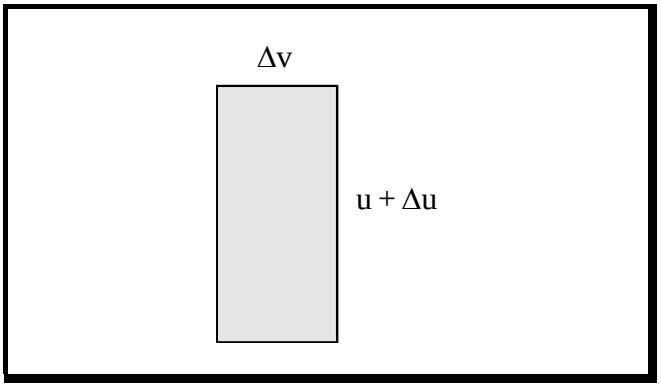


Imaginemos un tablero cuyas dimensiones son:

largo = $v + \Delta v$ y ancho = $u + \Delta u$

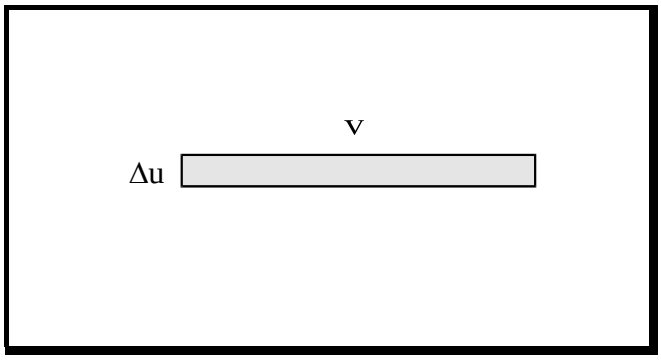
variación en el largo = Δv

variación en el ancho = Δu



Si se acorta el largo, la variación en el área es el producto del ancho multiplicado por la variación en el largo.

$$\Delta\text{Area} = \text{ancho} \cdot \Delta\text{largo} = (u + \Delta u) \cdot \Delta v$$



Si ahora el ancho se reduce sobre lo que nos queda de tablero, la variación en el área es el producto del nuevo largo multiplicado por la variación en el ancho.

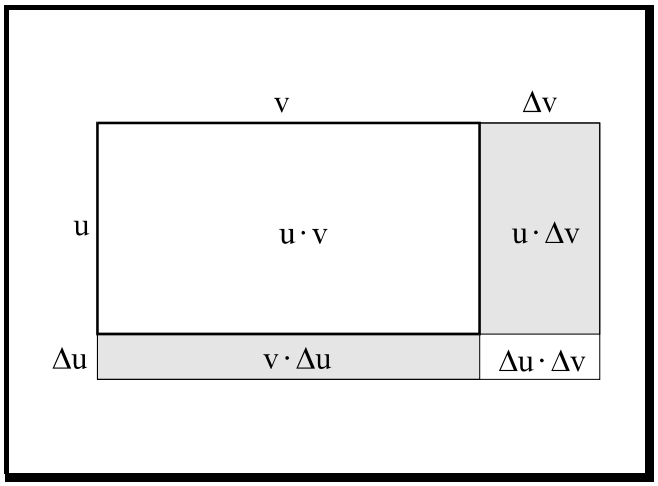
$$\Delta\text{Area} = \text{largo} \cdot \Delta\text{ancho} = v \cdot \Delta u$$

La variación total en el área es la suma de ambos

$$\Delta_T\text{Área} = \text{ancho} \cdot \Delta\text{largo} + \text{largo} \cdot \Delta\text{ancho} = (u + \Delta u) \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u = u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u$$

y es así en el lenguaje del carpintero como en el lenguaje de las derivadas.

Si $u = f(x)$ y $v = g(x)$ son los lados del tablero que dependen de la variable **x**, su área representa el producto $y = u \cdot v$. Veamos cual es el incremento en el área Δy correspondiente a un incremento en las longitudes de los lados, es decir correspondiente a un Δu y a un Δv:



Si $y = u \cdot v = f(x) \cdot g(x)$ tenemos que la tasa de variación media es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(u + \Delta u) \cdot (v + \Delta v) - u \cdot v}{\Delta x} =$$

$$\frac{u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x}$$ que podemos

escribir $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x}$$

Como u y v son derivables, al tomar límites tenemos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv}{dx} \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x} = 0$$

El último límite es cero porque al depender u y v de x entonces $\Delta u \cdot \Delta v$ es un infinitésimo de orden superior a Δx, por tanto tiende más rápidamente a cero.

luego

$$\frac{dy}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$$

es decir

$$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones derivables en un mismo intervalo I, entonces la función producto $f(x) \cdot g(x)$ es derivable en I y su derivada es:

$$\left[f(x) \cdot g(x)\right]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

La derivada del producto de dos funciones es igual a la derivada de la primera función por la segunda sin derivar, más la primera sin derivar por la derivada de la segunda.

