Ejemplo 1

Estudio y representación gráfica de la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 5$

1. Dominio

Es una función polinómica, por tanto $f(x)$ está definida $\forall x \in R$

2. Periodicidad

No es periódica ya que $f(x+T) = 2(x+T)^3 + 3(x+T)^2 - 12(x+T) - 5 \neq f(x)$

3. Simetrías

Simetría respecto al eje de ordenadas

$$f(-x) = 2(-x)^3 + 3(-x)^2 - 12(-x) - 5 = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 5$$

$f(-x) \neq f(x) \quad \Rightarrow$ La gráfica de la función no es simétrica respecto al eje de ordenadas.

Simetría respecto al origen de coordenadas

$$-f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x + 5$$

$-f(x) \neq f(-x) \quad \Rightarrow$ La gráfica de la función no es simétrica respecto al origen de coordenadas

4. Asíntotas

Es una función polinómica, por tanto no tiene asíntotas.

5. Cortes con los ejes

Cortes con el eje de ordenadas

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 5 \\ x = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad y = -5 \quad \text{Corta en el punto} \quad (0, -5)$$

Cortes con el eje de abscisas

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 5 \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad 2x^3 + 3x^2 - 12x - 5 = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x = -0'38 \\ x = -3'15 \\ x = 2'04 \end{cases}$$

Corta en los puntos $\begin{cases} (-0'38\,,0) \\ (-3'15\,,0) \\ (2'04\,,0) \end{cases}$

6. ***Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos***

La función derivada $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$ está definida $\forall x \in R$

Calculamos los valores de la variable x en los que $f'(x)$ se anula.

$$6x^2 + 6x - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Ordenamos las soluciones de menor a mayor, y como las funciones $f(x)$ y $f'(x)$ no presentan ninguna discontinuidad, los intervalos de monotonía son:

$$\left]-\infty,-2\right[\quad ; \quad \left]-2,1\right[\quad ; \quad \left]1,\infty\right[$$

En cada uno de estos intervalos, el signo de la derivada permanece constante. Dicho signo lo averiguaremos sustituyendo en $f'(x)$ un valor cualquiera del intervalo.

$f'(-3) = 24 > 0 \quad \Rightarrow$ en el intervalo $\left]-\infty,-2\right[$ la función $f(x)$ es creciente

$f'(0) = -12 < 0 \quad \Rightarrow$ en el intervalo $\left]-2,1\right[$ la función $f(x)$ es decreciente

$f'(2) = 24 > 0 \quad \Rightarrow$ en el intervalo $\left]1,\infty\right[$ la función $f(x)$ es creciente

En resumen, el esquema de monotonía de $f(x)$ es:

Signo de f '	+		–		+
Monotonía de f	↗	-2	↘	1	↗

Como la función es continua en los puntos de abscisa -2 y 1, tenemos:

A la izquierda de -2 la función crece y a la derecha decrece, por tanto el punto $\left(-2\,,f(-2)\right)$ es un máximo relativo.

A la izquierda de 1 la función decrece y a la derecha crece, por tanto el punto $\left(1\,,f(1)\right)$ es un mínimo relativo.

<u>Conclusión</u>

La función $f(x)$ es creciente $\quad \forall x \in \left]-\infty,-2\right[\cup \left]1,\infty\right[$

La función $f(x)$ es decreciente $\forall x \in \left] -2, 1 \right[$

Máximo $(-2, 15)$

Mínimo $(1, -12)$

7. ***Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión***

La derivada segunda $f''(x) = 12x + 6$ está definida $\forall x \in R$

Calculamos los valores de la variable x en los que $f''(x)$ se anula:

$$12x + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -0'5$$

Ordenamos las soluciones de menor a mayor, y como las funciones $f'(x)$ y $f''(x)$ no presentan ninguna discontinuidad, los intervalos de concavidad y convexidad son:

$$\left] -\infty, -0'5 \right[\quad ; \quad \left] -0'5, \infty \right[$$

En cada uno de estos intervalos, el signo de la derivada segunda permanece constante. Dicho signo lo averiguaremos sustituyendo en $f''(x)$ un valor cualquiera del intervalo.

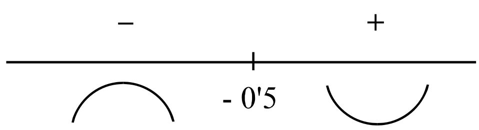
$$f''(-1) = -6 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{en el intervalo} \quad \left] -\infty, -0'5 \right[\quad \text{la función } f(x) \text{ es convexa}$$

$$f''(0) = 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{en el intervalo} \quad \left] -0'5, \infty \right[\quad \text{la función } f(x) \text{ es cóncava}$$

En resumen, el esquema de concavidad y convexidad de $f(x)$ es:

Signo de f ''

Concavidad / Convexidad



Como la función es continua en el punto de abscisa $-0'5$, significa que es un punto de inflexión, ya que en él la curva pasa de ser convexa a cóncava. Las coordenadas del punto de inflexión son: $\left(-0'5, f(-0'5)\right)$

Conclusión

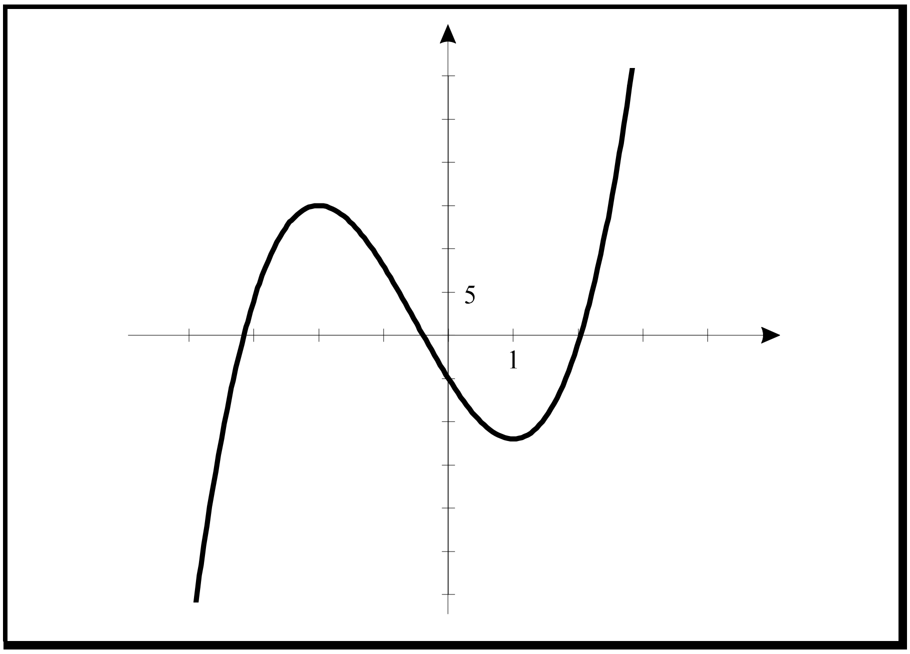
La función $f(x)$ es cóncava $\forall x \in \left] -0'5, \infty \right[$

La función $f(x)$ es convexa $\forall x \in \left] -\infty, -0'5 \right[$

Punto de inflexión en $(-0'5, 1'5)$

8. *Tabla de valores*

x	$f(x)$
-5	-120
-4	-37
3	40
4	123



Ejemplo 2

Estudio y representación gráfica de la función $\mathbf{f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-4x}}$

1. *Dominio*

La función $f(x)$ no está definida para aquellos valores de x que anulan el denominador, es decir:

$$x^2-4x=0 \;\rightarrow\; x(x-4)=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$$

$f(x)$ está definida $\forall x \in R-\{0,4\}$

2. *Periodicidad*

No es periódica ya que $f(x+T)=\dfrac{2(x+T)+1}{(x+T)^2-4(x+T)} \neq f(x)$

3. *Simetrías*

Simetría respecto al eje de ordenadas

$$f(-x)=\frac{2(-x)+1}{(-x)^2-4(-x)}=\frac{-2x+1}{x^2+4x}$$

$f(-x)\neq f(x) \;\Rightarrow\;$ La gráfica de la función no es simétrica respecto al eje de ordenadas.

Simetría respecto al origen de coordenadas

$$-f(x) = -\frac{2x+1}{x^2-4x} = \frac{-2x-1}{x^2-4x}$$

$-f(x) \neq f(-x) \Rightarrow$ La gráfica de la función no es simétrica respecto al origen de coordenadas

4. *Asíntotas*

Asíntotas verticales

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2x+1}{x^2-4x} = \infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x+1}{x^2-4x} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ La recta } x=0 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{2x+1}{x^2-4x} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{2x+1}{x^2-4x} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ La recta } x=4 \text{ es una asíntota vertical.}$$

Asíntotas horizontales

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x+1}{x^2-4x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x+1}{x^2-4x} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ La recta } y=0 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

Asíntotas oblicuas

Es una función racional en la que el grado del numerador es menor que el grado del denominador, por tanto no hay asíntotas oblicuas.

