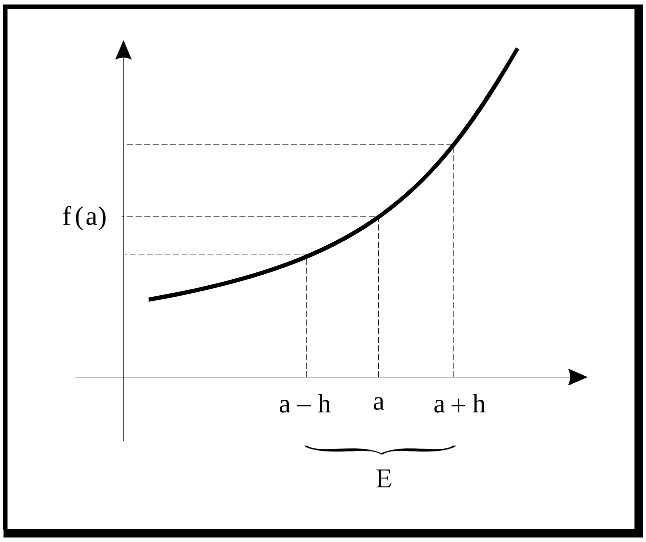
Monotonía. Crecimiento y Decrecimiento de una función

En toda actividad económica y en muchos otros casos de las Ciencias Sociales, el núcleo del problema es estudiar cuándo una determinada función (de beneficio, de coste, de bienestar, de estabilidad, etc.) crece, cuándo alcanza una cota máxima o mínima y cuando va disminuyendo. Si la función en cuestión es derivable, y la mayoría de las funciones que aparecen en la práctica lo son, el cálculo de derivadas proporciona la solución al problema de un modo claro y rápido.

Definición

Sea $f(x)$ una función cuyo dominio de definición es D, y sea $a \in D$. Se dice que $f(x)$ es estrictamente creciente en el punto a, si y sólo si existe un entorno de a, $E(a,h)$, tal que $\forall x \in E(a,h)$ se verifican las siguientes desigualdades:

$$\left.\begin{matrix} x < a & \Rightarrow & f(x) < f(a) \\ x > a & \Rightarrow & f(x) > f(a) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$$



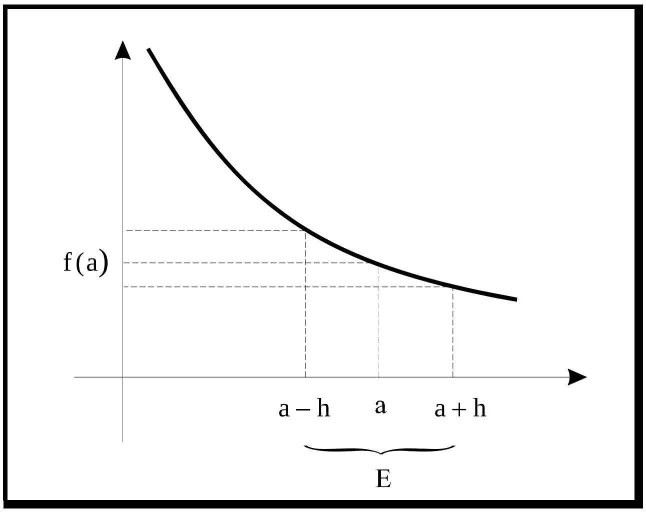
Sea $f(x)$ una función cuyo dominio de definición es D, y sea $a \in D$. Se dice que $f(x)$ es creciente en el punto a si y sólo si existe un entorno de a, $E(a,h)$, tal que $\forall x \in E(a,h)$ se verifican las siguientes desigualdades:

$$\left.\begin{matrix} x \le a & \Rightarrow & f(x) \le f(a) \\ x \ge a & \Rightarrow & f(x) \ge f(a) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \ge 0$$

Definición

Sea $f(x)$ una función cuyo dominio de definición es D, y sea $a \in D$. Se dice que $f(x)$ es estrictamente decreciente en el punto a si y sólo si existe un entorno de a, $E(a,h)$, tal que $\forall x \in E(a,h)$ se verifican las siguientes desigualdades:

$$\left.\begin{matrix} x < a & \Rightarrow & f(x) > f(a) \\ x > a & \Rightarrow & f(x) < f(a) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} < 0$$



Sea $f(x)$ una función cuyo dominio de definición es D, y sea $a \in D$. Se dice que $f(x)$ es decreciente en el punto a si y sólo si existe un entorno de a, $E(a,h)$, tal que $\forall x \in E(a,h)$ se verifican las siguientes desigualdades:

$$\left.\begin{array}{lll} x \leq a & \Rightarrow & f(x) \geq f(a) \\ x \geq a & \Rightarrow & f(x) \leq f(a) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$$

<u>Teorema</u>

Sea $f(x)$ una función cuyo dominio de definición es D, derivable en $a \in D$ y tal que $f'(a) \neq 0$.

$f(x)$ es estrictamente creciente en a si y sólo si $f'(a) > 0$

<u>Demostración</u>

Supuesto que $f(x)$ es estrictamente creciente en el punto a, entonces existe un entorno $E(a,h)$ tal que:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0 \quad \forall x \in E(a,h), \text{ por tanto } \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$$

y como $f'(a) \neq 0$, entonces $f'(a) > 0$.

<u>Teorema</u>

Sea $f(x)$ una función cuyo dominio de definición es D, derivable en $a \in D$ y tal que $f'(a) \neq 0$.

$f(x)$ es estrictamente decreciente en a si y sólo si $f'(a) < 0$

<u>Demostración</u>

Supuesto que f es estrictamente decreciente en el punto a, entonces existe un entorno $E(a,h)$ tal que:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < 0 \quad \forall a \in E(a,h), \text{ por tanto } \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$$

y como $f'(a) \neq 0$, entonces $f'(a) < 0$.

Intervalos de crecimiento y decrecimiento

<u>Teorema</u>

Sea $f(x)$ una función continua en $\left[a,b\right]$ y derivable en $\left]a,b\right[$.

1) Si $f'(x)>0 \ \forall x \in \left]a,b\right[$ la función $f(x)$ es estrictamente creciente en $\left[a,b\right]$.

2) Si $f'(x)<0 \ \forall x \in \left]a,b\right[$ la función $f(x)$ es estrictamente decreciente en $\left[a,b\right]$.

3) Si $f'(x)=0 \ \forall x \in \left]a,b\right[$ la función $f(x)$ es constante en $\left[a,b\right]$, es decir $f(x)=k$ con $k \in \mathbb{R}$.

4) Si $x_o \in \left]a,b\right[$ y $f'(x_o)=0$, tenemos que estudiar el comportamiento de la función en las proximidades del punto x_o.

Ejemplo: **Estudiar si la función $f(x)=x^3-3x^2+3x-1$ es creciente o decreciente en el punto de abscisa $x_o=1$.**

Si calculamos la derivada de la función en el punto $x_o=1$ obtenemos $f'(1)=0$, por lo que necesitamos estudiar el comportamiento de la función en los alrededores de dicho punto.

Consideremos un entorno del punto1, es decir $E(1,h)$ con $h>0$.

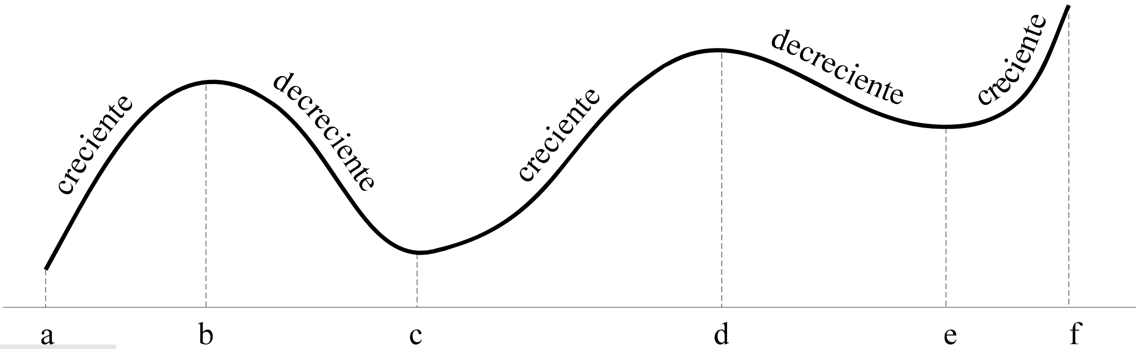
$$f(1-h)=(1-h)^3-3\cdot(1-h)^2+3\cdot(1-h)-1=-h^3<f(1)=0$$

$$f(1+h)=(1+h)^3-3\cdot(1+h)^2+3\cdot(1+h)-1=h^3>f(1)=0$$

Por tanto, $f(x)$ es creciente en $x_o=1$.

Interpretación geométrica

Una función es creciente cuando su gráfica se eleva conforme nos movemos en el sentido natural de izquierda a derecha. Es decreciente cuando la gráfica desciende.

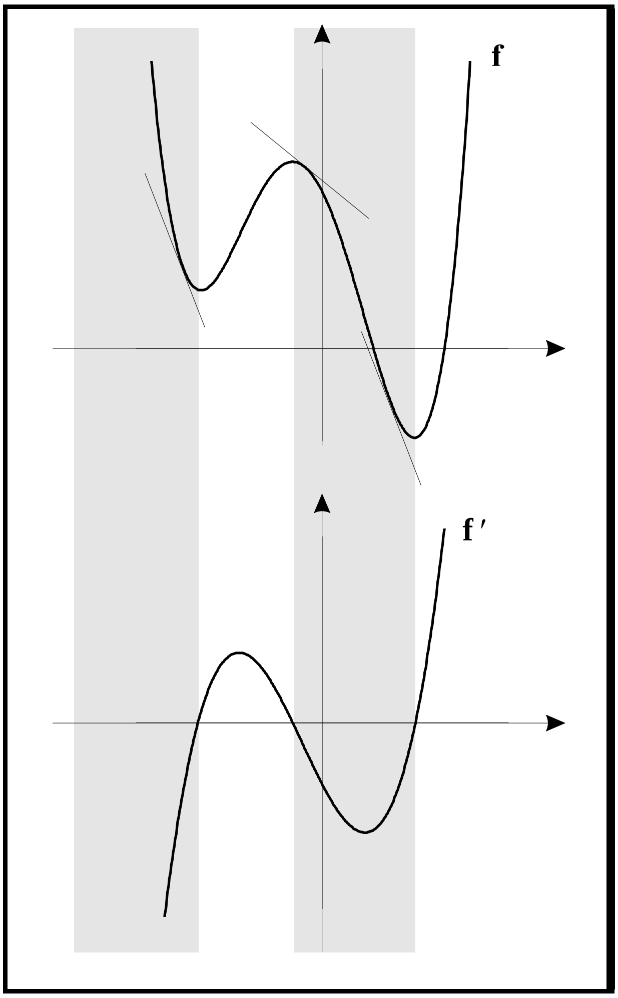


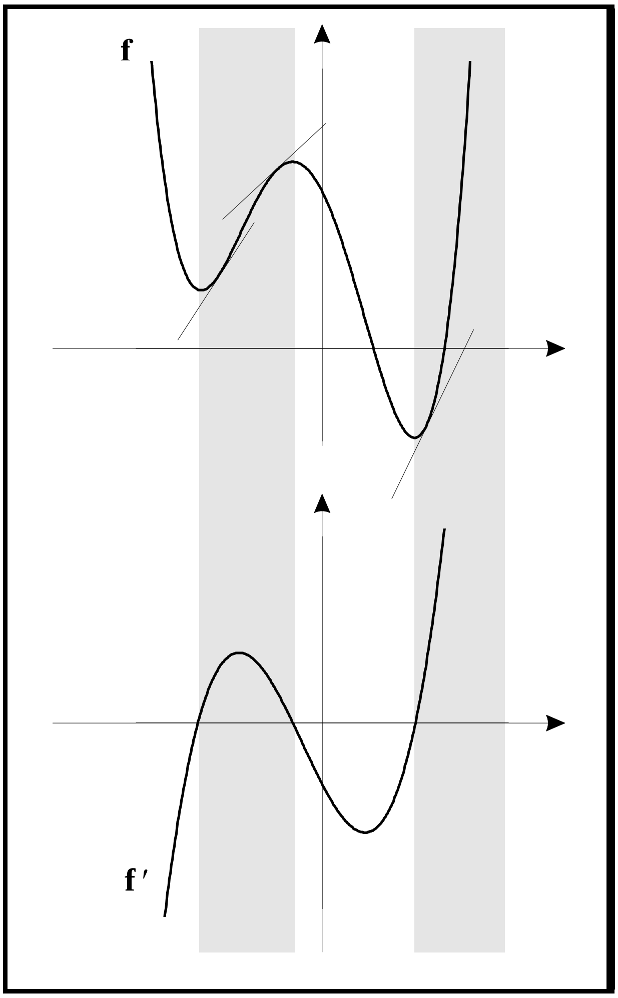
Ejemplo

Consideremos una función $f(x)$ y su función derivada $f'(x)$:

$$\mathbf{f(x) = 0'03x^4 + 0'07x^3 - 0'64x^2 - 1'32x + 3'36} \qquad \mathbf{f'(x) = 0'12x^3 + 0'21x^2 - 1'28x - 1'32}$$

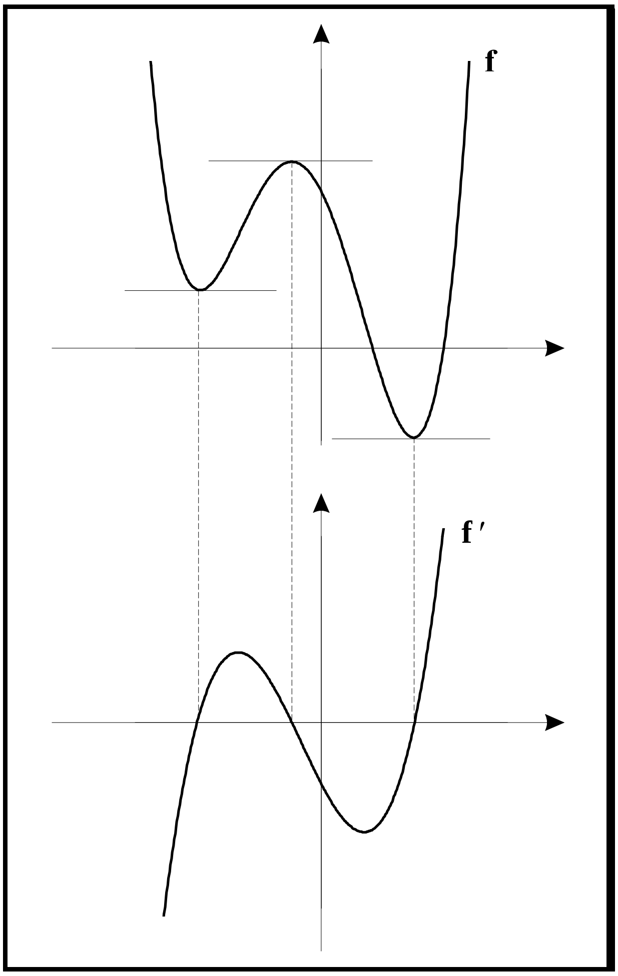
Vamos a fijarnos en qué intervalos la gráfica correspondiente a $f'(x)$ es positiva, nula o negativa y qué es lo que ocurre en los mismos intervalos con la función $f(x)$, analizando el signo de cada una de ellas en los intervalos representados con franjas sombreadas.





En los intervalos correspondientes a las zonas sombreadas de la figura observamos que la gráfica de la función $f'(x)$ está por debajo del eje x, lo que significa que $f'(x)$ es negativa. Si en los mismos intervalos trazamos tangentes a la gráfica de la función $f(x)$ observamos que las pendientes de dichas rectas tangentes son negativas, lo que significa que la función $f(x)$ es decreciente en dichos intervalos.

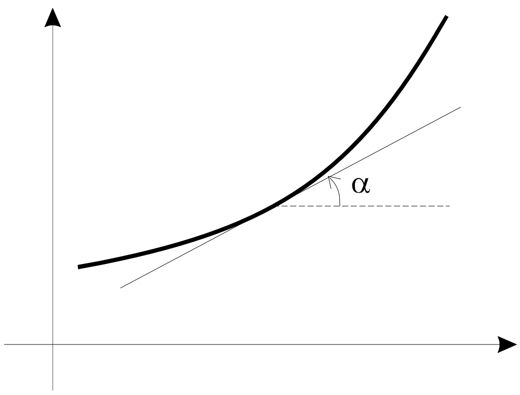
En los intervalos correspondientes a las zonas sombreadas de la figura observamos que la gráfica de la función $f'(x)$ está por encima del eje x, lo que significa que $f'(x)$ es positiva. Si en los mismos intervalos trazamos tangentes a la gráfica de la función $f(x)$ observamos que las pendientes de dichas rectas tangentes son positivas, lo que significa que la función $f(x)$ es creciente en dichos intervalos.



Cuando la gráfica de la función derivada $f'(x)$ corta al eje x, en esos puntos la derivada es cero y en consecuencia las tangentes a la gráfica de la función $f(x)$ en dichos puntos son horizontales, y por tanto su pendiente nula.

