Extremos absolutos de una función

De todos los valores que puede tomar una función $f(x)$, si hay alguno que es el mayor de todos, lo llamaremos el máximo absoluto y si hay uno que es el menor de todos lo llamaremos el mínimo absoluto.

Consideremos una función $f(x)$ cuyo dominio de definición es D, y sea $x_o \in D$.

Se dice que la función f(x) alcanza en "x_o" su máximo absoluto, cuando $f(x_o) \geq f(x)$ $\forall x \in D$.

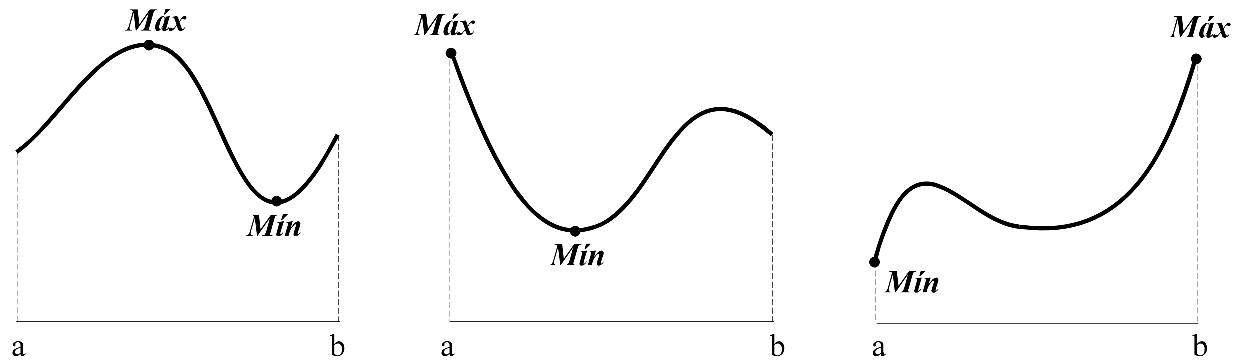
Se dice que la función f(x) alcanza en "x_o" su mínimo absoluto, cuando $f(x_o) \leq f(x)$ $\forall x \in D$.

Una función puede no tener máximo o mínimo absoluto, o puede alcanzarlo en varios puntos.

Cálculo de los extremos absolutos de una función f(x) con $x \in [a,b]$

Dado que en la mayoría de las funciones usadas para estudiar problemas concretos (de geometría, física, economía, etc.) el dominio se ve restringido por las propias condiciones del problema a un intervalo finito, tenemos:

1. ***Si f(x) es derivable en $[a,b]$, los máximos y mínimos absolutos están en los puntos singulares o en los puntos correspondientes a los extremos del intervalo.***



Para encontrar los máximos y mínimos absolutos, cuando f(x) es derivable en un intervalo, seguiremos los siguientes pasos:

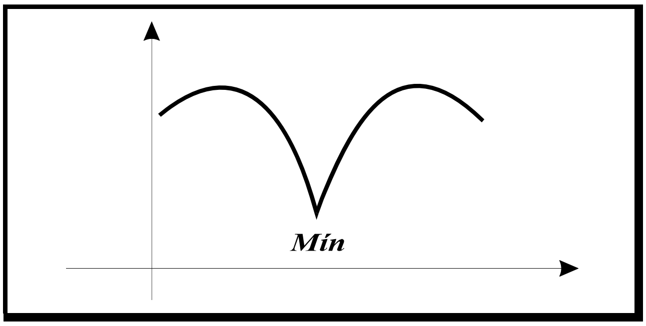
a) Resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$.

b) Seleccionamos las raíces $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots$ *que están entre "a" y "b".*

c) Calculamos $f(a),\ f(x_1),\ f(x_2), \ldots\ldots, y\ \ f(b)$.

Con estos valores, el mayor es el máximo y el menor es el mínimo.

2. ***Si hay algún punto del intervalo $[a,b]$ en el que la función no es derivable aunque sí continua, calcularemos, además, el valor de $f(x)$ en ese punto, pues podría ser su extremo.***



3. ***Si $f(x)$ no es continua en algún punto x_o de $[a,b]$, calcularemos los límites:***

$$\lim_{x\to x_o^-} f(x) \quad y \quad \lim_{x\to x_o^+} f(x)$$

y compararemos estos resultados con los valores de $f(x)$ obtenidos en el apartado 1.

4. ***El máximo o mínimo absolutos es el mayor o menor de los valores de $f(x)$ calculados.***

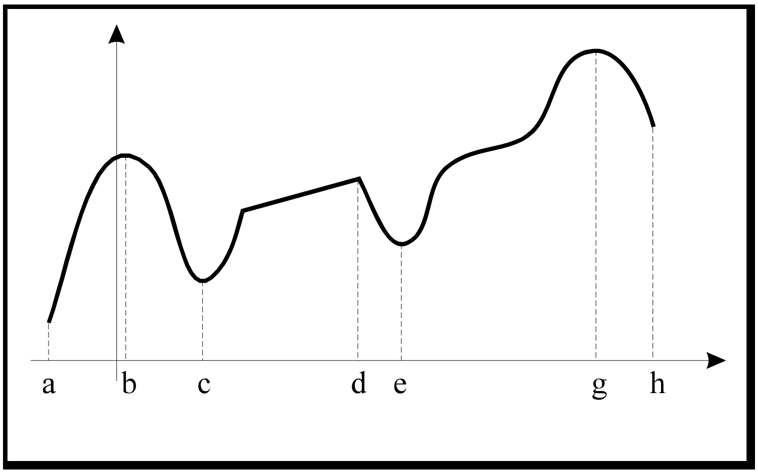
A continuación se expresa de una forma gráfica algunas de las posibilidades.

Mínimo absoluto $\rightarrow$ $(a, f(a))$

Máximo absoluto $\rightarrow$ $(g, f(g))$

Máximos relativos

$$\rightarrow \begin{cases}(b, f(b))\\(d, f(d))\\(g, f(g))\end{cases}$$



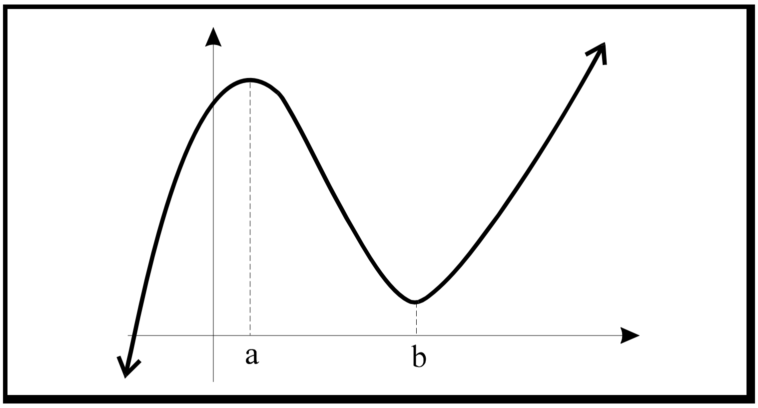
Mínimos relativos $\rightarrow \begin{cases}(c, f(c))\\(e, f(e))\end{cases}$ Puntos singulares $\rightarrow \begin{cases}(b, f(b))\\(c, f(c))\\(e, f(e))\\(g, f(g))\end{cases}$

Mínimo absoluto $\rightarrow$ No tiene

Máximo absoluto $\rightarrow$ No tiene

Máximo relativo $\rightarrow$ $\big(a\,,f(a)\big)$

Mínimo relativo $\rightarrow$ $\big(b\,,f(b)\big)$



Ejemplo: Calcular los extremos absolutos de la función $\mathbf{f(x) = x^3 - 3x \quad \forall x \in [-2\,,2]}$

$f(x)$ es derivable $\forall x \in [-2\,,2]$. Calculamos los puntos singulares:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 & \rightarrow \quad \big(1\,,f(1)\big) = (1\,,-2) \\ x = -1 & \rightarrow \quad \big(-1\,,f(-1)\big) = (-1\,,2) \end{cases}$$

Calculamos el valor que toma la función en los extremos del intervalo.

$$\big(-2\,,f(-2)\big) = (-2\,,-2) \qquad \big(2\,,f(2)\big) = (2\,,2)$$

Máximos absolutos $\rightarrow$ $\begin{cases}(-1\,,2)\\(2\,,2)\end{cases}$ Mínimos absolutos $\rightarrow$ $\begin{cases}(1\,,-2)\\(-2\,,-2)\end{cases}$

Ejemplo: Calcular los extremos absolutos de la función $\mathbf{f(x) = -2x^3 + 3x^2 \quad \forall x \in [-1\,,\infty[}$

$f(x)$ es derivable $\forall x \in [-1\,,\infty]$. Calculamos los puntos singulares:

$$f'(x) = -6\,x^2 + 6x = 0 \quad \rightarrow \quad 6x\cdot(-x+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 6x = 0 & \rightarrow \quad x = 0 \\ -x+1 = 0 & \rightarrow \quad x = 1 \end{cases}$$

$$\big(0\,,f(0)\big) = (0\,,0) \qquad \big(1\,,f(1)\big) = (1\,,1)$$

Calculamos el valor que toma la función en los extremos del intervalo.

$$\big(-1\,,f(-1)\big) = (-1\,,5) \qquad \lim_{x\to+\infty} (-2x^3 + 3x^2) = -\infty$$

Máximo absoluto $\rightarrow$ $(-1\,,5)$

Como $\lim_{x \to +\infty} (-2x^3 + 3x^2) = -\infty$, quiere decir que el menor de los valores hallados es $-\infty$, lo cual significa que $f(x)$ puede tomar valores tan pequeños como queramos, por tanto $f(x)$ carece de mínimo absoluto.

Ejemplo: Hallar los extremos absolutos de la función $f(x) = |x^2 - 9|$ en el intervalo $[-4, 4]$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & \text{si} \quad x \in [-4, -3] \cup [3, 4] \\ -x^2 + 9 & \text{si} \quad x \in]-3, 3[\end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \in]-4, -3[\cup]3, 4[\\ -2x & \text{si} \quad x \in]-3, 3[\end{cases}$$

La función es continua $\forall x \in [-4, 4]$, pero no es derivable en $x = -3$ y $x = 3$.

El único punto singular es $2x = 0 \quad \to \quad x = 0 \quad \to \quad (0, f(0)) = (0, 9)$.

Calculamos el valor de la función en los extremos del intervalo.

$$(-4, f(-4)) = (-4, 7) \qquad\qquad (4, f(4)) = (4, 7)$$

Calculamos el valor de la función en los puntos sin derivada.

$$(-3, f(-3)) = (-3, 0) \qquad\qquad (3, f(3)) = (3, 0)$$

Máximo absoluto $\to$ $(0, 9)$ Mínimos absolutos $\to$ $\begin{cases} (-3, 0) \\ (3, 0) \end{cases}$

Ejemplo: Calcular los máximos y mínimos absolutos de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ en $[-1, 3]$.

La función presenta un punto de discontinuidad en $x = 1$

$f(x)$ es derivable $\forall x \in [-1, 1[\cup]1, 3]$. Calculamos los puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{(2x - 2)(x - 1) - (x^2 - 2x + 2)}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} = 0 \quad \to \quad x^2 - 2x = 0$$

$$x(x - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \end{cases}$$

$$\big(0\,,f(0)\big)=(0\,,-2) \qquad \big(2\,,f(2)\big)=(2\,,2)$$

Calculamos el valor que toma la función en los extremos del intervalo.

$$\big(-1,f(-1)\big)=(-1,-2'5) \qquad \big(3,f(3)\big)=(3,2'5)$$

Calculamos los límites laterales en el punto de discontinuidad $x=1$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-2x+2}{x-1}=-\infty \qquad \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-2x+2}{x-1}=+\infty\,.$$

No hay máximos ni mínimos absolutos.

Ejemplo: Calcular los máximos y mínimos de la función $\mathbf{f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{para} \quad x\in\left[\,0\,,1\,\right[\\ \dfrac{1}{x} & \text{para} \quad x\in\left[\,1\,,2\,\right] \end{cases}}$

La función es continua $\forall x\in\left[\,0\,,2\,\right]$. Podemos comprobar rápidamente la continuidad en $x=1$, aunque no es ortodoxo, calculando $f(1)$ en las dos ramas y viendo que da el mismo resultado, ya que $1^2=1$ y $\dfrac{1}{1}=1$.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & \forall x\in\left]\,0\,,1\,\right[\quad \to \quad f'_-(1)=2 \\ -\dfrac{1}{x^2} & \forall x\in\left]\,1\,,2\,\right[\quad \to \quad f'_+(1)=-1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \nexists\ f'(1)$$

$f(x)$ es derivable $\forall x\in R-\{1\}$. Calculamos los puntos singulares:

$$f'(x)=0 \quad \to \quad \begin{cases} 2x=0 \quad \to \quad x=0 \quad \Rightarrow \quad \big(0\,,f(0)\big)=(0\,,0) \\ -\dfrac{1}{x^2}=0 \quad \to \quad 1\neq 0 \end{cases}$$

Calculamos el valor que toma la función en los extremos del intervalo.

$$\big(\,0\,,f(0)\big)=(0\,,0) \qquad \big(2\,,f(2)\big)=(2\,,0'5)$$

Calculamos el valor que toma la función en los puntos sin derivada.

$$\big(\,1\,,f(1)\big)=(1\,,1)$$

Máximo absoluto $\to$ $(1\,,1)$ Mínimo absoluto $\to$ $(0\,,0)$

Ejemplo: Calcular los máximos y mínimos absolutos de la función $\mathbf{f(x)=\frac{logx}{x}}$ **en** $\mathbf{[\,1,100\,]}$.