5. *Cortes con los ejes*

Cortes con el eje de ordenadas

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{2x+1}{x^2-4x} \\ x = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{ No corta, ya que en } x=0 \text{ hay una discontinuidad}$$

Cortes con el eje de abscisas

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{2x+1}{x^2-4x} \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow 2x+1=0 \rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{ Corta en el punto } \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

6. *Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos*

La función derivada es:

$$f'(x)=\frac{2\cdot\left(x^2-4x\right)-(2x+1)(2x-4)}{\left(x^2-4x\right)^2}=\frac{-2x^2-2x+4}{\left(x^2-4x\right)^2}$$

Los valores de x para los que la función $f'(x)$ es discontinua son los mismos que para $f(x)$. Veamos los valores de x en los que $f'(x)$ se anula:

$$\frac{-2x^2-2x+4}{\left(x^2-4x\right)^2}=0 \quad\rightarrow\quad -2x^2-2x+4=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x=-2 \\ x=1 \end{cases}$$

Los intervalos de monotonía son:

$$\left]-\infty,-2\right[\;\;;\;\; \left]-2,0\right[\;\;;\;\; \left]0,1\right[\;\;;\;\; \left]1,4\right[\;\;;\;\; \left]4,\infty\right[$$

$f'(-3)=-0'01<0 \quad\Rightarrow\quad$ en el intervalo $\left]-\infty,-2\right[$ la función $f(x)$ es decreciente

$f'(-1)=0'16>0 \quad\Rightarrow\quad$ en el intervalo $\left]-2,0\right[$ la función $f(x)$ es creciente

$f'(0'5)=0'81>0 \quad\Rightarrow\quad$ en el intervalo $\left]0,1\right[$ la función $f(x)$ es creciente

$f'(2)=-0'5<0 \quad\Rightarrow\quad$ en el intervalo $\left]1,4\right[$ la función $f(x)$ es decreciente

$f'(5)=-2'24<0 \quad\Rightarrow\quad$ en el intervalo $\left]4,\infty\right[$ la función $f(x)$ es decreciente

En resumen, el esquema de monotonía de $f(x)$ es:

Signo de f '	–		+		+		–		–
Monotonía de f	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	4	$\searrow$

Como la función no está definida en los puntos de abscisa 0 y 4 tenemos:

Existe un mínimo en el punto $\left(-2,f(-2)\right)$.

Existe un máximo en el punto $\left(1,f(1)\right)$.

Conclusión

La función $f(x)$ es creciente $\forall x \in \left]-2,0\right[\cup \left]0,1\right[$

La función $f(x)$ es decreciente $\forall x \in \left]-\infty,-2\right[\cup \left]1,4\right[\cup \left]4,\infty\right[$

Máximo $(1,-1)$

Mínimo $(-2,-0'25)$

7. ***Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión***

La derivada segunda es:

$$f''(x) = \frac{(-4x-2)\left(x^2-4x\right)^2 - \left(-2x^2-2x+4\right)\cdot 2(x^2-4x)(2x-4)}{\left(x^2-4x\right)^4} =$$

$$\frac{(-4x-2)\left(x^2-4x\right) - \left(-2x^2-2x+4\right)\cdot 2\cdot(2x-4)}{\left(x^2-4x\right)^3} = \frac{4x^3+6x^2-24x+32}{\left(x^2-4x\right)^3}$$

Los valores de x para los que la función $f''(x)$ es discontinua son los mismos que para $f'(x)$.

Los valores de x para los que se anula $f''(x)$ son:

$$\frac{4x^3+6x^2-24x+32}{\left(x^2-4x\right)^3} = 0 \quad \rightarrow \quad 4x^3+6x^2-24x+32 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -3'7$$

Los intervalos de concavidad y convexidad son:

$$\left]-\infty,-3'7\right[\quad ; \quad \left]-3'7,0\right[\quad ; \quad \left]0,4\right[\quad ; \quad \left]4,\infty\right[$$

$f''(-4) = -0'0009 < 0 \Rightarrow$ en el intervalo $\left]-\infty,-3'7\right[$ la función $f(x)$ es convexa

$f''(-1) = 0'464 > 0 \Rightarrow$ en el intervalo $\left]-3'7,0\right[$ la función $f(x)$ es cóncava

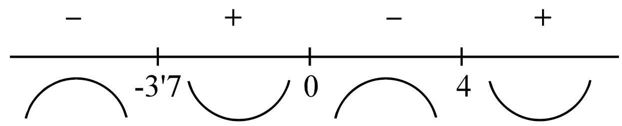
$f''(1) = -0'66 < 0 \Rightarrow$ en el intervalo $\left]0,4\right[$ la función $f(x)$ es convexa

$f''(5) = 4'49 > 0 \Rightarrow$ en el intervalo $\left]4,\infty\right[$ la función $f(x)$ es cóncava

En resumen, el esquema de concavidad y convexidad de $f(x)$ es:

Signo de f ''

Concavidad / Convexidad



La función es discontinua en los puntos de abscisa 0 y 4, por tanto sólo hay un punto de inflexión cuyas coordenadas son: $\left(-3'7\,,f(-3'7)\right)$

Conclusión

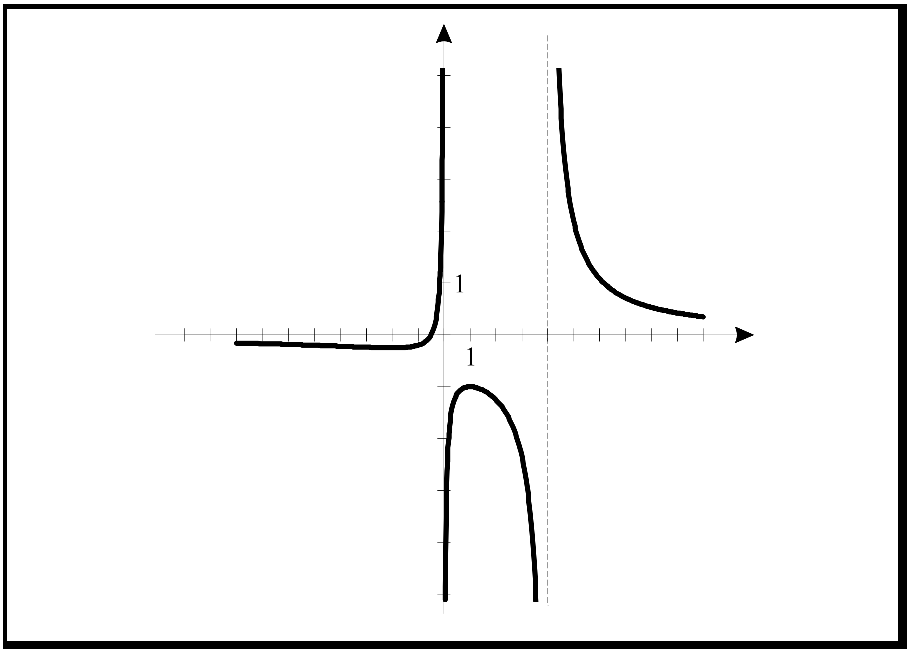
La función $f(x)$ es cóncava $\quad \forall x \in \left]-3'7\,,0\right[\cup\left]4\,,\infty\right[$

La función $f(x)$ es convexa $\quad \forall x \in \left]-\infty\,,-3'7\right[\cup\left]0\,,4\right[$

Punto de inflexión en $\quad (-3'7\,,-0'22)$

8. Tabla de valores

x	$f(x)$
0'5	−1'14
0'75	−1'02
1'5	−1'06
2	−1'25
2'5	−1'6
3	−2'33
3'5	−4'57



Ejemplo 3

Estudio y representación gráfica de la función $\mathbf{f(x)=e^{x}\cdot\left(x^{2}-3x+2\right)}$

1. Dominio

$$D\left[f(x)\right]=\forall x \in R$$

2. Periodicidad

No es periódica ya que $\quad f(x+T)=e^{x+T}\cdot\left((x+T)^{2}-3(x+T)+2\right)\neq f(x)$

3. Simetrías

Simetría respecto al eje de ordenadas

$$f(-x) = e^{-x} \cdot \left((-x)^2 - 3(-x) + 2\right) = e^{-x} \cdot \left(x^2 + 3x + 2\right)$$

$f(-x) \neq f(x) \quad \Rightarrow \quad$ La gráfica de la función no es simétrica respecto al eje de ordenadas.

Simetría respecto al origen de coordenadas

$$-f(x) = -e^{x} \cdot (x^2 - 3x + 2)$$

$-f(x) \neq f(-x) \quad \Rightarrow \quad$ La gráfica de la función no es simétrica respecto al origen de coordenadas

4. Asíntotas

Asíntotas verticales

No tiene

Asíntotas horizontales

$\lim\limits_{x \to \infty} e^{x} \cdot \left(x^2 - 3x + 2\right) = +\infty \quad \Rightarrow \quad$ No hay asíntota horizontal por la derecha

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} \cdot \left(x^2 - 3x + 2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal por la izquierda.