Todo lo anterior lo podemos resumir en el siguiente esquema:

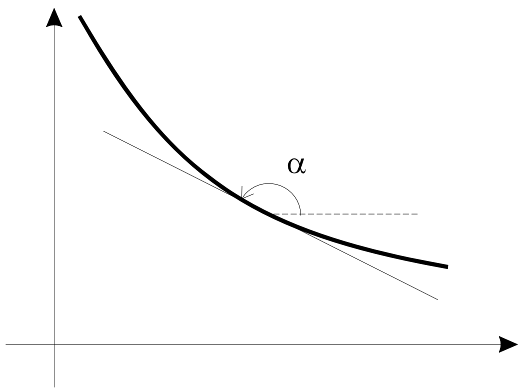
Función Creciente



$$\alpha < 90^{o} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{tg}\alpha > 0$$

$$\mathbf{m = tg\alpha = f'(x) > 0}$$

Función Decreciente



$$\alpha > 90^{o} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{tg}\alpha < 0$$

$$\mathbf{m = tg\alpha = f'(x) < 0}$$

Cálculo de los intervalos de monotonía de una función

Al conjunto de valores de la variable, donde la función $\mathbf{f(x)}$ ***es creciente o decreciente se les llama intervalos de crecimiento y decrecimiento, o intervalos de monotonía de la función.***

Un método práctico para el cálculo de dichos intervalos es el que sigue:

1. *Se calculan los valores de la variable x en los que la función* $f(x)$ *es discontinua. Estos valores también son discontinuidades de* $f'(x)$.

2. *Se calculan los valores de la variable x en los que* $f'(x)$ *se anula o es discontinua. Puede ocurrir que exista algún punto en el que* $f'(x)$ *no sea continua y sin embargo sí lo sea* $f(x)$. *Por ejemplo, la función* $f(x)=\sqrt[3]{x}$ *existe y es continua para* $x=0$, *pero no así su derivada* $f'(x)=\dfrac{-1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$.

3. *Cada pareja de valores de la variable x consecutivos determinan un intervalo de monotonía de* $f(x)$, *y en dicho intervalo el signo de* $f'(x)$ *permanece constante.* <u>*Todos los intervalos están abiertos por los dos extremos*</u>*, ya que si algún extremo estuviera cerrado en él la derivada valdría cero.*

Para averiguar si el intervalo de monotonía de $f(x)$ *es de crecimiento o de decrecimiento basta con elegir arbitrariamente un punto* x_o *que sea interior a dicho intervalo y averiguar el signo de* $f'(x_o)$. *Si* $f'(x_o)$ *es un número positivo, el intervalo es de crecimiento, y si es un número negativo, el intervalo es de decrecimiento.*

4. *En la práctica indicaremos la monotonía de* $f(x)$ *con un esquema del tipo siguiente, donde* $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n$ *son los valores de la variable x obtenidos en los apartados 1) y 2).*

Signo de f '	+		−		−		+		−
		x_1		x_2		x_3		x_4	
Monotonía de f	↗		↘		↘		↗		↘

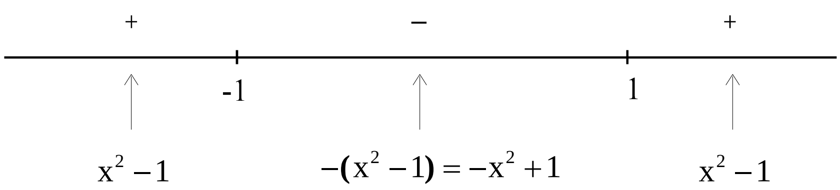
Ejemplo: **Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función** $\mathbf{f(x) = |x^2 - 1|}$

Lo primero que hay que hacer en este tipo de funciones es estudiar el signo de la expresión que hay entre las barras, en este caso de $x^2 - 1$, y tener presente que el valor absoluto de un número es siempre una cantidad positiva.

Para hacer un análisis del signo, igualamos a cero la expresión $x^2 - 1$ y con las soluciones formamos todos los intervalos posibles desde $-\infty$ hasta $+\infty$. Finalmente sustituimos en la expresión un valor numérico de cada intervalo y comprobamos el signo.

$$x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \text{Si} \;\; x = -2 & \rightarrow \quad (-2)^2 - 1 = 3 > 0 \\ \text{Si} \;\; x = 0 & \rightarrow \quad (0)^2 - 1 = -1 < 0 \\ \text{Si} \;\; x = 2 & \rightarrow \quad (2)^2 - 1 = 3 > 0 \end{cases}$$

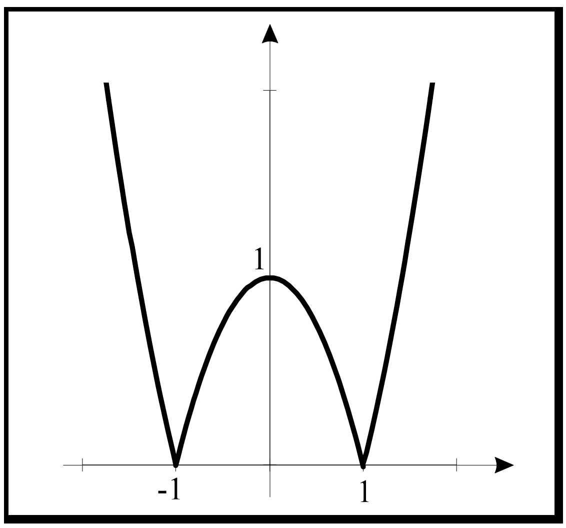
Como sabemos que el valor numérico de la expresión $|x^2 - 1|$ es siempre positivo significa que entre -1 y 1 tenemos que cambiar de signo la expresión $x^2 - 1$ para que el valor numérico sea mayor que cero.



El esquema anterior se puede expresar analítica y gráficamente de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} & x \le -1 \\ -x^2 + 1 & \text{si} & -1 < x \le 1 \\ x^2 - 1 & \text{si} & x > 1 \end{cases}$$

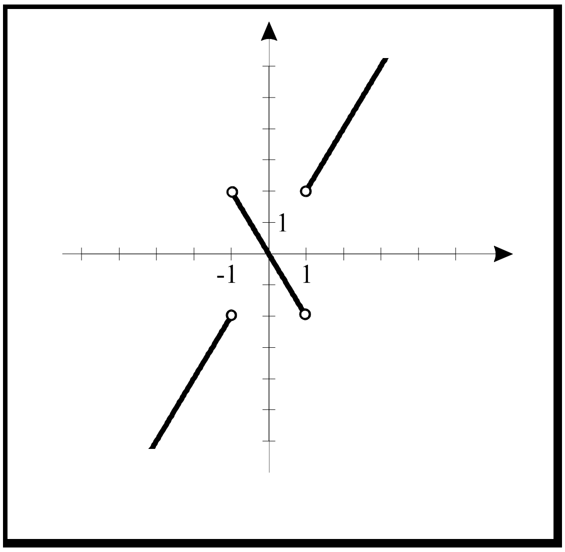
La función es continua $\forall x \in R$ y derivable $\forall x \in R - \{-1,1\}$, como se comprueba si estudiamos la derivabilidad de la función en los puntos -1 y 1, en los que la función presenta puntos angulosos.



Por ser f(x) continua, podemos calcular su derivada en los puntos de abscisa -1 y 1 utilizando la tabla de derivación, sin necesidad de calcular las derivadas laterales.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{si} \quad x<-1 \\ -2x & \text{si} \quad -1<x<1 \\ 2x & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

Como se observa en la gráfica, la función $f'(x)$ no es continua en los puntos de abscisa -1 y 1.



Los valores que anulan la primera derivada son:

$$2x=0 \quad \Rightarrow \quad x=0$$
$$-2x=0 \quad \Rightarrow \quad x=0$$

Los intervalos de monotonía de $f(x)$ son:

$$\left]-\infty,-1\right[\quad ; \quad \left]-1,0\right[\quad ; \quad \left]0,1\right[\quad ; \quad \left]1,\infty\right[$$

$f'(-2)=-4<0 \quad \Rightarrow \quad$ en el intervalo $\left]-\infty,-1\right[$ la función $f(x)$ es decreciente

$f'(-0'5)=1>0 \quad \Rightarrow \quad$ en el intervalo $\left]-1,0\right[$ la función $f(x)$ es creciente

$f'(0'5)=-1<0 \quad \Rightarrow \quad$ en el intervalo $\left]0,1\right[$ la función $f(x)$ es decreciente

$f'(2)=4>0 \quad \Rightarrow \quad$ en el intervalo $\left]1,\infty\right[$ la función $f(x)$ es creciente

En resumen, el esquema de monotonía de $f(x)$ es:

Signo de f'	−		+		−		+
Monotonía de f	↘	-1	↗	0	↘	1	↗

<u>*Conclusión*</u>

La función $f(x)$ es creciente $\quad \forall x \in \left]-1,0\right[\cup \left]1,\infty\right[$

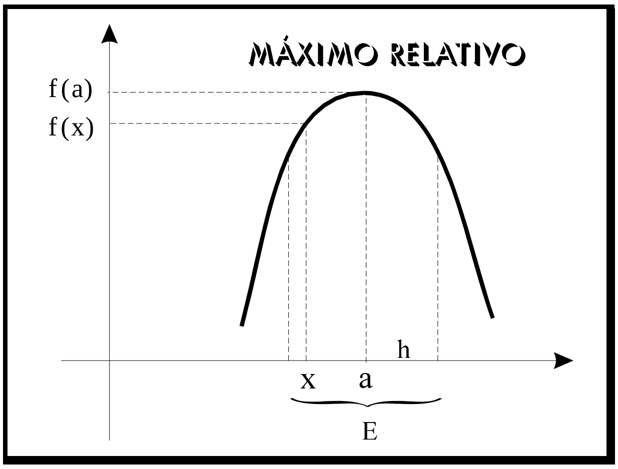
La función $f(x)$ es decreciente $\quad \forall x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]0,1\right[$

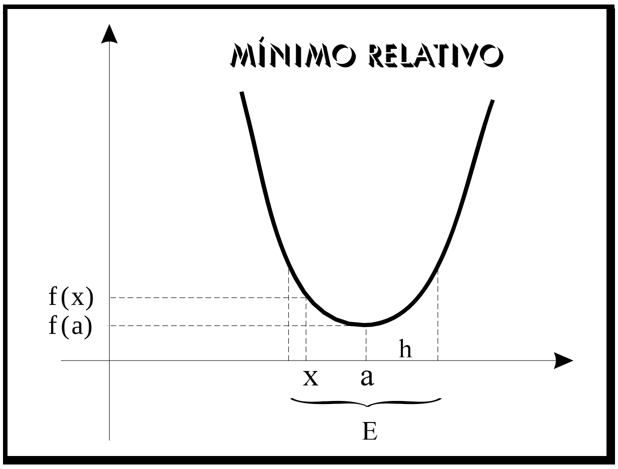
Extremos relativos. Máximos y mínimos relativos

Sea $f(x)$ una función cuyo dominio de definición es D, y sea $a \in D$.

Se dice que $f(x)$ tiene en “a” un máximo relativo o local, si existe un entorno $E(a, h)$ tal que $\forall x \in E(a, h)$ se verifica $f(x) \leq f(a)$.

Se dice que $f(x)$ tiene en “a” un mínimo relativo o local, si existe un entorno $E(a, h)$ tal que $\forall x \in E(a, h)$ se verifica $f(x) \geq f(a)$.





La palabra relativo indica que se compara el valor que toma la función f(x) en el punto de abscisa “a” con los valores que toma la función en un entorno de dicho punto. Como sinónimo de relativo se emplea también la palabra ***local.***

Se habla de máximos o mínimos relativos ya que la imagen de dichos valores no tiene por qué ser la mayor o la menor de las imágenes de toda la función. Al valor que tiene la mayor de las imágenes, si existe, se le llama máximo absoluto. Del mismo modo, al valor de x que tiene la menor de las imágenes de toda la función, si existe, se le llama mínimo absoluto de la función.

Teorema

Sea a un punto interior de un intervalo D.

Si una función $f(x)$ tiene un extremos relativo sobre D en el punto “a” y $f(x)$ es derivable en “a”, entonces $f'(a) = 0$.

Demostración

Supongamos que en a hay un máximo relativo de $f(x)$ sobre D. Como además a es un punto interior a D, existe un entorno de a en el que $f(a+h) \leq f(a)$. Por lo tanto:

$$\text{Si}\quad h>0 \quad\rightarrow\quad \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\le 0 \quad\rightarrow\quad \lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\le 0$$

$$\text{Si}\quad h<0 \quad\rightarrow\quad \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ge 0 \quad\rightarrow\quad \lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ge 0$$

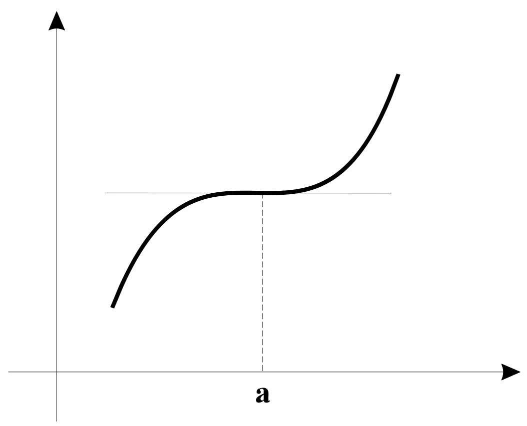
Como por hipótesis existe la derivada de $f(x)$ en a, los dos límites anteriores deben ser iguales entre sí e iguales a $f'(a)$, es decir:

$$f'(a)\le 0 \quad \text{y} \quad f'(a)\ge 0 \quad \text{ó} \quad 0\le f(a)\le 0 \quad\Rightarrow\quad f'(a)=0$$

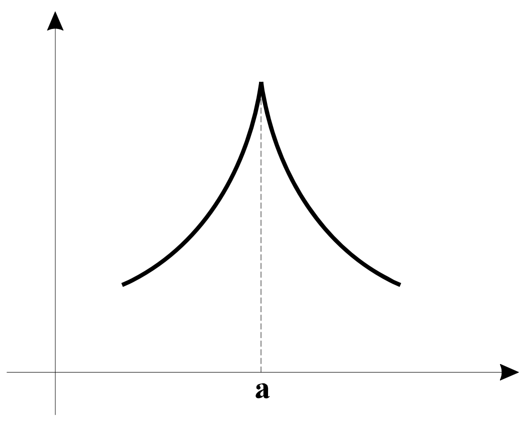
La demostración sería semejante si en a hubiese un mínimo relativo.

El recíproco no es cierto. *Es posible que* $f'(a)=0$ *y sin embargo no exista extremo en "a", sino lo que se llama un* ***punto de inflexión con tangente horizontal***. Por otra parte, un extremo relativo puede estar situado en un punto sin derivada, en cuyo caso, evidentemente no tiene aplicación este teorema.

Punto de inflexión con tangente horizontal

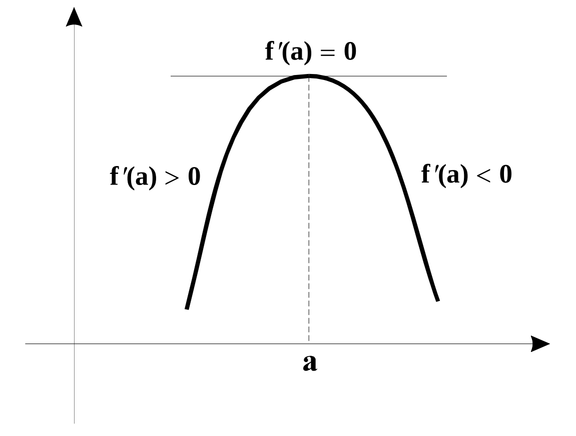


Máximo en un punto sin derivada

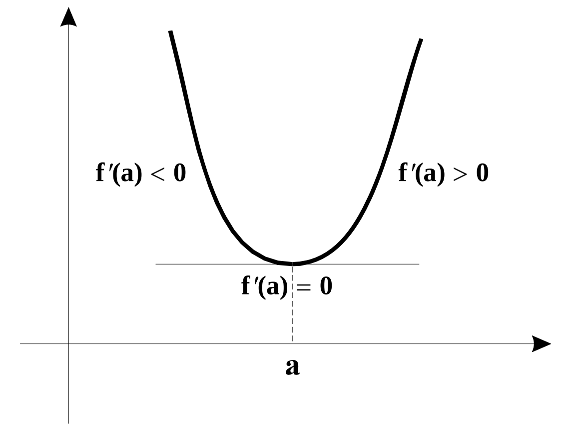


Variación del signo de la primera derivada en el entorno de un punto

Hemos visto que el crecimiento de una función determina el signo de la función derivada, es decir, que una función que tiene derivada crece si la derivada es positiva y decrece si la derivada es negativa.



Máximo relativo en el punto $(a\,,\,f(a))$



Mínimo relativo en el punto $(a\,,\,f(a))$

Si un punto a tiene la propiedad de que a su izquierda la derivada es positiva y a la derecha es negativa (como ocurre en la figura de la izquierda), $f(x)$ presenta un máximo relativo en a.

Además, si la derivada en ese punto, $f'(a)$, fuese positiva, la función sería creciente, cosa que no ocurre. Tampoco puede ser $f'(a) < 0$, pues la función no es decreciente en ese punto. Por tanto, necesariamente $f'(a) = 0$, es decir, la tangente en ese punto es horizontal.

Si un punto a tiene la propiedad de que a su izquierda la derivada es negativa y a la derecha es positiva (como ocurre en la figura de la derecha), $f(x)$ presenta un mínimo relativo en a. El razonamiento es análogo al caso anterior.

Determinación de los extremos relativos de una función

Los extremos de relativos de una función (o sea, sus valores máximos o mínimos) sólo pueden presentarse en los puntos que figuran en el esquema de monotonía (en ellos, la derivada vale cero o no existe).

