Problema 1

Hallar a, b y c para que la función $y = ax^2 + bx + c$ pase por el punto $P(8, 0)$ y tenga mínimo en $Q(6, -12)$.

Que pase por el punto $P(8, 0)$ significa que:

$$0 = a \cdot 8^2 + b \cdot 8 + c$$

Que pase por el punto $Q(6, -12)$ significa que:

$$-12 = a \cdot 6^2 + b \cdot 6 + c$$

Que tenga mínimo en el punto $Q(6, -12)$ significa que:

$$y'(6) = 0 \quad \rightarrow \quad y' = 2ax + b \quad \rightarrow \quad y'(6) = 12a + b = 0$$

Resolviendo el sistema formado por las tres ecuaciones obtenemos los valores de a, b y c.

$$\left.\begin{array}{r} 64a + 8b + c = 0 \\ 36a + 6b + c = -12 \\ 12a + b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 3 \\ b = -36 \\ c = 96 \end{array}\right.$$

Problema 2

a) La función $f(x) = \dfrac{ax^3 + bx^2 + 5}{x^2 - c}$ tiene, al menos, estas dos asíntotas: $x = 2$ e $y = 3x + 2$. Hállense los valores de a, b y c.

b) ¿Tiene $f(x)$ alguna otra asíntota?

a) Si $x = 2$ es una asíntota vertical, significa que

$$2^2 - c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 4$$

$y = 3x + 2$ es una asíntota oblicua, lo que significa que, si la ecuación de la asíntota oblicua es de la forma $y = mx + n$, en nuestro caso $m = 3$ y $n = 2$, por tanto:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{ax^3 + bx^2 + 5}{x^3 - cx} = 3 \quad \Rightarrow \quad a = 3$$

$$n = \lim_{x \to \infty} \left[f(x) - mx \right] = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{3x^3 + bx^2 + 5}{x^2 - 4} - 3x \right] = \lim_{x \to \infty} \frac{bx^2 + 12x + 5}{x^2 - 4} = 2 \quad \Rightarrow \quad b = 2$$

Los límites calculados tienen el mismo valor si $x \to +\infty$ como si $x \to -\infty$ ya que es una función racional.

b) Por tener asíntota oblicua por ambos lados, $f(x)$ no puede tener asíntotas horizontales. Las asíntotas verticales se hallan para aquellos valores de x que anulan el denominador y no anulan el numerador. Además de $x = 2$, ello también ocurre para $x = -2$, luego $x = -2$ es otra asíntota vertical.

Problema 3

Dada la función $y = x + \dfrac{4}{x - a}$ determina el valor de la constante "a" para que la abscisa del mínimo local de dicha función, sea el doble que la del máximo local.

Tanto en el máximo como en el mínimo local se verifica que $f'(x) = 0$, por tanto:

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-a)^2} = \frac{(x-a)^2 - 4}{(x-a)^2} = 0 \quad \to \quad (x-a)^2 - 4 = 0$$

$$x - a = \sqrt{4} = \pm 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = a - 2 \\ x = a + 2 \end{cases}$$

$$f''(x) = \frac{8}{(x-a)^3} \quad \to \quad \begin{cases} f''(a-2) = -1 < 0 \quad \Rightarrow \quad x = a - 2 \text{ es un máximo} \\ f''(a+2) = 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad x = a + 2 \text{ es un mínimo} \end{cases}$$

Según el enunciado del problema, se verifica:

$$a + 2 = 2(a - 2) \quad \Rightarrow \quad a = 6$$

Problema 4

Determinar los coeficientes m y n de la función $f(x) = x^3 + nx^2 + mx + 3$, con la condición de que existan extremos relativos en $x = 1$ y $x = 3$.

Si existe extremo relativo en $x = 1$ se verifica $f'(1) = 0$

$$f'(x) = 3x^2 + 2nx + m \quad \to \quad f'(1) = 3 + 2n + m = 0$$

Si existe extremo relativo en $x = 3$ se verifica $f'(3) = 0$

$$f'(3) = 27 + 6n + m = 0$$

Las soluciones del sistema son:

$$\left.\begin{array}{r} 3+2n+m=0 \\ 27+6n+m=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} n=-6 \\ m=9 \end{array}\right.$$

Problema 5

Halla la función polinómica de tercer grado cuya gráfica tiene un máximo en el punto $(-3,27)$ y un mínimo en el punto $(0,0)$.

Una función polinómica de tercer grado tiene la forma $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.

Pasa por el punto $(-3,27)$:

$$f(-3)=27 \quad \rightarrow \quad -27a+9b-3c+d=27$$

Pasa por el punto $(0,0)$:

$$f(0)=0 \quad \rightarrow \quad d=0$$

Tiene un máximo en el punto $(-3,27)$:

$$f'(-3)=0 \quad \rightarrow \quad f'(x)=3ax^2+2bx+c \quad \rightarrow \quad 27a-6b+c=0$$

Tiene un mínimo en el punto $(0,0)$:

$$f'(0)=0 \quad \rightarrow \quad c=0$$

Las soluciones son:

$$\left.\begin{array}{r} 27a-6b=0 \\ -27a+9b=27 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=2 \\ b=9 \end{array}\right.$$

La función polinómica pedida es:

$$f(x)=2x^3+9x^2$$

Problema 6

Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos y absolutos de la función: $f(x)=x^2-2|x|+2$ en el intervalo $\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$.

Si utilizamos la definición de valor absoluto tenemos:

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2 & \text{si} \quad -\frac{1}{2} \le x < 0 \\ 2 & \text{si} \quad x = 0 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si} \quad 0 < x \le \frac{3}{2} \end{cases}$$

La derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si} \quad x \in \left] -\frac{1}{2}, 0 \right[& \rightarrow & 2x + 2 = 0 & \Rightarrow & x = -1 \\ 2x - 2 & \text{si} \quad x \in \left] 0, \frac{3}{2} \right[& \rightarrow & 2x - 2 = 0 & \Rightarrow & x = +1 \end{cases}$$

Los intervalos de monotonía son:

$$\left] -\frac{1}{2}, 0 \right[\quad ; \quad]0,1[\quad ; \quad \left] 1, \frac{3}{2} \right[$$

$$f'\left(-\frac{1}{4}\right) = 1'5 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{en el intervalo} \quad \left] -\frac{1}{2}, 0 \right[\quad \text{la función } f(x) \text{ es creciente}$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{en el intervalo} \quad]0,1[\quad \text{la función } f(x) \text{ es decreciente}$$

$$f'(1'25) = 0'5 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{en el intervalo} \quad \left] 1, \frac{3}{2} \right[\quad \text{la función } f(x) \text{ es creciente}$$

En resumen, el esquema de monotonía de $f(x)$ es:

La función $f(x)$ es creciente $\quad \forall x \in \left] -\frac{1}{2}, 0 \right[\cup \left] 1, \frac{3}{2} \right[$

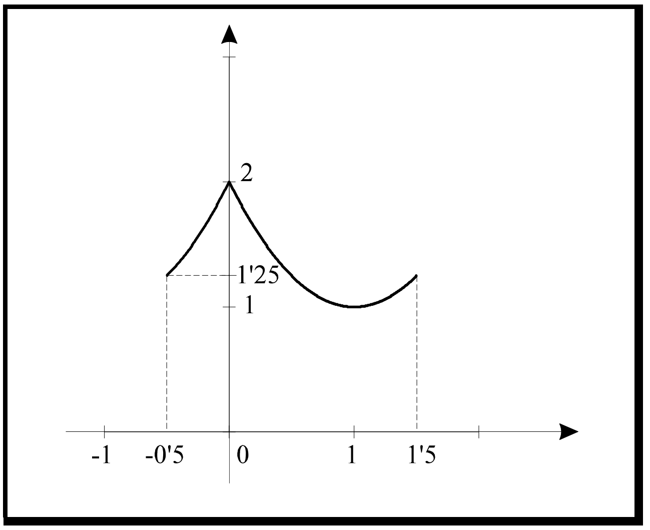
La función $f(x)$ es decreciente $\quad \forall x \in]0,1[$

$x = 0 \quad \rightarrow \quad f(0) = 2 \quad \Rightarrow$

Máximo relativo y absoluto en $(0, 2)$

$x = 1 \quad \rightarrow \quad f(1) = 1 \quad \Rightarrow$

Mínimo relativo y absoluto en $(1, 1)$



Problema 7

Comprobar que la función definida por:

$$\mathbf{f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 6 & \text{si} \quad x \le 2 \\ 2x^3 + 3x - 26 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}}$$

es continua en el intervalo $\left[-3, 3\right]$ y encontrar los valores máximo y mínimo de la función $f(x)$ en dicho intervalo.

En realidad, la función que tenemos que estudiar, teniendo en cuenta el intervalo que nos dan es:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 6 & \text{si} \quad x \in \left[-3, 2\right] \\ 2x^3 + 3x - 26 & \text{si} \quad x \in \left]2, 3\right] \end{cases}$$

Continuidad

Tanto para $x < 2$ como para $x > 2$ la función es continua. Estudiemos la continuidad para $x = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = -4 \\ \left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 - x - 6) = -4 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} (2x^3 + 3x - 26) = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 2} f(x) = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow f(2) = \lim_{x \to 2} f(x) = -4$$

por tanto, la función es continua en $x = 2$.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-1 & \text{si} \quad x\in\left]-3,2\right[\quad \rightarrow \quad 2x-1=0 \quad \Rightarrow \quad x=\dfrac{1}{2} \\ 6x^2+3 & \text{si} \quad x\in\left]2,3\right[\quad \rightarrow \quad 6x^2+3=0 \quad \Rightarrow \quad x=\sqrt{-0'5} \end{cases}$$

$$\text{Para } x=-3 \rightarrow f(-3)=6 \qquad \text{Para } x=\frac{1}{2} \rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=-6'25$$

$$\text{Para } x=2 \rightarrow f(2)=-4 \qquad \text{Para } x=3 \rightarrow f(3)=37$$

De todo lo anterior se deduce que el máximo absoluto se tiene para $x=3$ y vale 37. El mínimo lo tiene para $x=\frac{1}{2}$ y vale $-6'25$.

Problema 8

a) ¿ Por qué toda función polinómica de tercer grado tiene un punto de inflexión?

b) ¿Qué valores deben tomar b y c para que $f(x)=x^3+bx^2+cx+1$ tenga un extremo en $x=1$ y un punto de inflexión en $x=0$? ¿El extremo que se obtiene en $x=1$ es máximo o mínimo?

a) Una función polinómica de tercer grado es una expresión de la forma:

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \quad \text{con} \quad a\neq 0$$

Se tiene:

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c \qquad f''(x)=6ax+2b$$

Los puntos de inflexión se encuentran entre las soluciones de $f''(x)=0$. En nuestro caso, sólo hay una:

$$6ax+2b=0 \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{b}{3a}$$

Como $f'''(x)=6a\neq 0 \quad \Rightarrow \quad x=-\dfrac{b}{3a}$ es un punto de inflexión.

b)

$$f(x)=x^3+bx^2+cx+1 \qquad f'(x)=3x^2+2bx+c \qquad f''(x)=6x+2b$$

En $x=0$ hay un punto de inflexión $\Rightarrow f''(0)=0 \rightarrow 2b=0 \Rightarrow b=0$

Si en $x=1$ hay un extremo $\Rightarrow f'(1)=0 \rightarrow 3+2bx+c=0$

Como $b = 0 \Rightarrow c = -3$

El polinomio que resulta es: $f(x) = x^3 - 3x + 1$

Como $f''(1) = 6 > 0 \Rightarrow$ en $x = 1$ hay un mínimo.

Problema 9

Determinar las condiciones que deben cumplir a, b y c para que la función $y = ax^3 + bx + c$:

a) Sea estrictamente creciente en $]-\infty, +\infty[$

b) Sea estrictamente decreciente en $]-\infty, +\infty[$

a)

$$y' = 3ax^2 + b.$$

Para que $y(x)$ sea estrictamente creciente en $]-\infty, +\infty[$ ha de ser $y'(x) = 3ax^2 + b > 0$.

Si $a < 0$ entonces esta desigualdad no se cumple para ciertos valores de b, por tanto ha de ser $a > 0$.

Si $b < 0$ está claro que para $x = 0$ es $y'(0) = b < 0$, por tanto ha de ser $b > 0$.

$a > 0$ y $b > 0$ es necesario y suficiente para que $y'(x)$ sea estrictamente creciente $\forall x \in R$.

b) Análogamente, resulta que $a < 0$ y $b < 0$ es necesario y suficiente para que $y'(x)$ sea estrictamente decreciente $\forall x \in R$.

Problema 10

La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, tiene un punto de derivada nula en $(1,1)$, que no es un extremo relativo. Razónese el valor de a, b y c.

La gráfica de la función pasa por el punto $(1,1)$, es decir, $f(1) = 1$.

$$1 + a + b + c = 1 \Rightarrow a + b + c = 0$$

Tiene derivada nula en $(1,1)$, luego $f'(1) = 0$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \rightarrow 3 + 2a + b = 0$$

Si tiene derivada nula en $(1,1)$ y no es un extremo relativo, tiene que ser un punto de inflexión con tangente horizontal, es decir $f''(1)=0$

$$f''(x)=6x+2a \quad \to \quad 6+2a=0 \quad \Rightarrow \quad a=-3$$

$$\text{Si} \quad a=-3 \quad \to \quad b=3 \quad \to \quad c=0 \quad \Rightarrow \quad f(x)=x^3-3x^2+3x$$

Problema 11

De un polinomio de tercer grado $P(x)$, se sabe que $P(1)=0$, $P'(1)=2$, $P''(1)=4$, y $P'''(1)=12$. Calcular $P(2)$.