Demostración

La demostración utiliza la derivada del logaritmo neperiano y la derivada de la función compuesta. De este modo, la derivada del producto se reduce a la derivada de una suma de funciones.

$$y = f(x)\cdot g(x) \;\rightarrow\; \ln y = \ln\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \ln\left[f(x)\right] + \ln\left[g(x)\right] \;\rightarrow\; \frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$y' = \frac{f(x)\cdot g(x)\cdot f'(x)}{f(x)} + \frac{f(x)\cdot g(x)\cdot g'(x)}{g(x)} = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

Para el caso de tres o más funciones tendremos

$$\left[\mathbf{f\cdot g\cdot h}\right]' = \mathbf{f'\cdot g\cdot h + f\cdot g'\cdot h + f\cdot g\cdot h'}$$

La derivada del producto de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función.

$$\left[\mathbf{a\cdot f(x)}\right]' = \mathbf{a\cdot f'(x)}$$

Derivada del cociente

Si f(x) y g(x) son dos funciones derivables en un mismo intervalo I y para todo $x\in I$ es $g(x)\neq 0$ entonces la función cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ es derivable en I y su derivada es:

$$\left[\frac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{g(x)}}\right]' = \frac{\mathbf{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}}{\left[\mathbf{g(x)}\right]^2}$$

La derivada de un cociente de funciones es igual a la derivada del numerador por el denominador sin derivar, menos el numerador sin derivar por la derivada del denominador, dividido todo ello por el cuadrado del denominador.

Demostración

La demostración utiliza la derivada del logaritmo neperiano y la derivada de la función compuesta. De este modo, la derivada del cociente se reduce a la derivada de una diferencia de funciones.

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \ln y = \ln[f(x)] - \ln[g(x)] \qquad \text{Derivando tenemos} \qquad \frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$y' = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{f(x) \cdot f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x) \cdot f(x)}{f(x) \cdot [g(x)]^2} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Ejemplo: Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$$\mathbf{f(x) = 5x^2 - \frac{2x}{\sqrt{7}} + \pi x^3 - \ln 3} \qquad \mathbf{g(x) = \frac{2x^3 - 5x + 8}{6}}$$

$$\mathbf{h(x) = \sqrt{5}\, x^4 - 6 \ln x + \operatorname{sen} x \cdot \cos x}$$

$$f'(x) = 5 \cdot 2x - \frac{2}{\sqrt{7}} \cdot 1 + \pi \cdot 3x^2 - 0 = 10x - \frac{2}{\sqrt{7}} + 3\pi x^2$$

$$g'(x) = \frac{1}{6} \cdot \left(2 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 1 + 0\right) = \frac{6x^2 - 5}{6}$$

$$h'(x) = \sqrt{5} \cdot 4x^3 - 6 \cdot \frac{1}{x} + \cos x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x \cdot (-\operatorname{sen} x) =$$
$$4\sqrt{5}\, x^3 - \frac{6}{x} + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

Ejemplo: Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$$\mathbf{y = \frac{x^2 - \operatorname{sen} x}{\cos x}} \qquad \mathbf{f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x} \qquad \mathbf{y = \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[5]{x}}$$

$$y' = \frac{(2x - \cos x)\cos x - (x^2 - \operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{2x \cos x - \cos^2 x + x^2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

$$f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$

$$y = x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{5}} = x^{\frac{2}{3} + \frac{1}{5}} = x^{\frac{13}{15}} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{13}{15} x^{\frac{13}{15} - 1} = \frac{13}{15} x^{-\frac{2}{15}}$$

Ejemplo: **a) Si $f(x) = 7x^5 \cdot e^x - \text{sen}x \cdot e^x$, calcula $f'(0)$.**

b) Calcula $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ siendo $f(x) = x(\text{sen}x + 1) - \frac{x^2 \cdot \left(1 + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}$

a) $f'(x) = 7\left(5x^4 \cdot e^x + x^5 \cdot e^x\right) - \left(\cos x \cdot e^x + \text{sen}\, x \cdot e^x\right)$

$$f'(0) = 7(0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) - (1 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = 0 - 1 = -1$$

b) $f'(x) = (\text{sen}\, x + 1) + x(\cos x + 0) -$

$$\frac{\left(2x \cdot \left(1 + \sqrt{x}\right) + x^2 \cdot \left(0 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right) \cdot \sqrt{x} - x^2 \cdot \left(1 + \sqrt{x}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2} =$$

$$\text{sen}\, x + 1 + x\cos x - \frac{2x\sqrt{x} + 2x^2 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2\sqrt{x}} - \frac{x^2}{2}}{x}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \text{sen}\frac{\pi}{6} + 1 + \frac{\pi}{6} \cdot \cos\frac{\pi}{6} - \frac{2 \cdot \frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{\pi}{6}} + 2 \cdot \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^2}{2 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{6}}}}{\frac{\pi}{6}} = -0'179149$$

Ejemplo:

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $f(x) = \ln x$ en el punto de abscisa $x = e$.