Los resultados que se enuncian a continuación permiten hallarlos:

Condición necesaria para que exista un extremo

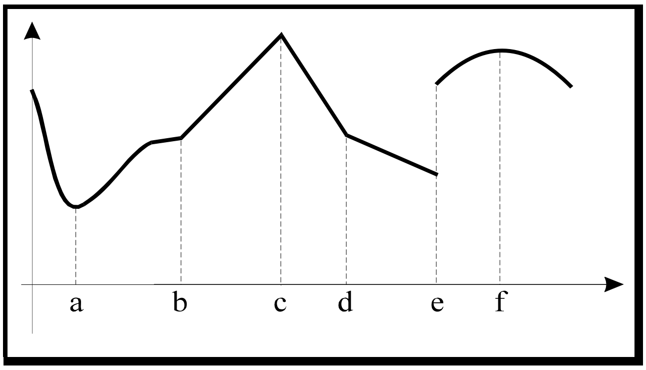
Si $f(x)$ alcanza en $x = a$ un extremo relativo (máximo o mínimo), entonces sucede una de estas dos cosas:

I. O bien $f'(a) = 0$

II. O bien no existe $f'(a)$

Sin embargo, puede suceder cualquiera de las dos cosas sin que $f(x)$ posea un extremo para $x = a$.

En la función representada al margen, $f'(x)$ se anula o no existe en los puntos a, b, c, d, e y f, pero sólo en a, c y f existen extremos relativos.



<u>Condiciones suficientes para que exista extremo</u>

Cuando $f(x)$ es continua en $x = a$ y $f'(a)$ existe a ambos lados de a, entonces:

I. ***Si "al pasar por a", el signo de $f'(x)$ cambia de negativo a positivo, $f(x)$ tiene un mínimo relativo para $x = a$.***

II. ***Si "al pasar por a", el signo de $f'(x)$ cambia de positivo a negativo, $f(x)$ tiene una máximo relativo para $x = a$.***

III. ***Si el signo de $f'(x)$ no cambia en $x = a$ no hay máximo ni mínimo relativo.***

<u>Definición</u>

Se dice que a es un punto singular de la función $f(x)$ cuando $f'(a) = 0$

Como hemos visto, los extremos relativos de una función derivable se encuentran en puntos singulares, aunque no todos los puntos singulares soportan extremos

<u>Algunas observaciones prácticas</u>

- Una función puede tener varios máximos o mínimos relativos. Por ejemplo, las funciones seno y coseno tienen infinitos máximos y mínimos relativos.

- Hay muchas funciones que carecen de máximos y mínimos relativos, como las funciones $f(x) = x^3$ y $f(x) = \text{tg}\, x$.

- Los máximos y mínimos relativos pueden coincidir o no con el máximo o mínimo absoluto que tome la función. En las funciones seno y coseno, los máximos y mínimos relativos coinciden con los máximos y mínimos absolutos.

- El valor de una función en un mínimo relativo puede ser mayor que el de un máximo relativo.

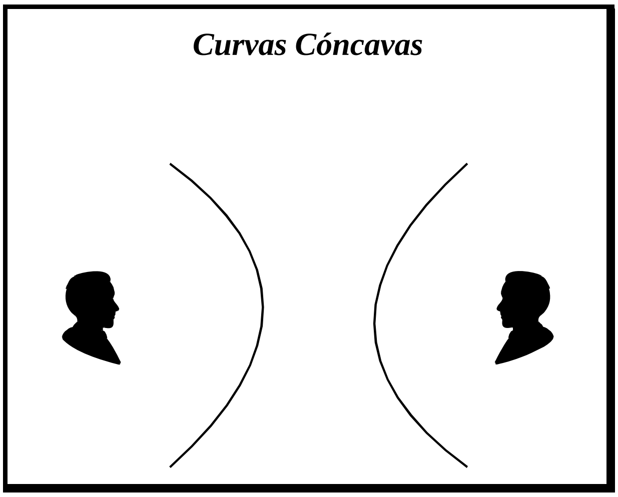
Concavidad y convexidad

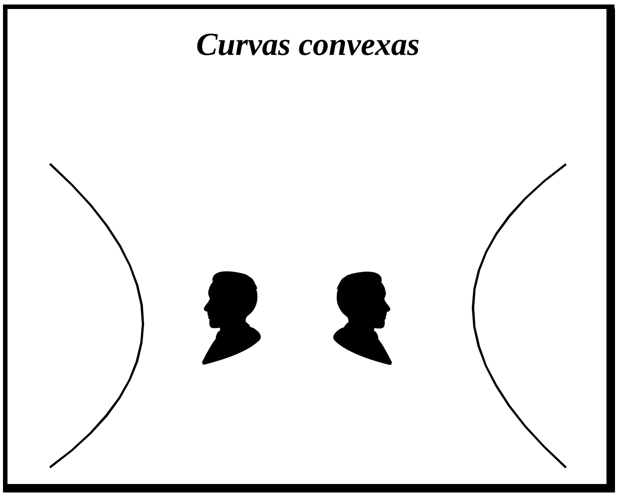
Introducción

La palabra ***cóncavo*** viene del latín *concavus,* de *cum,* con y *cavus,* hueco. Según el diccionario, la palabra cóncavo significa *"Que tiene, respecto del que mira, la superficie más deprimida en el centro que por las orillas".*

La palabra ***convexo*** viene del latín *convexus*. Según el diccionario, la palabra convexo significa *"Que tiene, respecto del que mira, la superficie más prominente en el medio y que decrece hacia los bordes o extremos".*

Se ha venido empleando el concepto de "*concavidad dirigida hacia las ordenadas positivas"* y de "*concavidad dirigida hacia las ordenadas negativas"*. ***En rigor, una gráfica es cóncava o convexa según sea la situación del observador*** , como se observa en las siguientes gráficas.





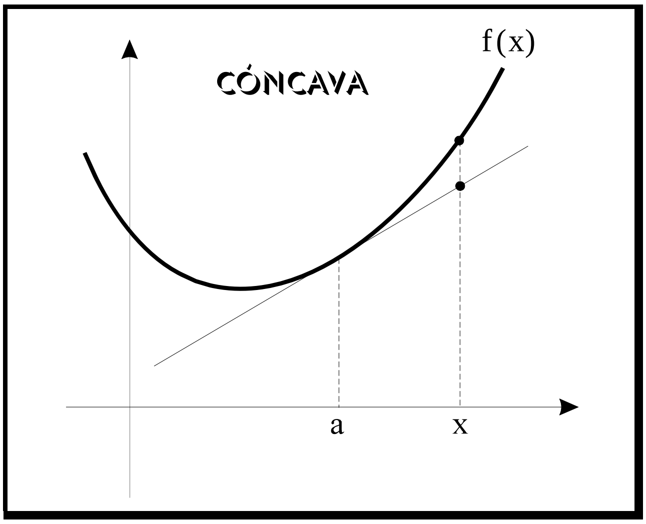
<u>Nosotros supondremos el observador encima de la curva es decir observando la curva desde las ordenadas positivas.</u>

Definición

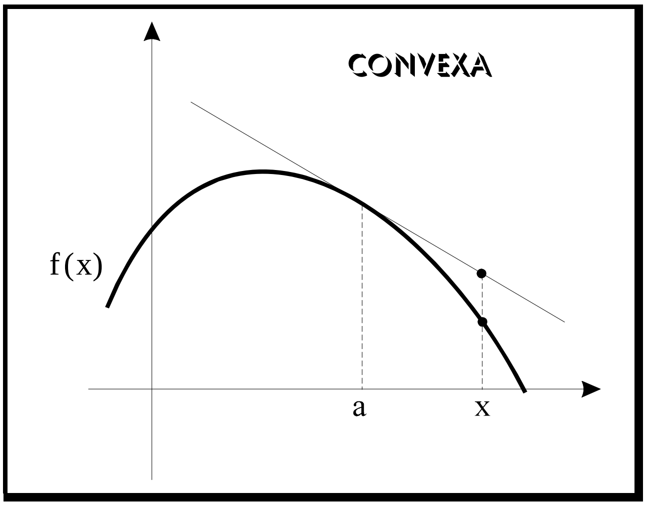
Sabemos que la recta tangente a una función en un punto queda determinada por su pendiente, que es la derivada de la función en dicho punto, y por el propio punto.

Atendiendo a la situación de dicha recta tangente en relación con la propia función podemos definir los dos tipos de curvatura:

Diremos que una función $f(x)$ derivable en un punto "a" es cóncava en dicho punto, si hay un entorno de "a", $]a-h, a+h[$, en el cual los valores de la función son mayores que los valores de la recta tangente a la curva en el punto $(a, f(a))$. Es decir, la recta tangente queda por debajo de la curva.



Diremos que una función $f(x)$ derivable en un punto "a" es convexa en dicho punto, si hay un entorno de "a", $]a-h, a+h[$, en el cual los valores de la función son menores que los valores de la recta tangente a la curva en el punto $(a, f(a))$. Es decir, la recta tangente queda por encima de la curva.



Sabemos que la ecuación de la recta tangente a la función $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ es:

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a) \qquad \text{o bien} \qquad y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$$

por tanto, $f(x)$ será **cóncava** en "a" si existe un entorno de "a", $(a-h, a+h)$, en el cual

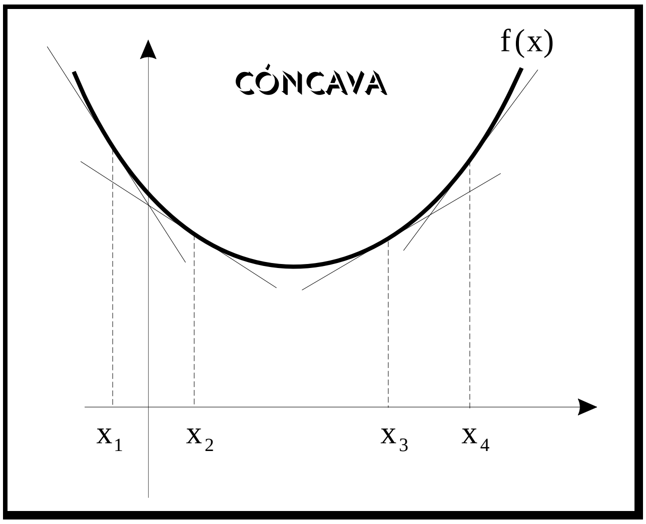
$$f(x) > f(a) + f'(a)(x-a) \qquad \text{o bien} \qquad f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) > 0 \quad \forall x \in]a-h, a+h[$$

y será **convexa** en "a" si en un entorno se cumple que:

$$f(x) < f(a) + f'(a)(x-a) \qquad \text{o bien} \qquad f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) < 0 \quad \forall x \in]a-h, a+h[$$

Caracterización por derivadas. Interpretación geométrica

Al igual que el signo de $f'(x)$ permite conocer en qué intervalos es creciente o decreciente $f(x)$, el signo de $f''(x)$ permite hacer lo mismo con $f'(x)$. El crecimiento y decrecimiento de $f'(x)$ tienen el siguiente significado geométrico, en relación con la gráfica de $f(x)$.

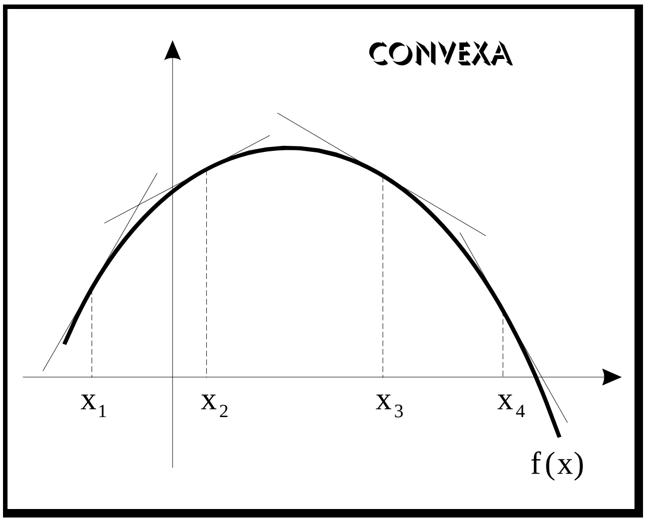


Como se puede apreciar en la figura, a medida que aumenta la variable, las pendientes de las rectas tangentes pasan de ser negativas a positivas. Es decir, la función derivada será creciente en el intervalo, por lo que la derivada segunda será positiva en todos los puntos del intervalo.

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4$$

$$f'(x_1) < f'(x_2) < f'(x_3) < f'(x_4)$$

$$f'(x) \ \text{creciente} \ \Rightarrow \ f''(x) > 0$$



Como se puede apreciar en la figura, a medida que aumenta la variable, las pendientes de las rectas tangentes pasan de ser positivas a negativas. Es decir, la función derivada será decreciente en el intervalo, por lo que la derivada segunda será negativa en todos los puntos del intervalo.

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4$$

$$f'(x_1) > f'(x_2) > f'(x_3) > f'(x_4)$$

$$f'(x) \ \text{decreciente} \ \Rightarrow \ f''(x) < 0$$

Ejemplo

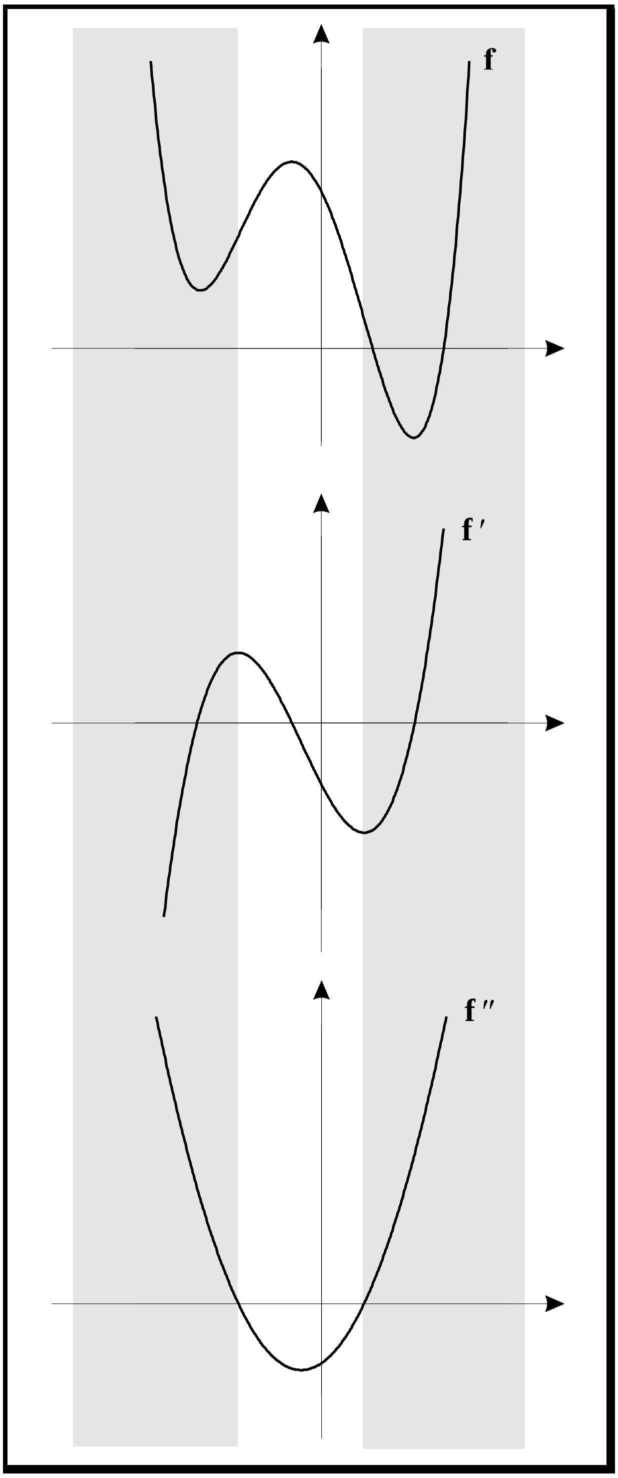
Consideremos la función $f(x)$ estudiada anteriormente, la función derivada primera $f'(x)$ y la función derivada segunda $f''(x)$:

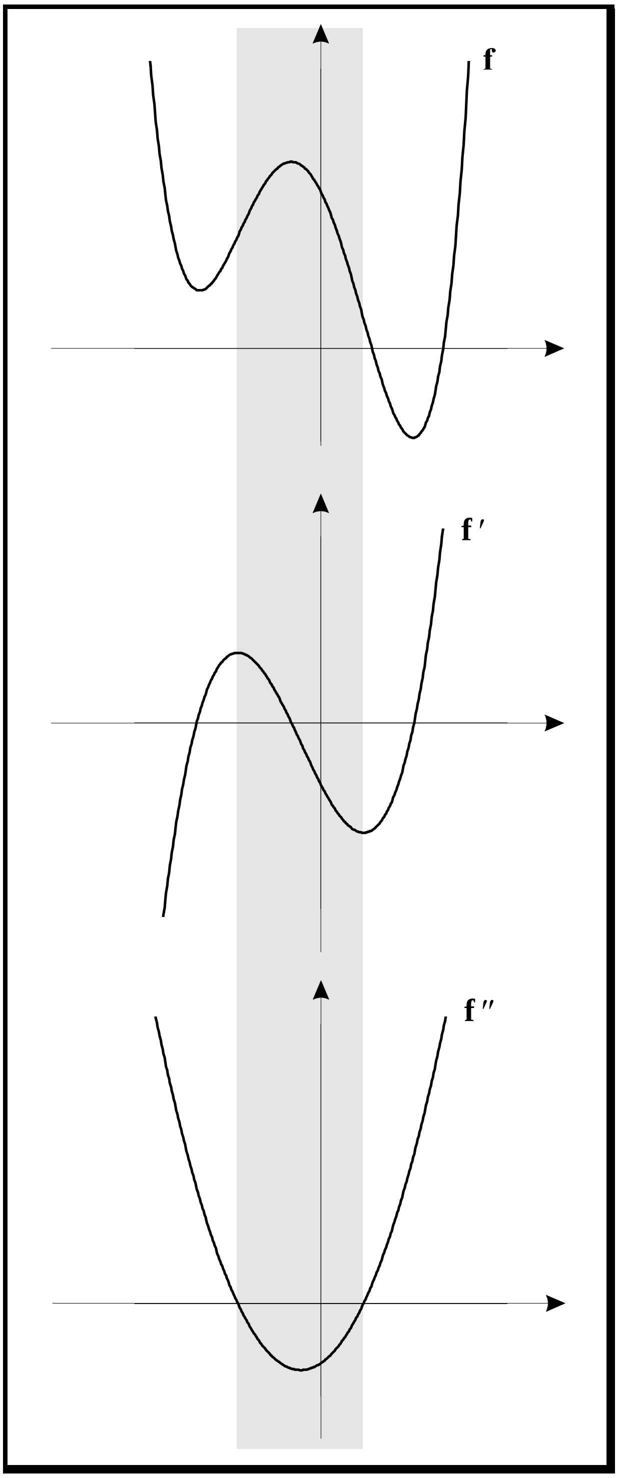
$$\mathbf{f(x) = 0'03x^4 + 0'07x^3 - 0'64x^2 - 1'32x + 3'36}$$

$$\mathbf{f'(x) = 0'12x^3 + 0'21x^2 - 1'28x - 1'32}$$

$$\mathbf{f''(x) = 0'36x^2 + 0'42x - 1'28}$$

Vamos a fijarnos en qué intervalos la gráfica correspondiente a $f''(x)$ es positiva, nula o negativa y qué es lo que ocurre en los mismos intervalos con la función f(x). Para hacer este análisis representamos conjuntamente la función $f(x)$, la función $f'(x)$ y la función $f''(x)$, y analizamos el signo de cada una de ellas en los intervalos, representados con franjas sombreadas.