$f(x)$ es derivable $\forall x \in [\,1,100\,]$. Calculamos los puntos singulares:

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot \log e\cdot x-\log x}{x^2}=\frac{x\cdot \log e - x\cdot \log x}{x^3}=0 \quad\rightarrow\quad x(\log e-\log x)=0$$

$$\begin{cases} x=0 \quad\rightarrow\quad 0\notin[\,1,100\,] \\ \log e-\log x=0 \quad\rightarrow\quad \log e=\log x \quad\rightarrow\quad x=e \end{cases}$$

$$\big(e\,,f(e)\big)=\left(e\,,\frac{\log e}{e}\right)=(2'718\,,0'16)$$

Calculamos el valor que toma la función en los extremos del intervalo.

$$\big(1\,,f(1)\big)=(1\,,0) \qquad \big(100\,,f(100)\big)=(100\,,0'02)$$

Máximo absoluto $\rightarrow$ $(e\,,0'16)$ Mínimo absoluto $\rightarrow$ $(1\,,0)$

Ejemplo: Calcular los máximos y mínimos absolutos de la función $\mathbf{f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-16}}$ **en** $\mathbf{[\,-1,3\,]}$.

$f(x)$ es derivable $\forall x \in [\,-1,3\,]$. Calculamos los puntos singulares:

$$f'(x)=\frac{2x(x^2-16)-(x^2+1)2x}{(x^2-16)^2}=\frac{-34x}{(x^2-16)^2}=0 \quad\rightarrow\quad -34x=0 \quad\rightarrow\quad x=0$$

$$\big(0\,,f(0)\big)=(0\,,-0'06)$$

Calculamos el valor que toma la función en los extremos del intervalo.

$$\big(-1\,,f(-1)\big)=(-1\,,-0'13) \qquad \big(3\,,f(3)\big)=(3\,,-1'42)$$

Máximo absoluto $\rightarrow$ $(0\,,-0'06)$ Mínimo absoluto $\rightarrow$ $(3\,,-1'42)$

Optimización de funciones

La optimización, consecución de lo óptimo, es algo que se busca siempre y que con las matemáticas se puede conseguir, al menos teóricamente, en varios campos. La optimización de funciones (el cálculo del máximo o del mínimo absoluto) es un problema de enorme importancia teórica y práctica en multitud de ciencias (físicas, económicas, sociología,...).

Encontrar el máximo o el mínimo de una función dada mediante su expresión analítica, suele ser un problema fácil, y para resolverlo es suficiente dominar una técnica muy concreta, como acabamos de ver.

Si la función viene dada mediante un enunciado aritmético, se debe dominar suficientemente el álgebra como para dar forma de función al enunciado del problema. Pero si la función que hay que optimizar se obtiene de un problema geométrico, físico, económico, etc., existe la dificultad adicional de tener que conocer y saber utilizar las propiedades geométricas, físicas, económicas..... correspondientes, que permitan traducir algebraicamente el enunciado.

¿Cómo se plantea y resuelve un problema de optimización?

1. ***Se hallan las variables que intervienen en el problema y se representan mediante símbolos. En muchos casos basta con un dibujo.***

2. ***Se expresa lo que nos piden que sea máximo o mínimo en función de dichas variables. Si M es la magnitud que debe ser óptima, se expresa en función de las variables que la definen:***

$$M = f(x, y, z, \ldots.)$$

3. ***Si la función tiene más de una variable, hay que relacionar las variables mediante ecuaciones a fin de conseguir que <u>la magnitud M quede expresada en función de una sola variable</u>.***

4. ***Se hallan los máximos o mínimos de esta función.***

5. ***Se interpretan los resultados obtenidos rechazando aquellos que por la naturaleza del problema no sean posibles.***

   Hay que tener en cuenta en este apartado, que el dominio de la función obtenida en un problema de este tipo no suele coincidir con el dominio de la función matemática que nos da sus valores. Esto es característico de las funciones que miden una longitud, un área, un volumen, un coste, etc.. Por ejemplo, el área S de un cuadrado de lado "x" es una función de "x": $S(x) = x^2$. *El dominio de la función polinómica* x^2 *es* $\forall x \in R$, *pero el dominio de S es* $\forall x \in [0, \infty[$, *y no R, ya que la longitud del lado de un cuadrado no puede ser un número negativo.*

Problema 1

Una fábrica de conservas quiere diseñar, para enlatar su producto, un bote cilíndrico de 1000 cm^3 de capacidad. Por razones de facilidad de manejo, es necesario que el radio r del bote esté comprendido entre 3 cm y 7 cm.

a) En estas condiciones determina para qué valor del radio es mínima la superficie total del bote, y por lo tanto la cantidad de hojalata necesaria para construirlo.

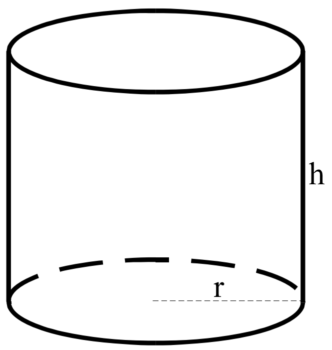
b) Calcula para qué valor del radio, dentro del intervalo especificado, sería máxima la superficie total del bote.

a) La superficie total del bote viene dada por la fórmula:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

El volumen del bote cilíndrico viene dado por la fórmula:

$$V = \pi r^2 h = 1000$$



Despejamos h en esta última igualdad y la sustituimos en la fórmula de la superficie.

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} \quad \rightarrow \quad S = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{1000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

Tenemos que hallar el máximo y mínimo absoluto de la función $S(r)$ respecto al intervalo $[3, 7]$, ya que según las condiciones del problema, estos son los únicos valores del radio que podemos considerar. Hallamos los puntos singulares dentro del citado intervalo:

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0 \quad \rightarrow \quad 4\pi r = \frac{2000}{r^2} \quad \rightarrow \quad 4\pi r^3 = 2000 \quad \rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{2000}{4\pi}} \cong 5'42 \text{ cm}$$

$$S''(r) = 4\pi + \frac{4000}{r^3} \quad \rightarrow \quad S''(5'42) = 37'55 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{para } r = 5'42\text{cm el área será mínima}$$

$$S(5'42) \cong 554\,cm^2$$

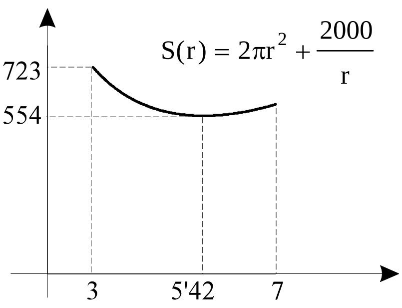
Ahora calculamos los valores de la función $S(r)$ en los extremos del intervalo:

$$S(3) \cong 723\,cm^2 \qquad S(7) \cong 594\,cm^2$$

Cuando $r \cong 5'42$ cm la superficie del bote cilíndrico es mínima.

b) Cuando $r \cong 3\text{cm}$ la superficie es máxima.

También podemos llegar a esta misma conclusión haciendo una representación gráfica de $S(r)$.

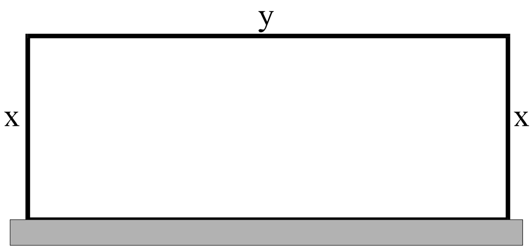


Problema 2

Un granjero dispone de 24 m de tela metálica. Con ella y, aprovechando un muro de piedra suficientemente largo que existe en su propiedad, quiere construir un corral rectangular adosado al muro, de la mayor superficie posible. Explíquese cómo debe hacerlo.

La magnitud cuyo máximo quiere hallarse es el área del corral, que viene expresada en función del ancho y el largo del mismo a través de la fórmula:

$$S = x \cdot y$$



Por otra parte, x e y no son magnitudes "independientes", pues, como sólo disponemos de 24 m de tela metálica habrán de cumplir la relación:

$$2x + y = 24$$

Despejando en esta expresión "y" en función de "x" y sustituyendo en la expresión del área tenemos:

$$y = 24 - 2x \quad \rightarrow \quad S = x \cdot (24 - 2x) = 24x - 2x^2$$

El dominio de la función polinómica $24x - 2x^2$ es $\forall x \in R$, sin embargo el dominio de S no es $\forall x \in R$, pues el ancho no puede tomar cualquier valor. Así por ejemplo, no puede ser $x = -1$ (puesto que el ancho no puede tomar valores negativos), ni tampoco puede ser $x = 15$, pues como $y = 24 - 2x$, sería $y = -6$, lo cual es imposible.

Para hallar el dominio de S observamos en primer lugar que $x \geq 0$ e $y \geq 0$ pues, por ser "x" e "y" longitudes, no pueden tomar valores negativos. Pero $y = 24 - 2x$, lo cual implica que el máximo valor que puede tomar "x" es 12, en cuyo caso, $y = 0$. Luego $x \geq 0$ y $x \leq 12$, de lo cual se deduce que:

$$D[S(x)] = \forall x \in [0,12]$$

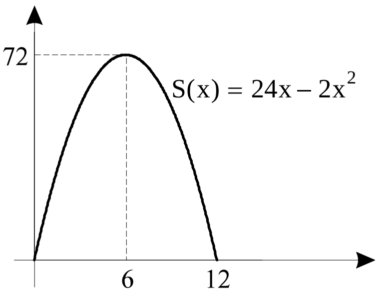
Tenemos que hallar el punto en el que la función $S = 24x - 2x^2 \quad \forall x \in [0,12]$ alcanza su máximo absoluto.

$$S' = 24 - 4x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 6$$

$$S'' = -4 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{para } x = 6\,\text{m} \quad \text{el área es máxima}$$

Por tanto, el área del corral es máxima cuando la anchura del mismo es $x = 6\,\text{m}$ y la longitud es de $y = 12\,\text{m}$. En tal caso, el valor del área máxima es $A_{max} = 6\,\text{m} \cdot 12\,\text{m} = 72\,\text{m}^2$.

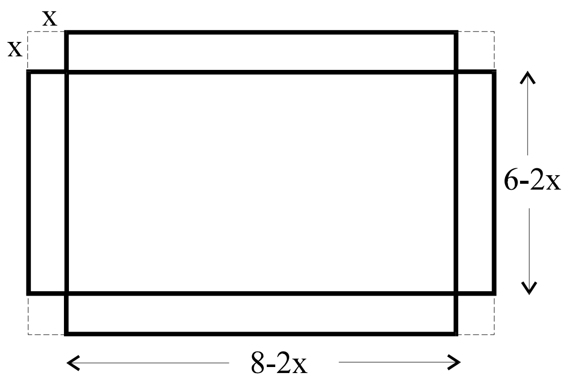
También podemos llegar a esta misma conclusión haciendo una representación gráfica de $S(x)$.



Problema 3

Recortando un cuadradito de cada esquina de unos cartones rectangulares de dimensiones 6 y 8 cm, se pueden construir cajas sin tapa. ¿Qué medida deben de tener esos cuadraditos para que el volumen de las cajas sea máximo?

Sea “x” el lado del cuadrado. El volumen será:



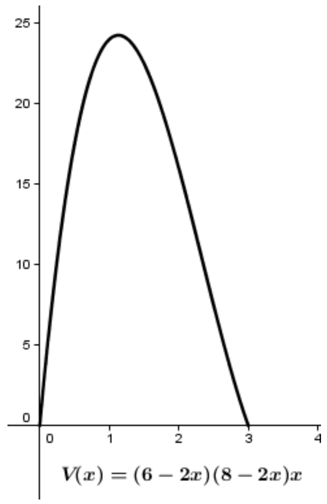
$$V = (6-2x)(8-2x)\cdot x = 4x^3 - 28x^2 + 48x$$

$$V' = 12x^2 - 56x + 48 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 1'13 \\ x = 3'53 \end{cases}$$

$$V'' = 24x - 56 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} V''(1'13) = -28'88 < 0 \\ V''(3'53) = 28'72 > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{para } x = 1'13\,\text{cm} \quad \text{el volumen es máximo}$$

El volumen máximo es $V(1'13) = 24'37\,\text{cm}^3$

También podemos llegar a esta misma conclusión haciendo una representación gráfica de $V(x)$.



Problema 4

El beneficio neto de una empresa fabricante de automóviles viene dado por $B(x) = -200.000.000 + 800.000x - 0'2x^3$, donde x es el número de vehículos producidos semanalmente. Hallar la producción que hace máximo este beneficio en el supuesto de que la empresa pueda fabricar semanalmente:
a) Menos de 800 vehículos.
b) Menos de 2.000 vehículos.

a) Igualamos a cero la derivada de la función $B(x)$ para calcular los puntos singulares.

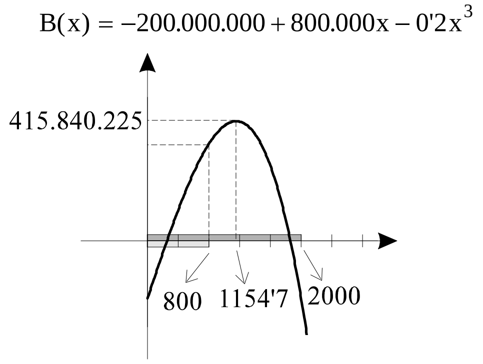
$$B'(x) = 800.000 - 0'6x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1154'7 \\ x = -1154'7 \end{cases}$$

La solución negativa se descarta mientras que la solución positiva es irrealizable por la empresa en este supuesto.