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $f(x) = \text{sen}x$ en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{4}$.

a) La ecuación de la recta tangente es $y - f(e) = f'(e) \cdot (x - e)$

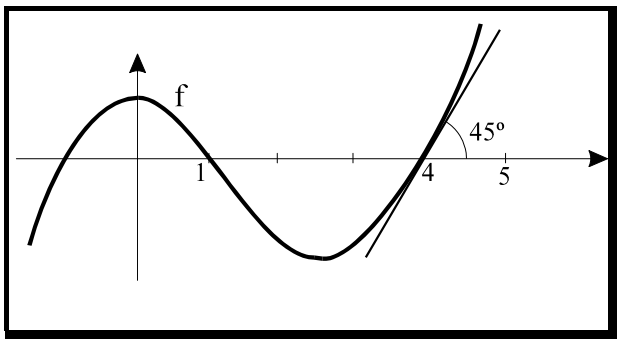
$$f(e) = \ln e = 1 \quad f'(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f'(e) = \frac{1}{e} \rightarrow y - 1 = \frac{1}{e}(x - e) \rightarrow y = \frac{x}{e}$$

b) La ecuación de la recta tangente es $y - f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \text{sen}\,\frac{\pi}{4} = 0'7071 \qquad f'(x) = \cos x \;\rightarrow\; f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = 0'7071$$

$$y - 0'7071 = 0'7071 \cdot (x - 0'7853) \;\rightarrow\; y = 0'7071x + 0'1518$$

Ejemplo: **Determina $f'(0)$ y $f'(4)$. ¿Es $f'(5) > f'(4)$?**



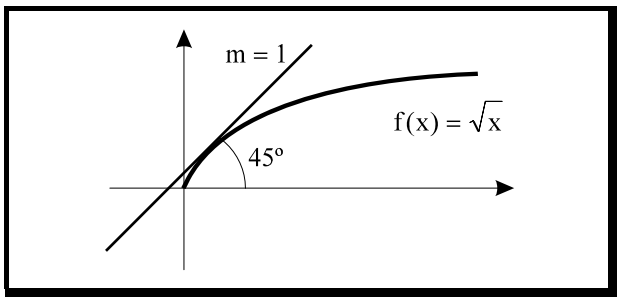
$f'(0) = 0$, ya que la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x = 0$ es paralela al eje de abscisas y por tanto su pendiente es nula.

$$f'(4) = \text{tg}\,45^\circ = 1$$

$f'(5) > f'(4)$, ya que la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x = 5$ tiene mayor pendiente (y por tanto su derivada es mayor) que en el punto de abscisa $x = 4$.

Ejemplo:

a) La función $f(x) = \sqrt{x}$ tiene un punto en el cual la tangente tiene por pendiente 1. ¿Cuál es ese punto? ¿Cuál es la ecuación de la tangente?



b) Halla el punto en el cual la tangente es paralela a la recta $y = \frac{1}{4}x - 1$.

a) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 1 \;\rightarrow\; 2\sqrt{x} = 1 \;\rightarrow\; \left(2\sqrt{x}\right)^2 = 1$

$$4x = 1 \;\rightarrow\; x = \frac{1}{4} \;\rightarrow\; f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

La ecuación de la recta tangente es $y - \dfrac{1}{2} = 1 \cdot \left(x - \dfrac{1}{4}\right) \;\rightarrow\; y = x + \dfrac{1}{4}$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{4} \;\rightarrow\; \sqrt{x} = 2 \;\rightarrow\; x = 4 \;\rightarrow\; y = \sqrt{4} = 2 \;\rightarrow\; (4, 2)$

Derivada de funciones compuestas. Regla de la Cadena

Frecuentemente, una operación depende de otra. Por ejemplo, supongamos que un vehículo tiene un consumo específico de 6 km/litro. Esto es una derivada.

Si y es la distancia recorrida y x la cantidad de gasolina consumida entonces 6 km/litro = $\frac{dy}{dx}$

Supongamos que consume 9 litros/hora. Entonces 9 litros/hora = $\frac{dx}{dt}$

La velocidad de un vehículo en km/hora es igual a los km recorridos por litro de gasolina consumida, multiplicados por los litros que consume por hora.

54 km/hora = 6 km/litro x 9 litros/hora

Esta es la regla de la cadena, que se utiliza cuando y depende de x y x depende de t.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Ejemplo: **Un helicóptero despega a 500 m de un observador y se eleva a 10 m/seg. ¿A qué velocidad varía el ángulo de elevación del helicóptero respecto del observador cuando el helicóptero está a 400 m del suelo?**

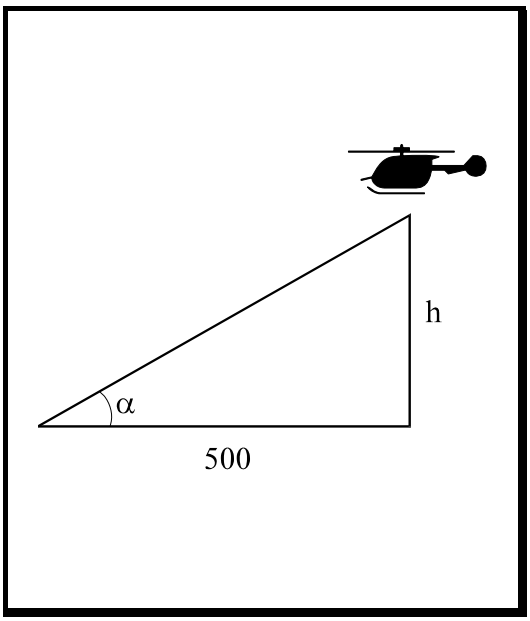
$$\text{tag}\alpha = \frac{h}{500} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \text{arctag}\frac{h}{500}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{1 + \left(\frac{h}{500}\right)^2} \cdot \frac{1}{500} \cdot \frac{dh}{dt}$$