Si observamos en las gráficas los intervalos correspondientes a las zonas sombreadas, vemos que la gráfica de la función $f''(x)$ *está por encima del eje x, lo que significa que* $f''(x)$ *es positiva. En los mismos intervalos,* $f'(x)$ *es creciente y la función* $f(x)$ *es cóncava.*

Si observamos en las gráficas los intervalos correspondientes a las zonas sombreadas, vemos que la gráfica de la función $f''(x)$ *está por debajo del eje x, lo que significa que* $f''(x)$ *es negativa. En los mismos intervalos,* $f'(x)$ *es decreciente y la función* $f(x)$ *es convexa.*

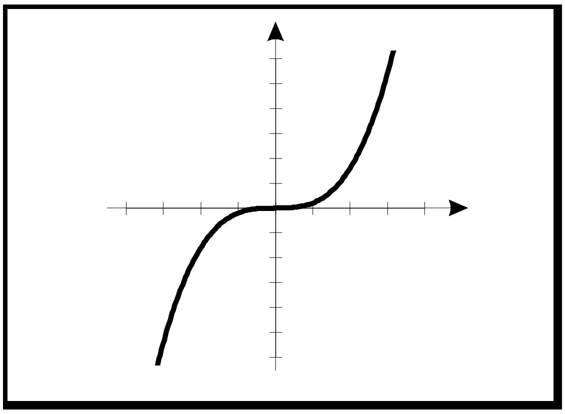
Puntos de inflexión

<u>*Definición*</u> ***En el dominio de definición de una función continua pueden existir puntos donde la función es convexa y puntos donde la función es cóncava. Por tanto, pueden existir puntos donde a un lado de ellos la función es cóncava y al otro convexa o viceversa. A cada uno de los puntos donde la función cambia de cóncava a convexa, o viceversa, se les denomina <u>puntos de inflexión</u>.***

Ejemplo: Estudiar los puntos de inflexión de la función $\mathbf{f(x) = x^3}$

La función $f(x) = x^3$ es cóncava $\forall x \in R^+$ y es convexa $\forall x \in R^-$.

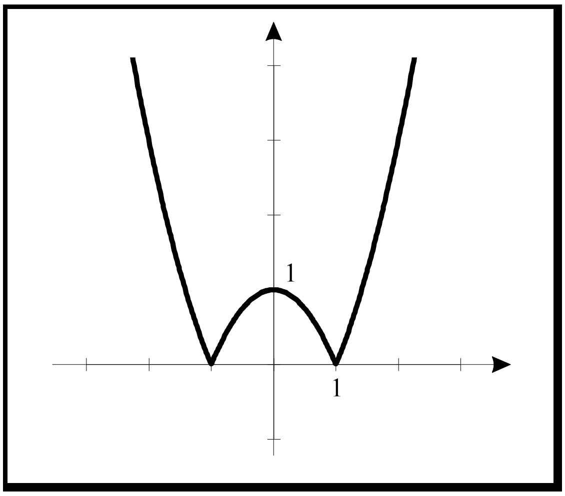
En un entorno del punto $x = 0$ se verifica que la función es cóncava a la derecha de $x = 0$ y convexa a la izquierda de $x = 0$. Así pues, $x = 0$ es un punto de inflexión de la función $f(x) = x^3$



Ejemplo: Estudiar los puntos de inflexión de la función $\mathbf{f(x) = |x^2 - 1|}$

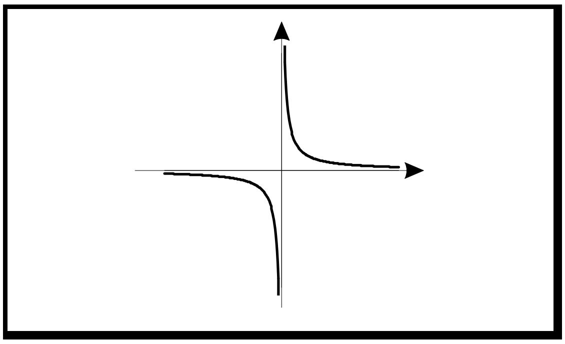
La función $f(x) = |x^2 - 1|$ es cóncava $\forall x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, \infty\right[$ y es convexa $\forall x \in \left]-1, 1\right[$.

Como a la izquierda de $x = -1$ la función es cóncava y a la derecha convexa, se tiene que $x = -1$ es un punto de inflexión de $f(x)$. En el punto $x = 1$ sucede algo análogo: este punto es también un punto de inflexión de $f(x)$.



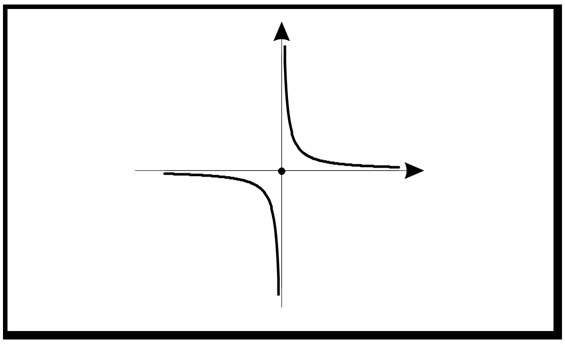
Ejemplo: Estudiar los puntos de inflexión de la función $\mathbf{f(x) = \frac{1}{x}}$

La función es cóncava $\forall x \in \left]0, \infty\right[$ y convexa $\forall x \in \left]-\infty, 0\right[$, sin embargo en $x = 0$ la función $f(x)$ no tiene punto de inflexión, pues no está definida en ese punto.



Ejemplo: Estudiar los puntos de inflexión de la función: $\mathbf{f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & \text{si} \quad x\neq 0\\ 0 & \text{si} \quad x=0\end{cases}}$

La función es cóncava $\forall x\in\left]0,\infty\right[$ y convexa $\forall x\in\left]-\infty,0\right[$, sin embargo en $x=0$ la función $f(x)$ no tiene punto de inflexión, puesto que la función no es continua en $x=0$.



Diremos que una función $f(x)$ derivable en el punto "a" tiene un punto de inflexión en dicho punto, si hay un entorno de "a", $\left]a-h,a+h\right[$, en el cual los valores de la función son mayores que los valores de la recta tangente a la curva en el punto $(a,f(a))$ cuando $x<a$, y son menores que los de la recta tangente cuando $x>a$, es decir, si

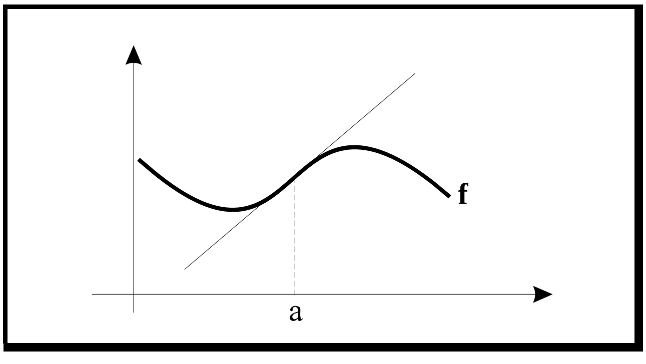
$$\mathbf{f(x)>f(a)+f'(a)(x-a)\quad para\quad x<a}\qquad y\qquad \mathbf{f(x)<f(a)+f'(a)(x-a)\quad para\quad x>a}$$

o bien cuando los valores de la función son menores que los valores de la recta tangente a la curva en el punto $(a,f(a))$ cuando $x<a$, y son mayores que los de la recta tangente cuando $x>a$, es decir, si

$$\mathbf{f(x)<f(a)+f'(a)(x-a)\quad para\quad x<a}\qquad y\qquad \mathbf{f(x)>f(a)+f'(a)(x-a)\quad para\quad x>a}$$

Podemos resumir las definiciones anteriores diciendo que en un punto de inflexión la tangente atraviesa la curva. dejando una parte hacia abajo (convexa) y otra parte haca arriba (cóncava).

En un punto de inflexión, por tanto, la función cambia de concavidad a convexidad o al revés

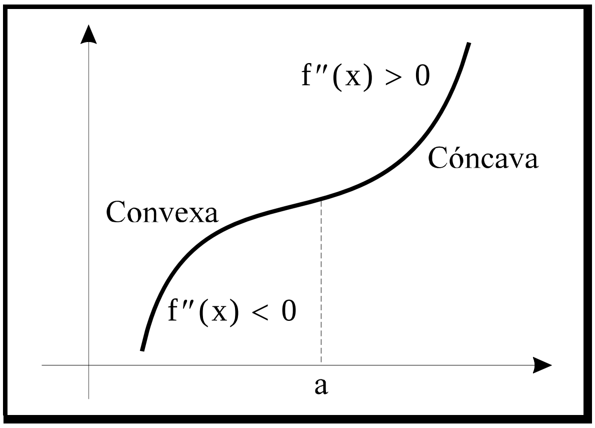


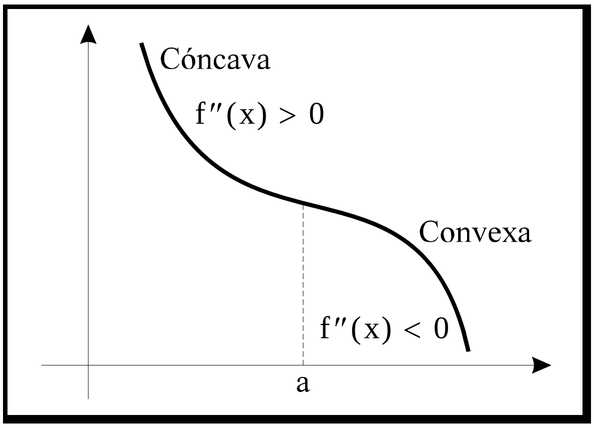
<u>¿Cómo decidir si un punto es de inflexión?</u>

Los valores candidatos a puntos de inflexión son aquellos que anulan la derivada segunda. Esta condición es necesaria pero no suficiente, ya que puede ser $f''(a)=0$ y no haber punto de inflexión (Ejemplos: $f(x)=x^4$ y $f(x)=-x^4$).

Se trata de estudiar la función en un entorno del punto a, $E(a,h)$. Veamos los criterios para saber si se trata de un punto de inflexión cóncavo-convexo o convexo-cóncavo.

a) Observando la segunda derivada



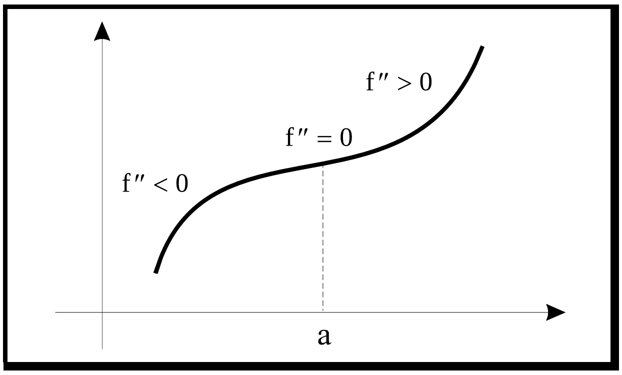


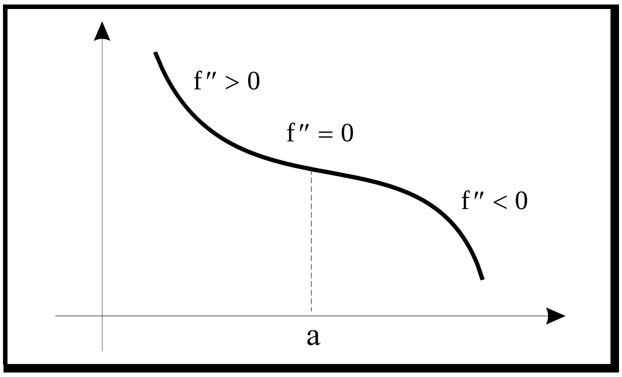
Los valores que toma la derivada segunda en un entorno del punto de inflexión convexo-cóncavo son negativos a la izquierda y positivos a la derecha. Los valores que toma la derivada segunda en un entorno del punto de inflexión cóncavo-convexo son positivos a la izquierda y negativos a la derecha.

b) Observando la derivada tercera

La derivada segunda es creciente, luego la derivada tercera en $x = a$ es positiva.

Si $\mathbf{f'''(a) > 0}$ ***entonces la función tiene en*** $\mathbf{x = a}$ ***un punto de inflexión convexo-cóncavo***.





La derivada segunda es decreciente, luego la derivada tercera en $x = a$ es negativa.

Si $\mathbf{f'''(a) < 0}$ ***entonces la función tiene en*** $\mathbf{x = a}$ ***un punto de inflexión cóncavo-convexo***.

Resumen

Sea $y = f(x)$ una función derivable en un intervalo I de R, y sea $x \in I$.

- **Si $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es cóncava en dicho intervalo.**
- **Si $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es convexa en dicho intervalo.**
- **Si $f''(x) = 0 \Rightarrow$ Hallamos los puntos "a" tales que $f''(a) = 0$.**

  Si $f'''(a) \neq 0 \Rightarrow (a, f(a))$ es un punto de inflexión.

- **Si $f(x)$ es tal que en el punto a se anulan las derivadas**

$$f''(a) = f'''(a) = \cdots\cdots = f^{n-1}(a) = 0$$

  y la derivada de orden n es distinta de cero, $f^{n}(a) \neq 0$ entonces:

  * **Si n es impar, $f(x)$ tiene punto de inflexión en el punto $(a, f(a))$**

  * **Si n es par y $f^{n}(a) > 0 \Rightarrow f(x)$ es cóncava en el punto $(a, f(a))$**

  * **Si n es par y $f^{n}(a) < 0 \Rightarrow f(x)$ es convexa en el punto $(a, f(a))$**

Ejemplo: Calcula los puntos de inflexión de $f(x) = x^5$

$$f'(x) = 5x^4 \qquad f''(x) = 20x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

$$f'''(x) = 60x^2 \quad \rightarrow \quad f'''(0) = 0$$

$$f^{IV}(x) = 120x \quad \rightarrow \quad f^{IV}(0) = 0$$

$$f^{V}(x) = 120 \neq 0$$

Como es de orden impar, la función presenta un punto de inflexión en el punto $(0, f(0)) = (0,0)$.

Como $f'(0) = 0$, podemos pensar en un posible extremo en ese punto, pero como la segunda derivada también se anula y la primera que no se anula es de orden impar, el punto es un punto de inflexión.

De todos modos, dado que $f'(0) = 0$ podemos afirmar que la recta tangente a la curva en ese punto es paralela al eje de abscisas y atraviesa la curva en ese punto. ***Es un punto de inflexión con tangente horizontal.***

Ejemplo: Consideremos un ejemplo de función cuya primera derivada no se anula y, sin embargo, se anulan las siguientes hasta una de orden par, en que es distinta de cero. Esto nos indicará que la función tiene concavidad o convexidad sin tener máximo ni mínimo. Sea $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 12x + 1$ en $x = 1$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x + 12 \quad \rightarrow \quad f'(1) = 16 \neq 0$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x + 12 \quad \rightarrow \quad f''(1) = 0$$

$$f'''(x) = 24x - 24 \quad \rightarrow \quad f'''(1) = 0 \qquad f^{IV}(x) = 24 \quad \rightarrow \quad f^{IV}(1) = 24 > 0$$

Así, en el punto $(1,16)$ la función es cóncava y no hay extremo en este punto.

Cálculo de los intervalos de concavidad y convexidad de una función

Al conjunto de los valores de la variable, donde la función f(x) es cóncava o convexa se les llama intervalos de concavidad y convexidad de la función.

Los intervalos de concavidad y convexidad de $f(x)$ son los de monotonía de $f'(x)$, por tanto un método práctico para calcular dichos intervalos es el siguiente.

