Problema 29

Representar gráficamente la función $\mathbf{f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x} & \text{si} \quad x<0\\ x^3-4x^2+3x & \text{si} \quad x\geq 0\end{cases}}$

Si $x<0$

1. Dominio

$D[f(x)]=\forall x<0$

2. Periodicidad

No es periódica, ya que $f(x+T)=\dfrac{(x+T)^2-4}{x+T}\neq f(x)$.

3. Simetrías

Simetría respecto al eje de ordenadas

$$f(-x)=\frac{(-x)^2-4}{-x}=\frac{x^2-4}{-x}$$

$f(x)\neq f(-x) \quad \Rightarrow$ La gráfica de la función no es simétrica respecto al eje de ordenadas.

4. Asíntotas

Asíntotas verticales

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2-4}{x}=+\infty \quad \Rightarrow$ La recta $x=0$ es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales

$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-4}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(-x)^2-4}{-x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{-x}=-\infty \quad \Rightarrow$ No hay.

Asíntotas oblicuas

$$\left.\begin{array}{l} m=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\frac{x^2-4}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-4}{x^2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(-x)^2-4}{(-x)^2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1 \\ n=\lim\limits_{x\to -\infty}[f(x)-mx]=\lim\limits_{x\to -\infty}\left[\dfrac{x^2-4}{x}-x\right]=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-4}{-x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{4}{x}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=0 \end{cases}$$

La recta $y = x$ es una asíntota oblicua.

5. *Cortes con los ejes*

Cortes con el eje de ordenadas

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{x^2 - 4}{x} \\ x = 0 \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \text{No está definida en } x = 0 .$$

Cortes con el eje de abscisas

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{x^2 - 4}{x} \\ y = 0 \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \frac{x^2 - 4}{x} = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -2$$

Corta en el punto $(-2, 0)$

Cortes con la asíntota oblicua

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{x^2 - 4}{x} \\ y = x \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \frac{x^2 - 4}{x} = x \quad \rightarrow \quad x^2 - 4 = x^2 \quad \Rightarrow \quad -4 \neq 0 \qquad \text{No corta.}$$

6. *Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos*

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2 - 4)}{x^2} = \frac{x^2 + 4}{x^2}$$

Veamos los valores para los que $f'(x)$ se anula:

$$\frac{x^2 + 4}{x^2} = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{No se anula en ningún punto.}$$

La función $f(x)$ es creciente $\forall x < 0$

No tiene máximos ni mínimos.

7. *Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión*

$$f''(x) = \frac{2x \cdot x^2 - (x^2 + 4) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-8}{x^3}$$

Los valores de x para los que se anula $f''(x)$ son:

$$\frac{-8}{x^3}=0 \quad \rightarrow \quad -8\neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{No se anula en ningún punto.}$$

La función $f(x)$ es cóncava $\quad \forall x<0$

No hay punto de inflexión

Si $x\geq 0$

1. *Dominio*

$D[f(x)]=\forall x\geq 0$

2. *Periodicidad*

No es periódica, ya que $f(x+T)=(x+T)^3-4(x+T)^2+3(x+T)\neq f(x)$.

3. *Simetrías*

Simetría respecto al eje de ordenadas

$f(-x)=(-x)^3-4(-x)^2+3(-x)=-x^3-4x^2-3x$

$f(x)\neq f(-x) \quad \Rightarrow$ La gráfica de la función no es simétrica respecto al eje de ordenadas.

4. *Asíntotas*

No tiene por ser una función polinómica.

5. *Cortes con los ejes*

Cortes con el eje de ordenadas

$$\left.\begin{array}{l} y=x^3-4x^2+3x \\ x=0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad y=0 \quad \rightarrow \quad \text{Corta en el punto } (0,0).$$

Cortes con el eje de abscisas

$$\left.\begin{array}{l} y=x^3-4x^2+3x \\ y=0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad x^3-4x^2+3x=0 \quad \rightarrow \quad x(x^2-4x+3)=0$$

$$\begin{cases} x=0 \\ x^2-4x+3=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \quad \text{Corta en los puntos: } (0,0) \ ; \ (1,0) \ ; \ (3,0)$$

6. <u>Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos</u>

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 3$$

Veamos los valores para los que $f'(x)$ se anula:

$$3x^2 - 8x + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 0'45 \\ x = 2'21 \end{cases}$$

Los intervalos de monotonía son:

$$\left]0, 0'45\right[\quad ; \quad \left]0'45, 2'21\right[\quad ; \quad \left]2'21, \infty\right[$$

$f'(0'1) = 2'23 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ en el intervalo $\left]0, 0'45\right[$ la función $f(x)$ es creciente.