Se sabe que h = 400 m, y $\frac{dh}{dt}$ = 10 m/seg

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{90} \text{ rad/seg}$$



Si f(x) y g(x) son dos funciones derivables en un mismo intervalo I, entonces la función compuesta f[g(x)] es derivable en I y su derivada es:

$$\boxed{\left[f\left[g(x)\right]\right]' = f'\left[g(x)\right]\cdot g'(x)}$$

Demostración

La derivada de la composición de dos funciones es igual al producto de las derivadas de ambas funciones evaluadas en los mismos puntos en que lo estaban en la función compuesta.

$$\left(f\circ g\right)'(x) = \left[f\left[g(x)\right]\right]' = \lim_{h\to 0}\frac{f\left[g(x+h)\right]-f\left[g(x)\right]}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f\left[g(x+h)\right]-f\left[g(x)\right]}{g(x+h)-g(x)}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] = \lim_{h\to 0}\frac{f\left[g(x+h)\right]-f\left[g(x)\right]}{g(x+h)-g(x)}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} =$$

$$f'\left[g(x)\right]\cdot g'(x)$$

observación: *Esta demostración sólo tiene sentido si el incremento* $g(x+h)-g(x)\neq 0$*; sin embargo, el resultado sigue siendo válido aún en el caso contrario.*

La fórmula de la descomposición de funciones se extiende a tres o más funciones aplicando la propiedad asociativa de la composición

$$\left[f\left[g\left[h(x)\right]\right]\right]' = f'\left[g\left[h(x)\right]\right]\cdot g'\left[h(x)\right]\cdot h'(x)$$

Estas últimas expresiones se conocen con el nombre de regla de la cadena.

Ejemplo: Calcular la derivada de la función $y = \sqrt{\operatorname{sen}\left(2x^3-5x+3\right)}$

Sea $h(x) = 2x^3-5x+3$ $\quad g(x) = \operatorname{sen} x$ $\quad f(x) = \sqrt{x}$

$$\left(g\circ h\right)(x) = g\left[h(x)\right] = \operatorname{sen}\left(2x^3-5x+3\right)$$

$$\left(f\circ(g\circ h)\right)(x) = f\left[\left(g\circ h\right)(x)\right] = f\left(\operatorname{sen}\left(2x^3-5x+3\right)\right) = \sqrt{\operatorname{sen}\left(2x^3-5x+3\right)}$$

$$x \rightarrow h(x) = 2x^3 - 5x + 3 \rightarrow g[h(x)] = \operatorname{sen}[h(x)] \rightarrow f[g[h(x)]] = \sqrt{g[h(x)]}$$

$$h'(x) = 6x^2 - 5 \qquad g'[h(x)] = \cos[h(x)] \qquad f'[g[h(x)]] = \frac{1}{2\sqrt{g[h(x)]}}$$

$$y' = f'[g[h(x)]] \cdot g'[h(x)] \cdot h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g[h(x)]}} \cdot \cos[h(x)] \cdot (6x^2 - 5) =$$

$$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{\operatorname{sen}[h(x)]}} \cdot \cos(2x^3 - 5x + 3) \cdot (6x^2 - 5)$$

$$y' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\operatorname{sen}(2x^3 - 5x + 3)}} \cdot \cos(2x^3 - 5x + 3) \cdot (6x^2 - 5)$$

Derivada de la función inversa

Una función $y = f(x)$, cuyo dominio de definición es D, es inyectiva cuando cada elemento de su recorrido tiene solamente una antiimagen. Esto equivale a decir que dos valores de su dominio no pueden tener la misma imagen, es decir, que en el caso de las funciones inyectivas se verifica:

$$\text{Si } x_1, x_2 \in D \text{ entonces } f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

Geométricamente, en las funciones inyectivas la recta horizontal trazada por cualquier valor del recorrido corta a la gráfica de la función $y = f(x)$ en un único punto.

A partir de una función inyectiva $y = f(x)$ podemos definir una nueva función que asocia a cada valor del recorrido de la función original su antiimagen. Esta función se representa por $\mathbf{f^{-1}(x)}$ y **recibe el nombre de función inversa o recíproca.**

La función inversa se genera de la siguiente manera:

a) Se intercambian los papeles de la variable dependiente e independiente en la expresión inicial.

$$y = f(x) \quad \rightarrow \quad x = f(y)$$

b) Se despeja la variable dependiente en la expresión obtenida

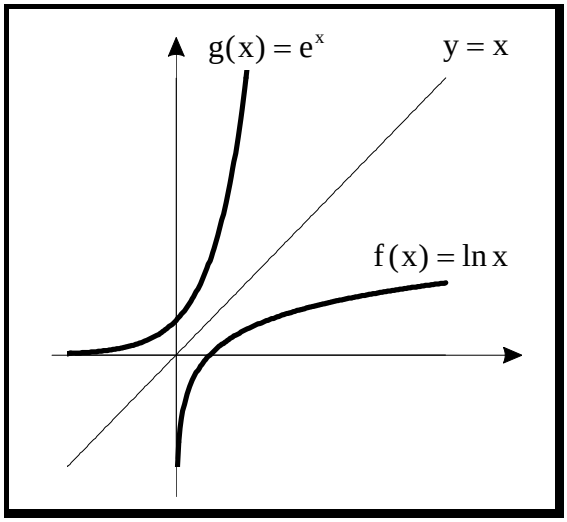
$$x = f(y) \quad \rightarrow \quad y = f^{-1}(x)$$

El dominio de una función inversa coincide con el recorrido de la función original. Si representamos gráficamente una función y su inversa sus gráficas son simétricas respecto a la bisectriz del primer cuadrante.