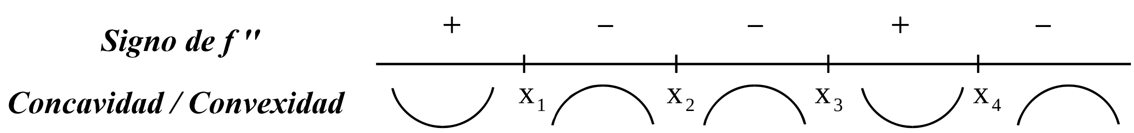
1. *Se calculan los valores de la variable x en los que la función $f'(x)$ es discontinua. Estos valores también son discontinuidades de $f''(x)$.*

2. *Se calculan los valores de la variable x en los que $f''(x)$ se anula o es discontinua*

3. *Cada pareja de valores de la variable x consecutivos determinan un intervalo de concavidad o convexidad de $f(x)$, y en dicho intervalo el signo de $f''(x)$ permanece constante. <u>Todos los intervalos están abiertos por los dos extremos</u>, ya que si algún extremo estuviera cerrado en él la segunda derivada valdría cero.*

Para averiguar si el intervalo es de concavidad o convexidad basta con elegir arbitrariamente un punto x_o que sea interior a dicho intervalo y averiguar el signo de $f''(x_o)$. Si $f''(x_o)$ es un número positivo, el intervalo es de concavidad, y si es un número negativo, el intervalo es de convexidad.

4. *En la práctica indicaremos la concavidad o convexidad de $f(x)$ con un esquema del tipo siguiente, donde $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n$ son los valores de la variable x obtenidos en los apartados 1) y 2)*

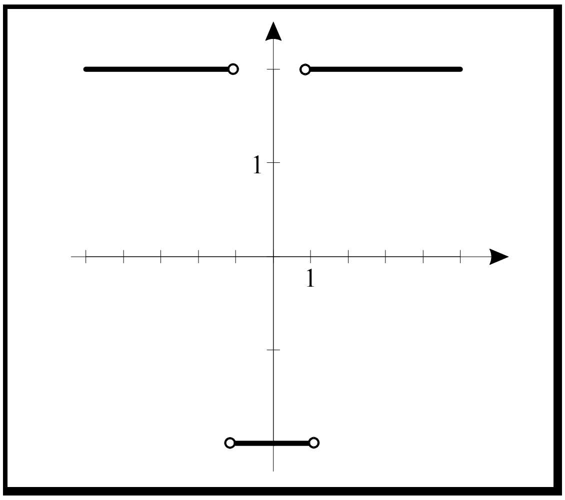


Ejemplo: Estudiar la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de la función:

$$\mathbf{f(x) = |x^2 - 1|}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x < -1 \\ -2 & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ 2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Como se observa en la gráfica, la función $f''(x)$ no es continua en los puntos de abscisa -1 y 1.



Los intervalos de concavidad y convexidad son:

$$\left]-\infty,-1\right[\quad ; \quad \left]-1,1\right[\quad ; \quad \left]1,\infty\right[$$

$f''(-2) = 2 > 0 \quad \Rightarrow$ en el intervalo $\left]-\infty,-1\right[$ la función $f(x)$ es cóncava

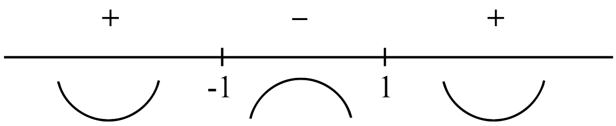
$f''(0) = -2 < 0 \quad \Rightarrow$ en el intervalo $\left]-1,1\right[$ la función $f(x)$ es convexa

$f''(2) = 2 > 0 \quad \Rightarrow$ en el intervalo $\left]1,\infty\right[$ la función $f(x)$ es cóncava

En resumen, el esquema de concavidad y convexidad de $f(x)$ es:

Signo de f''

Concavidad / Convexidad



La función es continua en los puntos de abscisa -1 y 1, por tanto estos puntos son puntos de inflexión. Sus coordenadas son: $(-1, f(-1))$ y $(1, f(1))$

<u>Conclusión</u>

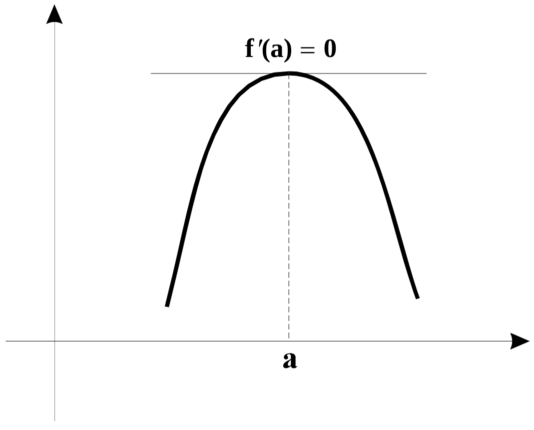
La función $f(x)$ es cóncava $\quad \forall x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]1,\infty\right[$

La función $f(x)$ es convexa $\quad \forall x \in \left]-1,1\right[$

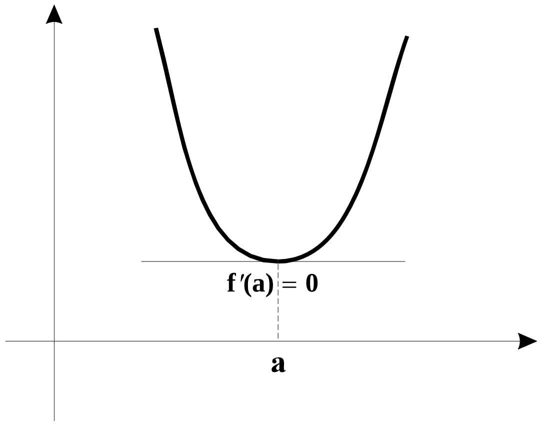
Los puntos de inflexión son $\quad (-1, 0) \quad$ y $\quad (1, 0)$

Criterio de la segunda derivada para los extremos relativos

Hemos determinado la condición de máximo o mínimo de una función en un punto obtenido como solución de la ecuación $f'(x)=0$ estudiando el cambio de signo de la derivada de la función en las proximidades de ese punto. La derivada segunda nos proporciona un nuevo criterio para esa determinación, recomendable en los casos en que el cálculo de ésta no sea excesivamente complicado.



Máximo relativo en el punto $\left(a\,,\,f(a)\right)$



Mínimo relativo en el punto $\left(a\,,\,f(a)\right)$

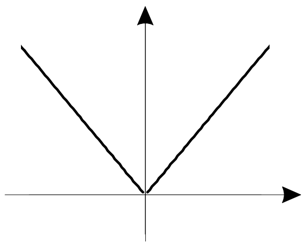
Si en un punto a se tiene que $f'(a)=0$ y $f''(a)<0$, la tangente horizontal de la función está por encima de la gráfica de ésta y por tanto la función alcanza un máximo relativo en el punto $\left(a\,,f(a)\right)$.

Si en un punto a se tiene que $f'(a)=0$ y $f''(a)>0$, la tangente horizontal de la función está por debajo de la gráfica de ésta y por tanto la función alcanza un mínimo relativo en el punto $\left(a\,,f(a)\right)$.

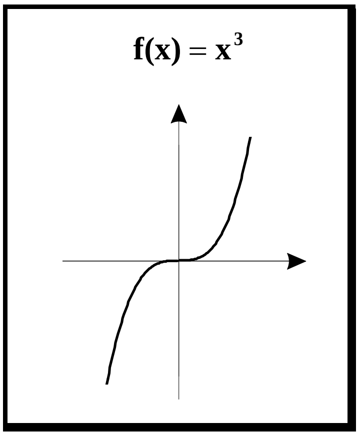
Este método sólo proporciona ciertos extremos relativos (y, salvo excepciones, *no proporciona los extremos absolutos*). Concretamente, no proporciona los siguientes tipos de extremos relativos:

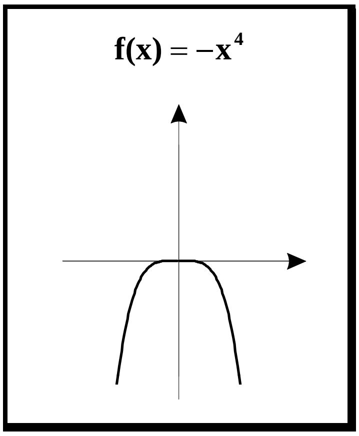
a) Los que se alcanzan en puntos donde la función no es derivable.

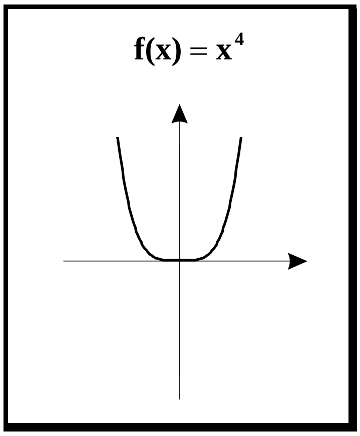
Por ejemplo, la función $y=|x|$ que alcanzan un mínimo relativo en el punto $x=0$, a pesar de no ser derivables en dicho punto.



b) Los que se alcanzan en puntos en los cuales la primera y la segunda derivada se anulan.







En las tres gráficas se verifica que $f'(0) = 0$ y $f''(0) = 0$, y sin embargo, en $x = 0$ reflejan tres situaciones distintas:

$f(x) = x^3$ posee en $x = 0$ un punto de inflexión

$f(x) = x^4$ posee en $x = 0$ un mínimo relativo

$f(x) = -x^4$ posee en $x = 0$ un máximo relativo

c) Los que se alcanzan en puntos en los que la primera derivada se anula y la segunda derivada no existe. Por ejemplo, la siguiente función alcanza un máximo relativo en $x = 0$ a pesar de que $f'(0) = 0$ y $f''(0)$ no existe.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si} \quad x \le 0 \\ -x^2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

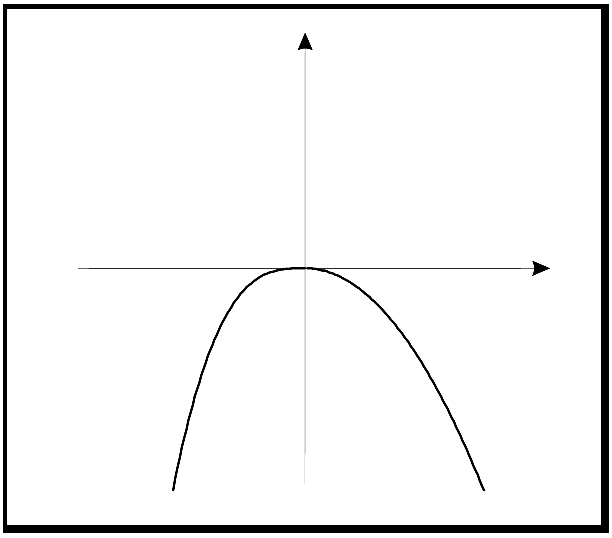
$$f'_-(x) = 3x^2 \quad \to \quad f'_-(0) = 0$$

$$f''_-(x) = 6x \quad \to \quad f''_-(0) = 0$$

$$f'_+(x) = -2x \quad \to \quad f'_+(0) = 0$$

$$f''_+(x) = -2 \quad \to \quad f''_+(0) = -2$$

$$\Rightarrow \quad \nexists \ f''(0)$$



Importante En general no es necesario recurrir al criterio de la segunda derivada para calcular los máximos y mínimos relativos, ya que la condición de extremos relativos que solamente implica la consideración del signo de $\mathbf{f'(x)}$ a ambos lados de "a" es más cómoda y de mayor generalidad.

Ejemplo: Calcular los extremos relativos de la función $f(x)=\cos^2 x$

Calculamos la derivada primera de la función:

$$f'(x)=2\cos x\cdot(-\operatorname{sen} x)=-2\operatorname{sen} x\cdot\cos x=-\operatorname{sen} 2x$$

Se buscan los puntos que anulan la primera derivada:

$$-\operatorname{sen} 2x=0 \quad\rightarrow\quad \operatorname{sen} 2x=0 \quad\rightarrow\quad 2x=\operatorname{arcsen} 0=\begin{cases}0+2\pi k\\ \pi+2\pi k\end{cases} \quad\rightarrow\quad x=\begin{cases}0+\pi k\\ \dfrac{\pi}{2}+\pi k\end{cases}$$

Los puntos que anulan la primera derivada son:

$$0+2\pi k;\quad \frac{\pi}{2}+2\pi k;\quad \pi+2\pi k;\quad \frac{3\pi}{2}+2\pi k \quad \text{con} \quad k\in Z$$

Se calcula la segunda derivada y se estudian los valores de $f''(x)$ en esos puntos:

$$f''(x)=-2\cos 2x$$

$$x=0 \quad\rightarrow\quad f''(0)=-2\cos 0=-2<0 \quad\Rightarrow\quad \text{en } x=0+2\pi k,\ f(x) \text{ tiene máximo relativo}$$

$$x=\frac{\pi}{2} \quad\rightarrow\quad f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2\cos\frac{2\pi}{2}=2>0 \quad\Rightarrow\quad \text{en } x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ f(x) \text{ tiene mínimo relativo}$$

$$x=\pi \quad\rightarrow\quad f''(\pi)=-2\cos 2\pi=-2<0 \quad\Rightarrow\quad \text{en } x=\pi+2\pi k,\ f(x) \text{ tiene máximo relativo}$$

$$x=\frac{3\pi}{2} \quad\rightarrow\quad f''\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-2\cos 3\pi=2>0 \quad\Rightarrow\quad \text{en } x=\frac{3\pi}{2}+2\pi k,\ f(x) \text{ tiene mínimo relativo}$$

Los puntos máximos y mínimos relativos son aquellos que tienen por coordenadas:

$$x=0 \quad\rightarrow\quad f(0)=\cos^2 0=1 \qquad \text{Máximos relativos } (0+2\pi k,1)$$

$$x=\frac{\pi}{2} \quad\rightarrow\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos^2\frac{\pi}{2}=0 \qquad \text{Mínimos relativos } \left(\frac{\pi}{2}+2\pi k,0\right)$$

$$x=\pi \quad\rightarrow\quad f(\pi)=\cos^2\pi=1 \qquad \text{Máximos relativos } (\pi+2\pi k,1)$$

$$x=\frac{3\pi}{2} \quad\rightarrow\quad f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\cos^2\frac{3\pi}{2}=0 \qquad \text{Mínimos relativos } \left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k,0\right)$$

Conclusión

Los máximos y mínimos relativos podemos agruparlos de la siguiente manera:

Máximos relativos en los puntos $\left(0+\pi k\,,1\right)$

Mínimos relativos en los puntos $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\,,0\right)$

Ejemplo: **Estudiar los máximos y mínimo relativos de la función** $\mathbf{f(x)=(x-1)^4\cdot(x+2)^3}$

Calculamos la derivada primera de la función:

$$f'(x)=4(x-1)^3\cdot(x+2)^3+(x-1)^4\cdot 3(x+2)^2=$$

$$(x-1)^3\cdot(x+2)^2\cdot\left[4(x+2)+3(x-1)\right]=(x-1)^3\cdot(x+2)^2\cdot(4x+8+3x-3)=$$

$$(x-1)^3\cdot(x+2)^2\cdot(7x+5)$$

Se buscan los puntos que anulan la primera derivada:

$$(x-1)^3\cdot(x+2)^2\cdot(7x+5)=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \\ x=-\dfrac{5}{7} \end{cases}$$

Se calcula la segunda derivada y se estudian los valores de $f''(x)$ en esos puntos:

$$f''(x)=3(x-1)^2\cdot(x+2)^2\cdot(7x+5)+(x-1)^3\cdot 2(x+2)\cdot(7x+5)+(x-1)^3\cdot(x+2)^2\cdot 7=$$

$$6(x+2)\cdot(x-1)^2\cdot(7x^2+10x+1)$$

$$x=-2 \quad\rightarrow\quad f''(-2)=0$$

$$x=-\frac{5}{7} \quad\rightarrow\quad f''\left(-\frac{5}{7}\right)=-58'29<0 \quad\Rightarrow\quad \text{en } \ x=-\frac{5}{7}\ \ f(x) \text{ tiene máximo relativo}$$

$$x=1 \quad\rightarrow\quad f''(1)=0$$

Como en $x=-2$ y en $x=1$ se anula también la derivada segunda, entonces se sigue derivando:

$$f'''(x)=6(x-1)\cdot(35x^3+75x^2+15x-17)$$

y se comprueba el valor de la tercera derivada en $x=-2$ y en $x=1$:

$$x=-2 \quad \rightarrow \quad f'''(-2)=486>0 \quad \rightarrow \quad \text{en } x=-2 \;\; f(x) \text{ tiene un punto de inflexión}$$

$$x=1 \quad \rightarrow \quad f'''(1)=0$$

Como para $x=1$ se anula también la tercera derivada, se sigue derivando:

$$f^{iv}(x)=24(35x^3+30x^2-30x-8)$$

y se comprueba el valor de la cuarta derivada en $x=1$.

$$x=1 \quad \rightarrow \quad f^{iv}(1)=648>0 \quad \rightarrow \quad \text{en } x=1 \;\; f(x) \text{ tiene un mínimo relativo.}$$

Conclusión

Los puntos máximos y mínimos relativos son aquellos que tienen por coordenadas:

$x=-\frac{5}{7} \quad \rightarrow \quad f\left(-\frac{5}{7}\right)=18'35$ Máximo relativo $(-0'71, 18'35)$

$x=1 \quad \rightarrow \quad f(1)=0$ Mínimo relativo $(1, 0)$

Estudio y representación gráfica de funciones

La ley matemática por la que un fenómeno se rige, la fórmula que enlaza las diversas variables interesantes de él, contiene potencialmente toda la información que podamos desear sobre tal fenómeno, en los aspectos que cuantificamos de él

La curva que representa esta ley matemática es como la radiografía, la expresión visual de las relaciones entre las variables que intervienen en la situación que estudiamos. En la curva, son perceptibles de una simple ojeada, los aspectos más interesantes e importantes del fenómeno, cuándo crece la función, cuándo decrece, cuándo en un punto se alcanza el máximo o el mínimo, qué tendencia presenta la función cuando la variable independiente crece mucho,.....