La derivada $B'(x)$ es positiva en todo el intervalo factible para la empresa, $[0,800]$, luego $B(x)$ es una función creciente y tomará el mayor valor posible en $x = 800$.

Esta es la producción semanal óptima, a la que corresponde un beneficio máximo de :

$$B(800) = 337.600.000 \text{ pts}.$$



b) En el intervalo $[0,2000]$ el valor correspondiente al beneficio máximo es $x = 1154'7$ vehículos. Como el número de vehículos debe de ser entero, tomaremos $x = 1155$ vehículos al que le corresponde un beneficio máximo de:

$$B(1155) = 415.840.225 \text{ pts} \qquad B(2000) = -200.000.000 \text{ pts}$$

Problema 5

A un vendedor de ordenadores le cuesta 140.000 pts cada modelo de la marca PCHE-COMPR. Ha comprobado que, al precio de 240.000 pts unidad, vende 30 ordenadores mensualmente y que, por cada 2.000 pts de descuento en el precio, puede vender 3 unidades más al mes. Hállese a qué precio debe venderlos para obtener el máximo beneficio posible.

Estamos ante otra típica disyuntiva comercial: si se mantiene el precio, se vende menos, pero pueden compensar las altas ganancias por unidad; si se baja el precio, las ventas aumentan, pero tal vez no compensen la pérdida de beneficio por unidad. La derivada nos permite hallar el precio óptimo.

Sea x las unidades de incremento.

Nos dicen que si vende a $240000-2000x$ pts vende $30+3x$ unidades al mes. Como el beneficio es venta menos coste entonces:

$$B(x)=(240000-2000x)(30+3x)-(30+3x)140000$$

$$B(x)=(30+3x)(100000-2000x)$$

$$B'(x)=3(100000-2000x)+(30+3x)(-2000)=240000-12000x$$

$$B'(x)=0 \quad \rightarrow \quad 240000-12000x=0 \quad \Rightarrow \quad x=20$$

Resulta que para $x=20$ se obtiene el beneficio máximo, por tanto el precio debe ser:

$$240000-2000\cdot 20=200000 \text{ pts}$$

Problema 6

Un heladero ha comprobado que a un precio de 50 pts la unidad vende una media de 200 helados diarios. Por cada peseta que aumenta el precio, vende dos helados menos al día. Si el coste por unidad es de 40 pts ¿A qué precio de venta es máximo el beneficio total que obtiene el heladero?

Sea x las unidades de incremento. Procediendo de modo similar al ejemplo anterior tenemos:

$$B(x) = (50 + x)(200 - 2x) - 40(200 - 2x) = -2x^2 + 180x - 9000$$

$$B'(x) = -4x + 180 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 45$$

Como $50 + 45 = 95$ y $200 - 2 \cdot 45 = 110$ significa que para que el beneficio sea máximo el heladero debe vender 110 helados a 95 pts cada uno con lo que obtendrá un beneficio máximo de 6050 pts.

Problema 7

En un edificio costero existen 60 apartamentos para alquilar por semanas durante la temporada de verano. El importe del alquiler, por una semana, es de 40.000 pts., precio para el cual todos los apartamentos son alquilados. El propietario observa que si se incrementa el alquiler en 5000 pts. dos de los apartamentos quedan desocupados, que si el incremento es de 10000 pts. son cuatro los que quedan libres, y así sucesivamente.

¿A qué precio debe alquilar los apartamentos para que los ingresos sean máximos?

Sea x las unidades de incremento.

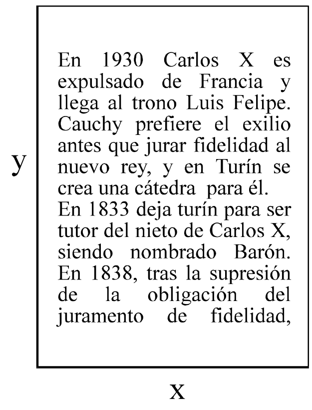
$$I(x) = (40000 + 5000\,x)(60 - 2x) = -10000\,x^2 + 220000\,x + 2400000$$

$$I'(x) = -20000\,x + 220000 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 11$$

Por tanto, el precio al que debe alquilar los apartamentos es de $40000 + 5000 \cdot 11 = 95000$ pts. con lo que conseguirá alquilar $60 - 2 \cdot 11 = 38$ apartamentos.

Problema 8

Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben tener 2 cm de altura cada uno y los laterales 1 cm. ¿Qué dimensiones debe tener la hoja para que el gasto de papel sea mínimo?



Sean “x” e “y” el ancho y largo de la hoja de papel respectivamente.

$$S = x \cdot y$$

Por otra parte, el trozo de papel que contiene texto impreso es:

$$18 = (x-2)(y-4)$$

$$18 = xy - 4x - 2y + 8 \quad \to \quad x(y-4) = 10 + 2y$$

$$x = \frac{10+2y}{y-4} \quad \to \quad S = \frac{10+2y}{y-4} \cdot y = \frac{10y+2y^2}{y-4}$$

Calculamos los puntos singulares:

$$S' = \frac{(10+4y)(y-4) - (10y+2y^2)}{(y-4)^2} = \frac{2 \cdot (y^2 - 8y - 20)}{(y-4)^2} = 0$$

$$y^2 - 8y - 20 = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ y = 10 \end{cases}$$

$$S'' = \frac{(4y-16)((y-4)^2 - (2y^2 - 16y - 40) \cdot 2 \cdot (y-4)}{(y-4)^4} =$$

$$\frac{(4y-16)((y-4) - (2y^2 - 16y - 40) \cdot 2}{(y-4)^3} = \frac{144}{(y-4)^3}$$

$$\begin{cases} S''(-2) = -0'66 < 0 \\ S''(10) = 0'66 > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{para } \ y = 10 \text{ cm el gasto es mínimo}$$

El valor de x es: $x = \dfrac{10 + 2 \cdot 10}{10-4} = 5\,\text{cm}$

Las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo son $x = 5\,\text{cm}$ e $y = 10\,\text{cm}$

Problema 9

Dado un círculo de radio 4 dm, inscribir en él un rectángulo de área máxima.

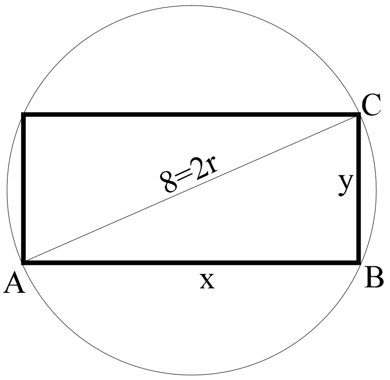
El área del rectángulo es:

$$S = x \cdot y$$

En el triángulo ABC se verifica:

$$8^2 = x^2 + y^2 \quad \rightarrow \quad y = \sqrt{64 - x^2}$$

que sustituido en la fórmula del área del rectángulo queda:



$$S = x \cdot \sqrt{64 - x^2} = \sqrt{64x^2 - x^4}$$

$$S' = \frac{128x - 4x^3}{2 \cdot \sqrt{64x^2 - x^4}} = \frac{64x - 2x^3}{\sqrt{64x^2 - x^4}} = 0 \quad \rightarrow \quad 64x - 2x^3 = 0 \quad \rightarrow \quad 2x \cdot (32 - x^2) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x = 0 & \Rightarrow \quad x = 0 \\ 32 - x^2 = 0 & \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -5'65 \\ x = 5'65 \end{cases} \end{cases}$$

Los valores $x = 0$ y $x = -5'65$ carecen de sentido, ya que los lados de un rectángulo son números positivos.

$$S'' = \frac{(64 - 6x^2)(\sqrt{64x^2 - x^4}) - (64x - 2x^3) \cdot \dfrac{128x - 4x^3}{2 \cdot \sqrt{64x^2 - x^4}}}{\left(\sqrt{64x^2 - x^4}\right)^2} = \frac{3x}{\sqrt{64 - x^2}} - \frac{x^3}{\sqrt{\left(64 - x^2\right)^3}}$$

$$S''(5'65) = -3'98 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{para } \; x = 5'65\,\text{dm} \; \text{ el área es máxima.}$$

Si $x = 5'65\text{dm} \rightarrow y = \sqrt{64 - (5'65)^2} = 5'65\text{dm}$, por tanto el rectángulo de mayor área que se puede inscribir en un círculo de $4\,\text{dm}$ de radio es un cuadrado de lado $5'65\text{dm}$, cuya área es:

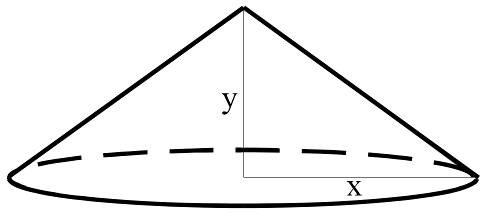
$$S = 5'65\text{dm} \cdot 5'65\text{dm} = 32\,\text{dm}^2$$

Problema 10

Hallar el volumen máximo que puede engendrar un triángulo rectángulo al girar 360º alrededor de uno de sus catetos, si la suma de las longitudes de tales catetos es igual a 12 cm.

Al girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos engendra un cono cuyo volumen es:

$$V = \frac{1}{3}\cdot \pi x^2 y$$



Sabemos que la suma de las longitudes de los catetos es igual a 12, luego:

$$x + y = 12 \quad \Rightarrow \quad y = 12 - x$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot \pi x^2 \cdot (12 - x) = \frac{\pi}{3}\cdot (12x^2 - x^3)$$

$$V' = \frac{\pi}{3}\cdot (24x - 3x^2) = 0 \;\rightarrow\; (24x - 3x^2) = 0 \;\rightarrow\; 3x\cdot(8 - x) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} 3x = 0 & \Rightarrow \quad x = 0\,\text{cm} \\ 8 - x = 0 & \Rightarrow \quad x = 8\,\text{cm} \end{cases}$$

La solución $x = 0$ corresponderá al volumen mínimo.

$$V'' = \frac{\pi}{3}\cdot (24 - 6x) \quad \rightarrow \quad V''(8) = -25'13 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{para } \; x = 8\,\text{cm} \; \text{ el volumen es máximo.}$$

$$\text{Si } \; x = 8\,\text{cm} \;\rightarrow\; y = 12 - 8 = 4\,\text{cm}$$

El volumen máximo correspondiente es: $V = \frac{1}{3}\cdot \pi \cdot 8^2 \cdot 4 = 268'08\,\text{cm}^3$

Problema 11

La suma de las aristas de un prisma recto de base cuadrada es 72 cm ¿Qué dimensiones debe tener dicho prisma para que su volumen sea máximo?

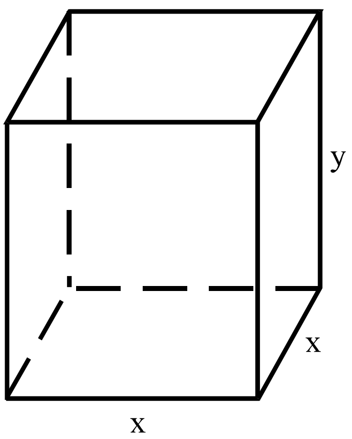
El volumen del prisma es:

$$V = x^2 \cdot y$$

La suma de las aristas es el perímetro. Como hay dos caras iguales tenemos:

$$72 = 2 \cdot 4x + 4y = 8x + 4y$$

$$y = \frac{72 - 8x}{4} = 18 - 2x$$



$$V = x^2 \cdot (18 - 2x) = 18x^2 - 2x^3$$

$$V' = 36x - 6x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad 6x \cdot (6 - x) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 6x = 0 & \Rightarrow \quad x = 0\,\text{cm} \\ 6 - x = 0 & \Rightarrow \quad x = 6\,\text{cm} \end{cases}$$

Para $x = 0$ el volumen será mínimo.

$$V'' = 36 - 12x \quad \rightarrow \quad V''(6) = -36 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{para } \; x = 6\,\text{cm} \; \text{ el volumen es máximo}$$

Si $x = 6\,\text{cm} \quad \rightarrow \quad y = 18 - 2 \cdot 6 = 6\,\text{cm}$, es decir, el prisma es un cubo, cuyo volumen es:

$$V = (6\,\text{cm})^2 \cdot 6\,\text{cm} = 216\,\text{cm}^3$$

Problema 12

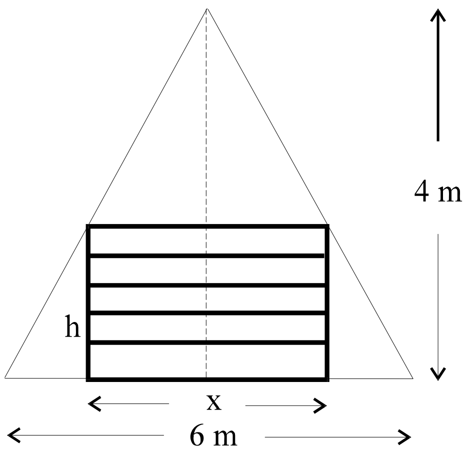
En una pared triangular de 6 m de base y 4 m de altura que se encuentra en el ático de un chalet, un carpintero tiene que construir una estantería rectangular, apoyada en el suelo y cuyas esquinas superiores alcancen las paredes inclinadas. ¿Qué dimensiones tendrá que dar a la estantería, si quiere que la superficie de ésta sea la mayor posible?