Al componer una función y su inversa obtenemos la función identidad $\mathbf{I(x) = x}$

$$\boxed{\left(\mathbf{f} \circ \mathbf{f}^{-1}\right)\mathbf{(x)} = \left(\mathbf{f}^{-1} \circ \mathbf{f}\right)\mathbf{(x)} = \mathbf{x}}$$

Ejemplo: Las funciones f(x) = lnx y g(x) = e^x son inversas



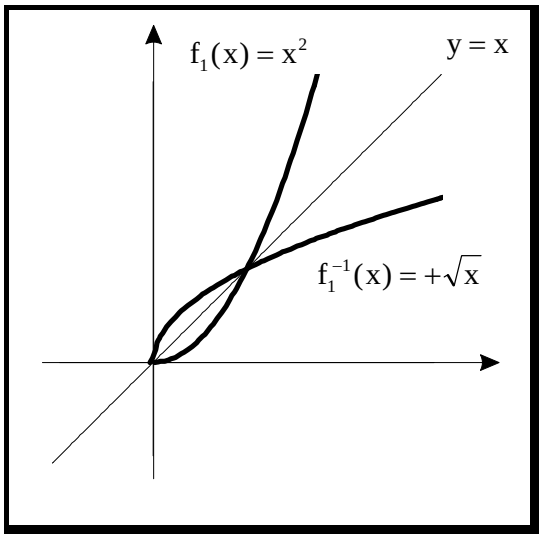
Como se observa en la gráfica, estas funciones son simétricas respecto a la bisectriz del primer cuadrante y verifican que su composición nos da la función identidad.

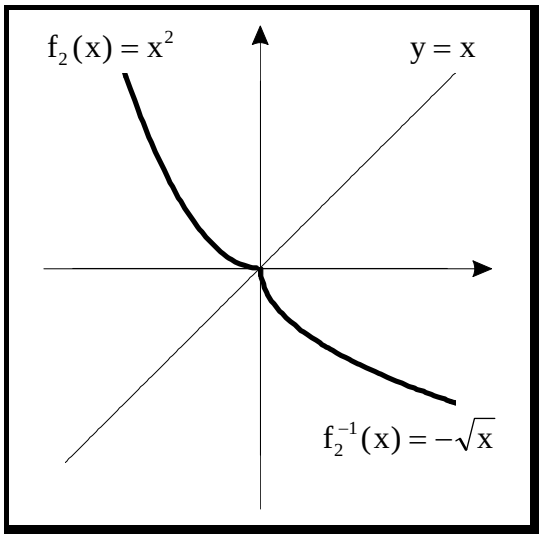
$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(e^x) = \ln e^x = x$$

En general, cuando una función no es inyectiva se subdivide su dominio, dando lugar a otras funciones que sí son inyectivas. En este caso se calcula la función inversa de cada una de ellas.

Ejemplo: Calcular la función inversa de $f(x) = x^2$

$f(x) = x^2$ no es inyectiva, pero dividiendo su dominio en dos partes se obtienen sendas funciones inyectivas. Veamos la inversa de cada una de ellas.





$f_1^{-1}(x) = +\sqrt{x}$ es inversa de $f_1 = x^2$ con $x \geq 0$, como se observa en la 1ª gráfica.

$f_2^{-1}(x) = -\sqrt{x}$ es inversa de $f_2 = x^2$ con $x \leq 0$, como se observa en la 2ª gráfica.

En ambos casos se verifica:

$$\left(f_1 \circ f_1^{-1}\right)(x) = f_1\left[f_1^{-1}(x)\right] = f_1\left(\sqrt{x}\right) = \left[\sqrt{x}\right]^2 = x$$

$$\left(f_2 \circ f_2^{-1}\right)(x) = f_2\left[f_2^{-1}(x)\right] = f_2\left(-\sqrt{x}\right) = \left[-\sqrt{x}\right]^2 = x$$

Si y = g(x) es la función inversa (o función recíproca) de una función derivable y = f(x), entonces g(x) también es derivable y se verifica:

$$g'(x) = \frac{1}{f'[g(x)]}$$

Demostración:

Si g(x) es la función inversa de f(x) se verifica $(f \circ g)(x) = x$ para todo número real. Derivando los dos miembros de esta igualdad tenemos:

$(f \circ g)'(x) = 1 \longrightarrow [f(g(x))]' = 1 \Rightarrow$ y aplicando la regla de la cadena al primer miembro

$$f'[g(x)] \cdot g'(x) = 1 \quad \text{de donde} \quad g'(x) = \frac{1}{f'[g(x)]}$$

Ejemplo: Calcular la derivada de la función f(x) = arcsen x

$f(x) = \operatorname{arc\,sen} x$ es la función inversa de la función $g(x) = \operatorname{sen} x$. Aplicando la regla de la derivada de la función inversa tenemos:

$$f'(x) = \frac{1}{g'[f(x)]} = \frac{1}{\cos(\operatorname{arc\,sen} x)}$$

De la relación fundamental tenemos $\operatorname{sen}^2(\operatorname{arc\,sen} x) + \cos^2(\operatorname{arc\,sen} x) = 1$ de donde