Un polinomio de tercer grado tiene la forma $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.

$$P'(x)=3ax^2+2bx+c \qquad P''(x)=6ax+2b \qquad P'''(x)=6a$$

$$P(1)=0 \quad \to \quad a+b+c+d=0$$

$$P'(1)=2 \quad \to \quad 3a+2b+c=2$$

$$P''(1)=4 \quad \to \quad 6a+2b=4$$

$$P'''(1)=12 \quad \to \quad 6a=12 \quad \Rightarrow \quad a=2$$

$$\text{Si} \quad a=2 \quad \Rightarrow \quad b=-4 \quad \Rightarrow \quad c=4 \quad \Rightarrow \quad d=-2 \quad \Rightarrow \quad P(x)=2x^3-4x^2+4x-2$$

$$P(2)=2\cdot 2^3-4\cdot 2^2+4\cdot 2-2=6$$

Problema 12

Durante los treinta días consecutivos de un mes las acciones de una determinada compañía han tenido unas cotizaciones dadas por la función $f(x)=0'2x^2-8x+100$, donde x es el número de días transcurridos. Halla los días en que las respectivas acciones estuvieron en baja (bajando de precio) y los que estuvieron en alza. ¿Qué día del mes alcanzaron el valor máximo? ¿Y el valor mínimo?

$$f'(x)=0'4x-8=0 \quad \Rightarrow \quad x=20$$

$$f''(x)=0'4>0 \quad \Rightarrow \quad \text{en} \ \ x=20 \ \ \text{hay un mínimo relativo}$$

Los intervalos de monotonía son:

$$]0,20[\quad ; \quad]20,30[$$

$$f'(10) = -4 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{en el intervalo }]0,20[\text{ la función } f(x) \text{ es decreciente.}$$

$$f'(25) = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{en el intervalo }]20,30[\text{ la función } f(x) \text{ es creciente.}$$

$$\text{La función } f(x) \text{ es creciente} \qquad \forall x \in]20,30[$$

$$\text{La función } f(x) \text{ es decreciente} \qquad \forall x \in]0,20[$$

$$x = 0 \;\rightarrow\; f(0) = 100 \qquad x = 30 \;\rightarrow\; f(30) = 40 \qquad x = 20 \;\rightarrow\; f(20) = 20$$

De los datos anteriores se deduce que, las acciones empezaron a 100, fueron bajando hasta el día 20 en que quedaron a 20 y luego subieron hasta el día 30 en que estaban a 40, es decir, el primer día se obtiene el máximo absoluto de la función y vale 100, y el mínimo absoluto se obtiene el día 20 y vale 20.

Problema 13

Hallar a, b y c en la función $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, sabiendo que su tangente en el punto $(1,1)$ es la recta $y = -x + 2$ y que tiene un extremo en el punto $(0,2)$.

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

Pasa por el punto $(1,1)$ $\rightarrow$ $y(1) = 1$ $\rightarrow$ $a + b + c + d = 1$

La tangente en $(1,1)$ es la recta $y = -x + 2$ $\rightarrow$ $y'(1) = -1$ $\rightarrow$ $3a + 2b + c = -1$

Pasa por el punto $(0,2)$ $\rightarrow$ $y(0) = 2$ $\rightarrow$ $d = 2$

Posee un extremo en $(0,2)$ $\rightarrow$ $y'(0) = 0$ $\rightarrow$ $c = 0$

Para calcular a y b resolveremos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} a + b + 0 + 2 = 1 \\ 3a + 2b = -1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} a + b = -1 \\ 3a + 2b = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -2 \end{array}\right.$$

La función pedida es:

$$y = x^3 - 2x^2 + 2$$

Problema 14

Dada la función $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, hallar los coeficientes a, b, c y d para que se verifique que la gráfica de la función tenga un punto de inflexión en $(0,0)$, siendo la tangente en ese punto paralela a la recta $4x - y = 5$ y además pase por el punto $(1,1)$.

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c \qquad\qquad y'' = 6ax + 2b$$

Pasa por el punto $(0,0)$ $\rightarrow$ $y(0) = 0$ $\rightarrow$ $d = 0$

Tiene un punto de inflexión en $(0,0)$ $\rightarrow$ $y''(0) = 0$ $\rightarrow$ $2b = 0$ $\Rightarrow$ $b = 0$

La tangente en $(0,0)$ es paralela a la recta $4x - y = 5$, lo que significa que la derivada de la función en el punto de abscisa 0, es igual a la pendiente de la recta $4x - y = 5$, es decir, 4.

$$y'(0) = 4 \quad \rightarrow \quad c = 4$$

Pasa por el punto $(1,1)$ $\rightarrow$ $y(1) = 1$ $\rightarrow$ $a + b + c + d = 1$ $\Rightarrow$ $a = -3$

la función pedida es:

$$y = -3x^3 + 4x$$

Problema 15

Una función $U = f(x)$ definida en $[0,M]$ que cumpla que $f(0) = f'(M) = 0$, $f(x) \geq 0$, $f'(x) \geq 0$, y $f''(x) \leq 0$, se llama en economía una función de utilidad total. Dibuja aproximadamente la gráfica de $U = f(x)$ y razona la forma.

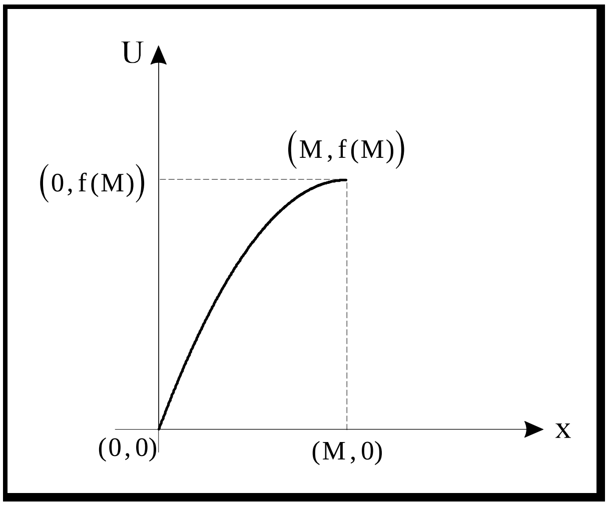
Si $f(0) = 0$ $\Rightarrow$ Pasa por el origen.

Si $f'(M) = 0$ $\Rightarrow$ En el punto $(M, f(M))$ la tangente es horizontal

Si $f(x) \geq 0$ $\Rightarrow$ La curva se mantiene por encima del eje OX.

Si $f'(x) \geq 0$ $\Rightarrow$ La curva siempre es creciente.

Si $f''(x) \leq 0$ $\Rightarrow$ La curva es convexa.

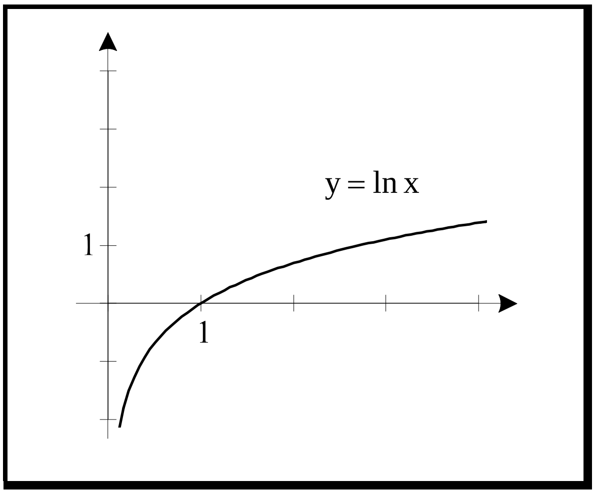


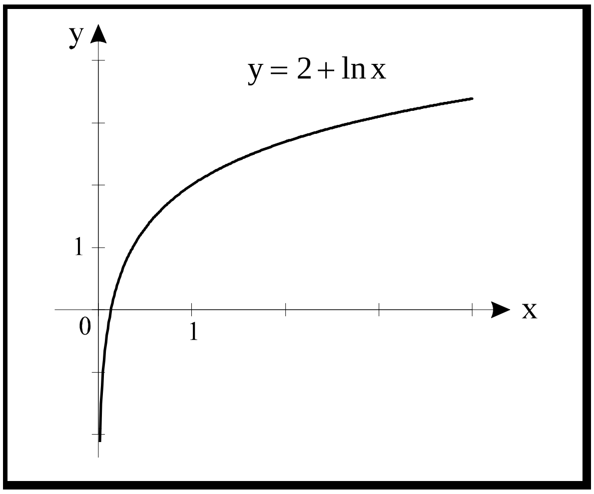
Problema 16

Conocidas las gráficas de las funciones de variable real $y(x) = \cos x$ e $y(x) = \ln x$, representa:

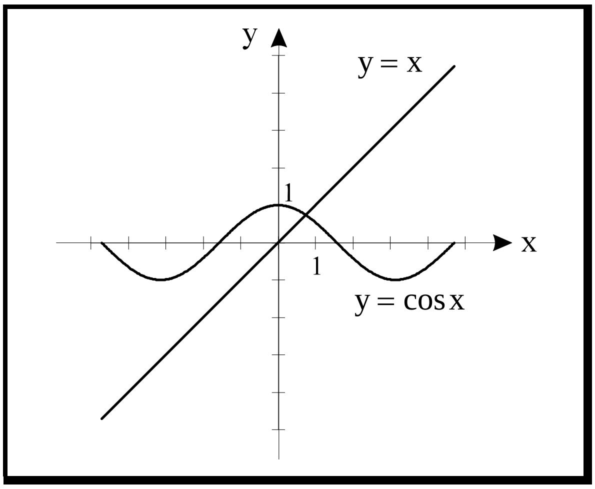
a) $y(x) = 2 + \ln x$ b) $y(x) = x + \cos x$

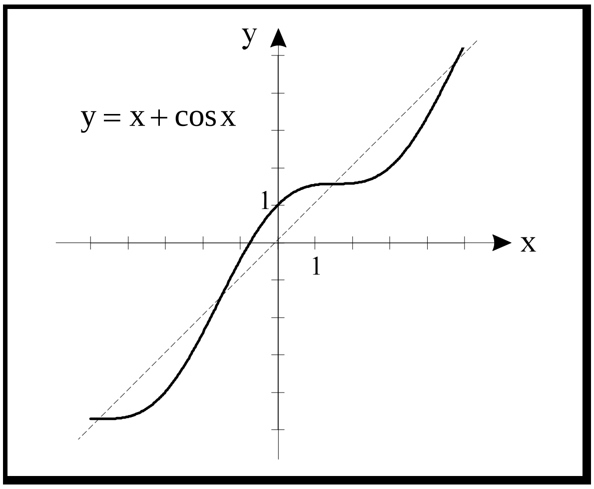
a) La única diferencia entre $y(x) = \ln x$ e $y(x) = 2 + \ln x$ es que la segunda estará trasladada 2 unidades hacia arriba, como se indica a continuación:





b) En el caso de las funciones $y(x) = x$ e $y(x) = \cos x$, la función $y = x + \cos x$ se obtiene sumando las ordenadas correspondientes a estas dos curvas para cada abscisa. Resulta una curva que aproximadamente es como sigue.





Problema 17

Una población de insectos crece con arreglo a la ley $y = 1 + 2e^x$, donde "y" es el número de miles de insectos y "x" es el tiempo en meses desde el momento presente. Haz una gráfica de la función de crecimiento. ¿En cuánto tiempo se duplicará la población inicial? $(x = 0)$? ¿En cuánto tiempo se duplicará la población existente después del primer mes?

Utiliza la calculadora para las operaciones. Expresa la función $D(x)$ que calcula el tiempo de duplicación de la población existente en el instante x.

La población inicial es

$y(0) = 1 + 2e^0 = 3 \quad \to \quad$ es decir, hay 3000 insectos en el instante en que se empieza a contar.