Si llamamos “x” a la anchura de la estantería y “h” a la altura, su superficie será:

$$S = x \cdot h$$

Por semejanza de triángulos se obtiene la siguiente relación:

$$\frac{3}{4} = \frac{\frac{x}{2}}{4 - h}$$



$$\frac{3}{4} = \frac{x}{8 - 2h} \quad \rightarrow \quad x = \frac{24 - 6h}{4} = \frac{12 - 3h}{2}$$

$$S = \frac{12 - 3h}{2} \cdot h = \frac{12h - 3h^2}{2}$$

$$S' = \frac{1}{2} \cdot (12 - 6h) = 0 \quad \rightarrow \quad 12 - 6h = 0 \quad \Rightarrow \quad h = 2\,\text{m}$$

$$S'' = \frac{1}{2} \cdot (-6) = -3 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{para } h = 2\,\text{m} \text{ la superficie es máxima.}$$

Si $\quad h = 2\,\text{m} \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{12 - 3 \cdot 2}{2} = 3\,\text{m}$.

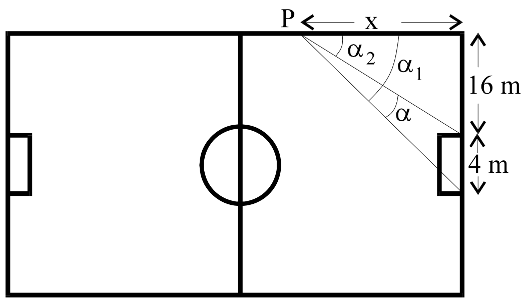
Por tanto, la superficie de la estantería es máxima para $x = 3\,\text{m}$ y su valor es $S = 3\,\text{m} \cdot 2\,\text{m} = 6\,\text{m}^2$

Problema 13

En un entrenamiento, un jugador de fútbol tiene que lanzar el balón sobre una portería. A este jugador le está permitido elegir el sitio exacto del lanzamiento, con la condición de que éste se haga desde la línea de banda. ¿Cuál será el punto de lanzamiento más idóneo?

Tenemos que conseguir que el ángulo α sea el mayor posible. Lo calculamos a través de la tangente de la diferencia de dos ángulos:

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha_2}$$



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{20}{x}-\frac{16}{x}}{1+\frac{20}{x}\cdot\frac{16}{x}} = \frac{\frac{4}{x}}{1+\frac{320}{x^2}} = \frac{4x}{x^2+320} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{4x}{x^2+320}$$

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{1+\left(\frac{4x}{x^2+320}\right)^2}\cdot\frac{4\cdot(x^2+320)-4x\cdot 2x}{(x^2+320)^2} = \frac{4\cdot(320-x^2)}{(x^2+256)(x^2+400)} = 0$$

$$-4x^2+1280=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=-17'88\,\text{m} & \text{no tiene sentido} \\ x=17'88\,\text{m} \end{cases}$$

$$\alpha'' = \frac{8x\cdot(x^4-640x^2-312320)}{(x^2+256)^2\cdot(x^2+400)^2} \quad \rightarrow \quad \alpha''(17'88) = -0'0003<0$$

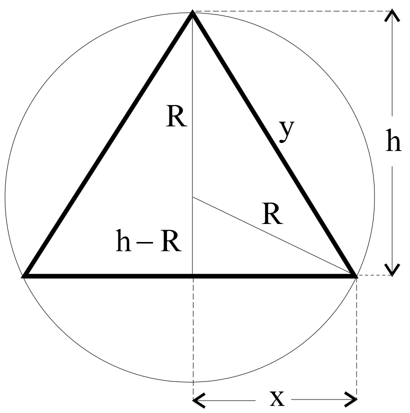
El punto más idóneo para lanzar el balón es a 17’88 m de la línea de portería.

Problema 14

De todos los triángulos isósceles inscritos en una circunferencia de radio R ¿Cuál es el de área máxima?

Según los datos de la figura, el área del triángulo isósceles es:

$$S = \frac{2x\cdot h}{2} = x\cdot h$$



Aplicando el Tª de Pitágoras tenemos:

$$R^2 = (h-R)^2 + x^2$$

Despejando la “x” y sustituyéndola en la fórmula del área se tiene:

$$x = \sqrt{R^2-(h-R)^2} = \sqrt{-h^2+2Rh} \quad \rightarrow \quad S = \sqrt{-h^2+2Rh}\cdot h = \sqrt{-h^4+2Rh^3}$$

$$S' = \frac{-4h^3+6Rh^2}{2\cdot\sqrt{-h^4+2Rh^3}} = \frac{-2h^3+3Rh^2}{\sqrt{-h^4+2Rh^3}} = 0 \quad \rightarrow \quad -2h^3+3Rh^2=0$$

$$h^2(-2h+3R)=0 \quad \to \quad \begin{cases} h^2=0 & \Rightarrow \quad h=0 \\ -2h+3R=0 & \Rightarrow \quad h=\dfrac{3}{2}R \end{cases}$$

$$S''=\frac{2h^2-6Rh+3R^2}{\sqrt{h\cdot(-h+2R)^3}} \quad \to \quad S''\left(\frac{3}{2}R\right)=-3'46<0 \quad \Rightarrow \quad \text{para } \ h=\frac{3}{2}R \ \text{ el área es máxima.}$$

Conocemos el valor de la altura. Vamos a calcular los lados del triángulo.

$$x=\sqrt{-h^2+2Rh}=\sqrt{-\frac{9}{4}R^2+2R\cdot\frac{3}{2}R}=\sqrt{\frac{3R^2}{4}}=\frac{R\sqrt{3}}{2}$$

$$y=\sqrt{h^2+x^2}=\sqrt{\frac{9}{4}R^2+\frac{3}{4}R^2}=\sqrt{\frac{3R^2}{4}}=\frac{R\sqrt{3}}{2}$$

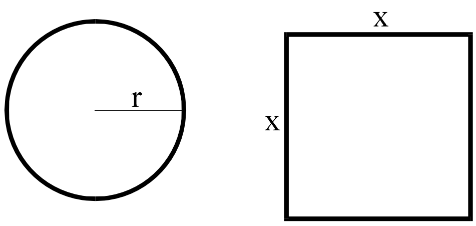
Como los lados son iguales, se trata de un triángulo equilátero, por tanto, el triángulo de área máxima es el triángulo equilátero. El mínimo es el de área cero: rectas, puntos,...(situaciones degeneradas).

Problema 15

Un alambre de 2 m de longitud se parte en dos trozos. Con uno de ellos se forma una circunferencia y, con el otro un cuadrado. Halla la longitud de cada trozo para que la suma de las áreas del círculo y del cuadrado sea mínima.

La suma de las áreas es:

$$S=\pi r^2+x^2$$



La suma de las longitudes de cada trozo debe valer 2, por tanto:

$$2=2\pi r+4x \quad \to \quad 1=\pi r+2x$$

Despejando “x” y sustituyéndola en la fórmula del área tenemos:

$$x=\frac{1-\pi r}{2} \quad \to \quad S=\pi r^2+\left(\frac{1-\pi r}{2}\right)^2=\pi r^2+\frac{1-2\pi r+\pi^2r^2}{4}=\frac{4\pi r^2+1-2\pi r+\pi^2r^2}{4}$$

$$S'=\frac{1}{4}\cdot(8\pi r-2\pi+2\pi^2 r)=0 \quad \to \quad 8\pi r-2\pi+2\pi^2 r=0 \quad \to \quad r=\frac{2\pi}{8\pi+2\pi^2}=\frac{1}{4+\pi}$$

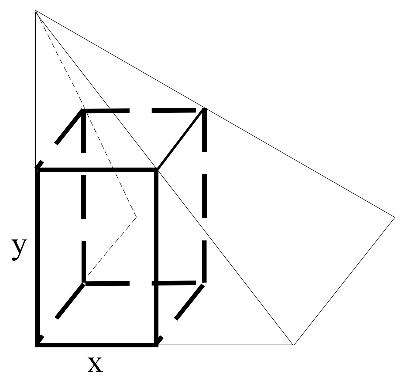
La longitud de la circunferencia es:

$$2\pi\cdot\frac{1}{4+\pi}=0'879\,\text{m}\cong 0'88\,\text{m}\cong 88\,\text{cm}$$

por tanto, el perímetro del cuadrado valdrá aproximadamente 112cm.

Problema 16

La pirámide irregular de la figura tiene una base cuadrada de 1 dm de lado y una de sus aristas laterales, que mide 3 dm, es perpendicular al plano de la base. La hemos cortado por un plano paralelo a la base a una distancia "y" de ella, obteniendo un cuadrado. Al proyectar éste sobre la base de la pirámide, queda determinado un ortoedro.



¿Cuánto debe valer "y" para que la superficie del ortoedro sea máxima?

La superficie del ortoedro es:

$$S = 2x^2 + 4xy$$

Aplicando la semejanza de triángulos, tenemos:

$$\frac{1}{1-x} = \frac{3}{y} \quad \rightarrow \quad y = 3 - 3x$$

Sustituyendo la "y" en la fórmula del área:

$$S = 2x^2 + 4x \cdot (3 - 3x) = -10x^2 + 12x$$

$$S' = -20x + 12 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{12}{20} = 0'6 \,\text{dm} \quad \Rightarrow \quad y = 3 - 3 \cdot 0'6 = 1'2 \,\text{dm}$$

Problema 17

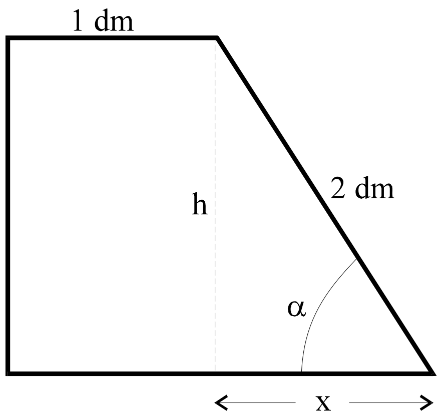
La base menor de un trapecio rectángulo mide 1 dm y el lado oblicuo 2 dm. Hallar el ángulo que debe formar este lado con la base para que el área del trapecio sea máxima.

El área del trapecio es:

$$S = \frac{B+b}{2} \cdot h = \frac{1+x+1}{2} \cdot h$$

Aplicando el Tª de Pitágoras al triángulo rectángulo:

$$4 = h^2 + x^2 \quad \rightarrow \quad h = \sqrt{4-x^2}$$



$$S = \frac{2+x}{2} \cdot \sqrt{4-x^2} \quad \rightarrow \quad S' = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4-x^2} + \frac{2+x}{2} \cdot \frac{-2x}{2 \cdot \sqrt{4-x^2}} = \frac{4-x^2}{2} + \frac{-2x-x^2}{2 \cdot \sqrt{4-x^2}} = 0$$

$$\frac{4-x^2-2x-x^2}{2 \cdot \sqrt{4-x^2}} = 0 \quad \rightarrow \quad -2x^2-2x+4=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=-2 \\ x=1 \end{cases}$$

Evidentemente la solución negativa la descartamos.

$$x = 1 \quad \rightarrow \quad h = \sqrt{4-1^2} = \sqrt{3}$$

El ángulo α lo calculamos a través de la tangente:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{x} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = 60^{\circ}$$

Problema 18

a) **¿Qué dimensiones debe tener un rectángulo de 64 cm^2 para que su perímetro sea mínimo?**

b) **¿Cómo habría que descomponer un número “a” en dos sumandos positivos de forma que sea mínima la suma del cuadrado de uno más el triple del cuadrado del otro?**

c) **¿Qué dimensiones debe tener un triángulo rectángulo de máxima área entre todos los que tienen 10 cm de hipotenusa?**

d) **¿Entre todos los rectángulos de perímetro 12 cm ¿cuál tiene la diagonal menor? ¿Cuánto mide ésta?**

e) **¿Cuál es el número positivo, que al sumarlo con 25 veces su inverso se obtiene un valor mínimo?**

a) Si los lados del rectángulo son "x" e "y", tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} P = 2x + 2y \\ 64 = xy \end{array}\right\} \rightarrow \quad y = \frac{64}{x} \quad \rightarrow \quad P = 2x + 2\cdot\frac{64}{x} = 2x + \frac{128}{x}$$

$$P' = 2 - \frac{128}{x^2} = 0 \quad \rightarrow \quad 2x^2 - 128 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 8 \quad \text{La solución negativa se descarta.}$$

$$P'' = \frac{256}{x^3} \quad \rightarrow \quad P''(8) = 0'5 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{para } x = 8 \text{ el perímetro es mínimo.}$$

Si $x = 8\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{64}{8} = 8\,\text{cm}$, es decir, es un cuadrado.

b) $\left.\begin{array}{l} S = x^2 + 3y^2 \\ a = x + y \end{array}\right\} \rightarrow \quad x = a - y \quad \rightarrow \quad S = (a-y)^2 + 3y^2 \quad \rightarrow \quad S' = -2(a-y) + 6y = 0$

$$y = \frac{2a}{8} = \frac{a}{4}$$

$$S'' = 2(a-y) + 6 \quad \rightarrow \quad S''\left(\frac{a}{4}\right) = 2\cdot\left(a - \frac{a}{4}\right) + 6 = \frac{6a}{4} + 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{para } y = \frac{a}{4} \text{ es mínimo}$$

$$\text{Si } y = \frac{a}{4} \quad \Rightarrow \quad x = a - \frac{a}{4} = \frac{3a}{4}$$

c) $\left.\begin{array}{l} S = \dfrac{x\cdot y}{2} \\ 100 = x^2 + y^2 \end{array}\right\} \rightarrow \quad y = \sqrt{100 - x^2} \quad \rightarrow \quad S = \dfrac{x\cdot\sqrt{100 - x^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{100x^2 - x^4}}{2}$

$$S' = \frac{1}{2}\cdot\frac{200x - 4x^3}{2\cdot\sqrt{100x^2 - x^4}} = 0 \quad \rightarrow \quad 200x - 4x^3 = 0 \quad \rightarrow \quad 4x\cdot(50 - x^2) = 0$$

$$\left\{\begin{array}{lll} 4x = 0 & \Rightarrow & x = 0\,\text{cm} \\ 50 - x^2 = 0 & \Rightarrow & x = \pm\sqrt{50}\,\text{cm} \end{array}\right.$$