Asíntotas oblicuas

$m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x} \cdot \left(x^2 - 3x + 2\right)}{x} = \infty \quad \Rightarrow \quad$ No tiene

$m = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{x} \cdot \left(x^2 - 3x + 2\right)}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad$ No tiene

5. Cortes con los ejes

Cortes con el eje de ordenadas

$\left.\begin{array}{l} y = e^{x} \cdot \left(x^2 - 3x + 2\right) \\ x = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad y = e^{0} \cdot 2 = 2 \quad$ Corta en el punto $(0, 2)$

Cortes con el eje de abscisas

$$\left.\begin{array}{l} y = e^x \cdot \left(x^2 - 3x + 2\right) \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad e^x \cdot \left(x^2 - 3x + 2\right) = 0 \quad \rightarrow \begin{cases} e^x \neq 0 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases}$$

Corta en los puntos $(1,0)$ y $(2,0)$

6. ***Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos***

Estudiemos la función derivada:

$$f'(x) = e^x \cdot \left(x^2 - 3x + 2\right) + e^x \cdot (2x - 3) = e^x \cdot \left(x^2 - x - 1\right)$$

$f'(x)$ es continua $\forall x \in R$. Veamos los valores de x para los que se anula la primera derivada:

$$e^x \cdot \left(x^2 - x - 1\right) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} e^x \neq 0 \\ x^2 - x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = -0'61 \\ x = 1'61 \end{cases} \end{cases}$$

Los intervalos de monotonía son:

$$\left]-\infty, -0'61\right[\quad ; \quad \left]-0'61, 1'61\right[\quad ; \quad \left]1'61, \infty\right[$$

$f'(-1) = 0'36 > 0 \quad \Rightarrow$ en el intervalo $\left]-\infty, -0'61\right[$ la función $f(x)$ es creciente

$f'(0) = -1 < 0 \quad \Rightarrow$ en el intervalo $\left]-0'61, 1'61\right[$ la función $f(x)$ es decreciente

$f'(2) = 7'38 > 0 \quad \Rightarrow$ en el intervalo $\left]1'61, \infty\right[$ la función $f(x)$ es creciente

En resumen, el esquema de monotonía de $f(x)$ es:

Signo de f '	+		–		+
Monotonía de f	↗	-0'61	↘	1'61	↗

Como la función está definida $\forall x \in R$, tenemos:

Existe un máximo en el punto $\left(-0'61, f(-0'61)\right)$.

Existe un mínimo en el punto $\left(1'61, f(1'61)\right)$.

Conclusión

La función $f(x)$ es creciente $\forall x \in \left]-\infty, -0'61\right[\cup \left]1'61, \infty\right[$

La función $f(x)$ es decreciente $\forall x \in \left]-0'61, 1'61\right[$

Máximo $(-0'61, 2'28)$

Mínimo $(1'61, -1'19)$

7. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión

La derivada segunda es:

$$f''(x) = e^x \cdot (x^2 - x - 1) + e^x \cdot (2x - 1) = e^x \cdot (x^2 + x - 2)$$

que también está definida $\forall x \in R$. Los valores de x para los que se anula son:

$$e^x \cdot (x^2 + x - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} e^x \neq 0 \\ x^2 + x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Los intervalos de concavidad y convexidad son:

$$\left]-\infty, -2\right[\quad ; \quad \left]-2, 1\right[\quad ; \quad \left]1, \infty\right[$$

$f''(-3) = 0'19 > 0 \quad \Rightarrow$ en el intervalo $\left]-\infty, -2\right[$ la función $f(x)$ es cóncava

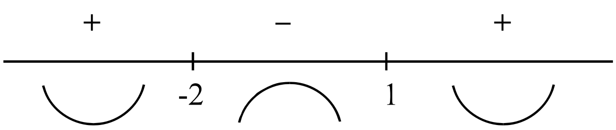
$f''(0) = -2 < 0 \quad \Rightarrow$ en el intervalo $\left]-2, 1\right[$ la función $f(x)$ es convexa

$f''(2) = 29'55 > 0 \quad \Rightarrow$ en el intervalo $\left]1, \infty\right[$ la función $f(x)$ es cóncava

En resumen, el esquema de concavidad y convexidad de $f(x)$ es:

Signo de f ''

Concavidad / Convexidad



La función es continua en los puntos de abscisa -2 y 1, por tanto hay dos puntos de inflexión cuyas coordenadas son: $(-2, f(-2))$ y $(1, f(1))$.

Conclusión

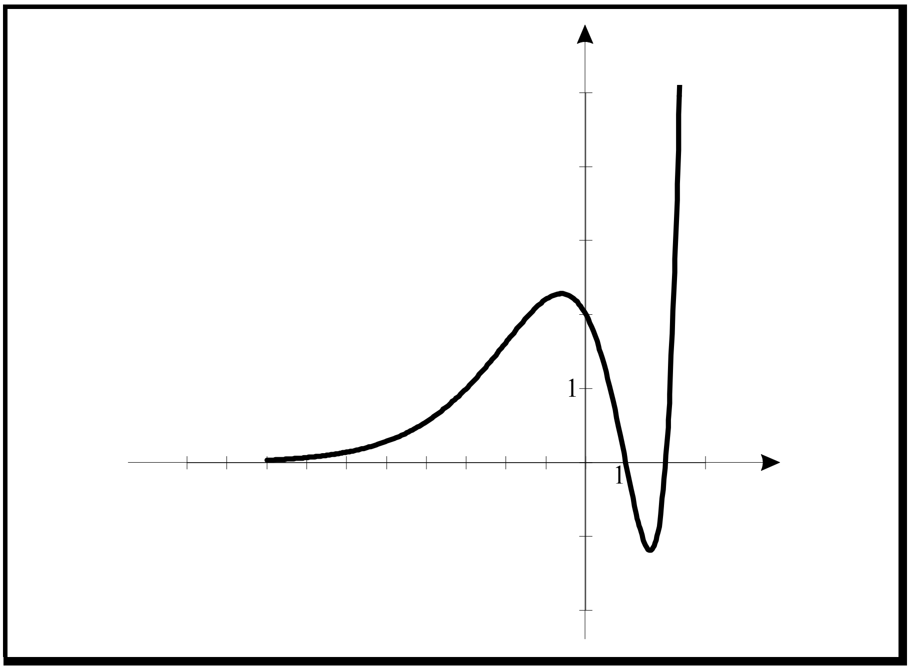
La función $f(x)$ es cóncava $\quad \forall x \in \left]-\infty,-2\right[\cup \left]1,\infty\right[$

La función $f(x)$ es convexa $\quad \forall x \in \left]-2,1\right[$

Puntos de inflexión $\quad (-2, 1'62) \quad$ y $\quad (1, 0)$

8. ***Tabla de valores***

x	f(x)
-3	0'99
-2	1'62
0'5	1'23
0'75	0'66
2'5	9'13
3	40'17



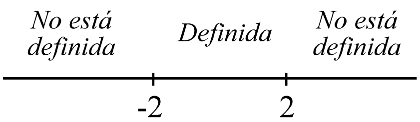
Ejemplo 4

Estudio y representación gráfica de la función $\mathbf{f(x) = \ln\left(-x^2 + 4\right)}$

1. ***Dominio***

Dado que solamente existen logaritmos de números reales positivos, veamos para qué valores de x está definida la función:

$$-x^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$



Por tanto, el dominio de definición de la función es $\forall x \in \left]-2,2\right[$ (excluidos los extremos ya que no existe $\ln 0$).

$f(x)$ está definida $\quad \forall x \in \left]-2,2\right[$

2. ***Periodicidad***

No es periódica ya que $f(x+T) = \ln\left(-(x+T)^2 + 4\right) \neq f(x)$

3. ***Simetrías***

Simetría respecto al eje de ordenadas

$$f(-x) = \ln\left(-(-x)^2 + 4\right) = \ln\left(-x^2 + 4\right)$$

$f(-x) = f(x) \quad \Rightarrow$ La gráfica de la función es simétrica respecto al eje de ordenadas.

Simetría respecto al origen de coordenadas

$$-f(x) = -\ln\left(-x^2 + 4\right)$$

$-f(x) \neq f(-x) \quad \Rightarrow$ La gráfica de la función no es simétrica respecto al origen de coordenadas

4. ***Asíntotas***

Asíntotas verticales

$\lim\limits_{x \to -2^+} \ln\left(-x^2 + 4\right) = -\infty \quad \Rightarrow$ La recta $x = -2$ es una asíntota vertical.

$\lim\limits_{x \to 2^-} \ln\left(-x^2 + 4\right) = -\infty \quad \Rightarrow$ La recta $x = 2$ es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales

No tiene, porque la función sólo está definida $\forall x \in \left]-2, 2\right[$

Asíntotas oblicuas

No tiene, porque la función sólo está definida $\forall x \in \left]-2, 2\right[$

5. ***Cortes con los ejes***

Cortes con el eje de ordenadas

$$\left.\begin{array}{l} y = \ln\left(-x^2 + 4\right) \\ x = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad y = \ln 4 = 1'39$$

Corta en el punto $(0, 1'39)$

Cortes con el eje de abscisas

$$\left.\begin{array}{l} y=\ln\left(-x^2+4\right) \\ y=0 \end{array}\right\} \quad \to \quad \ln\left(-x^2+4\right)=0 \quad \to \quad -x^2+4=e^0=1 \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x=-1'73 \\ x=1'73 \end{array}\right.$$

Corta en los puntos $(-1'73,0)$ y $(1'73,0)$

6. ***Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos***

La función derivada es: $\quad f'(x)=\dfrac{-2x}{-x^2+4}$

El dominio de definición de $f'(x)$ es $\forall x \in \left]-2,2\right[$. Veamos los valores de x para los que se anula la primera derivada:

$$\frac{-2x}{-x^2+4}=0 \quad \to \quad -2x=0 \quad \Rightarrow \quad x=0$$

Los intervalos de monotonía son:

$$\left]-2,0\right[\quad ; \quad \left]0,2\right[$$

$f'(-1)=0'66>0 \quad \Rightarrow \quad$ en el intervalo $\left]-2,0\right[$ la función $f(x)$ es creciente

$f'(1)=-0'66<0 \quad \Rightarrow \quad$ en el intervalo $\left]0,2\right[$ la función $f(x)$ es decreciente

En resumen, el esquema de monotonía de $f(x)$ es:

	-2		0		2
Signo de f '		+		−	
Monotonía de f		↗		↘	

Existe un máximo en el punto $\left(0,f(0)\right)$.