$f'(1) = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ en el intervalo $\left]0'45, 2'21\right[$ la función $f(x)$ es decreciente.

$f'(3) = 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ en el intervalo $\left]2'21, \infty\right[$ la función $f(x)$ es creciente.

En resumen, el esquema de monotonía de $f(x)$ es:

	0		0'45		2'21	
Signo de f'		+		−		+
Monotonía de f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

La función $f(x)$ es creciente $\quad \forall x \in \left]0, 0'45\right[\cup \left]2'21, \infty\right[$

La función $f(x)$ es decreciente $\quad \forall x \in \left]0'45, 2'21\right[$

Máximo en el punto $\quad (0'45, 0'63)$

Mínimo en el punto $\quad (2'21, -2'11)$

7. <u>Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión</u>

$$f''(x) = 6x - 8$$

Los valores de x para los que se anula $f''(x)$ son:

$$6x - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1'\widehat{3}$$

Los intervalos de concavidad y convexidad son:

$$\left]0, 1'\widehat{3}\right[\quad ; \quad \left]1'\widehat{3}, \infty\right[$$

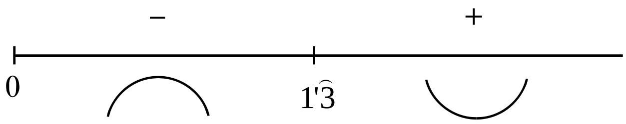
$$f''(1) = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{en el intervalo } \left]0, 1'\widehat{3}\right[\text{ la función } f(x) \text{ es convexa}$$

$$f''(2) = 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{en el intervalo } \left]1'\widehat{3}, \infty\right[\text{ la función } f(x) \text{ es cóncava}$$

En resumen, el esquema de concavidad y convexidad de $f(x)$ es:

Signo de f ''

Concavidad / Convexidad



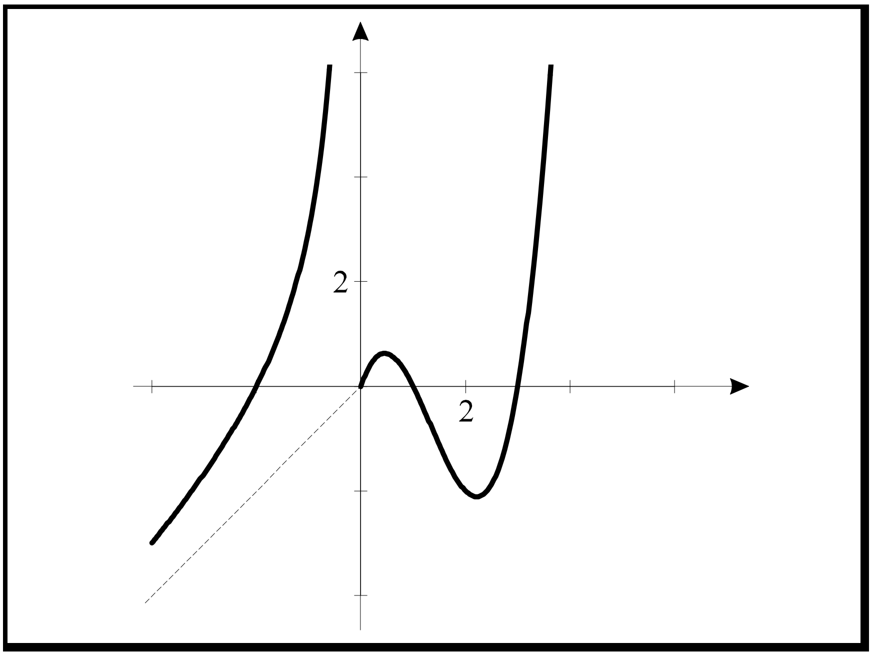
La función $f(x)$ es cóncava $\quad \forall x \in \left]1'\widehat{3}, \infty\right[$