Se duplicará en el instante "x" tal que:

$$y(x) = 1 + 2e^x = 6 \quad \to \quad e^x = \frac{5}{2} \quad \to \quad x = \ln\frac{5}{2} = 0'9162 \text{ meses}$$

En el primer mes hay:

$$y(1) = 1 + 2e^1 = 6'4365 \text{ miles}$$

se duplicará cuando transcurra un tiempo "t" tal que:

$$y(1+t) = 1 + 2e^{1+t} = 2\cdot(1+2e) \quad \to \quad 2e^{1+t} = 2 + 4e - 1 \quad \to \quad e^{1+t} = \frac{1+4e}{2}$$

$$1 + t = \ln\frac{1+4e}{2} \quad \to \quad t = 0'78113 \text{ meses}$$

La población en el instante "x" es $y(x) = 1 + 2e^x$. Se pide ahora el tiempo $D(x)$ que ha de transcurrir a partir del instante "x" para que la población pase a ser 2y, es decir:

$$y\big(x + D(x)\big) = 2(1 + 2e^x)$$

Como $y\big(x + D(x)\big) = 1 + 2e^{x+D(x)} \quad \to \quad 2(1+2e^x) = 1 + 2e^{x+D(x)} = 1 + 2e^x e^{D(x)}$

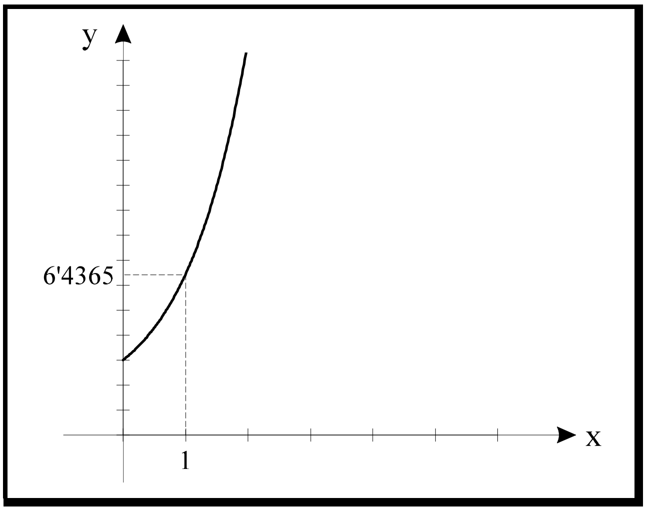
$$e^{D(x)} = \frac{1+4e^x}{2e^x} \quad \Rightarrow \quad D(x) = \ln\frac{1+4e^x}{2e^x}$$

Podemos comprobar que si:

$$x = 0 \quad \to \quad D(0) = \ln\frac{1+4}{2} = 0'91629$$

$$x = 1 \quad \to \quad D(1) = \ln\frac{1+4e}{2e} = 0'78113$$

que coincide con los resultados de las preguntas anteriores



Problema 18

El índice de inflación de cierto país fue variando, durante el año 1987, según la expresión $\mathbf{i(t) = 15t + \frac{t^2 - 8t}{20}}$, donde t es el tiempo en meses desde principios del año. Se pide:

a) ¿Durante qué meses el índice de inflación fue creciendo?

b) Si el gobierno tiene previsto devaluar la moneda del país cuando el índice de inflación alcance el valor de 16’5, ¿en qué mes tomará la decisión?

a) $i'(t) = 15 + \frac{1}{20} \cdot (2t - 8) = \frac{2t + 292}{20} > 0$ para $t > 0$ $\Rightarrow$ el índice de inflación siempre crece.

b) $15t + \frac{t^2 - 8t}{20} = 16'5 \quad \to \quad t^2 + 292t - 330 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t = 1'1257 \\ t = -293'125 \end{cases}$

La única solución positiva es $t = 1'1257$, por tanto, durante el mes de febrero se alcanza el índice 16’5. Febrero será el mes de la devaluación.

Problema 19

Sea f una función real definida en todo R. Se conocen sobre f los siguientes datos:

- **es derivable en $x = -1$**
- **es discontinua en $x = 0$**
- **es derivable en $\left]2, \infty\right[$**

Razona si las siguientes afirmaciones son falsas:

a) La función f es continua en -1.

b) La función f es derivable en 0.

c) En el intervalo $[10, 15]$, alcanza un máximo y un mínimo.

a) Verdadero, ya que, por ser derivable la función en $x = -1$, debe ser continua en dicho punto.

b) Falso, ya que si no es continua en $x = 0$, no puede ser derivable en dicho punto.

c) Sobre lo que pueda pasar con los máximos y mínimos en el intervalo $[10, 15]$ no hay información suficiente para afirmar ni negar nada. Se puede construir f con todas las propiedades señaladas y que tenga tales máximos o mínimos, y otra f que no los tenga.

Problema 20

Estudio y representación gráfica de la función $\mathbf{f(x) = \dfrac{x^3 \cdot (3x-8)}{12}}$

1. Dominio

$D[f(x)] = \forall x \in R$

2. Periodicidad

No es periódica, ya que $f(x+T) = \dfrac{(x+T)^3 \cdot [3(x+T)-8]}{12} \neq f(x)$.

3. Simetrías

Simetría respecto al eje de ordenadas

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 \cdot [3(-x)-8]}{12} = \frac{-x^3 \cdot (-3x-8)}{12} = \frac{x^3 \cdot (3x+8)}{12}$$

$f(x) \neq f(-x) \quad \Rightarrow$ La gráfica de la función no es simétrica respecto al eje de ordenadas.

Simetría respecto al origen de coordenadas

$$-f(x) = -\frac{x^3 \cdot (3x-8)}{12} = \frac{-x^3 \cdot (3x-8)}{12}$$

$f(-x) \neq -f(x) \Rightarrow$ La gráfica de la función no es simétrica respecto al origen de coordenadas

4. Asíntotas

Por ser una función polinómica no tiene asíntotas.

5. Cortes con los ejes

Cortes con el eje de ordenadas

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{x^3 \cdot (3x-8)}{12} \\ x = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad y = 0 \qquad \text{Corta en el punto } (0,0).$$

Cortes con el eje de abscisas

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{x^3 \cdot (3x-8)}{12} \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad x^3 \cdot (3x-8) = 0 \quad \rightarrow \left\{\begin{array}{lll} x^3 = 0 & \Rightarrow & x = 0 \\ 3x-8=0 & \Rightarrow & x = \dfrac{8}{3} \end{array}\right.$$

Corta en los puntos $\quad (0,0) \quad$ y $\quad \left(\dfrac{8}{3},0\right)$

6. ***Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos***

$$f(x) = \frac{x^3 \cdot (3x-8)}{12} = \frac{1}{12} \cdot (3x^4 - 8x^3) \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{12} \cdot (12x^3 - 24x^2)$$

Veamos los valores para los que $f'(x)$ se anula:

$$12x^3 - 24x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad 12x^2(x-2) = 0 \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Los intervalos de monotonía son:

$$\left]-\infty,0\right[\quad ; \quad \left]0,2\right[\quad ; \quad \left]2,\infty\right[$$

$f'(-1) = -3 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ en el intervalo $\left]-\infty,0\right[$ la función $f(x)$ es decreciente.

$f'(1) = -1 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ en el intervalo $\left]0,2\right[$ la función $f(x)$ es decreciente.

$f'(3) = 9 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ en el intervalo $\left]2,\infty\right[$ la función $f(x)$ es creciente.

En resumen, el esquema de monotonía de $f(x)$ es:

		0		2	
Signo de f '	−		−		+
Monotonía de f	↘		↘		↗

La función $f(x)$ es creciente $\qquad \forall x \in \left]2,\infty\right[$

La función $f(x)$ es decreciente $\qquad \forall x \in \left]-\infty,2\right[$

Mínimo en el punto $\quad (2,-1'\widehat{3})$

7. *Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión*

$$f''(x)=\frac{1}{12}\cdot(36x^2-48x)=x(3x-4)$$

Los valores de x para los que se anula $f''(x)$ son:

$$x(3x-4)=0 \quad \to \quad \begin{cases} x=0 & \Rightarrow \quad x=0 \\ 3x-4=0 & \Rightarrow \quad x=\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Los intervalos de concavidad y convexidad son:

$$\left]-\infty,0\right[\quad ; \quad \left]0,\frac{4}{3}\right[\quad ; \quad \left]\frac{4}{3},\infty\right[$$

$$f''(-1)=7>0 \quad \Rightarrow \quad \text{en el intervalo } \left]-\infty,0\right[\text{ la función } f(x) \text{ es cóncava}$$

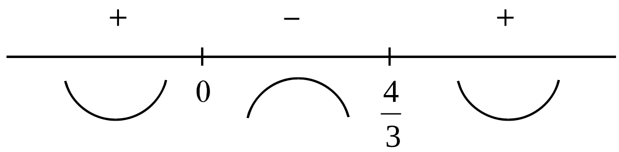
$$f''(1)=-1<0 \quad \Rightarrow \quad \text{en el intervalo } \left]0,\frac{4}{3}\right[\text{ la función } f(x) \text{ es convexa}$$

$$f''(2)=4>0 \quad \Rightarrow \quad \text{en el intervalo } \left]\frac{4}{3},\infty\right[\text{ la función } f(x) \text{ es cóncava}$$

En resumen, el esquema de concavidad y convexidad de $f(x)$ es:

Signo de f''

Concavidad / Convexidad



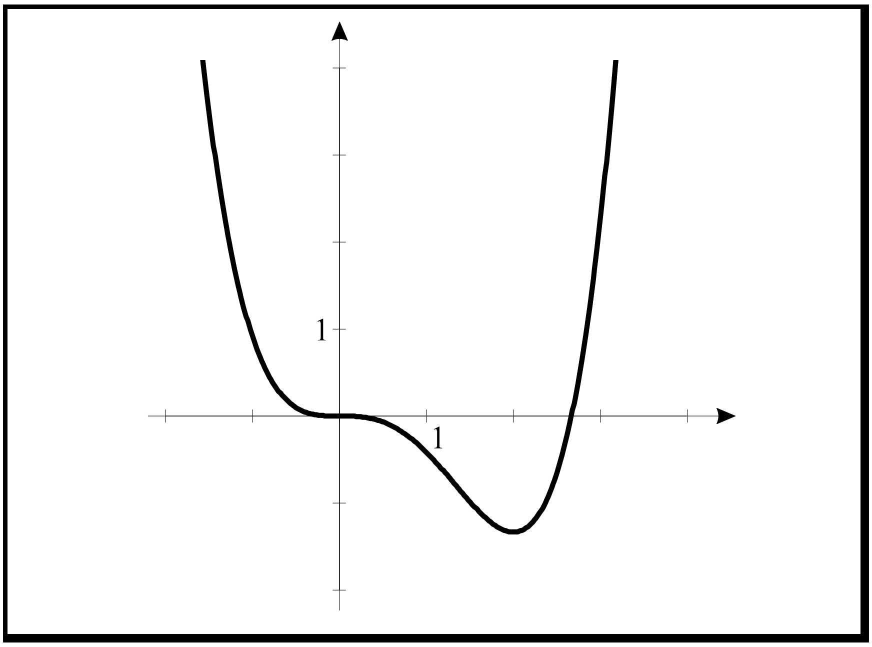
La función $f(x)$ es cóncava $\quad \forall x \in \left]-\infty,0\right[\cup \left]\frac{4}{3},\infty\right[$

La función $f(x)$ es convexa $\quad \forall x \in \left]0,\frac{4}{3}\right[$

Punto de inflexión $\quad (0,0)$ y $\left(\frac{4}{3},-0'79\right)$

8. Tabla de valores

x	$f(x)$
-2	$9'33$
-1	$0'91$
$0'5$	$-0'06$
1	$-0'41$
$1'5$	$-0'98$
$2'5$	$-0'65$
3	$2'25$
4	$21'33$



Problema 21

Estudio y representación gráfica de la función $\mathbf{f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+x-2}}$

1. Dominio

$$x^2+x-2=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases} \qquad\qquad D\left[f(x)\right]=\forall x\in R-\{-2,1\}$$

2. Periodicidad

No es periódica, ya que $f(x+T)=\dfrac{(x+T)^2}{(x+T)^2+(x+T)-2}\neq f(x)$.

3. Simetrías

Simetría respecto al eje de ordenadas

$$f(-x)=\frac{(-x)^2}{(-x)^2+(-x)-2}=\frac{x^2}{x^2-x-2}$$

$f(x)\neq f(-x) \quad\Rightarrow$ La gráfica de la función no es simétrica respecto al eje de ordenadas.

Simetría respecto al origen de coordenadas

$$-f(x)=-\frac{x^2}{x^2+x-2}=\frac{-x^2}{x^2+x-2}$$

$f(-x) \neq -f(x) \Rightarrow$ La gráfica de la función no es simétrica respecto al origen de coordenadas

4. *Asíntotas*

Asíntotas verticales

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{x^2}{x^2+x-2}=\infty\\ \lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x^2}{x^2+x-2}=-\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ La recta } x=-2 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2}{x^2+x-2}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2}{x^2+x-2}=\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ La recta } x=1 \text{ es una asíntota vertical.}$$

Asíntotas horizontales

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(-x)^2}{(-x)^2-x-2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1\end{array}\right\} \Rightarrow y=1 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

Asíntotas oblicuas

No tiene, ya que se trata de una función racional en la que el grado del numerador es igual al grado del denominador.

5. *Cortes con los ejes*

Cortes con el eje de ordenadas

$$\left.\begin{array}{l}y=\dfrac{x^2}{x^2+x-2}\\ x=0\end{array}\right\} \rightarrow y=0 \quad \text{Corta en el punto } (0,0).$$

Cortes con el eje de abscisas

$$\left.\begin{array}{l}y=\dfrac{x^2}{x^2+x-2}\\ y=0\end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{x^2}{x^2+x-2}=0 \rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0$$

Corta en el punto $(0,0)$

6. ***Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos***

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+x-2) - x^2(2x+1)}{\left(x^2+x-2\right)^2} = \frac{x^2-4x}{\left(x^2+x-2\right)^2}$$

Los valores de x para los que la función $f'(x)$ es discontinua son los mismos que para $f(x)$. Veamos los valores para los que $f'(x)$ se anula:

$$\frac{x^2-4x}{\left(x^2+x-2\right)^2} = 0 \quad \rightarrow \quad x^2-4x=0 \quad \rightarrow \quad x(x-4)=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x=0 \\ x-4=0 \quad \Rightarrow \quad x=4 \end{cases}$$

Los intervalos de monotonía son:

$$\left]-\infty,-2\right[\;\; ; \;\; \left]-2,0\right[\;\; ; \;\; \left]0,1\right[\;\; ; \;\; \left]1,4\right[\;\; ; \;\; \left]4,\infty\right[$$

$f'(-3) = 1'31 > 0 \Rightarrow$ en el intervalo $\left]-\infty,-2\right[$ la función $f(x)$ es creciente.