Conclusión

La función $f(x)$ es creciente $\quad \forall x \in \left]-2,0\right[$

La función $f(x)$ es decreciente $\quad \forall x \in \left]0,2\right[$

Máximo $\quad (0,1'39)$

7. *Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión*

La derivada segunda es:

$$f''(x)=\frac{-2\cdot(-x^2+4)-(-2x)(-2x)}{\left(-x^2+4\right)^2}=\frac{-2x^2-8}{\left(-x^2+4\right)^2}=-\frac{2(x^2+4)}{\left(-x^2+4\right)^2}$$

Si igualamos a cero esta expresión, comprobamos que no tiene soluciones reales. Los paréntesis del numerador y del denominador son siempre positivos, y como la función está precedida de un signo menos siempre es negativa, por tanto es convexa $\forall x \in \left]-2,2\right[$.

Como es convexa $\forall x \in \left]-2,2\right[$, la función no tiene puntos de inflexión

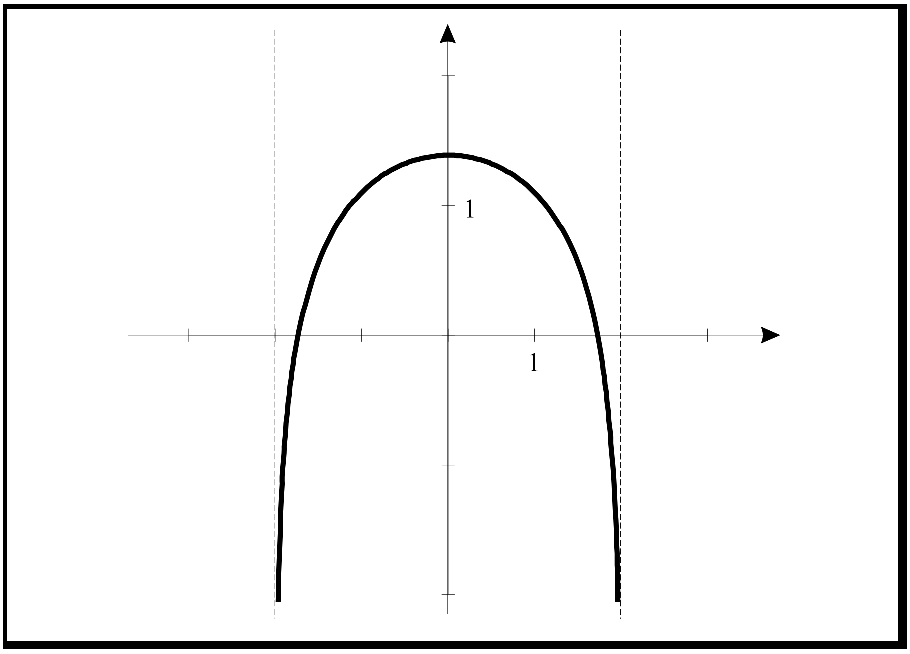
Conclusión

La función $f(x)$ es convexa $\forall x \in \left]-2,2\right[$

No tiene puntos de inflexión.

8. *Tabla de valores*

x	f(x)
−1'5	0'55
−1	1'09
−0'5	1'32
0'5	1'32
1	1'09
1'5	0'55



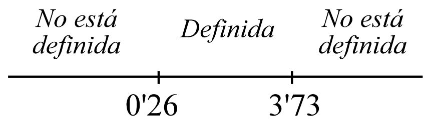
Ejemplo 5

Estudio y representación gráfica de la función $f(x)=+\sqrt{-x^2+4x-1}$

1. *Dominio*

La función $f(x)$ existe para aquellos valores de x que hagan que el radicando sea mayor o igual a cero.

$$-x^2 + 4x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0'26 \\ x = 3'73 \end{cases}$$



El dominio de definición de $f(x)$ es $\forall x \in [\,0'26\,,3'73\,]$ (incluidos los extremos, ya que $\sqrt{0} = 0$).

$D[f(x)] = \forall x \in [\,0'26\,,3'73\,]$

2. *Periodicidad*

No es periódica ya que $f(x+T) = +\sqrt{-(x+T)^2 + 4(x+T) - 1} \neq f(x)$

3. *Simetrías*

Simetría respecto al eje de ordenadas

$f(-x) = +\sqrt{-(-x)^2 + 4(-x) - 1} = +\sqrt{-x^2 - 4x - 1}$

$f(-x) \neq f(x) \quad \Rightarrow$ La gráfica de la función no es simétrica respecto al eje de ordenadas.

Simetría respecto al origen de coordenadas

$-f(x) = -\sqrt{-x^2 + 4x - 1}$

$-f(x) \neq f(-x) \quad \Rightarrow$ La gráfica de la función no es simétrica respecto al origen de coordenadas

4. *Asíntotas*

Asíntotas verticales

No tiene.

Asíntotas horizontales

No tiene, porque la función sólo está definida $\forall x \in [\,0'26\,,3'73\,]$

Asíntotas oblicuas

No tiene, porque la función sólo está definida $\forall x \in [\,0'26\,,3'73\,]$

5. *Cortes con los ejes*

Cortes con el eje de ordenadas

$$\left.\begin{array}{l} y=+\sqrt{-x^2+4x-1} \\ x=0 \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad y=+\sqrt{-1} \qquad \text{No corta.}$$

Cortes con el eje de abscisas

$$\left.\begin{array}{l} y=+\sqrt{-x^2+4x-1} \\ y=0 \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad +\sqrt{-x^2+4x-1}=0 \quad \rightarrow \quad -x^2+4x-1=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=0'26 \\ x=3'73 \end{cases}$$

Corta en los puntos $(0'26,0)$ y $(3'73,0)$

6. ***Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos***

La función derivada es:

$$f'(x)=\frac{-2x+4}{2\cdot\sqrt{-x^2+4x-1}}=\frac{-x+2}{\sqrt{-x^2+4x-1}}$$

El dominio de definición de $f'(x)$ es $\forall x\in\left]0'26,3'73\right[$ (excluidos los extremos porque anulan el denominador). Veamos los valores de x para los que se anula:

$$\frac{-x+2}{\sqrt{-x^2+4x-1}}=0 \quad \rightarrow \quad -x+2=0 \quad \Rightarrow \quad x=2$$

Los intervalos de monotonía son:

$$\left]0'26,2\right[\quad ; \quad \left]2,3'73\right[$$

$f'(1)=0'70>0 \quad \Rightarrow$ en el intervalo $\left]0'26,2\right[$ la función $f(x)$ es creciente

$f'(3)=-0'70<0 \quad \Rightarrow$ en el intervalo $\left]2,3'73\right[$ la función $f(x)$ es decreciente

En resumen, el esquema de monotonía de $f(x)$ es:

Signo de f '		+		–	
Monotonía de f	0'26	↗	2	↘	3'73

Existe un máximo en el punto $\left(2,f(2)\right)$

Conclusión

La función $f(x)$ es creciente $\forall x \in \left] 0'26, 2 \right[$

La función $f(x)$ es decreciente $\forall x \in \left] 2, 3'73 \right[$

Máximo $(2, 1'73)$

7. ***Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión***

La segunda derivada es:

$$f''(x) = \frac{-\sqrt{-x^2+4x-1} - (-x+2) \cdot \dfrac{-2x+4}{2 \cdot \sqrt{-x^2+4x-1}}}{\left(\sqrt{-x^2+4x-1}\right)^2} = \frac{-3}{\sqrt{(-x^2+4x-1)^3}}$$

Como la raíz es positiva $\forall x \in \left] 0'26, 3'73 \right[$ y el numerador es siempre negativo, la segunda derivada es siempre negativa, por tanto $f(x)$ es convexa.

Como es convexa $\forall x \in \left] 0'26, 3'73 \right[$, la función no tiene puntos de inflexión.

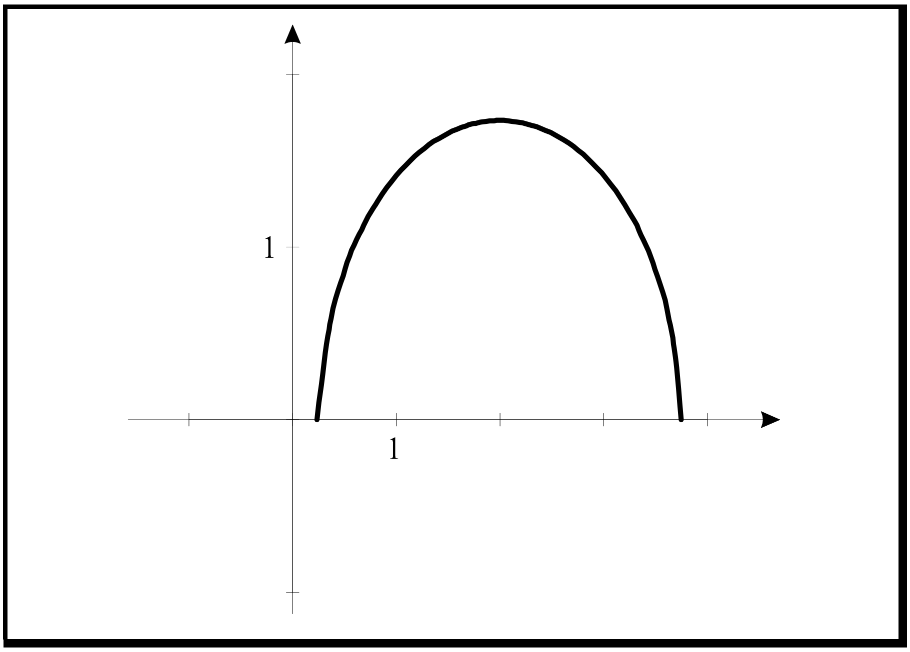
Conclusión

La función $f(x)$ es convexa $\forall x \in \left] 0'26, 3'73 \right[$

No tiene puntos de inflexión.