Evidentemente, descartamos las soluciones nula y negativa.

$$S'' = \frac{x^3 - 150x}{\sqrt{(100 - x^2)^3}} \quad \rightarrow \quad S''\left(\sqrt{50}\right) = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{para } x = \sqrt{50} \text{ el área es máxima}$$

$$y=\sqrt{100-\left(\sqrt{50}\right)^2}=\sqrt{50}\ \text{cm}$$, por tanto el triángulo rectángulo es isósceles.

d) $$\left.\begin{array}{l} 2x+2y=12 \\ D=\sqrt{x^2+y^2} \end{array}\right\} \rightarrow \quad x+y=6 \quad \rightarrow \quad y=6-x$$

$$D=\sqrt{x^2+(6-x)^2}=\sqrt{2x^2-12x+36}$$

$$D'=\frac{4x-12}{2\cdot\sqrt{2x^2-12x+36}}=\frac{2x-6}{\sqrt{2x^2-12x+36}}=0 \quad \rightarrow \quad 2x-6=0 \quad \Rightarrow \quad x=3\text{cm}$$

$$D''=\frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{(x^2-6x+18)^3}} \qquad D''(3)=0'47>0 \ \Rightarrow\ \text{para } x=3\text{cm la diagonal es mínima.}$$

$y=6-3=3\text{cm}$, por tanto se trata de un cuadrado de lado 3 cm, y la diagonal mide:

$$D=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}=4'24\ \text{cm}$$

e) $$M=x+\frac{25}{x} \quad \rightarrow \quad M'=1-\frac{25}{x^2}=0 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2-25}{x^2}=0 \quad \rightarrow \quad x^2-25=0 \quad \Rightarrow \quad x=\pm 5$$

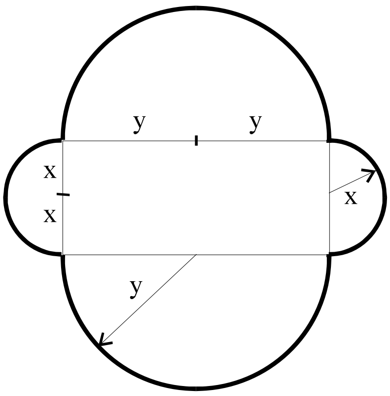
$$M''=\frac{50}{x^3} \quad \rightarrow \quad M''(5)=0'4>0 \qquad \Rightarrow \quad \text{para } x=5 \text{ la suma es mínima.}$$

Problema 19

En un rectángulo de 4 m de perímetro se sustituyen los lados por semicircunferencias exteriores. ¿Entre qué valores estará comprendida el área de la figura resultante?

Sean “x” e “y” los radios de las semicircunferencias exteriores.

El área de la figura es el área del rectángulo más la suma de las áreas de dos círculos de radios “x” e “y” respectivamente.



$$S=2x\cdot 2y+\pi x^2+\pi y^2=4xy+\pi x^2+\pi y^2$$

Como el perímetro del rectángulo es 4 m, resulta:

$$4x+4y=4 \quad \rightarrow \quad x+y=1 \quad \rightarrow \quad y=1-x$$

$$S = 4x\cdot(1-x) + \pi x^2 + \pi(1-x)^2 = 4x - 4x^2 + \pi x^2 + \pi - 2\pi x + \pi x^2 = x^2(2\pi - 4) + x(4 - 2\pi) + \pi$$

$$S' = 2x\cdot(2\pi - 4) + (4 - 2\pi) = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{-4 + 2\pi}{4\pi - 8} = 0'5$$

Para ver entre qué valores estará comprendida el área de la figura tenemos que ver cuál es el dominio de definición de la función.

Sabemos que $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Como $y = 1 - x$ resulta que $x \leq 1$, por tanto, $D[S] = \forall x \in [0,1]$.

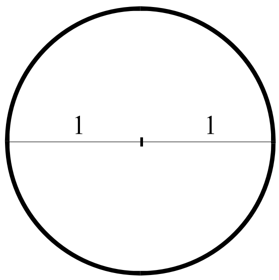
Calculamos el valor que toma la función en los extremos del intervalo.

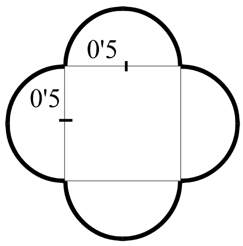
$$S(0) = \pi \quad ; \quad S(0'5) = 2'57 \quad ; \quad S(1) = \pi$$

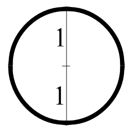
Esto significa que el mínimo absoluto de S es 2’57 y el máximo absoluto es π, por tanto el área está comprendida entre el mínimo absoluto 2’57 y el máximo absoluto π.

La figura geométrica a que se refiere el enunciado adopta las siguientes formas:

Si $x = 0 \Rightarrow y = 1$ Si $x = 0'5 \Rightarrow y = 0'5$ Si $x = 1 \Rightarrow y = 0$



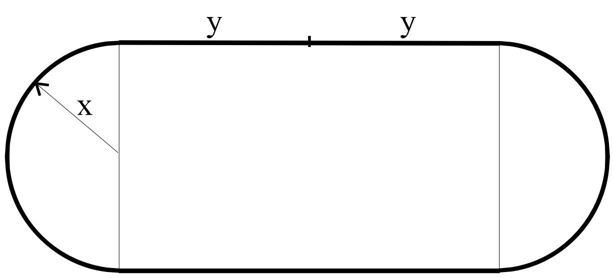




Problema 20

En un rectángulo de 4 m de perímetro se sustituyen dos lados opuestos por semicircunferencias exteriores. ¿Cuál debe ser el radio de éstas para que el área de la figura resultante sea máxima, y cuál para que sea mínima? ¿Cuánto valen dichas áreas extremas?

Sea x el radio de las semicircunferencias y 2y la longitud de los lados que no se sustituyen por semicircunferencias (representamos por “2y” y no por “y” dicha longitud para aprovechar al máximo los cálculos realizados en el problema anterior. El área de la figura es:



$$S = 4xy + \pi x^2$$

$$4x + 4y = 4 \quad \rightarrow \quad y = 1 - x \quad \rightarrow \quad S = 4x\cdot(1-x) + \pi x^2 = x^2(\pi - 4) + 4x$$

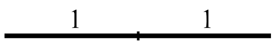
$$S' = (\pi - 4) \cdot 2x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-4}{(\pi - 4) \cdot 2} \cong 2'33$$

Como hemos visto antes que el dominio de S es $D[S] = \forall x \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad 2'33 \notin [0,1]$, por tanto calculamos el valor que toma la función en los extremos del intervalo:

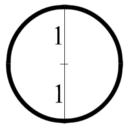
$$S(0) = 0 \quad y \quad S(1) = \pi$$

De lo anterior se deduce que el área es máxima cuando el radio es de 1 m y es mínima cuando el radio es 0. La figura geométrica a que se refiere el enunciado adopta las siguientes formas:

Si $x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 1$



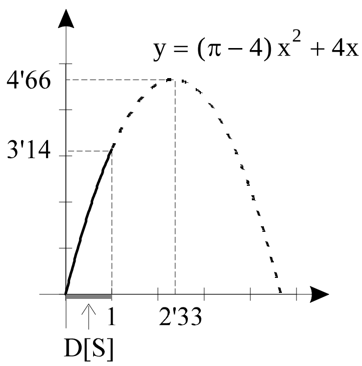
Si $x = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 0$



Si hacemos un esquema de la gráfica de S, se observa que a pesar de que el dominio de S está contenido en el dominio de la función matemática f que nos da los valores de S

$$f(x) = (\pi - 4)x^2 + 4x \quad D[f] = \forall x \in R \supset D[S]$$

los extremos relativos (y absolutos) de S no tienen nada que ver con los de f. Obsérvese también que S' no se anula en los puntos en que S alcanza sus extremos absolutos.



Problema 21

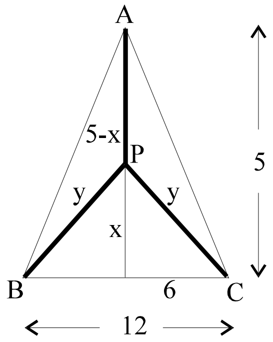
Dado un triángulo isósceles de 12 cm de base y 5 cm de altura, determina un punto sobre la altura de forma que la suma de las distancias desde él a los tres vértices sea mínima.

Como la distancia desde P a B es igual que la distancia desde P a C, tenemos:

$$d = \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} = 5 - x + 2 \cdot y =$$

$$5 - x + 2 \cdot \sqrt{x^2 + 6^2}$$

$$d' = \frac{2x - \sqrt{x^2 + 36}}{\sqrt{x^2 + 36}} = 0$$



$$2x-\sqrt{x^2+36}=0 \quad\rightarrow\quad 2x=\sqrt{x^2+36} \quad\rightarrow\quad 4x^2=x^2+36 \quad\rightarrow\quad x=\pm\sqrt{12}=\pm 3'46\,\text{cm}$$

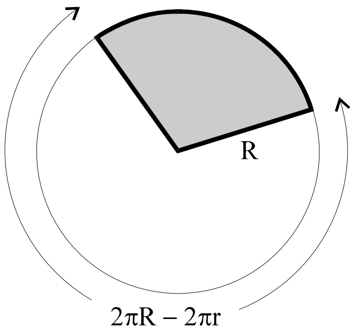
La solución negativa la descartamos, por tanto:

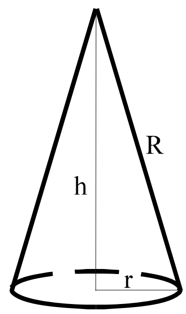
$$d''=\frac{72}{\sqrt{(x^2+36)^3}} \quad\rightarrow\quad d''(3'46)=0'21>0 \quad\Rightarrow$$

para $x=3'46\,\text{cm}$ la suma de las distancias es mínima

Problema 22

De un disco metálico de radio R quitamos un sector circular para construir, con él, un cono. Determina qué sector circular debemos seleccionar para que el volumen del cono sea máximo.





El volumen del cono es:

$$V=\frac{1}{3}\cdot\pi r^2 h$$

Aplicando el Tª de Pitágoras al triángulo rectángulo formado por la altura, el radio y la generatriz del cono tenemos la fórmula que relaciona “h” con “r”:

$$r^2=R^2-h^2$$

$$V=\frac{1}{3}\cdot\pi(R^2-h^2)\cdot h=\frac{\pi}{3}\cdot(R^2h-h^3)$$

$$V'(h)=\frac{\pi}{3}\cdot(R^2-3h^2)=0 \quad\rightarrow\quad R^2-3h^2=0 \quad\rightarrow\quad h=\frac{R}{\sqrt{3}}$$

La solución negativa la descartamos.

$$V''(h)=\frac{\pi}{3}\cdot(-6h) \quad\rightarrow\quad V''\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{3}\cdot\left(-6\cdot\frac{R}{\sqrt{3}}\right)=-3'62R<0$$

Para $r=\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot R$ el volumen es máximo.

Si $r=\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot R$, el sector circular que debemos seleccionar es:

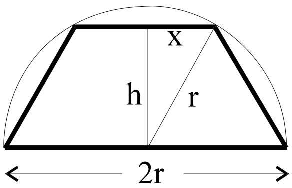
$$2\pi R-2\pi\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot R=2\pi R\cdot\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=1'1529R$$

Problema 23

Inscribe un trapecio de área máxima en un semicírculo de radio R.

El área del trapecio es:

$$S=\frac{B+b}{2}\cdot h=\frac{2r+2x}{2}\cdot h=(r+x)\cdot h$$



Aplicando el Tª de Pitágoras al triángulo rectángulo formado en el interior del trapecio, y sustituyendo la altura en la fórmula del área, se obtiene:

$$r^2=h^2+x^2 \quad\rightarrow\quad h=\sqrt{r^2-x^2} \quad\rightarrow\quad S=(r+x)\cdot\sqrt{r^2-x^2}$$

$$S'(x)=\sqrt{r^2-x^2}+(r+x)\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{r^2-x^2}}=\frac{-2x^2-xr+r^2}{\sqrt{r^2-x^2}}=0$$

$$-2x^2-xr+r^2=0 \quad\rightarrow\quad \begin{cases} x=-r \\ x=\dfrac{r}{2} \end{cases}$$

La solución negativa la desechamos.

$$S''(x)=\frac{2x^3-3xr^2-r^3}{\sqrt{\left(r^2-x^2\right)^3}} \quad\rightarrow\quad S''\left(\frac{r}{2}\right)=-2\sqrt{3}<0 \quad\Rightarrow$$

para $x=\frac{r}{2}$ el área del trapecio es máxima.

La base menor vale $2x = r$ y la altura $h = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \frac{r\sqrt{3}}{2}$.

El área máxima del trapecio es:

$$S = \left(r + \frac{r}{2}\right) \cdot \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \frac{3r}{2} \cdot \sqrt{\frac{3r^2}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot r^2$$

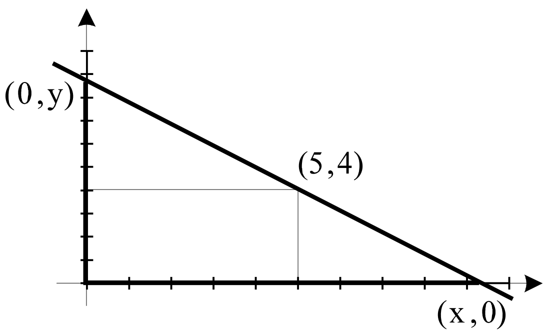
Problema 24

De todas las rectas que pasan por el punto $P(5,4)$, calcula la ecuación de la recta que delimita, con ambos ejes coordenados el triángulo de menor área.