$f'(-1) = 1'25 > 0 \Rightarrow$ en el intervalo $\left]-2,0\right[$ la función $f(x)$ es creciente.

$f'(0'5) = -1'12 < 0 \Rightarrow$ en el intervalo $\left]0,1\right[$ la función $f(x)$ es decreciente.

$f'(2) = -0'25 < 0 \Rightarrow$ en el intervalo $\left]1,4\right[$ la función $f(x)$ es decreciente.

$f'(5) = 0'006 > 0 \Rightarrow$ en el intervalo $\left]4,\infty\right[$ la función $f(x)$ es creciente.

En resumen, el esquema de monotonía de $f(x)$ es:

Signo de f '	+		+		–		–		+
Monotonía de f	↗	-2	↗	0	↘	1	↘	4	↗

La función $f(x)$ es creciente $\forall x \in \left]-\infty,-2\right[\cup \left]-2,0\right[\cup \left]4,\infty\right[$

La función $f(x)$ es decreciente $\forall x \in \left]0,1\right[\cup \left]1,4\right[$

Mínimo en el punto $(4, 0'\widehat{8})$

Máximo en el punto $(0,0)$

7. ***Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión***

$$f''(x)=\frac{(2x-4)(x^2+x-2)^2-(x^2-4x)\cdot 2(x^2+x-2)(2x+1)}{(x^2+x-2)^4}=$$

$$\frac{(2x-4)(x^2+x-2)-(x^2-4x)\cdot 2(2x+1)}{(x^2+x-2)^3}=\frac{-2x^3+12x^2+8}{(x^2+x-2)^3}$$

Los valores de x para los que la función $f''(x)$ es discontinua son los mismos que para $f'(x)$.

Los valores de x para los que se anula $f''(x)$ son:

$$\frac{-2x^3+12x^2+8}{(x^2+x-2)^3}=0 \quad\rightarrow\quad -2x^3+12x^2+8=0 \quad\Rightarrow\quad x=6'10$$

Los intervalos de concavidad y convexidad son:

$$\left]-\infty,-2\right[\;\;;\;\; \left]-2,1\right[\;\;;\;\; \left]1,6'10\right[\;\;;\;\; \left]6'10,\infty\right[$$

$f''(-3)=2'65>0 \quad\Rightarrow\quad$ en el intervalo $\left]-\infty,-2\right[$ la función $f(x)$ es cóncava

$f''(0)=-1<0 \quad\Rightarrow\quad$ en el intervalo $\left]-2,1\right[$ la función $f(x)$ es convexa

$f''(2)=0'62>0 \quad\Rightarrow\quad$ en el intervalo $\left]1,6'10\right[$ la función $f(x)$ es cóncava

$f''(7)=-0'0005<0 \quad\Rightarrow\quad$ en el intervalo $\left]6'10,\infty\right[$ la función $f(x)$ es convexa

En resumen, el esquema de concavidad y convexidad de $f(x)$ es:

Signo de f''	+		−		+		−
Concavidad / Convexidad	$\cup$	−2	$\cap$	1	$\cup$	6'10	$\cap$

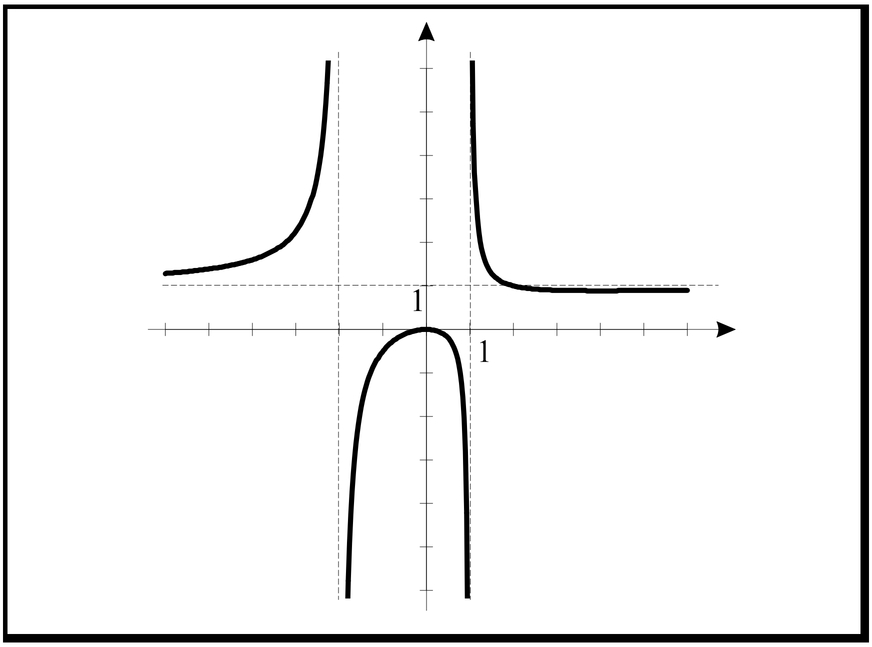
La función $f(x)$ es cóncava $\quad \forall x\in\left]-\infty,-2\right[\cup\left]1,6'10\right[$

La función $f(x)$ es convexa $\quad \forall x\in\left]-2,1\right[\cup\left]6'10,\infty\right[$

Punto de inflexión $\quad (6'10,0'90)$

8. *Tabla de valores*

x	f(x)
–5	1'38
–3	2'25
–1	–0'5
–0'5	–0'11
0'5	–0'2
1'5	1'28
2'5	0'92
6	0'9



Problema 22

Estudio y representación gráfica de la función $\mathbf{f(x)=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}}$

1. *Dominio*

$(x+1)^2=0 \quad \Rightarrow \quad x=-1$ $\qquad\qquad D[f(x)]=\forall x\in R-\{-1\}$

2. *Periodicidad*

No es periódica, ya que $f(x+T)=\dfrac{(x+T)^3}{(x+T+1)^2}\neq f(x)$.

3. *Simetrías*

Simetría respecto al eje de ordenadas

$$f(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x+1)^2}=\frac{-x^3}{(-x+1)^2}$$

$f(x)\neq f(-x) \quad \Rightarrow$ La gráfica de la función no es simétrica respecto al eje de ordenadas.

Simetría respecto al origen de coordenadas

$$-f(x)=-\frac{x^3}{(x+1)^2}=\frac{-x^3}{(x+1)^2}$$

$f(-x) \neq -f(x) \Rightarrow$ La gráfica de la función no es simétrica respecto al origen de coordenadas

4. Asíntotas

Asíntotas verticales

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x^3}{(x+1)^2} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x^3}{(x+1)^2} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ La recta } x=-1 \text{ es una asíntota vertical.}$$

Asíntotas horizontales

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3}{(x+1)^2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(-x)^3}{(-x+1)^2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-x^3}{x^2-2x+1} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3}{(x+1)^2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3}{x^2+2x+1} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ No hay.}$$

Asíntotas oblicuas

Sabemos que hay asíntota horizontal porque es una función racional, en la que el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador.

$$\left.\begin{array}{l} m = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\frac{x^3}{(x+1)^2}}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3}{x\cdot(x+1)^2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2+2x+1} = 1 \\ n = \lim\limits_{x\to +\infty} [f(x)-mx] = \lim\limits_{x\to +\infty} \left[\dfrac{x^3}{(x+1)^2} - x\right] = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-2x^2-x}{(x+1)^2} = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=-2 \end{cases}$$

La recta $y = x - 2$ es una asíntota oblicua.

Como es una función racional, la misma recta es asíntota oblicua por la izquierda que por la derecha.

5. Cortes con los ejes

Cortes con el eje de ordenadas

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{x^3}{(x+1)^2} \\ x = 0 \end{array}\right\} \rightarrow y = 0 \quad \text{Corta en el punto } (0,0).$$

Cortes con el eje de abscisas

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{x^3}{(x+1)^2} \\ y=0 \end{array}\right\} \quad\to\quad \frac{x^3}{(x+1)^2}=0 \quad\to\quad x^3=0 \quad\Rightarrow\quad x=0$$

Corta en el punto $(0,0)$

Cortes con la asíntota oblicua

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{x^3}{(x+1)^2} \\ y=x-2 \end{array}\right\} \quad\to\quad \frac{x^3}{(x+1)^2}=x-2 \quad\to\quad x^3=x^3-3x-2 \quad\Rightarrow\quad x=-0'\widehat{6} \quad\to\quad y=-2'\widehat{6}$$

Corta en el punto $(-0'\widehat{6},-2'\widehat{6})$

6. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$$f'(x)=\frac{3x^2\cdot(x+1)^2-x^3\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{3x^2(x+1)-2x^3}{(x+1)^3}=\frac{x^3+3x^2}{(x+1)^3}$$

Los valores de x para los que la función $f'(x)$ es discontinua son los mismos que para $f(x)$. Veamos los valores para los que $f'(x)$ se anula:

$$\frac{x^3+3x^2}{(x+1)^3}=0 \quad\to\quad x^3+3x^2=0 \quad\to\quad x^2(x+3)=0 \quad\to\quad \begin{cases} x^2=0 & \Rightarrow\quad x=0 \\ x+3=0 & \Rightarrow\quad x=-3 \end{cases}$$

Los intervalos de monotonía son:

$$]-\infty,-3[\quad ; \quad]-3,-1[\quad ; \quad]-1,0[\quad ; \quad]0,\infty[$$

$f'(-4)=0'59>0 \quad\Rightarrow\quad$ en el intervalo $]-\infty,-3[$ la función $f(x)$ es creciente.

$f'(-2)=-4<0 \quad\Rightarrow\quad$ en el intervalo $]-3,-1[$ la función $f(x)$ es decreciente.

$f'(-0'5)=5>0 \quad\Rightarrow\quad$ en el intervalo $]-1,0[$ la función $f(x)$ es creciente.

$f'(1)=0'5>0 \quad\Rightarrow\quad$ en el intervalo $]0,\infty[$ la función $f(x)$ es creciente.

En resumen, el esquema de monotonía de $f(x)$ es:

Signo de f'	+		−		+		+
Monotonía de f	↗	-3	↘	-1	↗	0	↗

La función $f(x)$ es creciente $\quad \forall x \in \left]-\infty,-3\right[\cup \left]-1,\infty\right[$

La función $f(x)$ es decreciente $\quad \forall x \in \left]-3,-1\right[$

Máximo en el punto $\quad (-3,-6'75)$

7. *Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión*

$$f''(x) = \frac{(3x^2+6x)(x+1)^3-(x^3+3x^2)\cdot 3(x+1)^2}{(x+1)^6} =$$

$$\frac{(3x^2+6x)(x+1)-(x^3+3x^2)\cdot 3}{(x+1)^4} = \frac{6x}{(x+1)^4}$$

Los valores de x para los que la función $f''(x)$ es discontinua son los mismos que para $f'(x)$.

Los valores de x para los que se anula $f''(x)$ son:

$$\frac{6x}{(x+1)^4} = 0 \quad \rightarrow \quad 6x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Los intervalos de concavidad y convexidad son:

$$\left]-\infty,-1\right[\quad ; \quad \left]-1,0\right[\quad ; \quad \left]0,\infty\right[$$

$f''(-2) = -12 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ en el intervalo $\left]-\infty,-1\right[$ la función $f(x)$ es convexa

$f''(-0'5) = -48 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ en el intervalo $\left]-1,0\right[$ la función $f(x)$ es convexa

$f''(1) = 0'37 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ en el intervalo $\left]0,\infty\right[$ la función $f(x)$ es cóncava

En resumen, el esquema de concavidad y convexidad de $f(x)$ es:

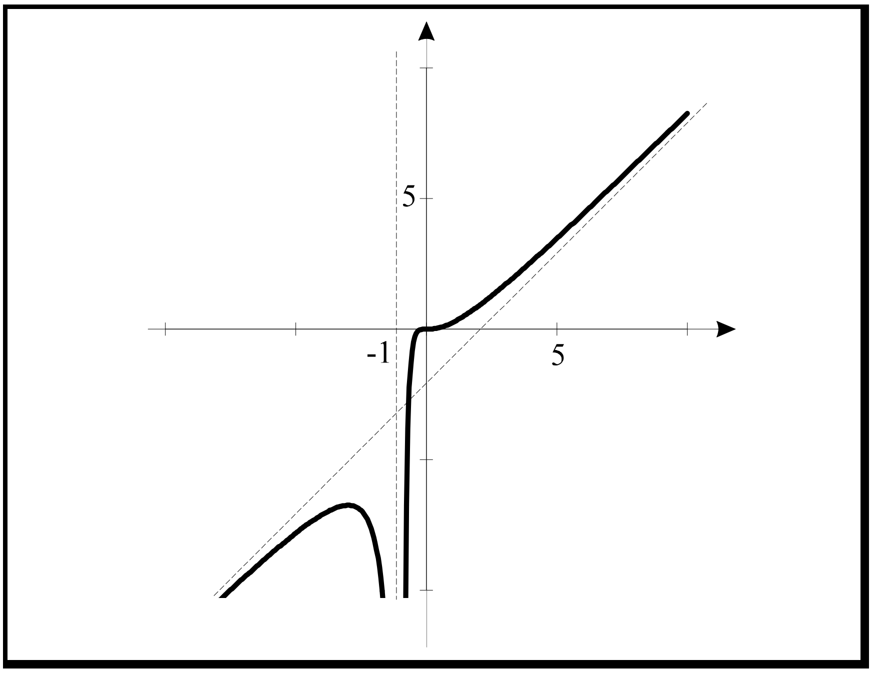
La función $f(x)$ es cóncava $\quad \forall x \in \left]0\,,\infty\right[$

La función $f(x)$ es convexa $\quad \forall x \in \left]-\infty\,,-1\right[\cup \left]-1\,,0\right[$

Punto de inflexión $\quad (0\,,0)$

8. Tabla de valores

x	f(x)
−5	−7'81
−4	−7'11
−2	−8
−0'5	−0'5
0'5	0'05
1'5	0'54
2'5	1'27
6	4'40



Problema 23

Estudio y representación gráfica de la función $\quad \mathbf{f(x) = \dfrac{x^2(2x-1)}{2x^2-1}}$

La función es $\quad f(x) = \dfrac{2x^3 - x^2}{2x^2 - 1}$

1. Dominio

$$2x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -0'70 \\ x = 0'70 \end{cases} \qquad D[f(x)] = \forall x \in R - \{-0'70\,,0'70\}$$

2. Periodicidad

No es periódica, ya que $\quad f(x+T) = \dfrac{2(x+T)^3 - (x+T)^2}{2(x+T)^2 - 1} \neq f(x)$.