$\cos(\operatorname{arc\,sen} x) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\operatorname{arc\,sen} x)} = \sqrt{1 - x^2}$ por lo tanto

$$f'(x) = \frac{1}{g'[f(x)]} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Ejemplo: Calcular la derivada de la función f(x) = arctg x

f(x) = arctg x es la función inversa de la función g(x) = tg x. Aplicando la regla de la derivada de la función inversa tenemos:

$$f'(x) = \frac{1}{g'[f(x)]} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)}}$$

De la identidad trigonométrica $1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES COMPUESTAS

Funciones	Derivadas
$f(x) = k \quad k \in R$	$\mathbf{f'(x) = 0}$
$f(x) = [g(x)]^k$	$\mathbf{f'(x) = k \cdot [g(x)]^{k-1} \cdot g'(x)}$
$f(x) = \sqrt{g(x)}$	$\mathbf{f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{g(x)}} \cdot g'(x)}$
$f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$	$\mathbf{f'(x) = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{[g(x)]^{n-1}}} \cdot g'(x)}$
$f(x) = \ln[g(x)]$	$\mathbf{f'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)}$
$f(x) = \log_a [g(x)] \quad a > 0 \quad a \neq 1$	$\mathbf{f'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) \cdot \log_a e}$
$f(x) = e^{g(x)}$	$\mathbf{f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)}$
$f(x) = a^{g(x)} \quad a > 0 \quad a \neq 1$	$\mathbf{f'(x) = a^{g(x)} \cdot g'(x) \cdot \ln a}$
$f(x) = \text{sen}[g(x)]$	$\mathbf{f'(x) = \cos[g(x)] \cdot g'(x)}$
$f(x) = \cos[g(x)]$	$\mathbf{f'(x) = -\text{sen}[g(x)] \cdot g'(x)}$
$f(x) = \text{tg}[g(x)]$	$\mathbf{f'(x) = \frac{1}{\cos^2[g(x)]} \cdot g'(x)}$
$f(x) = \text{arcsen}[g(x)]$	$\mathbf{f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-[g(x)]^2}} \cdot g'(x)}$
$f(x) = \arccos[g(x)]$	$\mathbf{f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-[g(x)]^2}} \cdot g'(x)}$
$f(x) = \text{arctg}[g(x)]$	$\mathbf{f'(x) = \frac{1}{1+[g(x)]^2} \cdot g'(x)}$

Derivada de una función implícita

Muy frecuentemente no es factible obtener la expresión explícita de una función con el fin de obtener su derivada en un punto. Por ello, se procede a derivar la expresión que define la función implícita, como puede observarse en los siguientes ejemplos, donde suponemos que y es función de x.

Ejemplo: Derivar la expresión $\mathbf{3y^3 - 7x^2 + 5y^2x = 2}$

$$9y^2y' - 14x + 10yy'x + 5y^2 = 0 \quad \rightarrow \quad y'\left(9y^2 + 10yx\right) = 14x - 5y^2$$

$$y' = \frac{14x - 5y^2}{9y^2 + 10xy}$$

Ejemplo: Ecuación de la recta tangente a la curva $\mathbf{x - y^2 + \ln\frac{y}{x} = 0}$ **en el punto (1, 1)**

$$1 - 2y\,y' + \frac{x}{y}\cdot\left[\frac{y'x - y}{x^2}\right] = 0 \qquad x^2y - 2x^2y^2y' + x^2y' - xy = 0$$

$$y' = \frac{xy - x^2y}{x^2 - 2x^2y^2}$$

En P(1,1) tenemos y' = 0, luego $y - 1 = 0\cdot(x - 1) \Rightarrow y = 1$

Ejemplo: Deducir la derivada de la función f(x) = arctg x utilizando la derivación de las funciones implícitas.

Se considera la expresión $y = \text{arctg}\,x$, que a su vez puede expresarse como $\text{tg}\,y = x$. Al derivar esta igualdad se tiene:

$$\frac{1}{\cos^2 y}\cdot y' = 1 \quad \rightarrow \quad \left(1 + \text{tg}^2\,y\right)\cdot y' = 1 \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{1 + \text{tg}^2\,y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Ejemplo: **Ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2+y^2+2x+2y-6=0$ en el punto de tangencia $(1,1)$.**

La ecuación de la recta tangente es $y-1=m\cdot(x-1)$ donde $m=y'_{(1,1)}$

Así pues se deriva la ecuación de la circunferencia. $2x+2y\cdot y'+2+2\cdot y'=0$

$$y'=-\frac{2x+2}{2y+2}=-\frac{x+1}{y+1} \rightarrow y'_{(1,1)}=-1$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es: $y=-x+2$

Funciones potencial-exponencial. Derivación logarítmica.

Reciben el nombre de funciones potencial-exponenciales las que se expresan en la forma: $\left[f(x)\right]^{g(x)}$***, es decir, aquellas funciones en las que tanto la base como el exponente son funciones que dependen de una variable.*** *Observa que para que tengan sentido estas funciones la base debe ser positiva.*

El método de derivación logarítmica consiste en calcular la derivada de la función mediante la derivación del logaritmo de la función. Este método suele utilizarse cuando la expresión del logaritmo de la función es más sencilla que el de la función.