La ecuación de la recta que pasa por el punto $M(5,4)$ con pendiente "m" es:

$$y - 4 = m(x - 5)$$

por tanto, las coordenadas de los puntos donde la recta corta al los ejes son:



Por la semejanza de triángulos tenemos:

$$\frac{y}{x} = \frac{4}{x-5} \quad \to \quad y = \frac{4x}{x-5}$$

$$A = \frac{xy}{2} \quad \to \quad A = \frac{x \cdot \frac{4x}{x-5}}{2} = \frac{4x^2}{2x-10}$$

$$A' = \frac{8x(2x-10) - 8x^2}{(2x-10)^2} = \frac{8x^2 - 80x}{(2x-10)^2} \qquad A' = 0 \quad \to \quad 8x^2 - 80x = 0 \quad \to \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 10 \end{cases}$$

Si $x = 0$ el área del triángulo es cero y la recta coincide con el eje de ordenadas.

Si $x = 10 \quad \to \quad y = \frac{40}{10-5} = 8$

Los puntos son $(10,0)$ y $(0,8)$

$$\vec{v} = (0,8) - (10,0) = (-10,8) \quad \rightarrow \quad m = \frac{8}{-10} = -\frac{4}{5}$$

La ecuación de la recta es:

$$y - 4 = -\frac{4}{5}(x-5) \quad \rightarrow \quad y = -\frac{4}{5}x + 8$$

Problema 25

Busca un punto de la parábola $y^2 = 4x$ cuya distancia al punto $P(4,0)$ sea mínima.

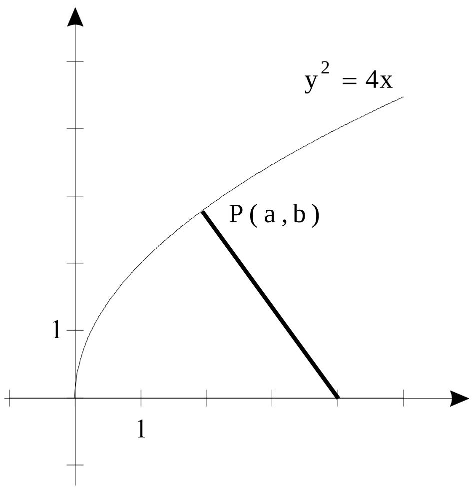
La distancia del punto $P(a,b)$ al punto $(4,0)$ viene dada por la expresión:

$$d = \sqrt{(a-4)^2 + b^2}$$

Como, por otra parte, el punto P pertenece a la parábola, verifica su ecuación, por tanto:

$$b^2 = 4a$$

$$d = \sqrt{(a-4)^2 + 4a} = \sqrt{a^2 - 4a + 16}$$



$$d' = \frac{2a-4}{2\cdot\sqrt{a^2 - 4a + 16}} = 0 \quad \rightarrow \quad 2a - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad a = 2$$

$$d'' = \frac{12}{\sqrt{\left(a^2 - 4a + 16\right)^3}} \quad \rightarrow \quad d''(2) = 0'28 > 0 \quad \Rightarrow$$

para $a = 2$ la distancia es mínima.

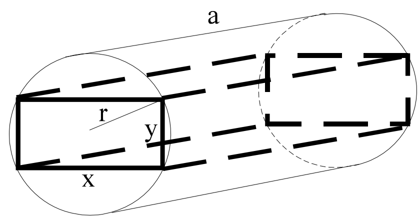
El punto es:

$$P\left(2, 2\sqrt{2}\right) = P(2, 2'82)$$

Problema 26

Se quiere obtener un prisma recto de base rectangular partiendo de un tronco de madera cilíndrico y de modo que la madera desperdiciada sea mínima. Calcula las dimensiones de la sección de la viga que resulta, en función de las dimensiones del cilindro.

Suponemos conocida la longitud de la viga así como el radio del tronco cilíndrico.



$$S = x \cdot y \cdot a$$

Por otra parte, aplicando el Tª de Pitágoras tenemos:

$$(2r)^2 = x^2 + y^2 \quad \rightarrow \quad y = \sqrt{4r^2 - x^2}$$

$$S = x \cdot \sqrt{4r^2 - x^2} \cdot a = a \cdot \sqrt{4r^2x^2 - x^4}$$

$$S'(x) = a \cdot \frac{8r^2x - 4x^3}{2 \cdot \sqrt{4r^2x^2 - x^4}} = \frac{a(4r^2 - 2x^2)}{\sqrt{4r^2 - x^2}} = 0 \quad \rightarrow \quad a(4r^2 - 2x^2) = 0 \quad \rightarrow \quad x = r\sqrt{2}$$

$$S''(x) = \frac{2xa(x^2 - 6r^2)}{\sqrt{\left(4r^2 - x^2\right)^3}} \quad \rightarrow \quad S''\left(r\sqrt{2}\right) = 4a < 0 \quad \Rightarrow$$

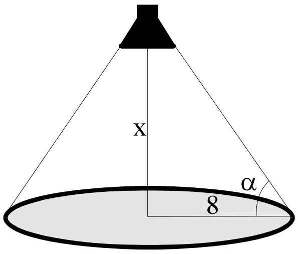
para $x = r\sqrt{2}$ la madera desperdiciada es mínima.

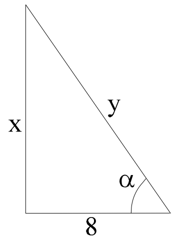
$y = \sqrt{4r^2 - 2r^2} = r\sqrt{2}$, por tanto la sección de la viga es un cuadrado.

Problema 27

La intensidad de iluminación I de un foco situado sobre el centro de una pista circular viene dada por $I = \dfrac{A\,\mathrm{sen}\alpha}{x^2 + r^2}$, donde A es constante y x, r y α son las que figuran en el dibujo.

Si la pista es circular de radio 8 m, el foco se puede situar a una altura máxima de 7 m y $A = 1$, ¿a qué altura se debe colocar el foco para que la iluminación en el borde de la pista sea máxima?





Sustituyendo en la fórmula de la intensidad de la iluminación los datos del problema tenemos:

$$I = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{x^2 + 64}$$

Del triángulo rectángulo deducimos:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{x}{y} = \frac{x}{\sqrt{x^2+64}} \quad \rightarrow \quad I = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+64}}}{x^2+64} = \frac{x}{\sqrt{\left(x^2+64\right)^3}}$$

$$I'(x) = \frac{64 - 2x^2}{\sqrt{\left(x^2+64\right)^5}} = 0 \quad \rightarrow \quad 64 - 2x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{32} = 5'65\,\text{m}$$

$$I''(x) = \frac{6x^3 - 576x}{\sqrt{\left(x^2+64\right)^7}} \quad \rightarrow \quad I''(5'65) = -0'0002 < 0 \quad \Rightarrow$$

para $x = 5'65\,\text{m}$ la iluminación en el borde de la pista es máxima

Problema 28

La intensidad que circula por un circuito de resistencia R es, según la ley de Ohm, $I = \dfrac{E}{r+R}$ siendo E la fuerza electromotriz, r la resistencia interior y R la exterior. La potencia absorbida por el circuito es $w = RI^2 = \dfrac{RE^2}{(r+R)^2}$. Si suponemos que $E = 8$ voltios y $r = 0'57$ ohmios, ¿cuánto debe valer la resistencia exterior R para que la potencia sea máxima?

$$w = \frac{64R}{(0'57+R)^2} \quad \rightarrow \quad w' = \frac{36'48 + 64R - 128}{(0'57+R)^3} = 0$$

$$36'48 + 64R - 128 = 0 \quad \rightarrow \quad R = 0'57\,\Omega$$

$$w'' = \frac{2x^3 - 448x}{\sqrt{\left(x^2+64\right)^5}} \quad \rightarrow \quad w''(0'57) = -43'19 < 0$$

Para $R = 0'57\,\Omega$ la potencia es máxima.

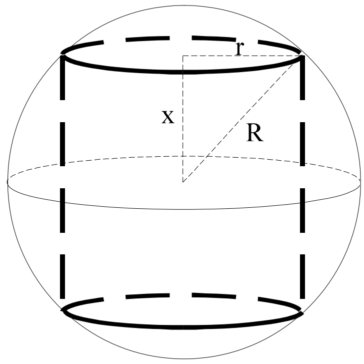
Problema 29

Hallar el radio de la base y la altura de un cilindro inscrito en una esfera de radio R en cada uno de los casos siguientes:

a) El volumen del cilindro es máxima.

b) El área lateral del cilindro es máxima

a) El volumen del cilindro es:



$$V = \pi r^2 (2x) = 2\pi x r^2$$

Por otra parte, de la figura se deduce:

$$r^2 = R^2 - x^2$$

Sustituyendo esta expresión en la fórmula del volumen obtenemos:

$$V = 2\pi x \cdot (R^2 - x^2) = 2\pi x R^2 - 2\pi x^3$$

$$V' = 2\pi R^2 - 6\pi x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{R\sqrt{3}}{3}$$

$$V'' = -12\pi x \quad \rightarrow \quad V''\left(\frac{R\sqrt{3}}{3}\right) = -25'76R < 0 \quad \Rightarrow$$

para $x = \frac{R\sqrt{3}}{3}$ el volumen del cilindro es máximo.

La altura es $\quad h = 2x = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$

El radio de la base del cilindro es $\quad r = \sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{R^2 - \frac{3R^2}{9}} = \frac{R\sqrt{2}}{3}$

b) El área lateral del cilindro es:

$$S = 2\pi rh = 2\pi r \cdot 2x = 4\pi rx$$

Como $x = \sqrt{R^2 - r^2} \quad \to \quad S = 4\pi r\sqrt{R^2 - r^2} = 4\pi\sqrt{R^2 r^2 - r^4}$

$$S' = 4\pi \cdot \frac{2R^2 r - 4r^3}{2 \cdot \sqrt{R^2 r^2 - r^4}} = \frac{4\pi R^2 - 8\pi r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 0 \quad \to \quad 4\pi R^2 - 8\pi r^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

$$S'' = \frac{4\pi(2r^2 - 3R^2)}{\sqrt{\left(R^2 - r^2\right)^3}} \quad \to \quad S''\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right) = -16\pi < 0 \quad \Rightarrow$$

para $r = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ el área lateral del cilindro es máxima

La altura en este caso es:

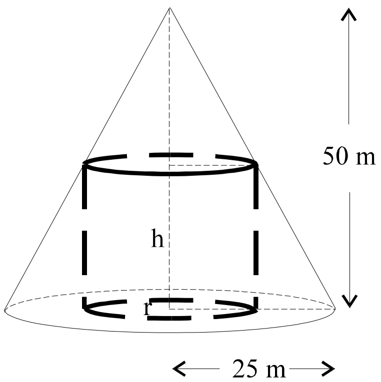
$$h = 2x = 2 \cdot \sqrt{R^2 - \frac{2R^2}{4}} = \sqrt{2}R$$

Problema 30

En un cono recto de altura 50 cm y radio de la base 25 cm se inscribe un cilindro. ¿Qué dimensiones debe tener éste para que su volumen sea máximo?

El volumen del cilindro es:

$$V = \pi r^2 h$$



Por semejanza de triángulos tenemos:

$$\frac{50}{25} = \frac{h}{25 - r} \quad \to \quad h = 50 - 2r$$

$$V = \pi r^2 \cdot (50 - 2r) = 50\pi r^2 - 2\pi r^3$$

$$V' = 00\pi r - 6\pi r^2 = 0 \quad \to \quad 1\pi r(100 - 6r) = 0 \quad \to \quad \begin{cases} \pi r = 0 & \Rightarrow \quad r = 0\,\text{cm} \\ 100 - 6r = 0 & \Rightarrow \quad r = 16'66\,\text{cm} \end{cases}$$

$$V'' = 100\pi - 12\pi r \quad \to \quad \begin{cases} V''(0) = 100\pi > 0 \\ V''(16'66) = -313'90 < 0 \end{cases}$$

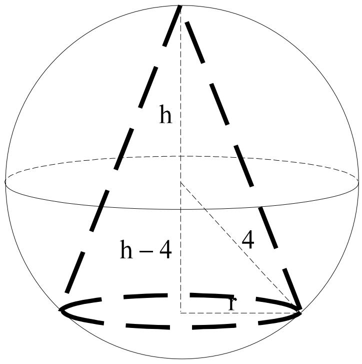
Para $r = 0$ el volumen es mínimo, mientras que para $r = 16'66\,\text{cm}$ el volumen del cilindro inscrito en el cono es máximo.

La altura es: $h = 50 - 2 \cdot 16'66 = 16'68\,\text{cm}$

Problema 31

Hallar el cono de máximo volumen inscrito en una esfera de radio 4 cm.

El volumen del cono es:



$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h$$

Aplicando el Tª de Pitágoras al triángulo rectángulo de la figura tenemos:

$$r^2 = 16 - (h-4)^2$$

Sustituyendo r^2 en la fórmula del volumen y derivando encontramos la altura.