3. Simetrías

Simetría respecto al eje de ordenadas

$$f(-x)=\frac{2(-x)^3-(-x)^2}{2(-x)^2-1}=\frac{-2x^3-x^2}{2x^2-1}$$

$f(x)\neq f(-x) \quad \Rightarrow$ La gráfica de la función no es simétrica respecto al eje de ordenadas.

Simetría respecto al origen de coordenadas

$$-f(x)=-\frac{2x^3-x^2}{2x^2-1}=\frac{-2x^3+x^2}{2x^2-1}$$

$f(-x)\neq -f(x) \Rightarrow$ La gráfica de la función no es simétrica respecto al origen de coordenadas

4. Asíntotas

Asíntotas verticales

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -0'7^-}\dfrac{2x^3-x^2}{2x^2-1}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -0'7^+}\dfrac{2x^3-x^2}{2x^2-1}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \text{ La recta } x=-0'7 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0'7^-}\dfrac{2x^3-x^2}{2x^2-1}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 0'7^+}\dfrac{2x^3-x^2}{2x^2-1}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \text{ La recta } x=0'7 \text{ es una asíntota vertical.}$$

Asíntotas horizontales

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^3-x^2}{2x^2-1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2(-x)^3}{2(-x)^2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-2x^3}{2x^2}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^3-x^2}{2x^2-1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^3}{2x^2}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \text{ No hay.}$$

Asíntotas oblicuas

Sabemos que hay asíntota horizontal porque es una función racional, en la que el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador.

$$\left.\begin{array}{l} m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{2x^3 - x^2}{2x^2 - 1}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3 - x^2}{2x^3 - x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3}{2x^3} = 1 \\ n = \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{2x^3 - x^2}{2x^2 - 1} - x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x^2 + x}{2x^2 - 1} = -0'5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = -0'5 \end{cases}$$

La recta $y = x - 0'5$ es una asíntota oblicua.

Como es una función racional, la misma recta es asíntota oblicua por la izquierda que por la derecha.

5. Cortes con los ejes

Cortes con el eje de ordenadas

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{2x^3 - x^2}{2x^2 - 1} \\ x = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad y = 0 \qquad \text{Corta en el punto } (0,0).$$

Cortes con el eje de abscisas

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{2x^3 - x^2}{2x^2 - 1} \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad \dfrac{2x^3 - x^2}{2x^2 - 1} = 0 \quad \rightarrow \quad 2x^3 - x^2 = 0 \quad \rightarrow 2x^3 - x^2 = 0 \quad \rightarrow$$

$$x^2(2x-1) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x^2 = 0 & \Rightarrow \quad x = 0 \\ 2x - 1 = 0 & \Rightarrow \quad x = 0'5 \end{cases}$$

Corta en los puntos $(0,0)$ y $(0'5,0)$

Cortes con la asíntota oblicua

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{2x^3 - x^2}{2x^2 - 1} \\ y = x - 0'5 \end{array}\right\} \rightarrow \quad \dfrac{2x^3 - x^2}{2x^2 - 1} = x - 0'5 \quad \rightarrow \quad 2x^3 - x^2 = 2x^3 - x^2 - x + 0'5 \quad \Rightarrow \quad x = 0'5$$

Corta en el punto $(0'5,0)$

6. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$$f'(x) = \frac{(6x^2 - 2x)(2x^2 - 1) - (2x^3 - x^2)4x}{\left(2x^2 - 1\right)^2} =$$

$$\frac{12x^4-6x^2-4x^3+2x-8x^4+4x^3}{\left(2x^2-1\right)^2}=\frac{4x^4-6x^2+2x}{\left(2x^2-1\right)^2}$$

Los valores de x para los que la función $f'(x)$ es discontinua son los mismos que para $f(x)$. Veamos los valores para los que $f'(x)$ se anula:

$$\frac{4x^4-6x^2+2x}{\left(2x^2-1\right)^2}=0 \;\rightarrow\; 4x^4-6x^2+2x=0 \;\rightarrow\; 2x(2x^3-3x+1)=0 \;\rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x=0 & \Rightarrow \quad x=0 \\ 2x^3-3x+1=0 & \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=0'36 \\ x=-1'36 \end{cases} \end{cases}$$

Los intervalos de monotonía son:

$$\left]-\infty,-1'36\right[\;;\;\left]-1'36,-0'7\right[\;;\;\left]-0'7,0\right[\;;\;\left]0,0'36\right[\;;\;\left]0'36,0'7\right[\;;\;\left]0'7,1\right[\;;\;\left]1,\infty\right[$$

$f'(-2)=0'73>0 \;\Rightarrow$ en el intervalo $\left]-\infty,-1'36\right[$ la función $f(x)$ es creciente.

$f'(-1)=-4<0 \;\Rightarrow$ en el intervalo $\left]-1'36,-0'7\right[$ la función $f(x)$ es decreciente.

$f'(-0'5)=-9<0 \;\Rightarrow$ en el intervalo $\left]-0'7,0\right[$ la función $f(x)$ es decreciente.

$f'(0'2)=0'19>0 \;\Rightarrow$ en el intervalo $\left]0,0'36\right[$ la función $f(x)$ es creciente.

$f'(0'5)=-1<0 \;\Rightarrow$ en el intervalo $\left]0'36,0'7\right[$ la función $f(x)$ es decreciente.

$f'(0'8)=-7'67<0 \;\Rightarrow$ en el intervalo $\left]0'7,1\right[$ la función $f(x)$ es decreciente.

$f'(2)=0'89>0 \;\Rightarrow$ en el intervalo $\left]1,\infty\right[$ la función $f(x)$ es creciente.

En resumen, el esquema de monotonía de $f(x)$ es:

Signo de f '	+		–		–		+		–		–		+
Monotonía de f		−1'36		−0'7		0		0'36		0'7		1	
	↗		↘		↘		↗		↘		↘		↗

La función $f(x)$ es creciente $\quad \forall x \in \left]-\infty,-1'36\right[\cup \left]0,0'36\right[\cup \left]1,\infty\right[$

La función $f(x)$ es decreciente $\quad \forall x \in \left]-1'36,-0'7\right[\cup \left]-0'7,0\right[\cup \left]0'36,0'7\right[\cup \left]0'7,1\right[$

Mínimo en los puntos $\quad (0,0)$ y $(1,1)$

Máximo en los puntos $\quad (-1'36,-2'55)$ y $(0'36,0'049)$

7. ***Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión***

$$f''(x) = \frac{(16x^3-12x+2)(2x^2-1)^2-(4x^4-6x^2+2x)2(2x^2-1)4x}{(2x^2-1)^4} =$$

$$\frac{(16x^3-12x+2)(2x^2-1)-(4x^4-6x^2+2x)8x}{(2x^2-1)^4} = \frac{8x^3-12x^2+12x-2}{(2x^3-1)^3}$$

Los valores de x para los que la función $f''(x)$ es discontinua son los mismos que para $f'(x)$.

Los valores de x para los que se anula $f''(x)$ son:

$$\frac{8x^3-12x^2+12x-2}{(2x^3-1)^3} = 0 \quad \to \quad 8x^3-12x^2+12x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x = 0'20$$

Los intervalos de concavidad y convexidad son:

$$\left]-\infty,-0'7\right[\quad ; \quad \left]-0'7,0'20\right[\quad ; \quad \left]0'20,0'7\right[\quad ; \quad \left]0'7,\infty\right[$$

$f''(-1) = -34 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ en el intervalo $\left]-\infty,-0'7\right[$ la función $f(x)$ es convexa

$f''(0) = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ en el intervalo $\left]-0'7,0'20\right[$ la función $f(x)$ es cóncava

$f''(0'5) = -16 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ en el intervalo $\left]0'20,0'7\right[$ la función $f(x)$ es convexa

$f''(1) = 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ en el intervalo $\left]0'20,\infty\right[$ la función $f(x)$ es cóncava

En resumen, el esquema de concavidad y convexidad de $f(x)$ es:

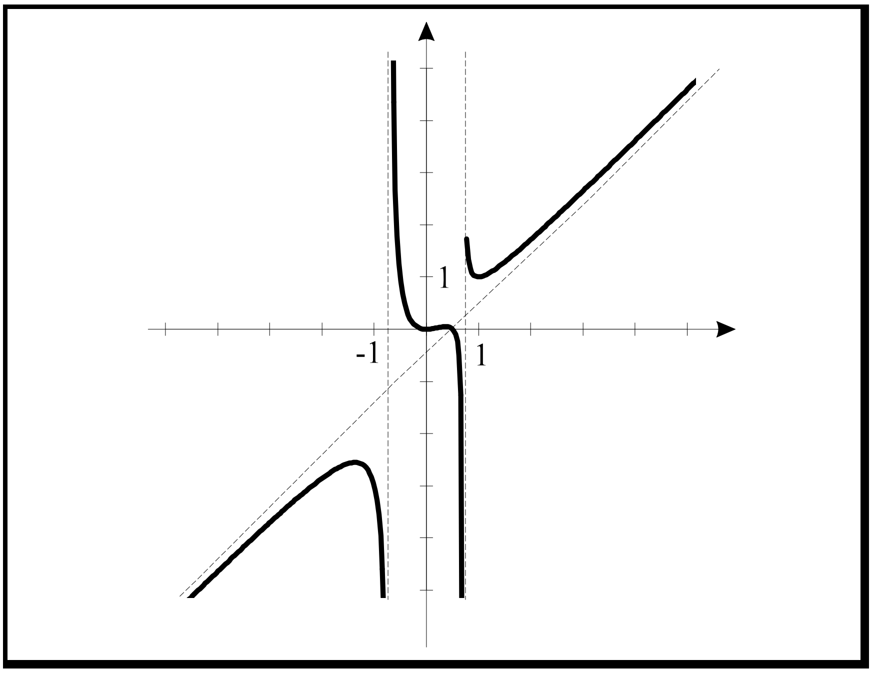
La función $f(x)$ es cóncava $\quad \forall x \in \left]-0'7, 0'20\right[\cup \left]0'7, \infty\right[$

La función $f(x)$ es convexa $\quad \forall x \in \left]-\infty, -0'7\right[\cup \left]0'20, 0'7\right[$

Punto de inflexión $\quad (0'20, 0'02)$

8. ***Tabla de valores***

x	$f(x)$
-5	$-7'81$
-4	$-7'11$
-2	-8
$-0'5$	$-0'5$
$0'5$	$0'05$
$1'5$	$0'54$
$2'5$	$1'27$
6	$4'40$



Problema 24

Estudio y representación gráfica de la función $\quad \mathbf{f(x) = e^{-\frac{(x+3)^2}{2}}}$

1. ***Dominio***

$D[f(x)] = \forall x \in R$

2. ***Periodicidad***

No es periódica, ya que $\quad f(x+T) = e^{-\frac{(x+T+3)^2}{2}} \neq f(x)$.

3. ***Simetrías***

Simetría respecto al eje de ordenadas

$f(-x) = e^{-\frac{(-x+3)^2}{2}}$

$f(x) \neq f(-x) \quad \Rightarrow$ La gráfica de la función no es simétrica respecto al eje de ordenadas.

Simetría respecto al origen de coordenadas

$$-f(x) = -e^{-\frac{(x+3)^2}{2}}$$

$f(-x) \neq -f(x) \;\Rightarrow$ La gráfica de la función no es simétrica respecto al origen de coordenadas

4. *Asíntotas*

Asíntotas verticales

No tiene.