8. ***Tabla de valores***

x	f(x)
0'5	0'86
1'5	1'65
2'5	1'65
3'5	0'86



Ejemplo 6

Estudio y representación gráfica de la función $\mathbf{y = senx}$

1. Dominio

$D[f(x)] = \forall x \in R$

2. Periodicidad

En general, las funciones trigonométricas basta con analizarlas en un periodo y luego extender los resultados obtenidos a todo el dominio, cosa nada difícil dada la periodicidad. Si el periodo es π, se repetirá cada π radianes, si es $\frac{\pi}{2}$ se repetirá cada $\frac{\pi}{2}$ radianes, etc. Para las funciones $\mathbf{sen\,kx}$ *y* $\mathbf{cos\,kx}$ *el periodo es* $\frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{k}}$*. Para la función* $\mathbf{tg\,kx}$ *el periodo es* $\frac{\pi}{\mathbf{k}}$.

*A la hora de hacer los cálculos, hay que tener en cuenta que si trabajamos con grados sexagesimales π hay que sustituirla por 180º y la calculadora debe estar en modo **DEG**, mientras que si trabajamos con radianes π hay que sustituirla por 3'1415.... y la calculadora debe estar en modo **RAD**.*

La función $y = sen\,x$ está definida $\forall x \in R$ y es periódica de periodo 2π. Vamos a hacer el estudio en el intervalo $[\,0, 2\pi\,]$ y luego lo generalizaremos a todo el dominio.

$$y(x+2\pi) = sen\,(x+2\pi) = sen\,x = y$$

2. Simetrías

Simetría respecto al eje de ordenadas

$f(-x) = sen\,(-x) = -\,sen\,x$

$f(-x) \neq f(x) \quad \Rightarrow$ La gráfica de la función no es simétrica respecto al eje de ordenadas.

Simetría respecto al origen de coordenadas

$-f(x) = -\,sen\,x$

$-f(x) = f(-x) \quad \Rightarrow$ La gráfica de la función es simétrica respecto al origen de coordenadas

3. Asíntotas

Asíntotas verticales

No tiene.

Asíntotas horizontales

No tiene.

Asíntotas oblicuas

No tiene.

4. ***Cortes con los ejes***

Cortes con el eje de ordenadas

$$\left.\begin{array}{l} y = \operatorname{sen} x \\ x = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad y = \operatorname{sen} 0 = 0 \qquad \text{Corta en el punto} \quad (0\,,0)$$

Cortes con el eje de abscisas

$$\left.\begin{array}{l} y = \operatorname{sen} x \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad \operatorname{sen} x = 0 \quad \rightarrow \quad x = \operatorname{arcsen} 0 = 0 + \pi k \qquad \text{Corta en los puntos} \quad (0 + \pi k\,,0)$$

5. ***Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos***

La función derivada es $y' = \cos x$ cuyo dominio de definición es $\forall x \in R$. Veamos los valores de x para los que se anula:

$$\cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \arccos 0 = \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $y = \operatorname{sen} x$ son:

$$\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[\quad ; \quad \left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[\quad ; \quad \left]\frac{3\pi}{2},2\pi\right[$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0'70 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{en el intervalo} \quad \left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[\quad \text{la función } f(x) \text{ es creciente}$$

$$f'(\pi) = -1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{en el intervalo} \quad \left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[\quad \text{la función } f(x) \text{ es decreciente}$$

$$f'\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 0'70 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{en el intervalo} \quad \left]\frac{3\pi}{2},2\pi\right[\quad \text{la función } f(x) \text{ es creciente}$$

En resumen, el esquema de monotonía de $f(x)$ es:

Signo de f '		+		−		+	
Monotonía de f	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$\frac{3\pi}{2}$	$\nearrow$	2π

Existen máximos en los puntos $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\,,f\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\right)$.

Existen mínimos en los puntos $\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k\,,f\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)\right)$.

<u>Conclusión</u>

Generalizando los resultados anteriores a todo el dominio de definición de la función tenemos:

La función $f(x)$ es creciente $\quad \forall x \in \left]0+2\pi k,\frac{\pi}{2}+2\pi k\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}+2\pi k,2\pi+2\pi k\right[\qquad k \in Z$

La función $f(x)$ es decreciente $\quad \forall x \in \left]\frac{\pi}{2}+2\pi k,\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right[\qquad k \in Z$

Máximos $\quad \left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\,,1\right) \qquad k \in Z$

Mínimos $\quad \left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k\,,-1\right) \qquad k \in Z$

donde $k \in Z$, siendo Z el conjunto de los números enteros. Cuando k es positiva, recorremos la circunferencia en sentido contrario a las agujas del reloj, mientras que cuando k es negativa, recorremos la circunferencia en el mismo sentido que las agujas del reloj.

7. <u>Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión</u>

La derivada segunda es $y'' = -\operatorname{sen} x$ cuyo dominio de definición es $\forall x \in R$.

Igualando la segunda derivada a cero y viendo los valores de x para los que se anula, tenemos:

$$-\operatorname{sen} x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \operatorname{arcsen} 0 = \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \end{cases}$$

Los intervalos de concavidad y convexidad de $y = \operatorname{sen} x$ son:

$$\left]0,\pi\right[\quad ; \quad \left]\pi,2\pi\right[$$

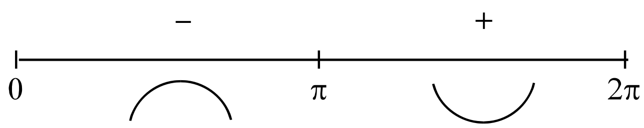
$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1<0 \quad \Rightarrow \quad \text{en el intervalo } \left]0,\pi\right[\text{ la función } f(x) \text{ es convexa}$$

$$f''\left(\frac{3\pi}{2}\right)=1>0 \quad \Rightarrow \quad \text{en el intervalo } \left]\pi,2\pi\right[\text{ la función } f(x) \text{ es cóncava}$$

En resumen, el esquema de concavidad y convexidad de $f(x)$ es:

Signo de f ''

Concavidad / Convexidad



La función es continua en los puntos de abscisa 0, π y 2π, por tanto estos puntos son puntos de inflexión. Sus coordenadas son: $\left(0,f(0)\right)$, $\left(\pi,f(\pi)\right)$ y $\left(2\pi,f(2\pi)\right)$.

<u>Conclusión</u>

Generalizando los resultados anteriores a todo el dominio de definición de la función tenemos:

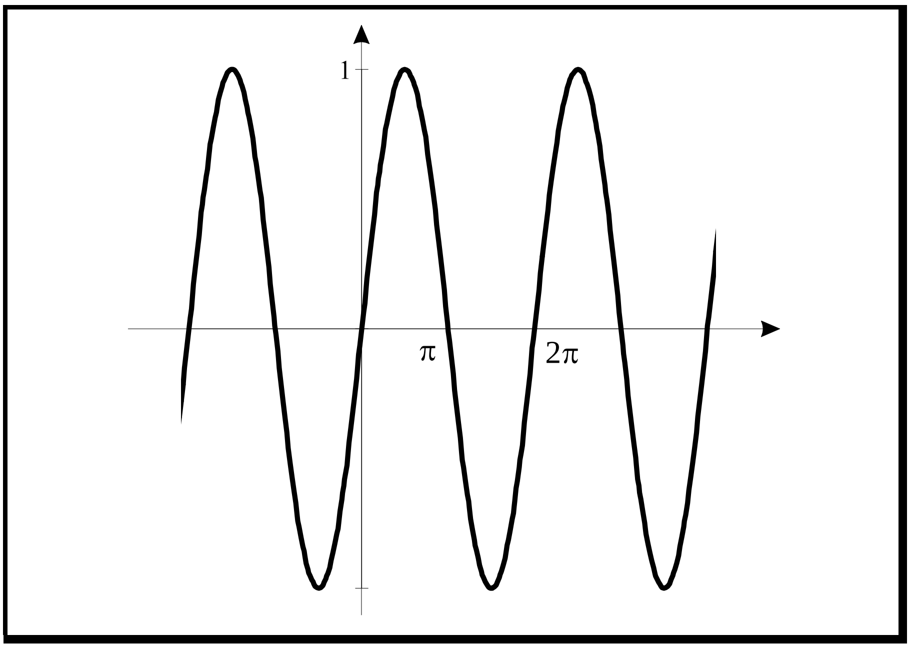
La función $f(x)$ es cóncava $\quad \forall x \in \left]\pi+2\pi k, 2\pi+2\pi k\right[\quad k \in Z$

La función $f(x)$ es convexa $\quad \forall x \in \left]0+2\pi k, \pi+2\pi k\right[\quad k \in Z$

Los puntos de inflexión son $\quad (0+\pi k, 0) \quad k \in Z$

8. ***<u>Tabla de valores</u>***

x	f(x)
0'5	0'86
1'5	1'65
2'5	1'65
3'5	0'86



Ejemplo 7

Estudio y representación gráfica de la función $\mathbf{f(x) = 5 \cdot \cos\left(\frac{x}{3}\right)}$

1. Dominio

$D\left[f(x)\right] = \forall x \in R$

2. Periodicidad

Por ser una función trigonométrica es una función periódica, y su periodo se obtiene dividiendo 2π entre el coeficiente de la variable x, es decir entre 1/3.

$$\text{Periodo} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$$

Vamos a hacer el estudio de la función en el intervalo $\forall x \in \left]0, 6\pi\right[$ y luego lo generalizaremos a todo el dominio de definición.

$$f(x+6\pi) = 5 \cdot \cos\left(\frac{x+6\pi}{3}\right) = 5 \cdot \cos\left(\frac{x}{3}\right) = f(x)$$

2. Simetrías

Simetría respecto al eje de ordenadas

$$f(-x) = 5 \cdot \cos\left(\frac{-x}{3}\right) = 5 \cdot \cos\frac{x}{3}$$

$f(-x) = f(x) \quad \Rightarrow$ La gráfica de la función es simétrica respecto al eje de ordenadas.