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot \left[16 - (h-4)^2\right] h = \frac{\pi h^2 (8-h)}{3}$$

$$V' = \frac{\pi h(16-3h)}{3} = 0 \quad \to \quad \pi h(16-3h) = 0 \quad \to \quad \begin{cases} \pi h = 0 & \Rightarrow \quad h = 0 \\ 16 - 3h = 0 & \Rightarrow \quad h = \dfrac{16}{3} \end{cases}$$

$$V'' = \frac{2\pi(8-3h)}{3} \quad \to \quad \begin{cases} V''(0) = 16'75 > 0 \\ V''\left(\dfrac{16}{3}\right) = -16'75 < 0 \end{cases}$$

Para $h = 0$ se obtiene el cono de mínimo volumen inscrito en una esfera de radio 4, y para $r = \frac{16}{3} = 5'\widehat{3}$ se obtiene el cono de máximo volumen inscrito en una esfera de radio 4.

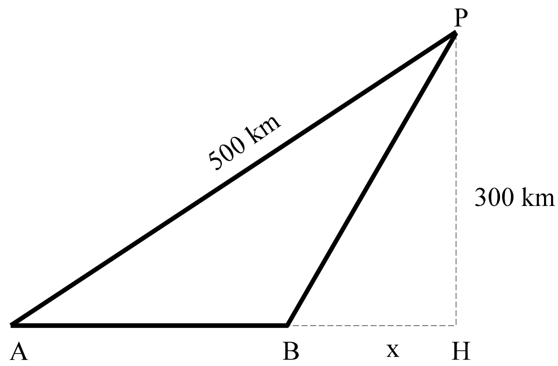
Problema 32

En una carretera a través del desierto un automóvil debe ir desde la ciudad A hasta el oasis P situado a 500 km. de distancia de A. Puede aprovechar para ello una carretera recta que une las ciudades A y B y que le permite ir a una velocidad de 100 km./h, mientras que por el desierto la velocidad es de 60 km/h. Sabiendo que la distancia más corta de P a la carretera que une las ciudades A y B es de 300 km., determinar la ruta que deberá usar para ir de A a P en el menor tiempo posible.

La distancia AH la calculamos aplicando el Tª de Pitágoras.

$$500^2 = 300^2 + \left(\overline{AH}\right)^2 \quad \rightarrow \quad \overline{AH} = 400\,\text{km}$$

El tiempo invertido por el automóvil desde A hasta P por el desierto es:



$$t = \frac{e}{v} = \frac{500\,\text{km}}{60\,\text{km/h}} = 8'\widehat{3}\,\text{horas} = 8\,\text{horas y 20 minutos}$$

Si hace el recorrido desde A a P pasando por B, el tiempo empleado será:

$$t = \frac{e_{AB}}{v_{AB}} + \frac{e_{BP}}{v_{BP}} = \frac{400 - x}{100} + \frac{\sqrt{300^2 + x^2}}{60} = \frac{5\sqrt{(x^2 + 90000)} - 3(x - 400)}{300}$$

$$t' = \frac{5x - 3\sqrt{x^2 + 90000}}{\sqrt{x^2 + 90000}} = 0 \quad \rightarrow \quad 5x - 3\sqrt{x^2 + 90000} = 0$$

$$(5x)^2 = \left(3\sqrt{x^2 + 90000}\right)^2 \quad \rightarrow \quad 25x^2 = 9x^2 + 810000 \quad \Rightarrow \quad x = 225\,\text{km}$$

$$t'' = \frac{450000}{\sqrt{\left(x^2 + 90000\right)^3}} \quad \rightarrow \quad t''(225) = 0'008 > 0$$

Para $x = 225\,\text{km}$ el tiempo empleado es el menor y es:

$$t = \frac{400 - 225}{100} + \frac{\sqrt{300^2 + 225^2}}{60} = 8\,\text{horas}$$

Es decir, el coche debe abandonar la carretera 225 km. antes de llegar al punto H de menor distancia de P a la carretera, es decir, a 175 km. del pueblo A.

Problema 33

Un eucalipto de 20 años de edad tiene 10 m de altura y 30 cm de diámetro, y su madera se puede vender a 500 pts/m^3. A partir de ese momento, cada año crece 20 cm de alto y 1 cm de ancho, pero su madera se deprecia a razón de 10 pts por año el m^3. ¿A qué edad es más ventajoso talar los eucaliptos?

Suponemos el eucalipto de forma cilíndrica y que tanto el crecimiento del árbol como la depreciación de su madera se producen a velocidad uniforme.

Edad del eucalipto:	$h = 20 + x$ años
Altura:	$h = 10 + 0'2x$ metros
Diámetro:	$d = 0'3 + 0'01x$ metros
Volumen:	$V = \pi r^2 h = \pi\left(\dfrac{0'3+0'01x}{2}\right)^2 (10+0'2x)\ m^3$
Precio m^3 de madera:	$p = 500 - 10x$ pts
Precio del eucalipto:	$P(x) = \pi\left(\dfrac{0'3+0'01x}{2}\right)^2 (10+0'2x)(500-10x)$ pts

$$P'(x) = -\frac{\pi(x+30)(x^2+15x-1250)}{5000} = 0 \quad \to \quad \pi(x+30)(x^2+15x-1250) = 0$$

$$\pi(x+30)(x^2+15x-1250) = 0 \quad \to \quad \begin{cases} x+30=0 & \Rightarrow \quad x=-30 \\ x^2+15x-1250=0 & \Rightarrow \quad \begin{cases} x=-43'64 \\ x=28'64 \end{cases} \end{cases}$$

La única solución válida es $x = 28'64$ años, por tanto, el eucalipto alcanza su mayor precio cuando tiene $20 + 28'64 = 48'64$ años, y en ese momento vale:

$$P(28'64) = 907'30 \text{ pts}$$

Problema 34

Localiza el máximo y mínimo absoluto de la función $y = 3senx + 2cosx$

$$y' = 3\cos x - 2\,\text{sen}\,x = 0 \quad \to \quad 3\cos x = 2\,\text{sen}\,x \quad \to \quad \frac{\text{sen}\,x}{\cos x} = \frac{3}{2} \quad \to \quad \text{tg}\,x = 1'5$$

$$x = \text{arctg}\,1'5 = 0'9827$$

$$y'' = -3\,\text{sen}\,x - 2\cos x \quad \to \quad y''(0'9827) = -360 < 0$$

Calculamos el valor que toma la función en el punto singular y en los extremos del intervalo de definición:

$$\left(0, f(0)\right) = \left(0, 3\,\text{sen}\,0 + 2\cos 0\right) = (0,2)$$

$$\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(0, 3\,\text{sen}\frac{\pi}{2} + 2\cos\frac{\pi}{2}\right) = (0,3)$$

$$\left(0'98, f(0'98)\right) = \left(0, 3\,\text{sen}\,0'98 + 2\cos 0'98\right) = (0, 3'60)$$

El máximo absoluto está en $x = 0'98$ y vale 3’60 y el mínimo absoluto está en $x = 0$ y vale 2

Problema 35

Un granjero compra una ternera de 270 kg. por 18000 pts.

Alimentar el animal cuesta 15 pts al día y la ternera aumenta de peso 0’45 kg. cada día. Por otro lado, cada día que pasa, el valor del animal en el mercado disminuye, de modo que el valor al cabo de “t” días, dependiendo del peso del animal, es $\left(100-\frac{t}{18}\right)$ pts por kilo. Calcular:

a) Peso de la ternera al cabo de “t” días.

b) Valor total de la ternera en el mercado al cabo de “t” días.

c) Coste total invertido en esos “t” días, incluyendo la compra y la alimentación.

d) Ganancia obtenida por el granjero si vende la ternera a los “t” días (la ganancia será el valor de la ternera en ese instante menos los costes invertidos).

e) ¿Cuánto debe vender la ternera para obtener la ganancia máxima?

a) $(270+0'45t)$ kg.

b) $(270+0'45t)\left(100-\frac{t}{18}\right)$ pts

c) $18000+15t$

d) $G(t)=(270+0'45t)\left(100-\frac{t}{18}\right)-(18000+15t)=9000+15t-\frac{0'45}{18}t^2$

e) $G'(t)=15-\frac{0'45}{9}t=0 \quad\rightarrow\quad t=300$ días

$$G(t)=(270+0'45\cdot 300)\left(100-\frac{300}{18}\right)-(18000+15\cdot 300)=11250 \text{ pts}$$

Problema 36

Un establecimiento de hostelería abre sus puertas a las 9 de la noche, sin ningún cliente, y las cierra cuando se han marchado todos. Se supone que la función que representa el número de clientes, C, en función del número de horas que lleva abierto, h, es: $C = 80h - 10h^2$

a) Determinar el número máximo de clientes que van una determinada noche al establecimiento.

b) Si deseamos ir cuando haya menos de 150 personas y más de 70. ¿Entre qué horas debemos hacerlo?

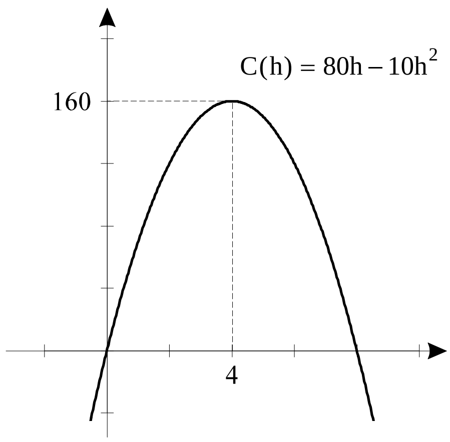
c) Si deseamos ir cuando haya menos de 150 personas y más de 70 y, además, queremos que durante nuestra estancia disminuya el número de clientes, ¿entre qué horas debemos hacerlo?

a) Representamos gráficamente la función $C(h)$ para facilitar la contestación a las preguntas.

El máximo se obtiene derivando la función:

$$C'(t) = 80 - 20h = 0 \quad \rightarrow \quad h = 4 \text{ horas}$$

$$C(4) = 160 \text{ clientes}$$



b)

$$C(h) = 150 \text{ clientes} \quad \rightarrow \quad 150 = 80h - 10h^2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} h = 3 \rightarrow \text{ a las 12 horas} \\ h = 5 \rightarrow \text{ a la 2 de la mañana} \end{cases}$$

$$C(h) = 70 \text{ clientes} \quad \rightarrow \quad 70 = 80h - 10h^2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} h = 1 \rightarrow \text{ a las 10 de la noche} \\ h = 7 \rightarrow \text{ a las 4 de la mañana} \end{cases}$$

Como el local se abre a las nueve de la noche, se debe ir, o bien entre las 10 y las 12, o bien entre las 2 y las 4 de la madrugada.

c) Para que disminuya el número de clientes, debemos ir después de la 1. Por tanto, para que haya entre 70 y 150 clientes y disminuya el número, debemos ir entre las 2 y las 4 de la madrugada.

Como cierra cuando $C(h) = 0$, $h > 0$, resulta $h = 8$, es decir a las 5 de la madrugada.

Problema 37

Los costes de fabricación, $C(x)$ en pts, de cierta variedad de galletas, dependen de la cantidad elaborada (x en kg.) de acuerdo con la siguiente expresión: $C(x) = 10 + 170x$.

El fabricante estima que el precio de venta en pesetas de cada kg. de galletas viene dado por: $p(x) = 200 - \dfrac{25x^2}{10000}$.

a) ¿El precio de venta disminuye con la cantidad?

b) Suponiendo que vende todo lo que fabrica, obtener la función que recoge sus ganancias.

c) ¿Qué cantidad de galletas le interesa producir para maximizar las ganancias?

d) En la situación óptima, ¿cuál es el precio de venta?, ¿qué ganancia se obtiene?

a) Como $p'(x) = -\dfrac{50x}{10000}$ y $x \geq 0$, resulta $p'(x) \leq 0$ y así $p(x)$ decrece al aumentar x.

b) Si fabrica "x" kilos y vende el kilo a $p(x)$ pts, es claro que lo que recauda al vender los "x" kilos es $x \cdot p(x)$ pts. Como la producción de esos "x" kilos le costó $C(x)$ pts resulta que su ganancia es:

$$G(x) = x \cdot p(x) - C(x) = x\left(200 - \frac{25x^2}{10000}\right) - (10 + 170x) = \frac{-4000 + 12000x - x^3}{400} \text{ pts}$$

c) $G'(x) = \dfrac{12000 - 3x^2}{400} = 0 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{4000} = 63'24 \text{ kg}$

$G''(x) = -\dfrac{3x}{200} \quad \rightarrow \quad G''(63'24) = -0'96 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ para $x = 63'24 \text{ kg}$ la ganancia es máxima, por tanto le interesa producir 63'18 kg.

d) Cuando $x = 63'24 \text{ kg}$ resulta:

$$p(63'24) = 190 \text{ pts por kg.}$$

$$G(63'24) \cong 1254'91 \text{ pts}$$

Problema 38

Una piedra preciosa pesa 12 gr. Sabiendo que el valor de una piedra preciosa es proporcional al cuadrado de su peso y que su valor es de 144000 pts, calcular, cuando dicha piedra preciosa se divide en dos trozos, el valor de cada uno de ellos cuando la depreciación es máxima.

Nos dicen que el valor es proporcional al cuadrado de su peso: $V = kp^2$. Como por otra parte una piedra pesa 12 kg. y su valor es de 144000 pts tenemos:

$$144000 = k \cdot 12^2 \quad \to \quad k = 1000$$

Si la piedra de 12 gr. la dividimos en una de "x" gr. y la otra en $12 - x$ gr., el valor, después de dividir, es:

$$V(x) = 1000x^2 + 1000(12 - x)^2 = 2000x^2 - 24000x + 144000$$

El valor es mínimo (depreciación máxima) cuando:

$$V'(x) = 4000x - 24000 = 0 \quad \to \quad x = 6$$

Cada uno de los trozos de 6 gr. vale $V(6) = 1000 \cdot 6^2 = 36000 \text{ pts}$ cuando la división se hace de modo que la depreciación es máxima.