Asíntotas horizontales

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\frac{(x+3)^2}{2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{(-x+3)^2}{2}} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{(x+3)^2}{2}} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ La recta } y = 0 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

Asíntotas oblicuas

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-\frac{(x+3)^2}{2}}}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{No hay asíntota oblicua.}$$

5. *Cortes con los ejes*

Cortes con el eje de ordenadas

$$\left.\begin{array}{l} y = e^{-\frac{(x+3)^2}{2}} \\ x = 0 \end{array}\right\} \to \quad y = 0'011 \quad \text{Corta en el punto } (0, 0'01).$$

Cortes con el eje de abscisas

$$\left.\begin{array}{l} y = e^{-\frac{(x+3)^2}{2}} \\ y = 0 \end{array}\right\} \to \quad e^{-\frac{(x+3)^2}{2}} \neq 0 \quad \to \quad \text{No corta al eje de abscisas.}$$

6. *Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos*

$$f'(x) = e^{-\frac{(x+3)^2}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2(x+3) = (-x-3) \cdot e^{-\frac{(x+3)^2}{2}}$$

Veamos los valores para los que $f'(x)$ se anula:

$$(-x-3)\cdot e^{-\frac{(x+3)^2}{2}}=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} -x-3=0 \quad \Rightarrow \quad x=-3 \\ e^{-\frac{(x+3)^2}{2}} \neq 0 \end{cases}$$

Los intervalos de monotonía son:

$$\left]-\infty,-3\right[\quad ; \quad \left]-3,\infty\right[$$

$f'(-4)=0'60>0 \quad \Rightarrow \quad$ en el intervalo $\left]-\infty,-3\right[$ la función $f(x)$ es creciente.

$f'(0)=-0'03<0 \quad \Rightarrow \quad$ en el intervalo $\left]-3,\infty\right[$ la función $f(x)$ es decreciente.

En resumen, el esquema de monotonía de $f(x)$ es:

Signo de f '	+		−
Monotonía de f	$\nearrow$	-3	$\searrow$

La función $f(x)$ es creciente $\quad \forall x \in \left]-\infty,-3\right[$

La función $f(x)$ es decreciente $\quad \forall x \in \left]-3,\infty\right[$

Máximo en el punto $\quad (-3,1)$

7. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión

$$f''(x)=-e^{-\frac{(x+3)^2}{2}}+(-x-3)\cdot e^{-\frac{(x+3)^2}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2(x+3)=e^{-\frac{(x+3)^2}{2}}\cdot\left[-1+(-x-3)^2\right]=$$

$$e^{-\frac{(x+3)^2}{2}}\cdot\left[x^2+6x+8\right]$$

Los valores de x para los que se anula $f''(x)$ son:

$$e^{-\frac{(x+3)^2}{2}}\cdot\left[x^2+6x+8\right]=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} e^{-\frac{(x+3)^2}{2}} \neq 0 \\ x^2+6x+8=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=-2 \\ x=-4 \end{cases} \end{cases}$$

Los intervalos de concavidad y convexidad son:

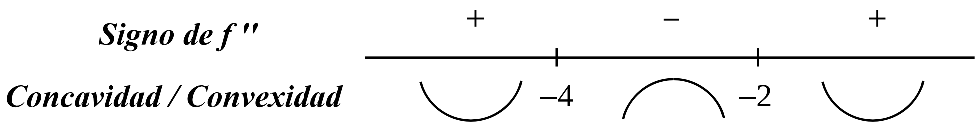
$$]-\infty,-4[\quad ;\quad]-4,-2[\quad ;\quad]-2,\infty[$$

$$f''(-5)=0'40>0 \quad\Rightarrow\quad \text{en el intervalo }]-\infty,-4[\text{ la función } f(x) \text{ es cóncava}$$

$$f''(-3)=-1<0 \quad\Rightarrow\quad \text{en el intervalo }]-4,-2[\text{ la función } f(x) \text{ es convexa}$$

$$f''(0)=0'08>0 \quad\Rightarrow\quad \text{en el intervalo }]-2,\infty[\text{ la función } f(x) \text{ es cóncava}$$

En resumen, el esquema de concavidad y convexidad de $f(x)$ es:



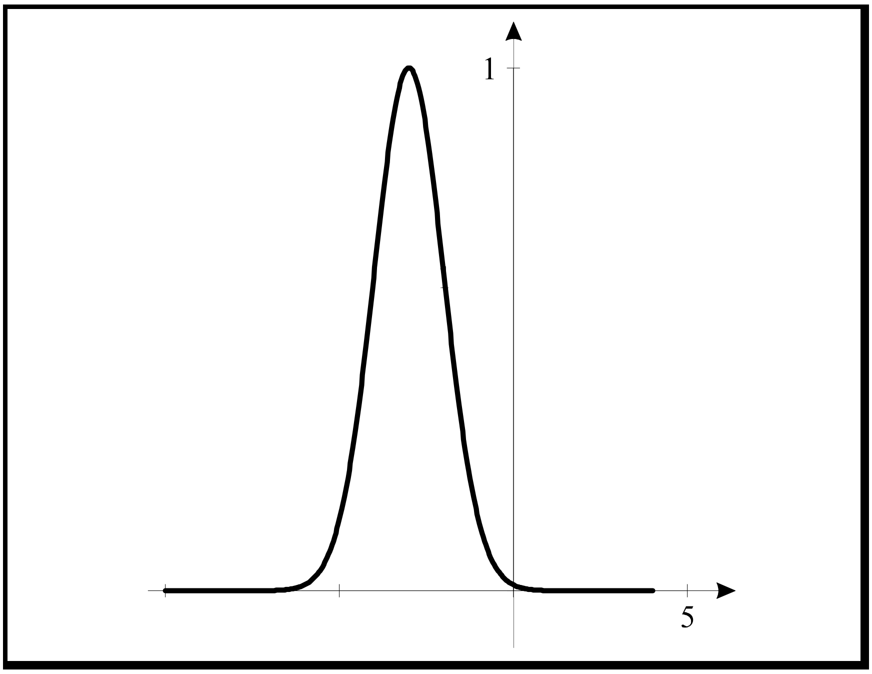
La función $f(x)$ es cóncava $\quad \forall x \in]-\infty,-4[\cup]-2,\infty[$

La función $f(x)$ es convexa $\quad \forall x \in]-4,-2[$

Puntos de inflexión $\quad (-4, 0'60)$ y $(-2, 0'60)$

8. ***Tabla de valores***

x	$f(x)$
-8	$0'000003$
-5	$0'13$
$-3'5$	$0'88$
$-2'5$	$0'88$
$-1'5$	$0'43$
$2'5$	$0'00004$



Problema 25

Estudio y representación gráfica de la función $\mathbf{f(x) = \dfrac{\ln x}{x}}$

1. Dominio

$D\left[f(x)\right] = \forall x > 0$

2. Periodicidad

No es periódica, ya que $f(x+T) = \dfrac{\ln(x+T)}{x+T} \neq f(x)$.

3. Simetrías

Simetría respecto al eje de ordenadas

$$f(-x) = \frac{\ln(-x)}{-x}$$

$f(x) \neq f(-x) \quad \Rightarrow$ La gráfica de la función no es simétrica respecto al eje de ordenadas.

Simetría respecto al origen de coordenadas

$$-f(x) = -\frac{\ln x}{x}$$

$f(-x) \neq -f(x) \quad \Rightarrow$ La gráfica de la función no es simétrica respecto al origen de coordenadas

4. Asíntotas

Asíntotas verticales

. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty \quad \to \quad$ La recta $x = 0$ es una asíntota vertical por la derecha.

Asíntotas horizontales

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0 \quad \to \quad$ La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

Asíntotas oblicuas

Como por la derecha hay asíntota horizontal, no puede haber oblicua por ese lado.

5. *Cortes con los ejes*

Cortes con el eje de ordenadas

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{\ln x}{x} \\ x = 0 \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \text{No está definida en } x = 0 .$$

Cortes con el eje de abscisas

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{\ln x}{x} \\ y = 0 \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \rightarrow \quad \ln x = 0 \quad \rightarrow \quad x = e^0 = 1$$

Corta en el punto $(1,0)$

6. *Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos*

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Los valores de x para los que la función $f'(x)$ es discontinua son los mismos que para $f(x)$. Veamos los valores para los que $f'(x)$ se anula:

$$\frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \quad \rightarrow \quad 1 - \ln x = 0 \quad \rightarrow \quad \ln x = 1 \quad \rightarrow \quad x = e^1 = e$$

Los intervalos de monotonía son:

$$]0, e[\;\; ; \;\;]e, \infty[$$

$f'(1) = 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ en el intervalo $]0, e[$ la función $f(x)$ es creciente.

$f'(4) = -0'02 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ en el intervalo $]e, \infty[$ la función $f(x)$ es decreciente.

En resumen, el esquema de monotonía de $f(x)$ es:

Signo de f '		+		–
Monotonía de f	0	$\nearrow$	e	$\searrow$

La función $f(x)$ es creciente $\quad \forall x \in \left]0, e\right[$

La función $f(x)$ es decreciente $\quad \forall x \in \left]e, \infty\right[$

Máximo en el punto $\quad (e, 0'36)$

7. *Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión*

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-1 - 2 + 2\ln x}{x^3} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$$

Los valores de x para los que la función $f''(x)$ es discontinua son los mismos que para $f'(x)$.

Los valores de x para los que se anula $f''(x)$ son:

$$\frac{-3 + 2\ln x}{x^3} = 0 \quad \rightarrow \quad -3 + 2\ln x = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln x = \frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad x = e^{\frac{3}{2}} = 4'48$$

Los intervalos de concavidad y convexidad son:

$$\left]0, 4'48\right[\quad ; \quad \left]4'48, \infty\right[$$

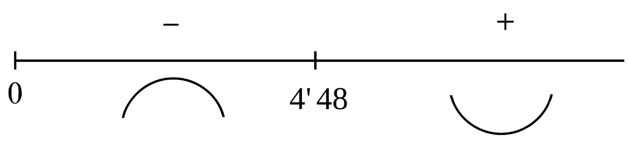
$f''(2) = -0'20 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ en el intervalo $\left]0, 4'48\right[$ la función $f(x)$ es convexa

$f''(5) = 0'001 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ en el intervalo $\left]4'48, \infty\right[$ la función $f(x)$ es cóncava

En resumen, el esquema de concavidad y convexidad de $f(x)$ es:

Signo de f''

Concavidad / Convexidad



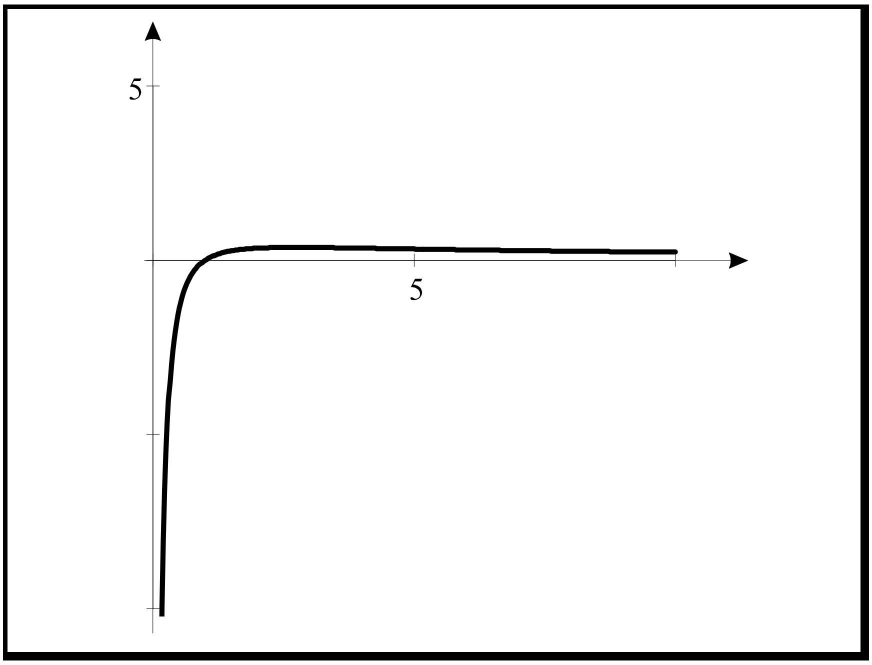
La función $f(x)$ es cóncava $\quad \forall x \in \left]4'48, \infty\right[$

La función $f(x)$ es convexa $\quad \forall x \in \left]0, 4'48\right[$

Punto de inflexión $\quad (4'48, 0'33)$

8. *Tabla de valores*

x	$f(x)$
$0'25$	$-5'54$
$0'5$	$-1'38$
$0'75$	$-0'38$
$1'5$	$0'27$
2	$0'34$
$3'5$	$0'35$
$4'5$	$0'33$
$5'5$	$0'30$



Problema 26

Estudio y representación gráfica de la función $f(x) = 2\cos x - \cos 2x$

1. *Dominio*

$D[f(x)] = \forall x \in R$

2. *Periodicidad*

Es periódica, de periodo 2π, ya que:

$$f(x+2\pi) = 2\cos(x+2\pi) - \cos[2(x+2\pi)] = 2\cos x - \cos 2x = f(x)$$

Debido a la periodicidad, la resolución se puede reducir al intervalo $[-\pi, \pi]$. E incluso, como veremos en el siguiente apartado, se puede reducir al intervalo $[0, \pi]$ por la simetría de los dos sumandos alrededor de $x = 0$.