Por ello, es muy interesante acostumbrarse a interpretar curvas de un vistazo, como el médico se habitúa a interpretar cardiogramas o radiografías en un momento, aprendiendo a mirar aquellos aspectos que proporcionan la información requerida para diagnosticar adecuadamente. Y para adquirir el hábito de interpretar la curva que representa un fenómeno, el camino mejor consiste en conseguir cierta destreza para dibujar curvas rápidamente a partir de la expresión analítica, la fórmula que corresponde al fenómeno.

Actualmente, algunas calculadoras de bolsillo y los ordenadores son capaces de dibujar con suficientemente aproximación para muchos efectos, la curva de una función bastante general. Una vez que esta curva está en la pantalla, mediante el movimiento del cursor, con sólo pulsar unas cuantas teclas, la calculadora o el ordenador proporcionan máximos, mínimos, ceros, asíntotas,.... El trabajo rutinario lo hace la máquina. A nosotros nos toca aprender a preguntarle correctamente.

Para dibujar con exactitud la gráfica de una función, debemos conocer sus infinitos puntos, y no basta con representar sólo algunos, pues puede haber diversas gráficas que pasen por ellos. No obstante, utilizando alguno de los cálculos explicados anteriormente, estamos en condiciones de dibujar una representación lo suficientemente aproximada como para poder utilizarla a como es en realidad.

Vamos a ver un procedimiento ordenado para hacer el estudio y la representación gráfica de las funciones que nos ahorrará tiempo.

1. Dominio de una función

Se llama **dominio de definición** de una función $y = f(x)$, y lo representaremos por $\mathbf{D}\left[\mathbf{f(x)}\right]$, ***al conjunto de valores de la variable independiente x para los cuales f(x) es un número real***.

$$\mathbf{D}\left[\mathbf{f(x)}\right] = \left\{\mathbf{x} \in \mathbf{R} \ / \ \mathbf{f(x)} \in \mathbf{R}\right\}$$

Podemos concretar las siguientes situaciones que requieren un estudio especial:

- Las funciones polinómicas están definidas para cualquier número real.

- Las funciones de la forma $\mathbf{f(x)} = \dfrac{\mathbf{g(x)}}{\mathbf{h(x)}}$ (cociente de funciones) están definidas en todos los puntos excepto en aquellos en los que $h(x) = 0$.

Ejemplo: La función $f(x) = \dfrac{3x+2}{x^2 - 4x + 3}$ no está definida en los valores de x para los cuales $x^2 - 4x + 3 = 0$, es decir, en $x = 3$ y en $x = 1$. Por consiguiente:

$$D[f(x)] = \forall x \in R - \{3,1\}$$

Ejemplo: La función $f(x) = \dfrac{2x}{\operatorname{sen} x}$ no está definida en los valores de x para los cuales $\operatorname{sen} x = 0$, es decir, en $x = \operatorname{arcsen} 0 = 0 + \pi k$. Por consiguiente:

$$D[f(x)] = \forall x \in R - \{0 + \pi k\} \quad \text{con} \quad k \in Z$$

- Las funciones de la forma $\mathbf{f(x) = tg[g(x)]}$ no están definidas en $g(x) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in Z$.

- Las funciones de la forma $\mathbf{f(x) = arcsen\, g(x)}$ y $\mathbf{f(x) = arccos\, g(x)}$ sólo están definidas en el intervalo $[-1,1]$.

Ejemplo: La función $f(x) = \operatorname{arcsen}(2x+3)$ está definida si $-1 \le 2x + 3 \le 1$, es decir:

$$-1 \le 2x + 3 \;\rightarrow\; -4 \le 2x \;\rightarrow\; -2 \le x \;\rightarrow\; x \ge -2$$

$$2x + 3 \le 1 \;\rightarrow\; 2x \le -2 \;\rightarrow\; x \le -1$$

Por consiguiente, $D[f(x)] = \forall x \in [-2, -1]$

- Las funciones de la forma $\mathbf{f(x)} = \sqrt[n]{\mathbf{g(x)}}$ para n par, no están definidas para $g(x) < 0$.

$$D[f(x)] = \{\forall x \in R \,/\, g(x) \ge 0\}$$

Cuando el índice es impar, la raíz está definida siempre que el radicando lo está.

Ejemplo: La función $f(x) = \sqrt{3 - x}$ sólo está definida cuando $3 - x \ge 0$, es decir, cuando $x \le 3$. Por consiguiente:

$$D[f(x)] = \forall x \le 3 \qquad \text{ó} \qquad D[f(x)] = \forall x \in]-\infty, 3]$$

- Las funciones de la forma $\mathbf{f(x) = log_a g(x)}$ no están definidas para $g(x) \le 0$.

Ejemplo: La función $f(x)=\ln(2x+6)$ sólo está definida cuando $2x+6>0$, es decir, cuando $x>-3$. Por consiguiente:

$$D[f(x)]=\forall x>-3 \qquad ó \qquad D[f(x)]=\forall x\in\,]-3,\infty[$$

- Para que existan las imágenes de las funciones de la forma $\mathbf{f(x)}=[\mathbf{g(x)}]^{\mathbf{h(x)}}$ se requiere que $g(x)>0$.

Ejemplo: El dominio de la función $f(x)=(x-1)^{(x+1)}$ es el conjunto de los puntos tales que $x-1>0$, es decir:

$$D[f(x)]=\forall x>1$$

2. Periodicidad

Se dice que una función $f(x)$ cuyo dominio de definición es D, es periódica, si existe un número real no nulo T para el cual se verifica:

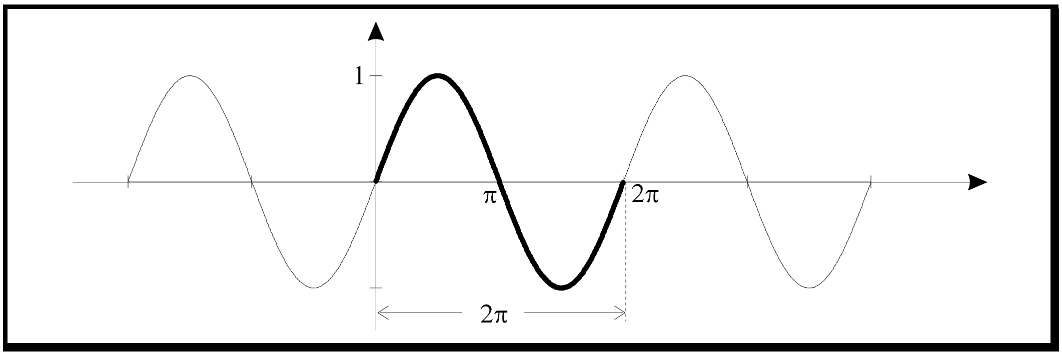
$$\mathbf{f(x+T)=f(x)} \quad \forall \mathbf{x}\in \mathbf{D}$$

es decir, cuando su gráfica se repite cada tramo de longitud T. Observa que, cuando esto ocurre, también se verifica que:

$$f(x+2T)=f(x+3T)=f(x-T)=f(x+kT)$$

***El menor valor T para el que se verifican estas igualdades se llama* periodo**. *Es evidente que si una función es periódica, basta estudiarla en un intervalo de longitud igual a su periodo.* Después de representarla, se repite una y otra vez a su derecha y a su izquierda.

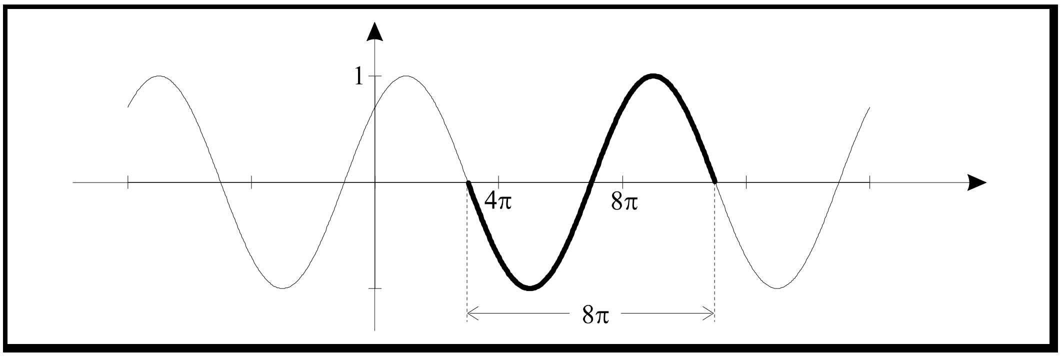
Ejemplo: El periodo de la función $y=\text{sen } x$ es $T=2\pi$ como se observa en la siguiente gráfica:



- ***Si $f(x)$ es una función periódica de periodo T, también es periódica la función $f(ax+b)$ y su periodo es $\dfrac{\mathbf{T}}{\mathbf{a}}$.***

Ejemplo: Calcular el periodo de la función $y = \operatorname{sen} \dfrac{x+\pi}{4}$

$$y = \operatorname{sen} \frac{x+\pi}{4} = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{4}\right) \longrightarrow \text{Periodo} = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$$

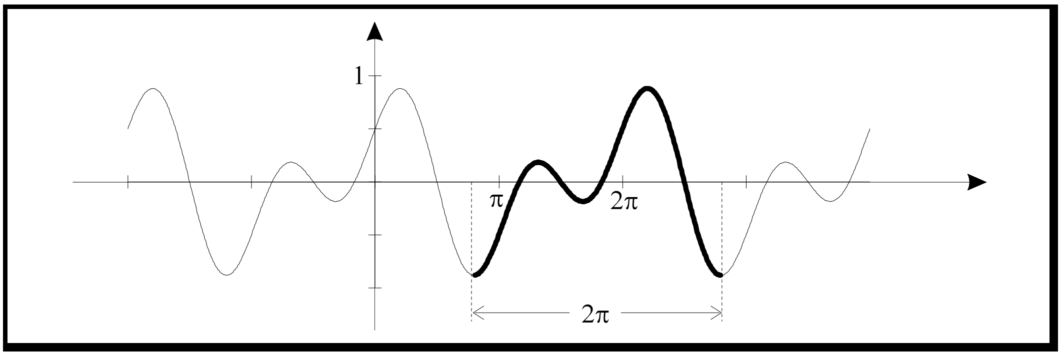


Si operamos funciones periódicas con el mismo periodo, el resultado es otra función periódica y el periodo es el mismo o, acaso, menor.

- ***Si $f(x)$ y $g(x)$ son periódicas, también lo son $f(x) \pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ y $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, y su periodo es como máximo el mínimo común múltiplo de los periodos de $f(x)$ y $g(x)$.***

Ejemplo: La función $y = \operatorname{sen} 2x + \cos x$ tiene de periodo:

$$\text{m.c.m.}\left(\frac{2\pi}{2}, 2\pi\right) = \text{m.c.m.}(\pi, 2\pi) = 2\pi$$



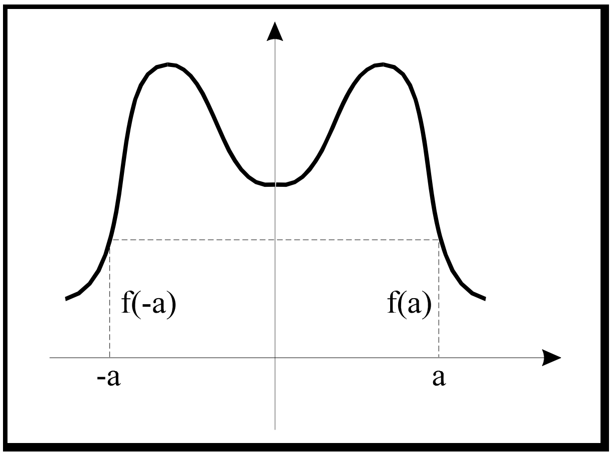
3. *Simetrías*

Simetría respecto al eje de ordenadas

Si una función $f(x)$ verifica que $\mathbf{f(x) = f(-x)}$ cualquiera que sea x, es decir, toma los mismos valores a los dos lados del eje de ordenadas, entonces es simétrica respecto a este eje.

A esta funciones se les llama **pares** porque las funciones polinómicas que cumplen esta condición sólo tienen términos con exponente par.

Para construir la gráfica de una función simétrica respecto al eje de ordenadas, será suficiente representar gráficamente los valores positivos, $x > 0$; el resto de la gráfica se obtendrá por simetría respecto al eje vertical



Ejemplo: La función $y = x^2 + 3$ es par, pues:

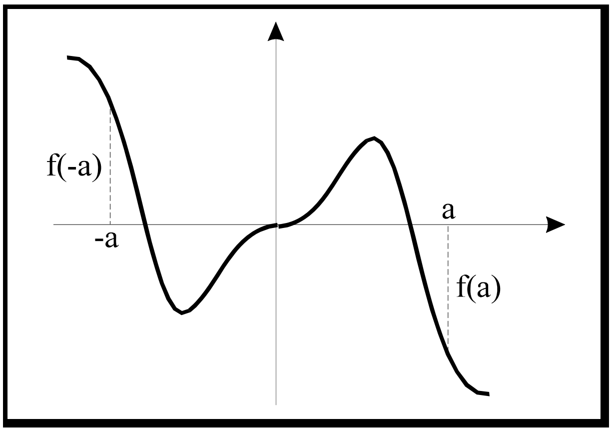
$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 + 3 \\ f(-x) = (-x)^2 + 3 = x^2 + 3 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = f(-x)$$

Simetría respecto al origen de coordenadas

Si una función $f(x)$ verifica que $\mathbf{f(-x) = -f(x)}$, cualquiera que sea x, entonces es simétrica respecto al origen de coordenadas.

A esta funciones se les llama **impares** porque las funciones polinómicas que cumplen esta condición sólo tienen términos con exponente impar.

Para construir la gráfica de una función simétrica respecto al origen de coordenadas será suficiente conocer la gráfica correspondiente a los valores positivos de x; $x > 0$. El resto se obtendrá por simetría respecto al origen.



Ejemplo: La función $y = x^3 + 3x$ es impar, pues:

$$\left.\begin{array}{l} f(-x) = (-x)^3 + 3(-x) = -x^3 - 3x \\ -f(x) = -\left(x^3 + 3x\right) = -x^3 - 3x \end{array}\right\} \Rightarrow f(-x) = -f(x)$$

<u>Simetría respecto al eje de abscisas</u>

No tiene demasiado interés, porque las correspondencias que presentan estas simetrías no son funciones.

Para que la curva representativa de una función $f(x)$ sea simétrica respecto al eje de abscisas, es condición necesaria y suficiente que la ecuación no se modifique al sustituir y por -y.

La ecuación tiene la forma $y = \pm f(x)$, es decir, para cada valor de x obtenemos dos valores de y de signos opuestos, pero ojo, esto no es una función salvo si la consideramos como dos diferentes $y = +f(x)$ e $y = -f(x)$.

Ejemplo: $y = \sqrt{x}$ es simétrica respecto al eje de abscisas, pues a cada valor de x le corresponden dos valores opuestos en y:

4. *Asíntotas*

Consideremos la gráfica de una función $y = f(x)$. Si un punto $\left(x, f(x)\right)$ de su gráfica recorre la curva de tal manera que se aleja indefinidamente del origen de coordenadas, diremos que dicho punto describe una ***rama infinita*** de la curva.

Una recta del plano es una **asíntota** de la representación gráfica de $y = f(x)$, cuando la distancia entre un punto de la curva y la recta dada tiende a cero, a medida que el punto de la curva recorre una rama infinita.

Se distinguen tres tipos fundamentales y distintos de asíntotas.

<u>Asíntotas Verticales</u>

Si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ ó $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$, o se dan ambas circunstancias a la vez, diremos que la recta $x = a$ es una asíntota vertical de la función $f(x)$.

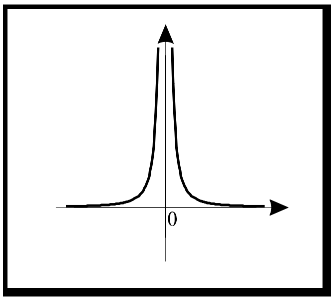
Esto significa, que en las cercanías de “a”, la gráfica de la función $y = f(x)$ se prolonga indefinidamente en sentido vertical, acercándose a la recta $x = a$ hasta confundirse prácticamente con ella.

En los puntos donde hay asíntotas verticales, debemos llevar a cabo un análisis de los límites laterales de la función, ya que los valores que toman nos darán razón del comportamiento de la curva a ambos lados de la asíntota vertical $x = a$. Podemos esquematizar lo que ocurre en torno al punto “a” según los valores de los límites laterales, a través de algunos ejemplos.

$$f(x)=\frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$$

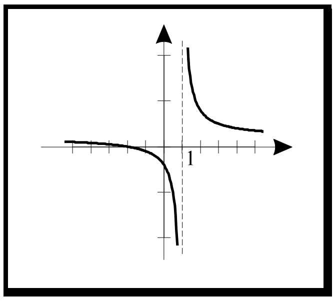
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$$



$$f(x)=\frac{x+2}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$$

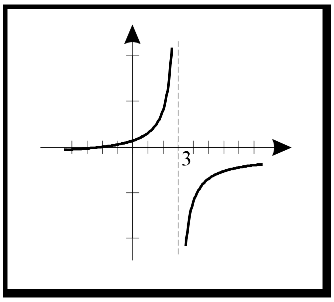
$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$$



$$f(x)=\frac{2+x}{3-x}$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=+\infty$$

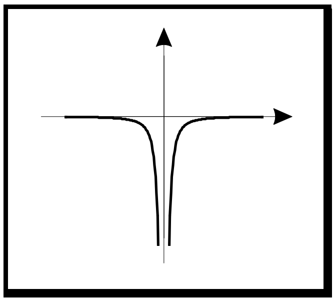
$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=-\infty$$



$$f(x)=\frac{-1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$$



No debemos olvidar el caso en que alguno de las límites laterales no existe, debido, por ejemplo, a que la función no está definida para $x>a$ o para $x<a$. En este caso, a la derecha o a la izquierda de la asíntota no habrá curva. Así, por ejemplo, $y=\ln x$ tiene una asíntota vertical en $x=0$ y a la izquierda de esta recta la función no está definida.