Problema 39

A 10 km. de tu casa te acuerdas de que te has dejado el agua corriendo, lo que te cuesta 10 pts a la hora. Volver a casa a una velocidad constante de x km/h te cuesta en combustible $9 + \frac{x}{10}$ pts por km.

a) ¿Cuánto te cuesta volver a casa a x km/h?
b) ¿Cuánto tiempo tardas en llegar a casa si viajas a esa velocidad?
c) ¿Cuánto te cuesta el consumo de agua mientras regresas a casa?
d) ¿A qué velocidad debes regresar a casa para que el coste total de consumo de agua y combustible sea mínimo?

a) Se nos dice que el gasto de combustible por cada kilómetro, si vamos a $x \text{ km/h}$, es de $9 + \frac{x}{10}$ pts. Como estamos a 10 km. de casa, si volvemos a x km/h el gasto de combustible es de $10 \cdot \left(9 + \frac{x}{10}\right) = 90 + x$ pts.

b) Si estamos a 10 km. de casa y volvemos a x km/h es claro que tardaremos $\frac{10}{x}$ horas.

c) El tiempo que tardaremos en llegar a casa es, como acabamos de ver $\frac{10}{x}$ horas. Como cada hora el agua cuesta 10 pts, resulta que el consumo de agua mientras regresamos a casa es de $\frac{100}{x}$ pts.

d) El coste total del consumo de agua mientras regresamos a casa y del combustible es, regresando a $x\ \mathrm{km/h}$

$$C(x) = \frac{100}{x} + 90 + x$$

Para ver para qué x es $C(x)$ mínimo, hallamos $C'(x)$:

$$C'(x) = -\frac{100}{x^2} + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 10$$

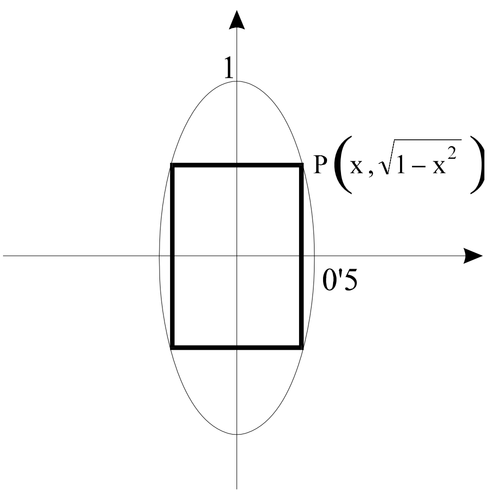
$$C''(x) = \frac{200}{x^3} \quad \rightarrow \quad C''(10) = 0'2 > 0$$

Así, $C(x)$ alcanza su mínimo para $x = 10$, siendo entonces el coste total $C(10) = 110$ pts

Problema 40

¿Cuál es el mayor área que puede tener un rectángulo de lados paralelos a los ejes de coordenadas inscrito en la elipse de ecuación $4x^2 + y^2 = 1$?

$$4x^2 + y^2 = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + y^2 = 1$$



Se trata de una elipse de semiejes $\frac{1}{2}$ y 1.

Un punto P perteneciente a la elipse en el primer cuadrante tendrá de coordenadas:

$$P\left(x, \sqrt{1-x^2}\right)$$

Por tanto, el área del rectángulo será:

$$S = (2x)\left(2\sqrt{1-4x^2}\right) = 4x\sqrt{1-4x^2}$$

$$S'(x)=4\left(\sqrt{1-4x^2}-\frac{4x^2}{\sqrt{1-4x^2}}\right)=0 \quad\rightarrow\quad \frac{4-32x^2}{\sqrt{1-4x^2}}=0 \quad\rightarrow\quad x=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$S''(x)=\frac{16x(8x^2-3)}{\sqrt{\left(1-4x^2\right)^3}} \quad\rightarrow\quad S''\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=-32<0$$

Para $x=\frac{\sqrt{2}}{4}$ obtenemos el rectángulo de área máxima inscrito en la elipse y su valor es:

$$S\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=4\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1-4\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2\right)=1$$

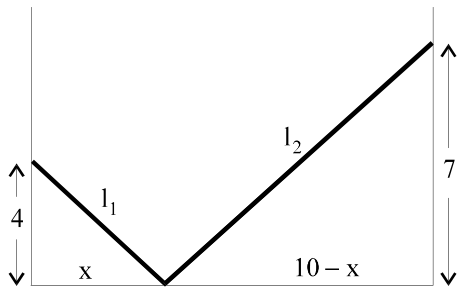
Problema 41

Dos antenas de televisión separadas 10 m son fijadas mediante un único cable tensor a un punto del suelo en el segmento que une sus bases. Si el cable se ata a 4 m de altura en una antena y a 7 m en la otra, se desea conocer el punto de fijación del cable en el suelo de forma que la longitud del cable sea mínima.

La longitud del cable es $L=l_1+l_2$. Al aplicar el Tª de Pitágoras se obtiene:

$$L=\sqrt{16+x^2}+\sqrt{(10-x)^2+7^2}$$

con $x\in[0,10]$



$$L'=\frac{2x}{2\sqrt{16+x^2}}+\frac{2(10-x)(-1)}{2\sqrt{(10-x)^2+49}}=\frac{x\sqrt{(10-x)^2+49}+(x-10)\sqrt{16+x^2}}{\sqrt{16+x^2}\cdot\sqrt{(10-x)^2+49}}=0$$

$$x\sqrt{(10-x)^2+49}+(x-10)\sqrt{16+x^2}=0 \quad\rightarrow\quad \left[x\sqrt{(10-x)^2+49}\right]^2=\left[-(x-10)\sqrt{16+x^2}\right]^2$$

$$x^2\left[(10-x)^2+49\right]=(x-10)^2\left(16+x^2\right) \quad\rightarrow\quad 33x^2+320x-1600=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x=\frac{40}{11} \\ x=-\frac{40}{3} \end{cases}$$

La solución negativa la descartamos, y si calculamos la segunda derivada y sustituimos para $x = \frac{40}{11}$ nos da una cantidad positiva.

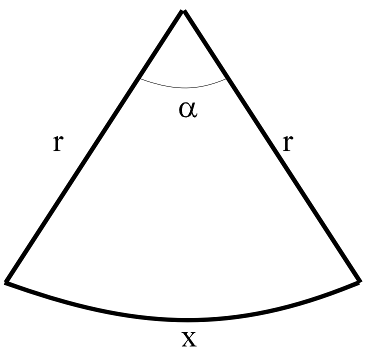
$$L''\left(\frac{40}{11}\right) > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{L posee un mínimo en } x = \frac{40}{11}.$$

Por tanto, el punto de fijación en el suelo debe estar a $\frac{40}{11}$ m de la primera antena.

Problema 42

Un sector circular tiene de perímetro 18 m. Hallar el ángulo en radianes del sector para que tenga área máxima.

El área del sector y la longitud del arco se calcula con una sencilla regla de tres:



$$\left.\begin{array}{lcl} \pi r^2 & \text{———} & 2\pi \\ A_{\text{sector}} & \text{———} & \alpha \end{array}\right\} \longrightarrow A = \frac{\pi r^2 \alpha}{2\pi} = \frac{r^2 \alpha}{2}$$

$$\left.\begin{array}{lcl} 2\pi r & \text{———} & 2\pi \\ x & \text{———} & \alpha \end{array}\right\} \longrightarrow x = \frac{2\pi r \alpha}{2\pi} = r\alpha$$

Por otro lado:

$$x + 2r = 18 \quad \rightarrow \quad x = 18 - 2r$$

Como $\quad x = r\alpha \quad \rightarrow \quad r\alpha = 18 - 2r \quad \rightarrow \quad A = \frac{r\,(18 - 2r)}{2} = 9r - r^2$

$$A = 9r - r^2 \quad \rightarrow \quad A' = 9 - 2r = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{9}{2}$$

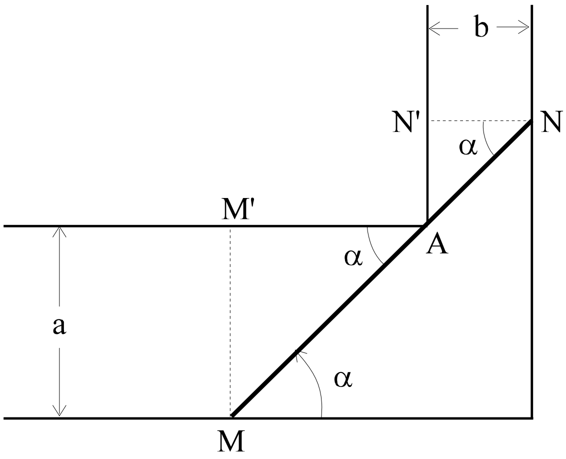
$$A'' = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{para } r = \frac{9}{2} \text{ el sector tiene área máxima.}$$

$$\alpha = \frac{x}{r} = \frac{18 - 2r}{r} = \frac{18 - 2 \cdot \frac{9}{2}}{\frac{9}{2}} = 2 \text{ radianes}$$

Problema 43

Un pasillo de anchura *a* se dobla en ángulo recto para convertirse en otro pasillo de anchura *b*, como se muestra en la figura al margen. Si llevamos horizontalmente una barra, ¿cual ha de ser su máxima longitud para que podamos pasar con ella de un pasillo al otro, sin inclinarla verticalmente?

(La barra de máxima longitud corresponderá al segmento MN, <u>más pequeño</u>, entre todos aquellos que pasan por la esquina A y tienen sus extremos en las paredes exteriores de ambos pasillos).



Sea L la longitud de un segmento cualquiera MN, situado tal como indica la figura. En esa misma figura puede verse que se verifican las siguientes relaciones:

$$L = MN = MA + AN \qquad MA = \frac{MM'}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad AN = \frac{N'N}{\cos\alpha} = \frac{b}{\cos\alpha}$$

por tanto, obtenemos la fórmula:

$$L = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} + \frac{b}{\cos\alpha}$$

Como a y b son constantes, esa fórmula da el valor de L en función de una sola variable α.

$$L' = \frac{b\operatorname{sen}\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{a\cos\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{b\operatorname{sen}^3\alpha - a\cos^3\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha} = 0 \quad\rightarrow\quad b\operatorname{sen}^3\alpha - a\cos^3\alpha = 0$$

$$b\operatorname{sen}^3\alpha = a\cos^3\alpha \quad\rightarrow\quad \operatorname{tg}^3\alpha = \frac{a}{b} \quad\Rightarrow\quad \operatorname{tg}\alpha = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

En las condiciones del problema, es evidente que debe haber un valor mínimo de L, luego dicho mínimo debe presentarse para el ángulo α_1 que cumpla $\operatorname{tg}\alpha_1 = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$

Finalmente, calculamos el valor mínimo de L, para lo cual tendremos en cuenta las fórmulas trigonométricas siguientes:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha \qquad\qquad \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha} = 1 + \operatorname{cotg}^2\alpha$$

Para el ángulo α_1, dichas fórmulas dan los valores siguientes:

$$\frac{1}{\cos\alpha_1}=\sqrt{1+\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}} \qquad \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha_1}=\sqrt{1+\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}}$$

El valor mínimo de L será entonces:

$$L_{min}=\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha_1}+\frac{b}{\cos\alpha_1}=a\cdot\sqrt{1+\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}}+b\cdot\sqrt{1+\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}}=\sqrt{a^2+a\cdot\sqrt[3]{ab^2}}+\sqrt{b^2+b\cdot\sqrt[3]{a^2b}}$$

Esta última expresión nos da la longitud de la barra más larga que puede pasar de un pasillo a otro, llevándola horizontalmente. Se comprueba que, si los dos pasillos tienen la misma anchura a, entonces la longitud de la barra es $2\sqrt{2}\cdot a$

Problema 44

Se quiere construir un marco para una ventana de un metro cuadrado de área. El coste del marco se estima en 125 pts por cada metro de altura de la ventana y 80 pts por cada metro de anchura. ¿Cuáles son las dimensiones del marco más económico?

Si la ventana es rectangular de base "x" y altura "y", el coste será:

$$C=125y+80x$$

Por otra parte, como el área es de un metro cuadrado tenemos:

$$1=xy \quad\to\quad y=\frac{1}{x} \quad\to\quad C=\frac{125}{x}+80x=\frac{125+80x^2}{x}$$

$$C'=\frac{160x^2-(125+80x^2)}{x^2}=0 \quad\to\quad 80x^2-125=0 \quad\Rightarrow\quad x=1'25\,m \quad\Rightarrow\quad y=0'8\,m$$

Problema 45

Dos bombillas de 200 W y 50 W respectivamente de potencia, están separadas por 10 m de distancia. Determina el punto comprendido entre ambas bombillas en que la iluminación es mínima. (La iluminación producida por una fuente de luz en un punto es proporcional a su potencia e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre la fuente y el punto.

Llamando "x" a la distancia del punto a la bombilla más potente, la iluminación viene dada por la expresión:

$$I(x)=k\cdot\frac{200}{x^2}+k\cdot\frac{50}{(10-x)^2} \qquad I'(x)=-k\cdot\frac{400}{x^3}+k\cdot\frac{100}{(10-x)^3}=0$$

$$k\left[\frac{500\cdot\left(x^3-24x^2+240x-800\right)}{x^3\cdot(10-x)^3}\right]=0 \quad\to\quad x^3-24x^2+240x-800=0 \quad\Rightarrow\quad x=6'13\,m$$

La iluminación será mínima en un punto situado a 6’13 m de la bombilla más potente. Se comprueba que se trata efectivamente de un mínimo, ya que $I(x)$ tiende a infinito tanto en $x=0$ como en $x=100$.