3. *Simetrías*

Simetría respecto al eje de ordenadas

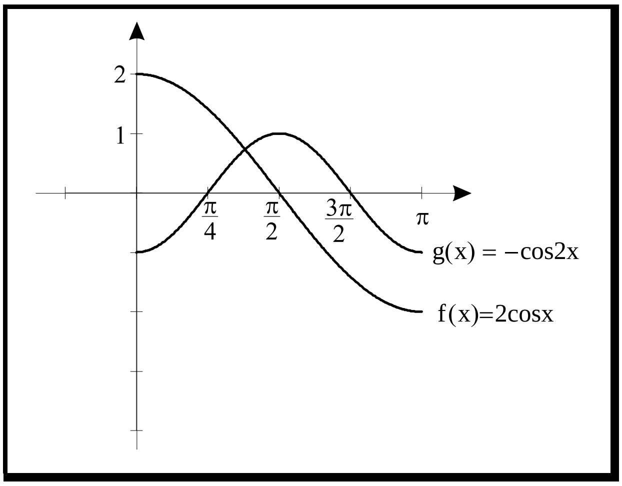
$f(-x) = 2\cos(-x) - \cos 2(-x) = 2\cos x - \cos 2x$

$f(x) = f(-x) \quad \Rightarrow$ La gráfica de la función es simétrica respecto al eje de ordenadas.
Como la función es periódica, podemos reducir el intervalo a $[0, \pi]$.

En este intervalo, las curvas que hay que sumar son:

$$f(x) = 2\cos x \qquad y \qquad g(x) = -\cos 2x$$

Sumando las ordenadas correspondientes podemos tener una buena idea de la curva. El único problema es hallar exactamente los puntos en los que hay máximos y mínimos y cortes con el eje de abscisas.



Simetría respecto al origen de coordenadas

$$-f(x) = -2\cos x + \cos 2x$$

$f(-x) \neq -f(x) \;\Rightarrow\;$ La función no es simétrica respecto al origen de coordenadas

4. *Asíntotas*

Asíntotas verticales

No tiene.

Asíntotas horizontales

No tiene.

Asíntotas oblicuas

No tiene.

5. *Cortes con los ejes*

Cortes con el eje de ordenadas

$$\left.\begin{array}{l} y = 2\cos x - \cos 2x \\ x = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad y = 1$$ Corta en el punto $(0,1)$.

Cortes con el eje de abscisas

$$\left.\begin{array}{l} y = 2\cos x - \cos 2x \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad 2\cos x - \cos 2x = 0 \quad \rightarrow \quad 2\cos x = \cos 2x$$

$$2\cos x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \quad \rightarrow \quad 2\cos x = \cos^2 x - \left(1 - \cos^2 x\right) \quad \rightarrow \quad 2\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{4} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Pero $\frac{1+\sqrt{3}}{2} > 1$, y por tanto no vale. El único punto de corte con el eje de abscisas, cuando $x \in [0,\pi]$ es: $x = \arccos\frac{1-\sqrt{3}}{2} = 1'9455$

Corta en el punto $(1'9455, 0)$

6. ***Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos***

$$f'(x) = -2\,\text{sen}\,x + 2\,\text{sen}\,2x$$

Veamos los valores para los que $f'(x)$ se anula:

$$-2\,\text{sen}\,x + 2\,\text{sen}\,2x = 0 \quad \to \quad \text{sen}\,2x = \text{sen}\,x \quad \to \quad 2\,\text{sen}\,x\cos x = \text{sen}\,x \quad \to \quad 2\cos x = 1$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \to \quad x = \arccos 0.5 = 1'04$$

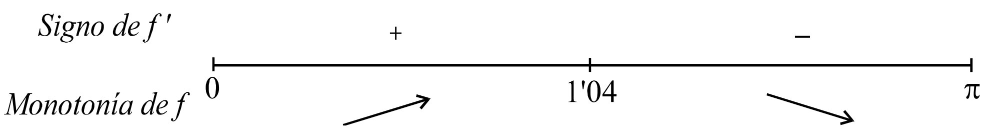
Los intervalos de monotonía son:

$$\left]0, 1'04\right[\ ; \ \left]1'04, \pi\right[$$

$f'(0'5) = 0'72 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ en el intervalo $\left]0, 1'04\right[$ la función $f(x)$ es creciente.

$f'(2) = -3'32 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ en el intervalo $\left]1'04, \pi\right[$ la función $f(x)$ es decreciente.

En resumen, el esquema de monotonía de $f(x)$ en $[0,\pi]$ es:



La función $f(x)$ es creciente $\quad \forall x \in \left]0, 1'04\right[$

La función $f(x)$ es decreciente $\quad \forall x \in \left]1'04, \pi\right[$

Los máximos y mínimos los obtenemos utilizando el criterio de la segunda derivada, para ver el resultado en los extremos del intervalo.

$$f''(x) = -2\cos x + 4\cos 2x$$

$f''(0) = -2\cos 0 + 4\cos 0 = 2 > 0 \quad \rightarrow \quad$ en el punto de abscisa 0 hay un mínimo.

$f''(1'04) = -2\cos 1'04 + 4\cos 1'04 = -2'96 < 0 \quad \rightarrow \quad$ en el punto de abscisa 1’04 hay un mínimo.

$f''(\pi) = -2\cos \pi + 4\cos \pi = 6 > 0 \quad \rightarrow \quad$ en el punto de abscisa π hay un mínimo.

Mínimo en los puntos $\quad (0,1) \ \text{ y } \ (\pi, -3)$

Máximo en el punto $\quad (1'04, 1'49)$

7. *Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión*

$$f''(x) = -2\cos x + 4\cos 2x$$

Los valores de x para los que se anula $f''(x)$ son:

$$-2\cos x + 4\cos 2x = 0 \quad \rightarrow \quad 2\cos 2x = \cos x \quad \rightarrow \quad 2(\cos^2 x - \text{sen}^2 x) = \cos x$$

$$4\cos^2 x - \cos x - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad \cos x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \arccos\dfrac{1+\sqrt{33}}{8} = 2'20 \\ x = \arccos\dfrac{1-\sqrt{33}}{8} = 0'56 \end{cases}$$

Los intervalos de concavidad y convexidad en el intervalo $[0, \pi]$ son:

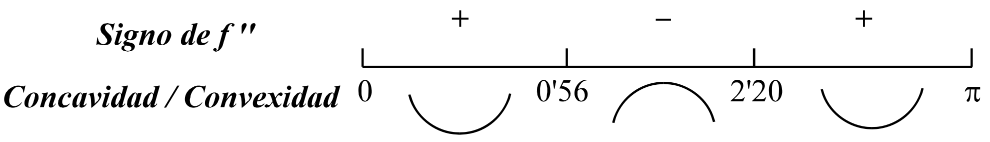
$$]0, 0'56[\quad ; \quad]0'56, 2'20[\quad ; \quad]2'20, \pi[$$

$f''(0'2) = 1'72 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ en el intervalo $\ ]0, 0'56[\ $ la función $f(x)$ es cóncava

$f''(1) = -2'74 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ en el intervalo $\ ]0'56, 2'20[\ $ la función $f(x)$ es convexa

$f''(3) = 5'82 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ en el intervalo $\ ]2'20, \pi[\ $ la función $f(x)$ es cóncava

En resumen, el esquema de concavidad y convexidad de $f(x)$ es:

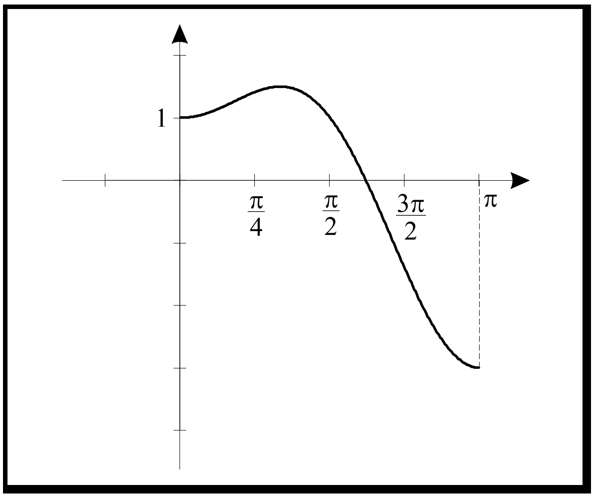


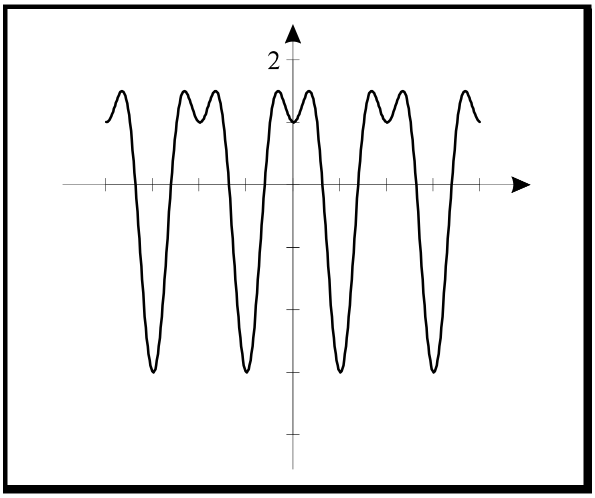
La función $f(x)$ es cóncava $\quad \forall x \in \ ]0, 0'56[\cup]2'20, \pi[$

La función $f(x)$ es convexa $\quad \forall x \in \left]0'56\,,2'20\right[$

Puntos de inflexión $\quad (0'56\,,1'25)$ y $(2'20\,,-0'86)$

Con estos datos, la curva que se obtiene es la representada debajo a la izquierda. El resto, es decir, la representación de la curva en todo el intervalo $\left]-\infty\,,+\infty\right[$, se obtiene sometiendo este trozo $\left[\,0\,,\pi\,\right]$ a una simetría respecto al eje OY y luego prolongándola por periodicidad, como se aprecia debajo a la derecha..





Problema 27

Estudio y representación gráfica de la función $\quad \mathbf{f(x)=\dfrac{x}{x\cdot e^{x}+1}}$

1. *Dominio*

$D\left[f(x)\right]=\forall x\in R$

2. *Periodicidad*

No es periódica, ya que $\quad f(x+T)=\dfrac{x+T}{(x+T)\cdot e^{x+T}+1}\neq f(x)\,.$

3. *Simetrías*

Simetría respecto al eje de ordenadas

$$f(-x)=\frac{-x}{-x\cdot e^{-x}+1}$$

$f(x)\neq f(-x) \quad \Rightarrow \quad$ La gráfica de la función no es simétrica respecto al eje de ordenadas.

Simetría respecto al origen de coordenadas

$$-f(x) = -\frac{x}{x\cdot e^x+1} = \frac{-x}{x\cdot e^x+1}$$

$f(-x) \neq -f(x) \;\Rightarrow$ La gráfica de la función no es simétrica respecto al origen de coordenadas

4. *Asíntotas*

Asíntotas verticales

No hay.

Asíntotas horizontales

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x\cdot e^x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x}{-x\cdot e^{-x}+1} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x\cdot e^x+1} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ La recta $y=0$ es una asíntota horizontal.

Asíntotas oblicuas

$$\left.\begin{array}{l} m = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\frac{x}{x\cdot e^x+1}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x}{(-x)^2\cdot e^{-x}-x} = 1 \\ n = \lim\limits_{x\to-\infty} \left[f(x)-mx\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x}{x\cdot e^x+1}-x\right] = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x^2e^x}{x\cdot e^x+1} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=0 \end{cases}$$

La recta $y=x$ es una asíntota oblicua.

Como hay asíntota horizontal por la derecha, no puede haber oblicua por el mismo lado, pero sí por la izquierda, como acabamos de comprobar.

5. *Cortes con los ejes*

Cortes con el eje de ordenadas

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{x}{x\cdot e^x+1} \\ x=0 \end{array}\right\} \to \quad y=0$$ Corta en el punto $(0,0)$.

Cortes con el eje de abscisas

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{x}{x\cdot e^x+1} \\ y=0 \end{array}\right\} \quad\rightarrow\quad \frac{x}{x\cdot e^x+1}=0 \quad\rightarrow\quad x=0 \quad\rightarrow\quad \text{Corta en el punto} \quad (0,0)$$

Cortes con la asíntota oblicua

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{x}{x\cdot e^x+1} \\ y=x \end{array}\right\} \quad\rightarrow\quad \frac{x}{x\cdot e^x+1}=x \quad\rightarrow\quad x^2\cdot e^x=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x^2=0 \quad\Rightarrow\quad x=0 \\ e^x\neq 0 \end{cases}$$

Corta en el punto $(0,0)$

6. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$$f'(x)=\frac{xe^x+1-x(e^x+xe^x)}{(x\cdot e^x+1)^2}=\frac{1-x^2e^x}{(x\cdot e^x+1)^2}$$

Veamos los valores para los que $f'(x)$ se anula:

$$\frac{1-x^2e^x}{(x\cdot e^x+1)^2}=0 \quad\rightarrow\quad 1-x^2e^x=0 \quad\Rightarrow\quad x=0'703 \quad \text{calculada por aproximación.}$$

Los intervalos de monotonía son:

$$\left]-\infty,0'703\right[\ ;\ \left]0'703,\infty\right[$$

$f'(0)=1>0 \quad\Rightarrow\quad$ en el intervalo $\left]-\infty,0'703\right[$ la función $f(x)$ es creciente.