Simetría respecto al origen de coordenadas

$$-f(x) = -5 \cdot \cos\frac{x}{3}$$

$-f(x) \neq f(-x) \quad \Rightarrow$ La gráfica de la función no es simétrica respecto al origen de coordenadas

3. Asíntotas

Asíntotas verticales

No tiene.

Asíntotas horizontales

No tiene.

Asíntotas oblicuas

No tiene.

4. ***Cortes con los ejes***

Cortes con el eje de ordenadas

$$\left.\begin{array}{l} y = 5\cdot\cos\dfrac{x}{3} \\ x = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad y = 5\cdot\cos 0 = 5\cdot 1 = 5 \qquad \text{Corta en el punto } \ (0\,,5)$$

Cortes con el eje de abscisas

$$\left.\begin{array}{l} y = 5\cdot\cos\dfrac{x}{3} \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow 5\cdot\cos\frac{x}{3} = 0 \ \rightarrow \ \cos\frac{x}{3} = 0 \ \rightarrow \ \frac{x}{3} = \arccos 0 = \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k \right. \ \rightarrow \ x = \frac{3\pi}{2} + 3\pi k$$

Corta en los puntos $\left(\dfrac{3\pi}{2} + 3\pi k\,,0\right)$

5. ***Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos***

La función derivada es

$$f'(x) = -\frac{5}{3}\cdot\text{sen}\,\frac{x}{3}$$

cuyo dominio de definición es $\forall x \in R$.

Veamos los valores de x para los que se anula:

$$-\frac{5}{3}\cdot\text{sen}\frac{x}{3} = 0 \ \rightarrow \ \text{sen}\frac{x}{3} = 0 \ \rightarrow \ \frac{x}{3} = \text{arcsen}\,0 \ \Rightarrow \ \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x}{3} = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \\ \dfrac{x}{3} = \pi \quad \rightarrow \quad x = 3\pi \end{array}\right.$$

Los intervalos de monotonía son:

$$\left]0\,,3\pi\right[\ ; \ \left]3\pi\,,6\pi\right[$$

$$f'(\pi) = -1'44 < 0 \ \Rightarrow \ \text{en el intervalo } \left]0\,,3\pi\right[\text{ la función } f(x) \text{ es decreciente}$$

$$f'(4\pi) = 1'44 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{en el intervalo } \left]3\pi\,,6\pi\right[\text{ la función } f(x) \text{ es creciente}$$

En resumen, el esquema de monotonía de $f(x)$ es:

Signo de f'		$-$		$+$	
Monotonía de f	0	$\searrow$	3π	$\nearrow$	6π

Existen máximos en los puntos $\left(0+6\pi k\,,f(0+6\pi k)\right)$.

Existen mínimos en los puntos $\left(3\pi+6\pi k\,,f(3\pi+6\pi k)\right)$.

<u>*Conclusión*</u>

Generalizando los resultados anteriores a todo el dominio de definición de la función tenemos:

La función $f(x)$ es creciente $\quad \forall x \in \left]3\pi+6\pi k\,,6\pi+6\pi k\right[\quad k \in Z$

La función $f(x)$ es decreciente $\quad \forall x \in \left]0+6\pi k\,,3\pi+6\pi k\right[\quad k \in Z$

Máximos $\quad (0+6\pi k\,,5) \quad k \in Z$

Mínimo $\quad (3\pi+6\pi k\,,-5) \quad k \in Z$

7. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión

La derivada segunda es:

$$f''(x) = -\frac{5}{9}\cdot\cos\frac{x}{3}$$

cuyo dominio de definición es $\forall x \in R$

Igualando la segunda derivada a cero y viendo los valores de x para los que se anula, tenemos:

$$-\frac{5}{9}\cdot\cos\frac{x}{3} = 0 \quad \rightarrow \quad \cos\frac{x}{3} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{x}{3} = \arccos 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{x}{3} = \dfrac{\pi}{2} & \rightarrow \quad x = \dfrac{3\pi}{2} \\[2ex] \dfrac{x}{3} = \dfrac{3\pi}{2} & \rightarrow \quad x = \dfrac{9\pi}{2} \end{cases}$$

Los intervalos de concavidad y convexidad son:

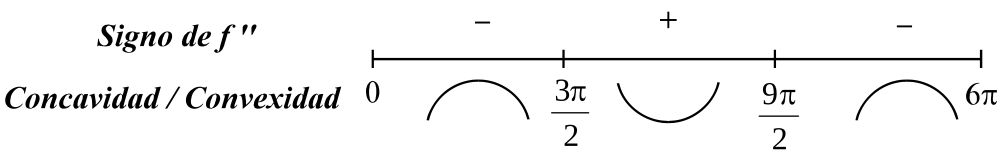
$$\left]0,\frac{3\pi}{2}\right[\quad ; \quad \left]\frac{3\pi}{2},\frac{9\pi}{2}\right[\quad ; \quad \left]\frac{9\pi}{2},6\pi\right[$$

$f''(\pi) = -0'27 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ en el intervalo $\left]0,\frac{3\pi}{2}\right[$ la función $f(x)$ es convexa

$f''(2\pi) = 0'27 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ en el intervalo $\left]\frac{3\pi}{2},\frac{9\pi}{2}\right[$ la función $f(x)$ es cóncava

$f''(5\pi) = -0'27 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ en el intervalo $\left]\frac{9\pi}{2},6\pi\right[$ la función $f(x)$ es convexa

En resumen, el esquema de concavidad y convexidad de $f(x)$ es:



La función es continua en los puntos de abscisa $\frac{3\pi}{2}$ y $\frac{9\pi}{2}$, por tanto estos puntos son puntos de inflexión. Sus coordenadas son: $\left(\frac{3\pi}{2}, f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$ y $\left(\frac{9\pi}{2}, f\left(\frac{9\pi}{2}\right)\right)$.

<u>Conclusión</u>

La función $f(x)$ es cóncava $\quad \forall x \in \left]\frac{3\pi}{2}+6\pi k, \frac{9\pi}{2}+6\pi k\right[$

La función $f(x)$ es convexa $\quad \forall x \in \left]0+6\pi k, \frac{3\pi}{2}+6\pi k\right[\cup \left]\frac{9\pi}{2}+6\pi k, 6\pi+6\pi k\right[$

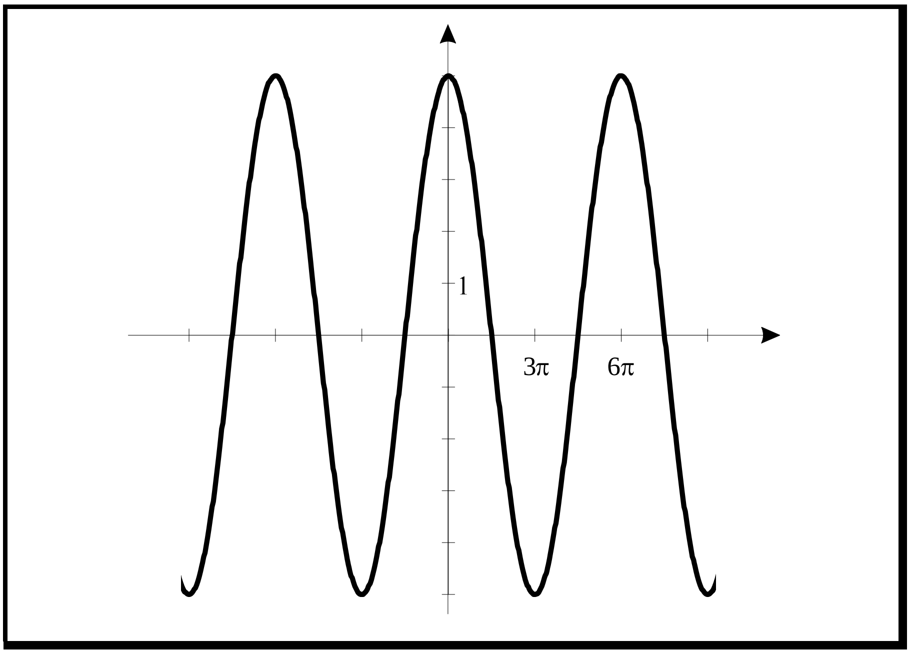
También podríamos escribir la convexidad en un sólo intervalo de la siguiente manera:

La función $f(x)$ es convexa $\quad \forall x \in \left]\frac{9\pi}{2}+6\pi k, \frac{15\pi}{2}+6\pi k\right[\qquad k \in Z$

Los puntos de inflexión son $\quad \left(\frac{3\pi}{2}+3\pi k, 0\right) \qquad k \in Z$

8. Tabla de valores

x	$f(x)$
2'35	3'53
7'06	–3'53
11'78	–3'53
16'49	3'53



Representación gráfica del valor absoluto de una función

Si lo que se trata es de representar gráficamente la función $|\mathbf{f(x)}|$ lo podemos hacer de dos formas:

1ª Forma

a) Estudio y representación gráfica de la función $f(x)$.

b) La gráfica de la función $|f(x)|$ se obtiene dibujando por simetría respecto al eje de abscisas la parte negativa de la función $f(x)$, lo que se consigue dando valores positivos a las ordenadas de $f(x)$ que nos resulten negativas, manteniendo el valor de las abscisas.

c) Conclusión. Aquí modificaremos, según la gráfica obtenida en el apartado b), los resultados obtenidos en el apartado a). *Este método es el más práctico*.