La función $f(x)$ es convexa $\quad \forall x \in \left]0, 1'\widehat{3}\right[$

Punto de inflexión $\quad (1'\widehat{3}, -0'74)$

8. ***Tabla de valores***

x	$f(x)$
–5	–4'2
–4	–3
–2	0
–0'5	7'5
0'5	0'62
1'5	–1'12
2'5	–1'87
6	90



Problema 30

Estudio y representación gráfica de la función $\quad \mathbf{f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \le 0 \\ x \cdot e^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}}$

Si $x \le 0$

La función es constante e igual a cero.

Si $x > 0$

1. Dominio

$D[f(x)] = \forall x > 0$

2. Periodicidad

No es periódica, ya que $f(x+T) = (x+T)\cdot e^{-(x+T)} \ne f(x)$.

3. Simetrías

Simetría respecto al eje de ordenadas

$f(-x) = (-x)\cdot e^{-(-x)} = -xe^{x}$

$f(x) \ne f(-x) \quad \Rightarrow$ La gráfica de la función no es simétrica respecto al eje de ordenadas.

4. Asíntotas

Asíntotas verticales

No tiene.

Asíntotas horizontales

$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0 \quad \Rightarrow$ La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

5. Cortes con los ejes

Cortes con el eje de ordenadas

$$\left.\begin{array}{l} y = xe^{-x} \\ x = 0 \end{array}\right\} \to y = 0 \quad \text{Corta en el punto } (0,0).$$

Cortes con el eje de abscisas

$$\left.\begin{array}{l} y = xe^{-x} \\ y = 0 \end{array}\right\} \to xe^{-x} = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ e^{-x} \ne 0 \end{cases} \quad \text{Corta en el punto } (0,0)$$

6. ***Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos***

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$$

Veamos los valores para los que $f'(x)$ se anula:

$$e^{-x} - xe^{-x} = 0 \quad \rightarrow \quad e^{-x}(1-x) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} e^{-x} \neq 0 \\ 1 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \end{cases}$$

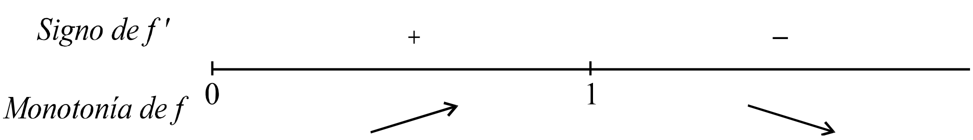
Los intervalos de monotonía son:

$$\left]0,1\right[\quad ; \quad \left]1,\infty\right[$$

$f'(0'5) = 0'30 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ en el intervalo $\left]0,1\right[$ la función $f(x)$ es creciente.

$f'(2) = -0'13 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ en el intervalo $\left]1,\infty\right[$ la función $f(x)$ es decreciente.

En resumen, el esquema de monotonía de $f(x)$ es:



La función $f(x)$ es creciente $\quad \forall x \in \left]0,1\right[$

La función $f(x)$ es decreciente $\quad \forall x \in \left]1,\infty\right[$

Máximo en el punto $\quad (1, 0'36)$

7. ***Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión***

$$f''(x) = -e^{-x}(1-x) + e^{-x}(-1) = e^{-x}(x-2)$$

Los valores de x para los que se anula $f''(x)$ son:

$$e^{-x}(x-2) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} e^{-x} \neq 0 \\ x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \end{cases}$$

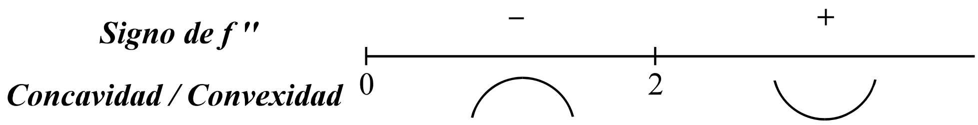
Los intervalos de concavidad y convexidad son:

$$\left]0,2\right[\quad ; \quad \left]2,\infty\right[$$

$f''(1) = -0'36 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ en el intervalo $\left]0,2\right[$ la función $f(x)$ es convexa