$f'(1)=-0'12<0 \quad\Rightarrow\quad$ en el intervalo $\left]0'703,\infty\right[$ la función $f(x)$ es decreciente.

En resumen, el esquema de monotonía de $f(x)$ es:

Signo de f'	$+$		$-$
Monotonía de f	$\nearrow$	$0'703$	$\searrow$

La función $f(x)$ es creciente $\quad \forall x\in\left]-\infty,0'703\right[$

La función $f(x)$ es decreciente $\quad \forall x\in\left]0'703,\infty\right[$

Máximo en el punto $(0'703, 0'29)$

7. ***Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión***

$$f''(x) = \frac{(-2xe^x - x^2e^x)(xe^x+1)^2 - (1-x^2e^x)2(xe^x+1)(e^x+xe^x)}{(xe^x+1)^4} =$$

$$\frac{(-2xe^x - x^2e^x)(xe^x+1) - (1-x^2e^x)2(e^x+xe^x)}{(xe^x+1)^3} = \frac{e^x(x^3e^x - 4x - 2 - x^2)}{(xe^x+1)^3}$$

Los valores de x para los que se anula $f''(x)$ calculados por aproximación son:

$$\frac{e^x(x^3e^x - 4x - 2 - x^2)}{(xe^x+1)^3} = 0 \quad \rightarrow \quad e^x(x^3e^x - 4x - 2 - x^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} e^x \neq 0 \\ x = -2'814 \\ x = -0'634 \\ x = 1'338 \end{cases}$$

Los intervalos de concavidad y convexidad son:

$$\left]-\infty, -2'814\right[\quad ; \quad \left]-2'814, -0'634\right[\quad ; \quad \left]-0'634, 1'338\right[\quad ; \quad \left]1'338, \infty\right[$$

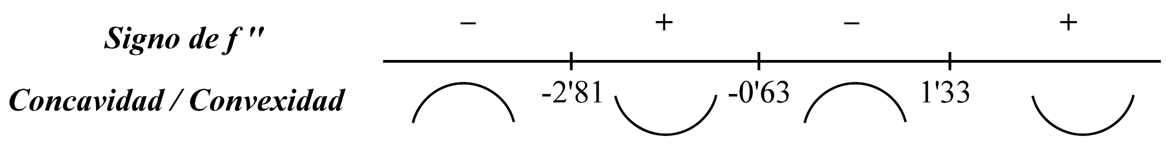
$f''(-3) = -0'02 < 0 \quad \Rightarrow$ en el intervalo $\left]-\infty, -2'814\right[$ la función $f(x)$ es convexa

$f''(-1) = 0'920 > 0 \quad \Rightarrow$ en el intervalo $\left]-2'814, -0'634\right[$ la función $f(x)$ es cóncava

$f''(0) = -2 < 0 \quad \Rightarrow$ en el intervalo $\left]-0'634, 1'338\right[$ la función $f(x)$ es convexa

$f''(2) = 0'08 > 0 \quad \Rightarrow$ en el intervalo $\left]1'338, \infty\right[$ la función $f(x)$ es cóncava

En resumen, el esquema de concavidad y convexidad de $f(x)$ es:



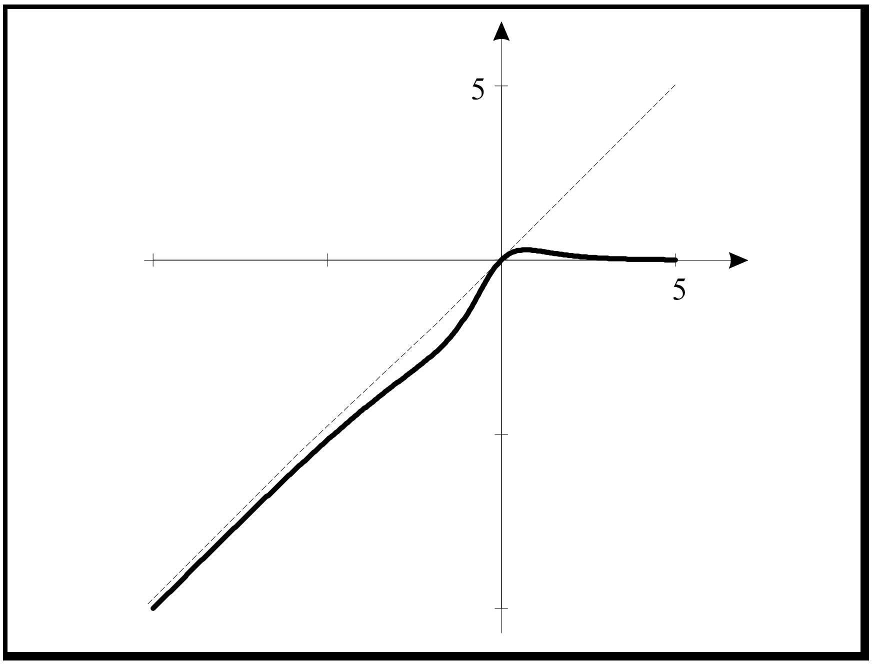
La función $f(x)$ es cóncava $\quad \forall x \in \left]-2'814, -0'634\right[\cup \left]1'338, \infty\right[$

La función $f(x)$ es convexa $\quad \forall x \in \left]-\infty, -2'814\right[\cup \left]-0'634, 1'338\right[$

Puntos de inflexión $\quad (-2'81, -3'38)$; $(-0'63, -0'95)$ y $(1'33, 0'21)$

8. ***Tabla de valores***

x	f(x)
−5	−5'17
−4	−4'31
−2	−2'74
−0'5	−0'71
0'5	0'27
1'5	0'19
2'5	0'079
6	0'002



Problema 28

Estudio y representación gráfica de la función $\mathbf{f(x)=\dfrac{x^4-x^2}{x^7-x^5-x^2+1}}$

Intentaremos simplificar la expresión viendo si el numerador tiene alguna de las raíces del denominador.

$$\frac{x^4-x^2}{x^7-x^5-x^2+1}=\frac{x^2(x^2-1)}{(x-1)(x+1)(x^5-1)}=\frac{x^2(x+1)(x-1)}{(x-1)(x+1)(x^5-1)}=\frac{x^2}{x^5-1}$$

La función que vamos a estudiar queda así:

$$f(x)=\frac{x^2}{x^5-1} \quad \text{para} \quad x\neq -1 \;\; y \;\; x\neq 1$$

1. ***Dominio***

$D\left[f(x)\right]=\forall x\in R-\{1\}$

2. ***Periodicidad***

No es periódica, ya que $f(x+T)=\dfrac{(x+T)^2}{(x+T)^5-1}\neq f(x)$.

3. ***Simetrías***

Simetría respecto al eje de ordenadas

$$f(-x)=\frac{(-x)^2}{(-x)^5-1}=\frac{x^2}{-x^5-1}$$

$f(x)\neq f(-x) \quad \Rightarrow$ La gráfica de la función no es simétrica respecto al eje de ordenadas.

Simetría respecto al origen de coordenadas

$$-f(x)=-\frac{x^2}{x^5-1}$$

$f(-x)\neq -f(x) \;\Rightarrow$ La gráfica de la función no es simétrica respecto al origen de coordenadas

4. Asíntotas

Asíntotas verticales

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2}{x^5-1}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2}{x^5-1}=+\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \text{La recta } x=1 \text{ es una asíntota vertical.}$$

Asíntotas horizontales

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2}{x^5-1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(-x)^2}{(-x)^5-1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{-x^5}=0\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{x^5-1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{x^5}=0\end{array}\right\} \Rightarrow \text{La recta } y=0 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

Asíntotas oblicuas

En las funciones racionales, si hay asíntota horizontal no hay oblicua.

5. Cortes con los ejes

Cortes con el eje de ordenadas

$$\left.\begin{array}{l}y=\dfrac{x^2}{x^5-1}\\ x=0\end{array}\right\} \rightarrow \; y=0 \quad \text{Corta en el punto } (0,0).$$

Cortes con el eje de abscisas

$$\left.\begin{array}{l}y=\dfrac{x^2}{x^5-1}\\ y=0\end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{x^2}{x^5-1}=0 \rightarrow x^2=0 \rightarrow x=0 \rightarrow \text{Corta en el punto } (0,0)$$

6. ***Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos***

$$f'(x)=\frac{2x(x^5-1)-x^2 5x^4}{(x^5-1)^2}=\frac{-3x^6-2x}{(x^5-1)^2}$$

Los valores de x para los que la función $f'(x)$ es discontinua son los mismos que para $f(x)$. Veamos los valores para los que $f'(x)$ se anula:

$$\frac{-3x^6-2x}{(x^5-1)^2}=0 \;\rightarrow\; -3x^6-2x=0 \;\rightarrow\; x(-3x^5-2)=0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x=0 \\ x=\sqrt[5]{-\dfrac{2}{3}}=-0\text{'}92 \end{cases}$$

Los intervalos de monotonía son:

$$\left]-\infty,-1\right[\;;\;\left]-1,-0\text{'}92\right[\;;\;\left]-0\text{'}92,0\right[\;;\;\left]0,1\right[\;;\;\left]1,\infty\right[$$

$f'(-2)=-0\text{'}17<0 \;\Rightarrow$ en el intervalo $\left]-\infty,-1\right[$ la función $f(x)$ es decreciente.

$f'(-0\text{'}95)=-0\text{'}09<0 \;\Rightarrow$ en el intervalo $\left]-1,-0\text{'}92\right[$ la función $f(x)$ es decreciente.

$f'(-0\text{'}5)=0\text{'}89>0 \;\Rightarrow$ en el intervalo $\left]-0\text{'}92,0\right[$ la función $f(x)$ es creciente.

$f'(0\text{'}5)=-1\text{'}11<0 \;\Rightarrow$ en el intervalo $\left]0,1\right[$ la función $f(x)$ es decreciente.

$f'(2)=-0\text{'}20<0 \;\Rightarrow$ en el intervalo $\left]1,\infty\right[$ la función $f(x)$ es decreciente.

En resumen, el esquema de monotonía de $f(x)$ es:

Signo de f'	−		−		+		−		−
Monotonía de f	↘	−1	↘	−0'92	↗	0	↘	1	↘

La función $f(x)$ es creciente $\quad \forall x\in\left]-0\text{'}92,0\right[$

La función $f(x)$ es decreciente $\quad \forall x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]-1,-0\text{'}92\right[\cup\left]0,1\right[\cup\left]1,\infty\right[$

Mínimo en el punto $\quad(-0\text{'}92,-0\text{'}51)$

Máximo en el punto $\quad(0,0)$

7. ***Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión***

$$f''(x) = \frac{(-18x^5 - 2)(x^5 - 1)^2 - (-3x^6 - 2x)2(x^5 - 1)5x^4}{(x^5 - 1)^3} = \frac{12x^{10} + 36x^5 + 2}{(x^5 - 1)^3}$$

Los valores de x para los que la función $f''(x)$ es discontinua son los mismos que para $f'(x)$.

Los valores de x para los que se anula $f''(x)$ son:

$$\frac{12x^{10} + 36x^5 + 2}{(x^5 - 1)^3} = 0 \quad \rightarrow \quad 12x^{10} + 36x^5 + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -1'24 \\ x = -0'56 \end{cases}$$

Los intervalos de concavidad y convexidad son:

$$\left]-\infty, -1'24\right[\quad ; \quad \left]-1'24, -1\right[\quad ; \quad \left]-1, -0'56\right[\quad ; \quad \left]-0'56, 1\right[\quad ; \quad \left]1, \infty\right[$$

$f''(-2) = -0'30 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ en el intervalo $\left]-\infty, -1'24\right[$ la función $f(x)$ es convexa

$f''(-1'1) = 1'39 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ en el intervalo $\left]-1'24, -1\right[$ la función $f(x)$ es cóncava

$f''(-0'7) = 2'32 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ en el intervalo $\left]-1, -0'56\right[$ la función $f(x)$ es cóncava

$f''(0) = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ en el intervalo $\left]-0'56, 1\right[$ la función $f(x)$ es convexa

$f''(2) = 0'45 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ en el intervalo $\left]1, \infty\right[$ la función $f(x)$ es cóncava

En resumen, el esquema de concavidad y convexidad de $f(x)$ es:

Signo de f''	−		+		+		−		+
		$-1'24$		-1		$-0'56$		1	
Concavidad / Convexidad	∩		∪		∪		∩		∪

La función $f(x)$ es cóncava $\quad \forall x \in \left]-1'24, -1\right[\cup \left]-1, -0'56\right[\cup \left]1, \infty\right[$

La función $f(x)$ es convexa $\quad \forall x \in \left]-\infty, -1'24\right[\cup \left]-0'56, 1\right[$

Punto de inflexión $(-1'24, -0'39)$ y $(-0'56, -0'29)$

8. *Tabla de valores*

x	f(x)
-5	$-0'007$
-4	$-0'01$
-2	$-0'12$
$-0'5$	$-0'24$
$0'5$	$-0'25$
$1'5$	$0'34$
$2'5$	$0'06$
6	$0'004$