2ª Forma

a) Aplicar la definición de valor absoluto para descomponer la función en trozos.

b) Realizar el estudio y representación gráfica de cada uno de ellos por separado en los intervalos en los que estén definidos.

Ejemplo 8

Estudio y representación gráfica de la función $\mathbf{f(x)=\left|x^2-1\right|}$

Este ejemplo lo haremos de la primera forma, es decir haremos el estudio y la representación gráfica de $f(x)=x^2-1$ y luego representaremos $f(x)=\left|x^2-1\right|$

1. ***Dominio***

$D\left[f(x)\right]=\forall x\in R$

2. ***Periodicidad***

No es periódica ya que $f(x+T)=(x+T)^2-1\neq f(x)$

3. ***Simetrías***

Simetría respecto al eje de ordenadas

$f(-x)=(-x)^2-1=x^2-1$

$f(-x)=f(x)\quad\Rightarrow$ La gráfica de la función es simétrica respecto al eje de ordenadas.

Simetría respecto al origen de coordenadas

$-f(x)=-x^2+1$

$-f(x)\neq f(-x)\quad\Rightarrow$ La gráfica de la función no es simétrica respecto al origen de coordenadas

4. ***Asíntotas***

Asíntotas verticales

Es una función polinómica, por lo tanto no tiene asíntotas.

Asíntotas horizontales

Es una función polinómica, por lo tanto no tiene asíntotas.

Asíntotas oblicuas

Es una función polinómica, por lo tanto no tiene asíntotas.

5. Cortes con los ejes

Cortes con el eje de ordenadas

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 1 \\ x = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad y = -1 \qquad \text{Corta en el punto } \; (0\,,-1)$$

Cortes con el eje de abscisas

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 1 \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad x^2 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right. \qquad \text{Corta en los puntos } \; (-1,0) \quad \text{y} \quad (1,0)$$

6. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 2x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$$

En resumen, el esquema de monotonía de $f(x)$ es:

		0	
Signo de f '	−		+
Monotonía de f	↘		↗

La función $f(x)$ es creciente $\quad \forall x \in \left]0\,,\infty\right[$

La función $f(x)$ es decreciente $\quad \forall x \in \left]-\infty\,,0\right[$

Mínimo $\quad (0\,,-1)$

7. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión

$$f''(x) = 2 > 0$$

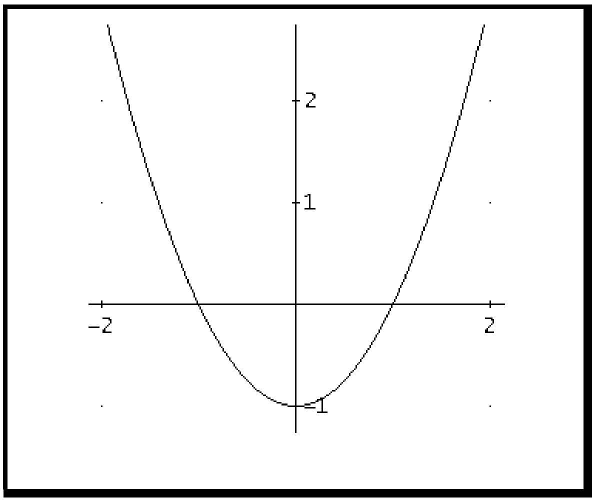
La función $f(x)$ es cóncava $\quad \forall x \in R$, por tanto no tiene puntos de inflexión.

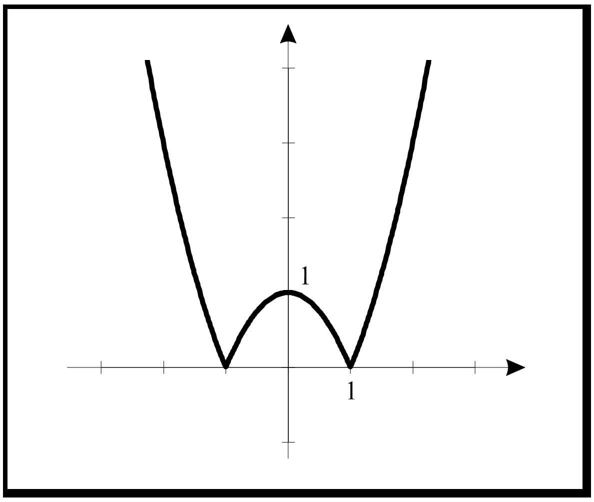
8. Tablas de valores

x	$-2'5$	$-1'5$	$-0'5$	$0'5$	$1'5$	$2'5$
$f(x)$	$5'25$	$1'25$	$-0'75$	$-0'75$	$1'25$	$5'25$

x	$-2'5$	$-1'5$	$-0'5$	$0'5$	$1'5$	$2'5$
$\lvert f(x) \rvert$	$5'25$	$1'25$	$0'75$	$0'75$	$1'25$	$5'25$

9. Gráficas





Conclusión para $\mathbf{f(x) = \left| x^2 - 1 \right|}$

1. Dominio

$D\left[\left| f(x) \right| \right] = \forall x \in R$

2. Periodicidad

No es periódica.

3. Simetrías

Simetría respecto al eje de ordenadas

La gráfica de la función es simétrica respecto al eje de ordenadas.

Simetría respecto al origen de coordenadas

La gráfica de la función no es simétrica respecto al origen de coordenadas.

4. Asíntotas

Asíntotas verticales

No tiene.

Asíntotas horizontales

No tiene.

Asíntotas oblicuas

No tiene.

5. *Cortes con los ejes*

Cortes con el eje de ordenadas

Corta en el punto $(0,1)$

Cortes con el eje de abscisas

Corta en los puntos $(-1,0)$ y $(1,0)$

6. *Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos*

La función $f(x)$ es creciente $\quad \forall x \in]-1,0[\cup]1,\infty[$

La función $f(x)$ es decreciente $\quad \forall x \in]-\infty,-1[\cup]0,1[$

Máximo $\quad (0,1)$

Mínimos en los puntos $\quad (-1,0)$ y $(1,0)$

7. *Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión*

La función $f(x)$ es cóncava $\quad \forall x \in]-\infty,-1[\cup]1,\infty[$

La función es convexa $\quad \forall x \in]-1,1[$

Los puntos de inflexión son: $\quad (-1,0)$ y $(1,0)$

Ejemplo 9

Estudio y representación gráfica de la función $\mathbf{f(x)=\left|\dfrac{x^2-3}{x-2}\right|}$

Este ejemplo lo haremos de las dos formas:

1ª Forma.

Haremos el estudio y la representación gráfica de $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x-2}$ y luego representaremos $f(x)=\left|\dfrac{x^2-3}{x-2}\right|$

1. Dominio

$$D\left[f(x)\right] = \forall x \in R - \{\, 2 \,\}$$

2. Periodicidad

No es periódica ya que $f(x+T) = \dfrac{(x+T)^2 - 3}{x+T-2} \neq f(x)$

3. Simetrías

Simetría respecto al eje de ordenadas

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 3}{-x-2} = \frac{x^2 - 3}{-x-2}$$

$f(-x) \neq f(x) \quad \Rightarrow$ La gráfica de la función no es simétrica respecto al eje de ordenadas.

Simetría respecto al origen de coordenadas

$$-f(x) = -\frac{x^2 - 3}{x-2} = \frac{-x^2 + 3}{x-2}$$

$-f(x) \neq f(-x) \quad \Rightarrow$ La gráfica de la función no es simétrica respecto al origen de coordenadas

4. Asíntotas

Asíntotas verticales

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2 - 3}{x-2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 - 3}{x-2} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ La recta } x = 2 \text{ es una asíntota vertical.}$$

Asíntotas horizontales

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 3}{x-2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 3}{x-2} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ No tiene.}$$

Asíntotas oblicuas

$$\left.\begin{array}{l} m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{x^2-3}{x-2}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-3}{x^2-2x} = 1 \\ n = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2-3}{x-2} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-3-x^2+2x}{x-2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3+2x}{x-2} = 2 \end{array}\right\}$$

La recta $y = x + 2$ es una asíntota oblicua.

5. *Cortes con los ejes*

Cortes con el eje de ordenadas

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{x^2-3}{x-2} \\ x = 0 \end{array}\right\} \rightarrow y = \frac{3}{2} = 1'5 \quad \text{Corta en el punto } (0, 1'5).$$

Cortes con el eje de abscisas

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{x^2-3}{x-2} \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{x^2-3}{x-2} = 0 \rightarrow x^2 - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} = 1'73 \\ x = -\sqrt{3} = -1'73 \end{cases}$$

Corta en los puntos $(-1'73, 0)$ y $(1'73, 0)$

6. *Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos*

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(x-2)-(x^2-3)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$$

Los valores de x para los que la función $f'(x)$ es discontinua son los mismos que para $f(x)$. Veamos los valores para los que $f'(x)$ se anula:

$$\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2} = 0 \rightarrow x^2-4x+3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Los intervalos de monotonía son:

$$]-\infty, 1[\quad ; \quad]1, 2[\quad ; \quad]2, 3[\quad ; \quad]3, \infty[$$

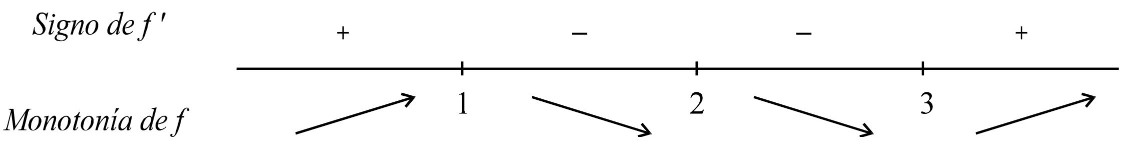
$f'(0) = 0'75 > 0 \Rightarrow$ en el intervalo $]-\infty, 1[$ la función $f(x)$ es creciente.