∗ ***Las funciones polinómicas no tienen asíntotas.***

∗ ***La gráfica de una función nunca corta a una asíntota vertical.***

Las asíntotas verticales se localizan en los siguientes casos:

a) $\mathbf{y=\dfrac{f(x)}{g(x)}}$

En las funciones racionales, cuando alguna de las raíces del numerador coincide con alguna de las raíces del denominador, conviene simplificar la expresión, y en la gráfica de la expresión resultante, la raíz común puede representar un punto de discontinuidad evitable o una asíntota vertical, como queda reflejado en los siguientes ejemplos:

Ejemplo: Calcular las asíntotas verticales de la función $y = \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - x}$

Las raíces del denominador son $x = 0$ y $x = 1$, mientras que las del numerador son $x = 1$ y $x = -5$, por tanto la recta $x = 0$ es una asíntota vertical mientras que en $x = 1$ hay una discontinuidad evitable.

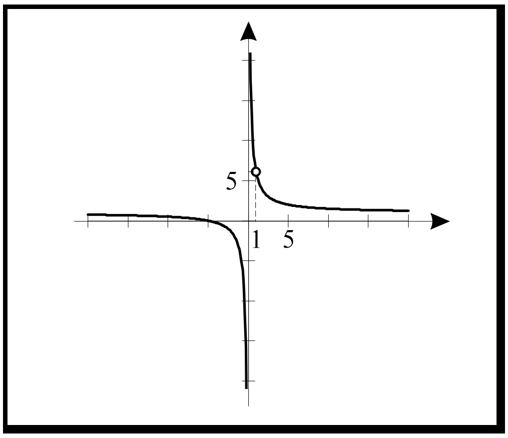
A la hora de hacer el estudio de la función podemos simplificarla, teniendo en cuenta, que cuando la representemos gráficamente, en $x = 1$ hay una discontinuidad evitable. En el ejemplo, la función simplificada es:

$$y = \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - x} = \frac{(x-1)(x+5)}{x(x-1)} = \frac{x+5}{x}$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x+5}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x+5}{x} = +\infty$$

Por tanto, la recta $x = 0$ es una asíntota vertical.



Ejemplo: Calcular las asíntotas verticales de la función $y = \frac{x-2}{x^2 - 4x + 4}$

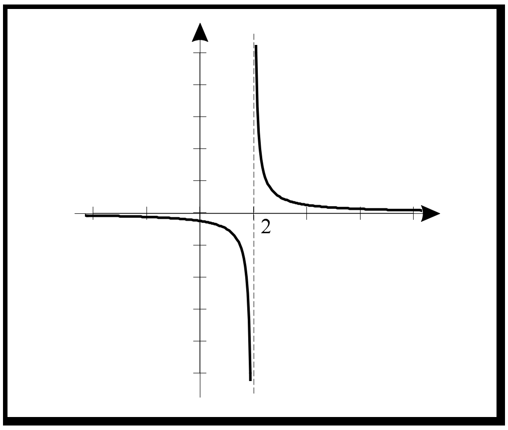
Tanto la raíz del numerador como la del denominador, que es doble, es 2. Simplificando la expresión, obtenemos:

$$y = \frac{x-2}{(x-2)^2} = \frac{1}{x-2}$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$$

Por tanto, la recta $x = 2$ es una asíntota vertical.



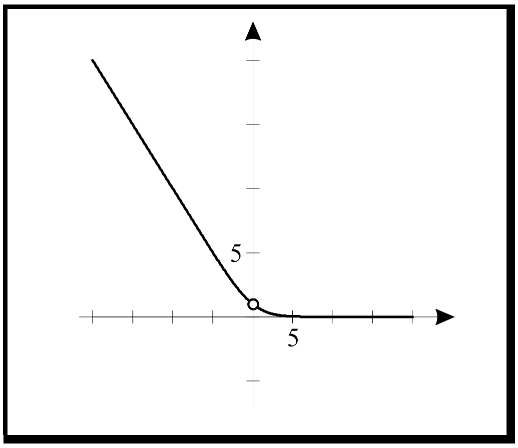
- *Veamos un caso de una función no racional, en la que el denominador tiende a cero y sin embargo no hay asíntota vertical.*

Ejemplo: Calcular las asíntotas verticales de la función $y = \dfrac{x}{e^x - 1}$

Tanto el numerador como el denominador se anulan para $x = 0$. En este caso, no hay asíntota vertical sino un punto de discontinuidad.

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{e^x - 1} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{e^x - 1} = 1$$



b) $\mathbf{y = tg\, f(x)}$

Las asíntotas se obtienen resolviendo la ecuación: $f(x) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in Z$. En este caso, hay infinitas asíntotas verticales.

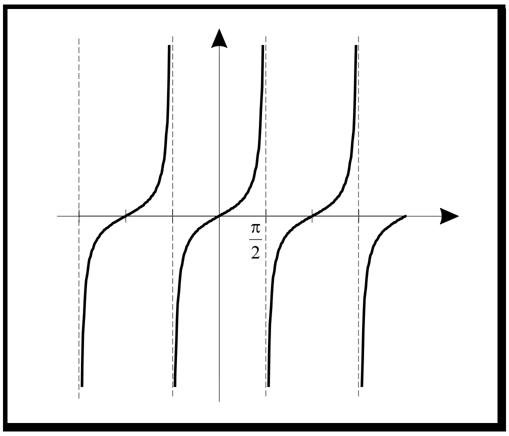
Ejemplo: Calcular las asíntotas verticales de la función $y = tg\, x$

Las asíntotas verticales son:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} tg\, x = +\infty$$

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} tg\, x = -\infty$$



c) $\mathbf{y = \log f(x)}$

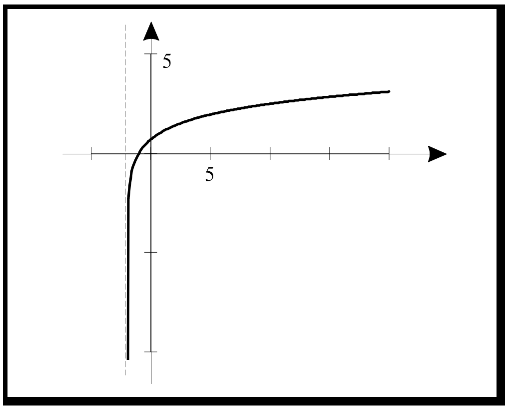
Las asíntotas se obtienen resolviendo la ecuación: $f(x) = 0$, ya que $\log 0 \to -\infty$.

Ejemplo: Calcular las asíntotas verticales de la función $y = \ln(x + 2)$

Resolvemos la ecuación $x + 2 = 0$. La solución $x = -2$ es una asíntota vertical.

Como la función no está definida para $x \le -2$, no hay límite lateral por la izquierda.

$$\lim_{x \to -2^+} \ln(x+2) = -\infty$$



Asíntotas Horizontales

Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$ ó $\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$, la recta $y = a$ es una asíntota horizontal de la función $f(x)$.

Esto significa que cuando $x \to \infty$ ó $x \to -\infty$ la gráfica de $y = f(x)$ se aproxima progresivamente a la recta $y = a$ hasta confundirse prácticamente con ella, lo que se traduce en que la distancia $f(x) - a$, de la curva a la asíntota, tiende a cero a medida que nos alejamos del origen. El signo de $f(x) - a$ nos dice si la curva está por encima o por debajo de la asíntota.

Si $f(x) - a > 0$, entonces $f(x) > a \Rightarrow$ la función está por encima de la asíntota.

Si $f(x) - a < 0$, entonces $f(x) < a \Rightarrow$ la función está por debajo de la asíntota.

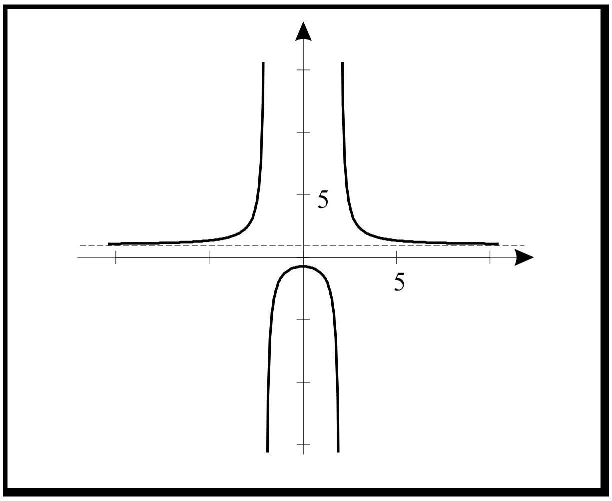
Aunque frecuentemente ocurre que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x)$ y por lo tanto, la misma recta es asíntota por la derecha y por la izquierda, es posible que sean distintas o que una de ellas no exista y la otra sí.

Una función tiene como máximo dos asíntotas horizontales correspondientes a cada uno de los límites en $+\infty$ y $-\infty$.

Las asíntotas horizontales se localizan en los siguientes casos:

a) En las funciones racionales (expresiones que son cocientes de polinomios), sólo hay una asíntota horizontal, y esta existe cuando el grado del numerador es menor o igual que el grado del denominador. En este caso, si hay asíntota horizontal por la derecha (para $x \to +\infty$), la misma recta es asíntota por la izquierda (para $x \to -\infty$), por tanto, bastará con calcular sólo uno de los límites.

Ejemplo: Sea la función $y = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x^2 - 4}$

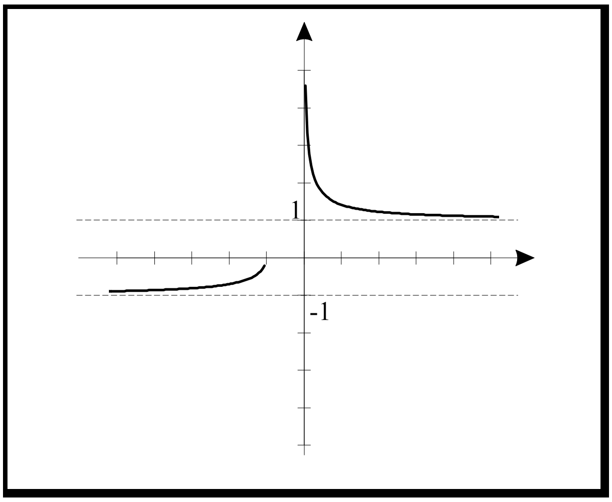


$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x^2 - 4} = 1 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x^2 - 4} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Asíntota $\quad y = 1$

b) En las expresiones que tienen radicales, la asíntota horizontal por la derecha suele ser distinta de la asíntota horizontal por la izquierda.

Ejemplo: Sea la función $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + x}}{x}$



$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = +1 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Asíntotas $\quad \begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \end{cases}$

Para saber si la curva queda por encima o por debajo de la asíntota horizontal, se calcula el signo de $f(x) - a$. Si es positivo, la curva queda por encima y si es negativo queda por debajo.

En nuestro ejemplo tenemos

$$\frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} - 1 \xrightarrow{\text{para } x = 10^6} 5 \cdot 10^{-7} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{La curva queda por encima.}$$

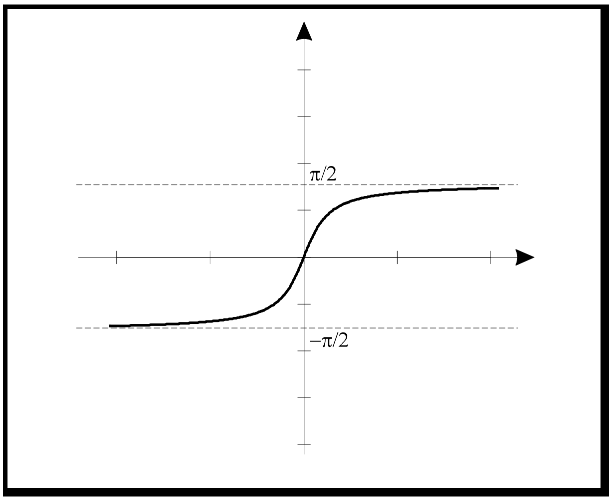
$$\frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} - (-1) \xrightarrow{\text{para } x = -10^6} 1'99 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{La curva queda por encima.}$$

c) En la función arco tangente, la asíntota por la derecha es distinta de la asíntota por la izquierda.

Ejemplo: Sea la función $y = \text{arctg}\, x$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \text{arctg}\, x = \dfrac{\pi}{2} \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \text{arctg}\, x = -\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Asíntotas $\left\{\begin{array}{l} y = \dfrac{\pi}{2} \\ y = -\dfrac{-\pi}{2} \end{array}\right.$

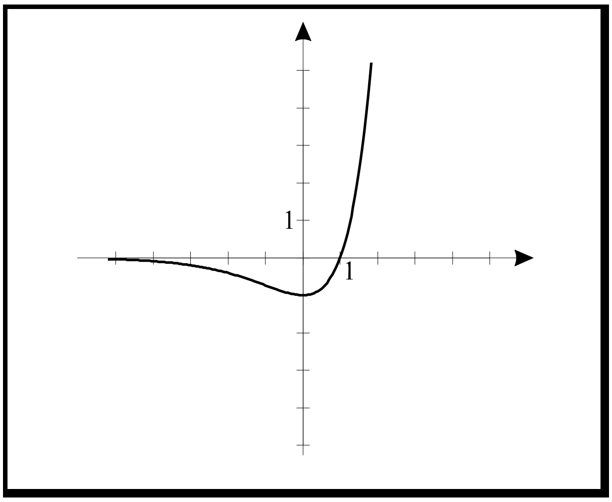


d) ***Hay funciones que tienen asíntota horizontal por la izquierda pero no por la derecha y viceversa.***

Ejemplo: Sea la función $y = e^x \cdot (x - 1)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} e^x (x-1) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^x (x-1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Asíntota $y = 0$

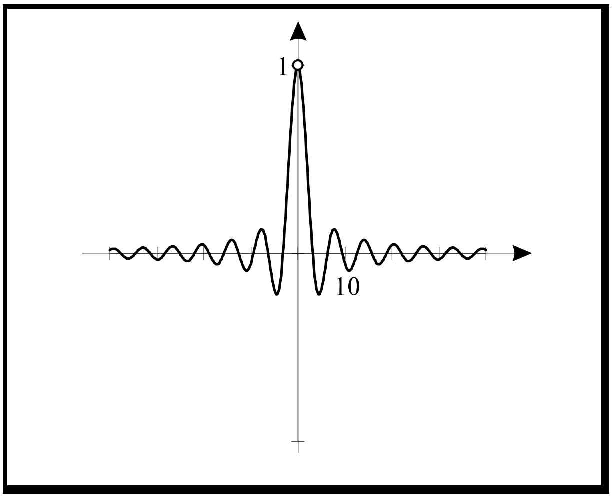


e) ***Una asíntota horizontal puede cortar a la curva en varios puntos, aunque en la mayoría de las funciones elementales la gráfica permanece por encima o por debajo de la asíntota considerada a partir de un punto. Su papel de asíntotas lo juegan para valores grandes de la x.***

Ejemplo: Sea la función $y = \dfrac{\text{sen}\, x}{x}$

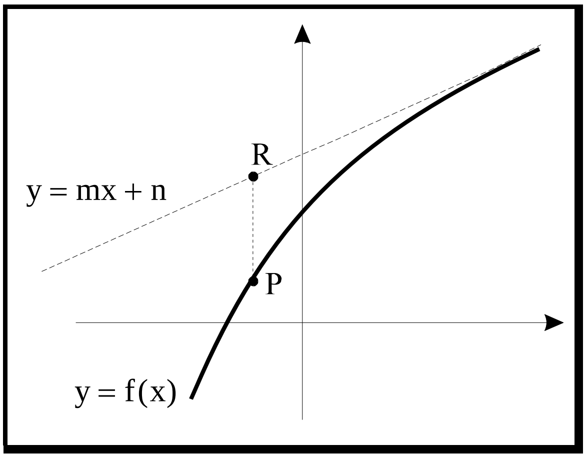
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\text{sen}\, x}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\text{sen}\, x}{x} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

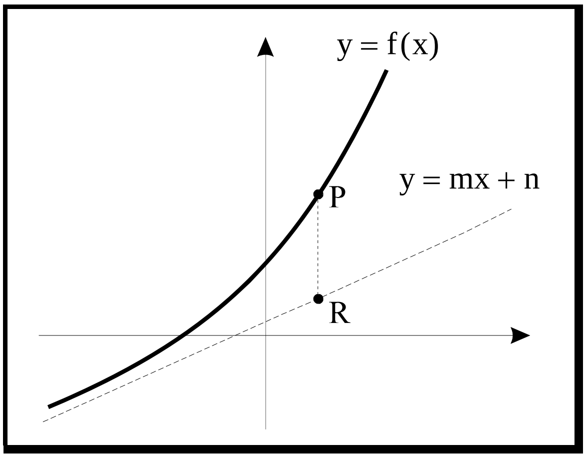
Asíntota $y = 0$



Asíntotas Oblicuas

Una recta que no es horizontal ni vertical, tiene por ecuación $y = mx + n,\ m \neq 0$.





En las dos figuras anteriores, elegimos dos puntos variables con la misma abscisa: El punto R que pertenece a la recta y el punto P que pertenece a la gráfica de la función.