El cálculo de la derivada de la función $y=[f(x)]^{g(x)}$ se realiza mediante la derivación logarítmica de la siguiente manera. Se toman logaritmos neperianos en los dos miembros.

$$\ln y = g(x)\cdot\ln[f(x)]$$

y se deriva cada miembro de la igualdad $\frac{y'}{y}=g'(x)\cdot\ln[f(x)]+g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}$

de donde se obtiene

$$y'=\left[f(x)\right]^{g(x)}\cdot\left[g'(x)\cdot\ln\left[f(x)\right]+g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right]=$$

$$g(x)\cdot\left[f(x)\right]^{g(x)-1}\cdot f'(x)+\left[f(x)\right]^{g(x)}\cdot\ln\left[f(x)\right]\cdot g'(x)$$

Es decir

$$\boxed{\left[f(x)^{g(x)}\right]'=g(x)\cdot\left[f(x)\right]^{g(x)-1}\cdot f'(x)+\left[f(x)\right]^{g(x)}\cdot\ln\left[f(x)\right]\cdot g'(x)}$$

Esta fórmula es fácil de recordar teniendo en cuenta que:

- El primer sumando corresponde a la derivada de la función considerada como **potencial.**
- El segundo sumando corresponde a la derivada de la función considerada como **exponencial.**

Ejemplo: Calcular la derivada de la función $\mathbf{f(x) = x^{lnx}}$

Se toman logaritmos en los dos miembros de la igualdad.

$$\ln f(x) = \ln x^{\ln x} = (\ln x)\cdot(\ln x) = \ln^2 x$$

Se deriva cada término de la igualdad y se despeja $f'(x)$.

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad f'(x) = 2\cdot x^{\ln x}\cdot\frac{\ln x}{x}$$

Ejemplo: Calcular la derivada de la expresión $\mathbf{y = \operatorname{sen} x^{\cos x}}$

$$y' = \cos x\cdot \operatorname{sen} x^{\cos x-1}\cdot\cos x + \operatorname{sen} x^{\cos x}\cdot\ln(\operatorname{sen} x)\cdot(-\operatorname{sen} x)$$

Derivadas sucesivas. Derivada n-ésima

Si y = f(x) es una función derivable en cualquier punto de su dominio D, y la función derivada $f'(x)$ es derivable en el punto $x = a$, entonces se dice que la función y = f(x) es dos veces derivable en el punto de abscisa $a \in D$. A la derivada en el punto "a" , de la función derivada, se le denomina ***derivada segunda*** de la función y = f(x) en el punto de abscisa x = a; se anota f "(a).

$$\mathbf{f''(a) = \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a}}$$

Si las funciones f y f ' son derivables en cualquier punto de su dominio D, se define la **función derivada segunda de la función y = f(x) y se anota f ''.**

Igualmente podemos definir la **derivada tercera, cuarta, quinta,....., n-ésima** cuyas notaciones respectivas son f''', f^{lv}, f^{v}, ..., f^{n}.

Para algunas funciones el proceso de existencia de función derivada de una función derivada no tiene fin, como por ejemplo $f(x) = 2^x$.

Ejemplo: Dada la función $f(x) = e^{\text{sen } x}$ calcular $f'(x)$, $f''(x)$ y $f'''(x)$

Las derivadas son:

$$f'(x) = e^{\text{sen } x} \cdot \cos x \qquad f''(x) = e^{\text{sen } x} \cdot \cos^2 x - e^{\text{sen } x} \cdot \text{sen } x = e^{\text{sen } x}\left(\cos^2 x - \text{sen } x\right)$$

$$f'''(x) = e^{\text{sen } x} \cdot \cos x\left(\cos^2 x - \text{sen } x\right) + e^{\text{sen } x} \cdot \left(-2\cos x \,\text{sen } x - \cos x\right) =$$

$$e^{\text{sen } x} \cdot \cos x \cdot \left(\cos^2 x - 3\,\text{sen } x - 1\right)$$

Ejemplo: Calcular la derivada vigésimo cuarta de $y = a \cdot \text{sen } bx$ para a y b constantes.

Se trata de ver la ley de formación de las derivadas sucesivas, para no tener que calcular directamente las 24 derivadas.

$$y' = ab\cos bx \qquad y'' = -ab^2 \,\text{sen } bx \qquad y''' = -ab^3 \cos bx \qquad y^{lv} = ab^4 \,\text{sen } bx \qquad .....$$

$$y^{24} = ab^{24} \,\text{sen } bx$$

Ejemplo: Calcular la derivada n-ésima de la función $f(x) = e^{5x}$

$$f'(x) = 5e^{5x} \qquad f''(x) = 25e^{5x} \qquad f'''(x) = 125e^{5x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots f^{n}(x) = 5^{n} \cdot e^{5x}$$

Ejemplo: Calcular la derivada n-ésima de la función $f(x) = \ln(1+x)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \qquad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \qquad f^{lv}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}$$

$$f^{v}(x) = \frac{24}{(1+x)^5} \qquad f^{vl}(x) = \frac{-120}{(1+x)^6} \qquad f^{vll}(x) = \frac{720}{(1+x)^7} \ldots\ldots f^{n} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)!}{(1+x)^n}$$

con $n = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots$

Ejemplo: Calcular la derivada n-ésima de la función $y = \operatorname{sen} x$

Para calcular las sucesivas derivadas haremos uso de las equivalencias entre las razones trigonométricas de ángulos que difieren en $\frac{\pi}{2}$ radianes como se observa en las gráficas siguientes:

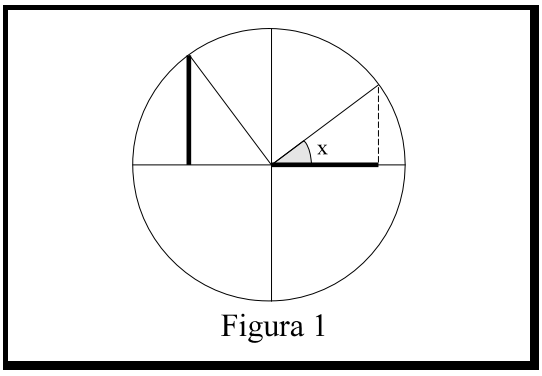


Figura 1

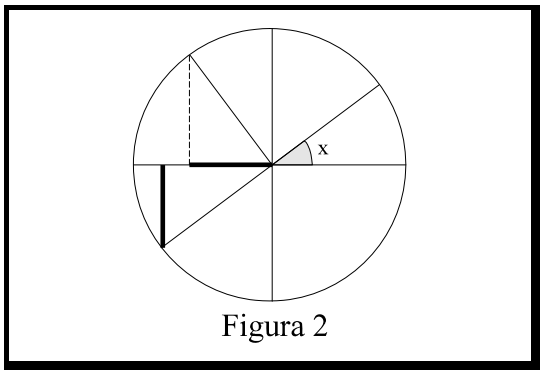


Figura 2

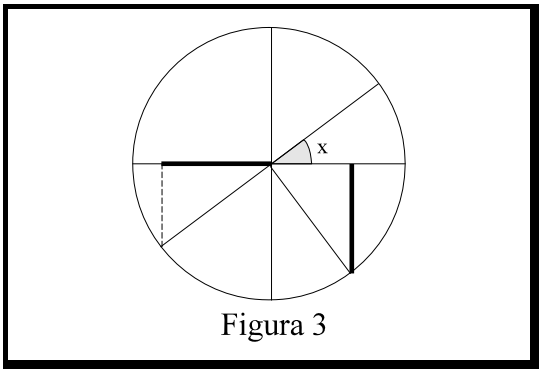


Figura 3

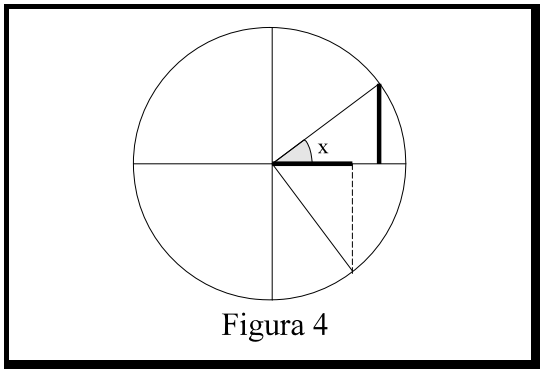


Figura 4

$$y' = \cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{(figura 1)}$$

$$y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}(x + \pi) \qquad \text{(figura 2)}$$

$$y''' = \cos(x + \pi) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \qquad \text{(figura 3)}$$

$$y^{lv} = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}(x + 2\pi) \qquad \text{(figura 4)}$$

$$y^n = \operatorname{sen}\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad \text{con} \quad n = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ejemplo: Calcular la derivada n-ésima de la función $y = \cos 2x$

Basándonos en el razonamiento anterior tenemos

$$y' = -2\operatorname{sen} 2x = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad y'' = -4\operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 4\cos(2x + \pi)$$

$$y''' = -8\operatorname{sen}(2x + \pi) = 8\cos\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right) \qquad y^{lv} = -16\operatorname{sen}\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right) = 16\cos(2x + 2\pi)$$

$$y^n = 2^n \cdot \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad \text{con} \quad n = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ejemplo: Calcular la derivada n-ésima de la función $y = \dfrac{1}{x+2}$

$$y' = \frac{-1}{(x+2)^2} \qquad y'' = \frac{2}{(x+2)^3} \qquad y''' = \frac{-6}{(x+2)^4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y^n = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+2)^{n+1}}$$

con $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Ejemplo: Demostrar que todas las derivadas de orden par de la función $\operatorname{sen} x \cdot \cos x$ son nulas en el origen.

<u>1ª Forma</u>

$$f'(x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \qquad f''(x) = -4 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x$$

$f'''(x) = -4 \cdot \left(\cos^2 x - \text{sen}^2 x\right)$ $\qquad$ $f^{(4)}(x) = 16 \cdot \text{sen}\, x \cdot \cos x$

En las derivadas de orden par aparece siempre $\text{sen}\, x$ que como sabemos se anula en el origen, ya que $\text{sen}\, 0 = 0$

2ª Forma

Utilizando la fórmula del seno del ángulo doble tenemos:

$$\text{sen}\, 2x = 2 \cdot \text{sen}x \cdot \cos x \quad \rightarrow \quad \text{sen}x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \cdot \text{sen}\, 2x$$

$f'(x) = \cos(2x)$ $\qquad$ $f''(x) = -2 \cdot \text{sen}(2x)$

$f'''(x) = -4 \cdot \cos(2x)$ $\qquad$ $f^{(4)}(x) = 8 \cdot \text{sen}(2x)$

$f^{v}(x) = 16 \cdot \cos(2x)$ $\qquad$ $f^{(6)}(x) = -32 \cdot \text{sen}\, 2x$

En todas las derivadas de orden par aparece una constante multiplicada por $\text{sen}(2x)$ que al igual que antes se anula en el origen.