$f'(1'5) = -3 < 0 \Rightarrow$ en el intervalo $]1, 2[$ la función $f(x)$ es decreciente.

$f'(2'5) = -3 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ en el intervalo $\left]2, 3\right[$ la función $f(x)$ es decreciente.

$f'(4) = 0'75 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ en el intervalo $\left]3, \infty\right[$ la función $f(x)$ es creciente.

En resumen, el esquema de monotonía de $f(x)$ es:



La función $f(x)$ es creciente $\quad \forall x \in \left]-\infty, 1\right[\cup \left]3, \infty\right[$

La función $f(x)$ es decreciente $\quad \forall x \in \left]1, 2\right[\cup \left]2, 3\right[$

Máximo $\quad (1, 2) \qquad$ Mínimo $\quad (3, 6)$

7. ***Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión***

$$f''(x) = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - 2(x-2)(x^2-4x+3)}{(x-2)^4} = \frac{2}{(x-2)^3}$$

Los valores de x para los que la función $f''(x)$ es discontinua son los mismos que para $f'(x)$. Los valores de x para los que se anula $f''(x)$ son:

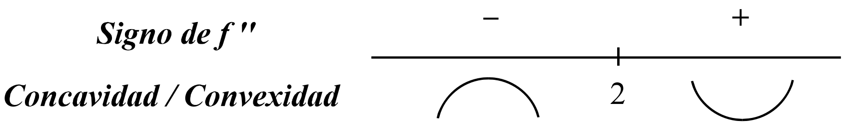
$$\frac{2}{(x-2)^3} = 0 \quad \rightarrow \quad 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{No hay ninguno}$$

Los intervalos de concavidad y convexidad son: $\quad \left]-\infty, 2\right[\quad ; \quad \left]2, \infty\right[$

$f''(0) = -0'25 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ en el intervalo $\left]-\infty, 2\right[$ la función $f(x)$ es convexa

$f''(3) = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ en el intervalo $\left]2, \infty\right[$ la función $f(x)$ es cóncava

En resumen, el esquema de concavidad y convexidad de $f(x)$ es:



La función $f(x)$ es cóncava $\forall x \in \left]2, \infty\right[$

La función $f(x)$ es convexa $\forall x \in \left]-\infty, 2\right[$

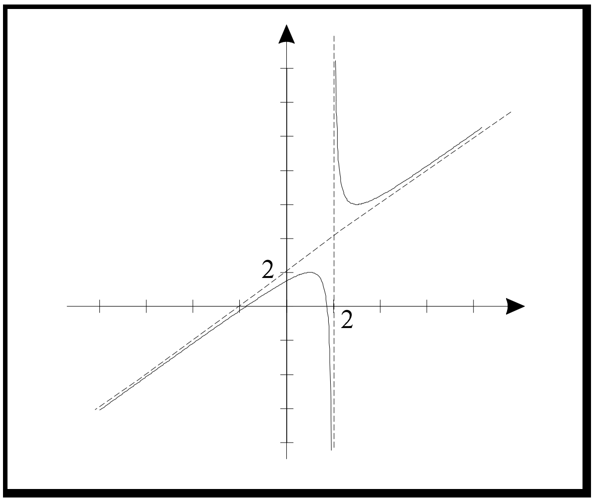
No hay puntos de inflexión, ya que en $x = 2$ no está definida la función.

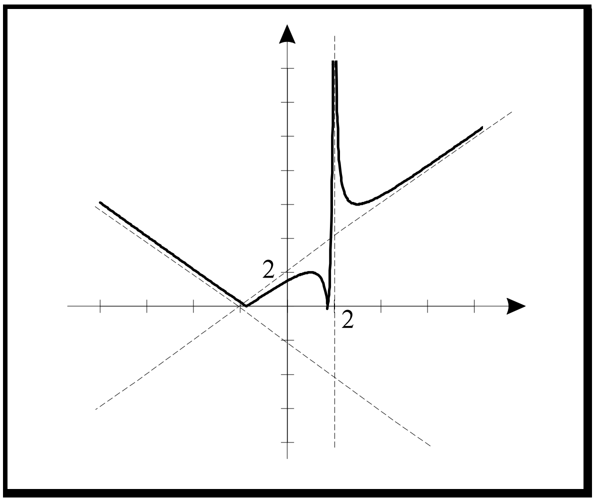
8. Tablas de valores

x	−5	−3	−0'5	0'5	1'5	2'5
f(x)	−3'14	−1'2	1'1	1'83	1'5	6'5

x	−5	−3	−0'5	0'5	1'5	2'5
|f(x)|	3'14	1'2	1'1	1'83	1'5	6'5

9. Gráfica





Conclusión para $\mathbf{f(x)} = \left|\dfrac{\mathbf{x^2 - 3}}{\mathbf{x - 2}}\right|$

1. Dominio

$D\left[\,|f(x)|\,\right] = \forall x \in R - \{2\}$

2. Periodicidad

No es periódica.

3. Simetrías

Simetría respecto al eje de ordenadas

La gráfica de la función no es simétrica respecto al eje de ordenadas.

Simetría respecto al origen de coordenadas

La gráfica de la función no es simétrica respecto al origen de coordenadas.

4. Asíntotas

Asíntotas verticales

La recta $x = 2$ es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales

No tiene.

Asíntotas oblicuas

Las rectas $y = x + 2$ e $y = -x - 2$ son asíntotas oblicuas.

5. Cortes con los ejes

Cortes con el eje de ordenadas

Corta en el punto $(0, 1'5)$

Cortes con el eje de abscisas

Corta en los puntos $(1'73, 0)$ y $(-1'73, 0)$

6. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

La función $f(x)$ es creciente $\forall x \in \left]-1'73, 1\right[\cup \left]1'73, 2\right[\cup \left]3, \infty\right[$

La función $f(x)$ es decreciente $\forall x \in \left]-\infty, -1'73\right[\cup \left]1, 1'73\right[\cup \left]2, 3\right[$

Máximo $(1, 2)$

Mínimos en los puntos $(-1'73, 0)$; $(1'73, 0)$ y $(3, 6)$

7. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión

La función $f(x)$ es cóncava $\forall x \in \left]-\infty, -1'73\right[\cup \left]1'73, 2\right[\cup \left]2, \infty\right[$

La función es convexa $\forall x \in \left]-1'73, 1'73\right[$

Los puntos de inflexión son: $(-1'73, 0)$ y $(1'73, 0)$

2ª Forma

Lo primero que hay que hacer es estudiar el signo de la expresión que hay entre barras, teniendo en cuenta que el valor absoluto de un número es siempre una cantidad positiva.

Hallamos las raíces del numerador y del denominador y formamos todos los intervalos posibles desde $-\infty$ hasta $+\infty$.

$$x^2-3=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ x=\sqrt{3} \end{cases} \qquad\qquad x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x=2$$

Los intervalos posibles son:

$$\left]-\infty,-\sqrt{3}\right[\quad ; \quad \left]-\sqrt{3},\sqrt{3}\right[\quad ; \quad \left]\sqrt{3},2\right[\quad ; \quad \left]2,\infty\right[$$

Posteriormente sustituimos en la expresión un valor numérico de cada intervalo y comprobamos el signo.

$$\left]-\infty,-\sqrt{3}\right[\;\rightarrow\; f(-2)=-0'25 \qquad\qquad \left]-\sqrt{3},\sqrt{3}\right[\;\rightarrow\; f(0)=1'5$$

$$\left]\sqrt{3},2\right[\;\rightarrow\; f(1'9)=-6'1 \qquad\qquad \left]2,\infty\right[\;\rightarrow\; f(3)=6$$

Como sabemos que el valor numérico de la expresión $\left|\dfrac{x^2-3}{x-2}\right|$ *es siempre positivo, significa que en los intervalos* $\left]-\infty,-\sqrt{3}\right[$ y $\left]\sqrt{3},2\right[$ *tenemos que cambiar el signo de la expresión* $\dfrac{x^2-3}{x-2}$ para que el valor numérico sea positivo.

$$-\sqrt{3} \qquad\qquad \sqrt{3} \qquad\qquad 2$$

$$\frac{-x^2+3}{x-2} \qquad\qquad \frac{x^2-3}{x-2} \qquad\qquad \frac{-x^2+3}{x-2} \qquad\qquad \frac{x^2-3}{x-2}$$

Según este esquema, la función original la podemos expresar de la siguiente manera:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{-x^2+3}{x-2} & \text{si} \quad x\in\left]-\infty,-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3},2\right[\\ \dfrac{x^2-3}{x-2} & \text{si} \quad x\in\left]-\sqrt{3},\sqrt{3}\right[\cup\left]2,\infty\right[\end{cases}$$