Para cada x, la medida del segmento de extremos P y R es:

$$|f(x) - (mx + n)| = |f(x) - mx - n|$$

Si este valor se aproxima a cero, los puntos de la recta se aproximan cada vez más a los puntos de la función que tienen la misma abscisa; se dice entonces que la recta es una **asíntota oblicua** de la función. Intuitivamente significa que para valores de x cada vez mayores la recta y la rama correspondientes de la gráfica de la función tienden a confundirse.

La recta $y = mx + n,\ \ m \neq 0$ es una asíntota oblicua de la gráfica de la función $y = f(x)$ cuando al tender $x \to \infty$ ó $x \to -\infty$ la distancia entre la gráfica y la recta tiende a cero, o lo que es lo mismo, si existe alguno de las siguientes límites:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - mx - n \right] = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - mx - n \right] = 0$$

a) *Cálculo de la pendiente m*

Observemos que la condición $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - mx - n \right] = 0$ también puede expresarse así:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[\left(\frac{f(x)}{x}-m-\frac{n}{x}\right)\cdot x\right]=0 \quad \text{lo que nos conduce a} \quad \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-m-\frac{n}{x}\right)=0$$

ya que cuando un límite es producto de dos funciones, y su valor es cero, si el límite de uno de los factores es $\pm\infty$, entonces el límite del otro factor debe ser 0 (ya que cualquier otro valor $k \neq 0$ daría $\pm k \cdot \infty$, que siempre es $\pm\infty$); por tanto

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-m\right)=0 \quad \text{ya que} \quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{n}{x}=0 \quad \text{de donde concluimos que:}$$

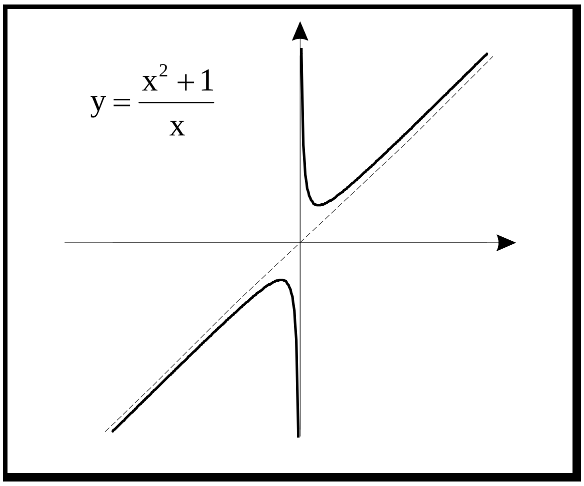
$$\boxed{\mathbf{m}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}}$$

Según el valor de **m** obtenido al calcular los límites anteriores, pueden darse tres casos:

1) **m es un número real no nulo.**

La función tiene una asíntota oblicua.

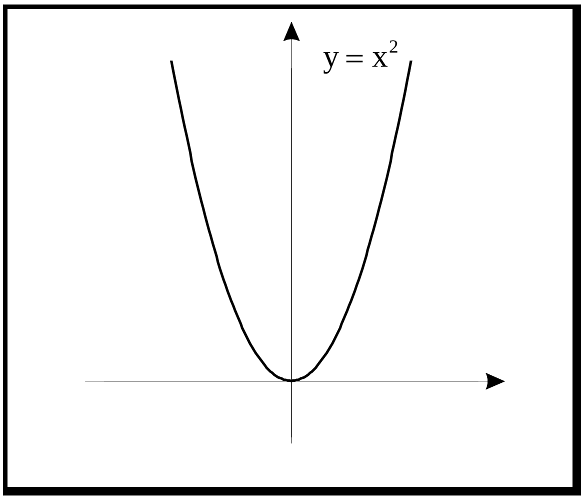
La rama de la curva se dice ***hiperbólica.***



2) $\mathbf{m}=\pm\infty$

La función no tiene asíntotas oblicuas.

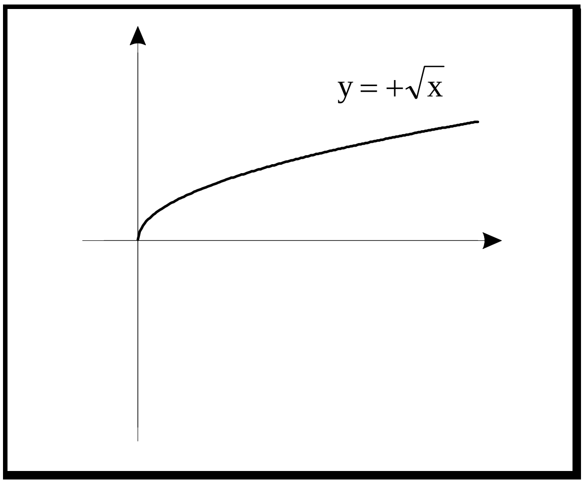
La función puede tener ramas infinitas como las que figuran al margen. Se les llama ***ramas parabólicas de dirección OY***, pues son similares a las de la parábola $y=x^2$.



3) $\mathbf{m = 0}$

La función no tiene asíntota oblicua.

La función puede tener una rama infinita como la que figura al margen. Se le llama ***rama parabólica de dirección OX*** pues es similar a la de la parábola $y = \sqrt{x}$.



b) *Cálculo de la ordenada en el origen n*

Para calcular el valor de “n”, recordemos la condición que debía cumplir una asíntota:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - mx - n \right] = 0$$

Una vez conocido el valor de m, nos quedará un solo cálculo por hacer:

$$\boxed{\mathbf{n = \lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - mx \right] = 0}}$$

∗ ***Al igual que ocurría con las asíntotas horizontales, el signo de*** $f(x) - mx$***, para valores grandes de*** x ***o muy pequeños, nos dice si la curva está por encima o por debajo de la asíntota.***

∗ ***Una función puede tener como máximo dos asíntotas oblicuas, correspondientes a cada uno de los límites*** $+\infty$ **y** $-\infty$.

Las asíntotas oblicuas se localizan en los siguientes casos:

a) En las funciones racionales, sólo hay asíntotas oblicuas cuando el grado del numerador sobrepasa exactamente en una unidad el grado del denominador En este caso, la misma recta es asíntota oblicua por la derecha y por la izquierda.

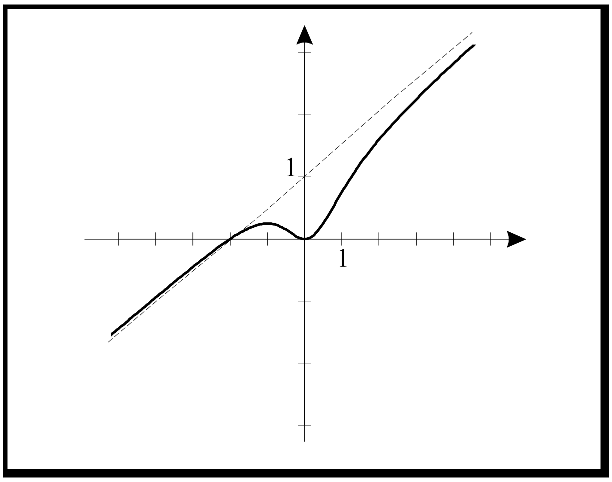
Ejemplo: Sea la función $y = \dfrac{x^3 + 2x^2}{2x^2 + 2}$

$$\left.\begin{array}{l} m = \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{x^3 + 2x^2}{2x^2 + 2}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + 2x^2}{2x^3 + 2x} = \frac{1}{2} \\ n = \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - mx \right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^3 + 2x^2}{2x^2 + 2} - \frac{x}{2} \right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2 - 2x}{4x^2 + 4} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow y = \frac{x}{2} + 1$$

Para $x \to -\infty$, se obtienen los mismos valores de m y n. Esto significa, que la recta:

$$y = \frac{x}{2} + 1$$

es asíntota por la derecha y por la izquierda



Ejemplo: Sea la función $y = \dfrac{x \cdot |x-1|}{x+1}$

$$|x-1| = \begin{cases} -x+1 & \text{si} \quad x<1 \\ 0 & \text{si} \quad x=1 \\ x-1 & \text{si} \quad x>1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = \begin{cases} \dfrac{x\cdot(-x+1)}{x+1} = \dfrac{-x^2+x}{x+1} & \text{si} \quad x<1 \\ 0 & \text{si} \quad x=1 \\ \dfrac{x\cdot(x-1)}{x+1} = \dfrac{x^2-x}{x+1} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

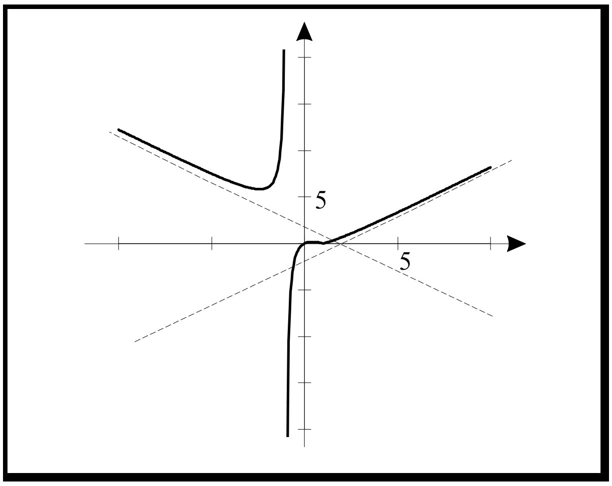
$$\left.\begin{array}{l} m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{x^2-x}{x+1}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-x}{x^2+x} = 1 \\ n = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - mx\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{x^2-x}{x+1} - x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x}{x+1} = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow y = x-2$$

$$\left.\begin{array}{l} m = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\frac{-x^2+x}{x+1}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x^2+x}{x^2+x} = -1 \\ n = \lim\limits_{x\to-\infty} \left[f(x) - mx\right] = \lim\limits_{x\to-\infty} \left[\dfrac{-x^2+x}{x+1} - (-1)x\right] = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{x+1} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow y = -x+2$$

Hay dos asíntotas oblicuas:

$$y = x-2$$

$$y = -x+2$$



b) Una asíntota oblicua puede cortar a la gráfica de una función en más de un punto.

Ejemplo: Sea la función $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} + x$

$$y = \frac{\operatorname{sen} x}{x} + x = \frac{\operatorname{sen} x + x^2}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l} m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{\operatorname{sen} x + x^2}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x + x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}\right) = 1 \\ n = \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{\operatorname{sen} x + x^2}{x} - x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

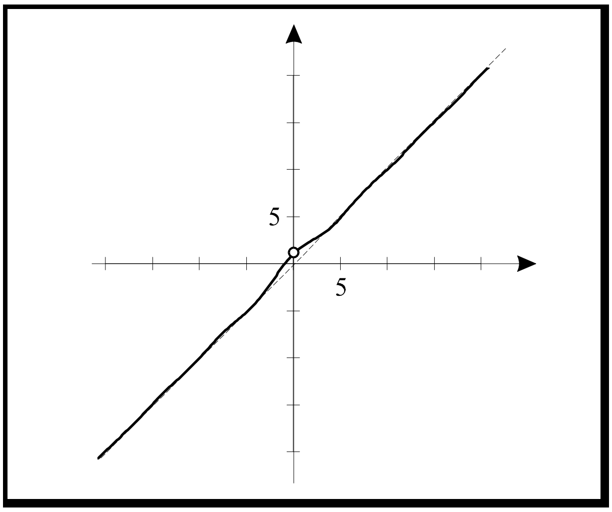
La recta $y = x$ es una asíntota oblicua.

$$\left.\begin{array}{l} m = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\dfrac{\operatorname{sen} x + x^2}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x + x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}\right) = 1 \\ n = \lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - mx] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{\operatorname{sen} x + x^2}{x} - x\right] = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Obtenemos la misma recta oblicua por la izquierda

Este es un ejemplo donde la asíntota oblicua corta en infinitos puntos a la curva.

En $x = 0$ hay una discontinuidad evitable, como queda reflejado en la gráfica de la función.



c) Si una función tiene asíntota horizontal por la derecha, no hay asíntota oblicua por la derecha, pero sí puede haberla por la izquierda, y viceversa.

Ejemplo: Sea la función $y=\dfrac{x}{x\cdot e^{x}+1}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\cdot e^{x}+1}=0$$

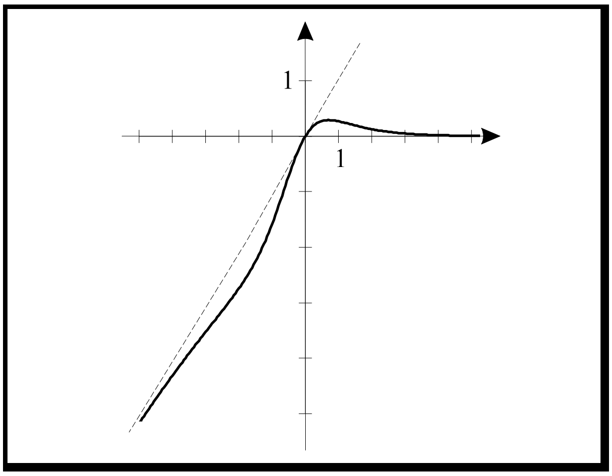
$$\left.\begin{array}{l} m=\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x}{x\cdot e^{x}+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x\cdot e^{x}+1}=1 \\ n=\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{x\cdot e^{x}+1}-x\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^{2}\cdot e^{x}}{x\cdot e^{x}+1}=0 \end{array}\right\}\Rightarrow\quad y=x$$

Hay una asíntota horizontal por la derecha

$$y=0$$

y una asíntota oblicua por la izquierda

$$y=x$$



Ejemplo: Sea la función $y=\dfrac{-x}{-x\cdot e^{-x}+1}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{-x\cdot e^{-x}+1}=0$$

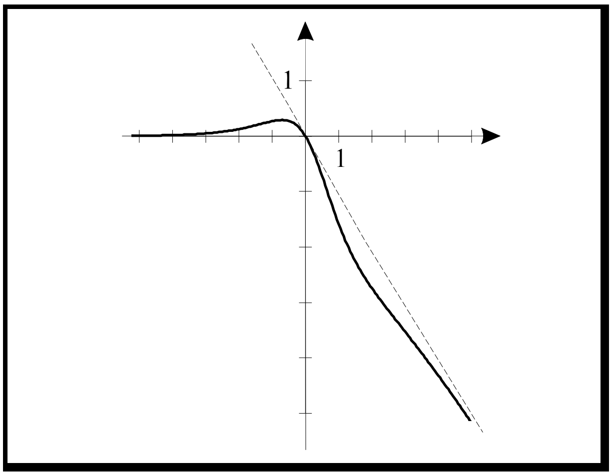
$$\left.\begin{array}{l} m=\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-x}{-x\cdot e^{-x}+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{-x\cdot e^{-x}+1}=-1 \\ n=\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-x}{-x\cdot e^{-x}+1}-(-1)x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^{2}\cdot e^{-x}}{-x\cdot e^{-x}+1}=0 \end{array}\right\}\Rightarrow\quad y=-x$$

Hay asíntota horizontal por la izquierda

$$y = 0$$

y una asíntota oblicua por la derecha

$$y = -x$$



Ejemplo: Sea la función $y = \sqrt{x^2 - x}$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x} = 1$$

$$n = \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - mx \right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 - x} - x \right] = -\frac{1}{2}$$

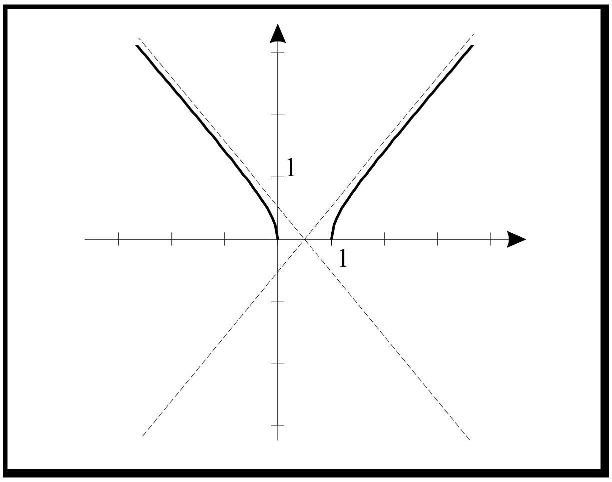
$$\text{Asíntota} \quad y = x - \frac{1}{2}$$

Por otra parte:

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x} = -1$$

$$n = \lim_{x \to -\infty} \left[\sqrt{x^2 - x} - x \right] = \frac{1}{2}$$

$$\text{Asíntota} \quad y = -x + \frac{1}{2}$$



5. *Puntos de corte*

Son puntos interesantes por donde va a pasar la gráfica de la función $y = f(x)$. Su determinación, al menos teóricamente, es sencilla.

a) Cortes con el eje de ordenadas

Los puntos de corte con el eje de ordenadas se obtienen resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y = f(x) \\ x = 0 \end{array}\right\}$$

b) Cortes con el eje de abscisas

Los puntos de corte con el eje de abscisas se obtienen resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y = f(x) \\ y = 0 \end{array}\right\}$$

c) Cortes con las asíntotas oblicuas

Los puntos de corte con las asíntotas oblicuas se obtienen resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y = f(x) \\ y = mx + n \end{array}\right\}$$

6. *Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos*

7. *Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión*

8. *Tabla de valores*

La tabla de valores es útil cuando nos falte información en algún intervalo de la gráfica. En los ejemplos que siguen, se ha hecho en todos los casos para hacer una representación de la gráfica lo más exacta posible.

En definitiva, el estudio de la representación gráfica de una función lo haremos siguiendo estos ocho pasos en el orden establecido.

A continuación, se completa el estudio de las funciones analizadas anteriormente en los apartados de monotonía, concavidad, etc. En este estudio, se dan directamente los resultados allí obtenidos.