$f''(3) = 0'04 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ en el intervalo $\left]2,\infty\right[$ la función $f(x)$ es cóncava

En resumen, el esquema de concavidad y convexidad de $f(x)$ es:



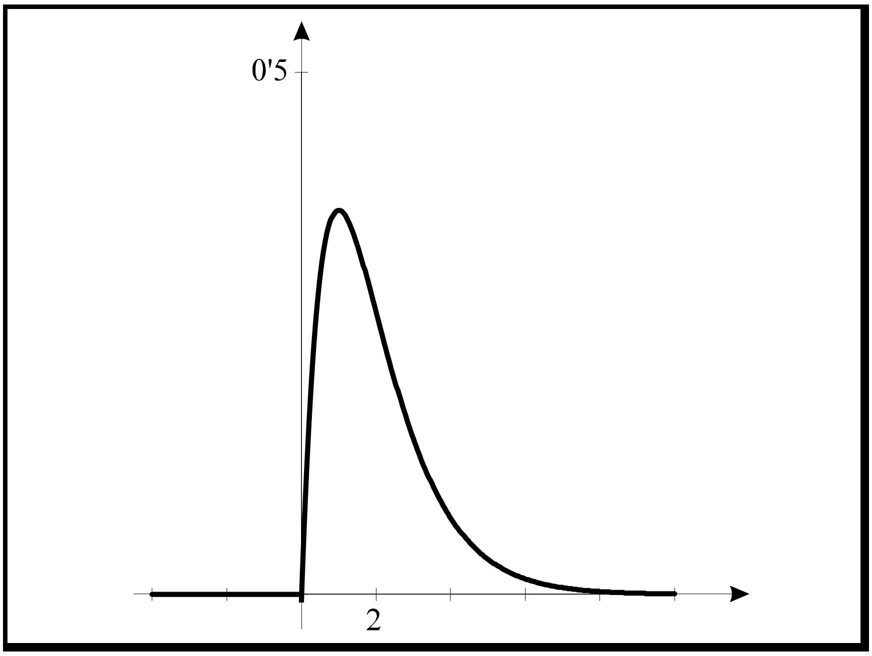
La función $f(x)$ es cóncava $\quad \forall x \in \left]2,\infty\right[$

La función $f(x)$ es convexa $\quad \forall x \in \left]0,2\right[$

Punto de inflexión $\quad (2, 0'27)$

8. *Tabla de valores*

x	$f(x)$
-5	0
-4	0
-2	0
$-0'5$	0
$0'5$	$0'30$
$1'5$	$0'33$
$2'5$	$0'20$
6	$0'01$



Problema 31

Dada la función $\mathbf{f(x)} = \begin{cases} -1 & \textbf{si} \quad -8 \le x < -4 \\ x+2 & \textbf{si} \quad -4 \le x < 2 \\ \dfrac{8}{x} & \textbf{si} \quad 2 \le x \end{cases}$ **se pide:**

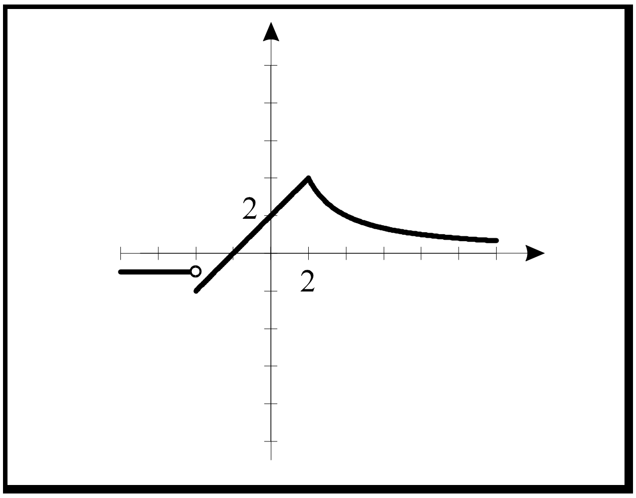
a) Representar gráficamente $f(x)$.

b) Estudiar la continuidad y crecimiento de $f(x)$

c) Obtener la gráfica de $|f(x)|$.

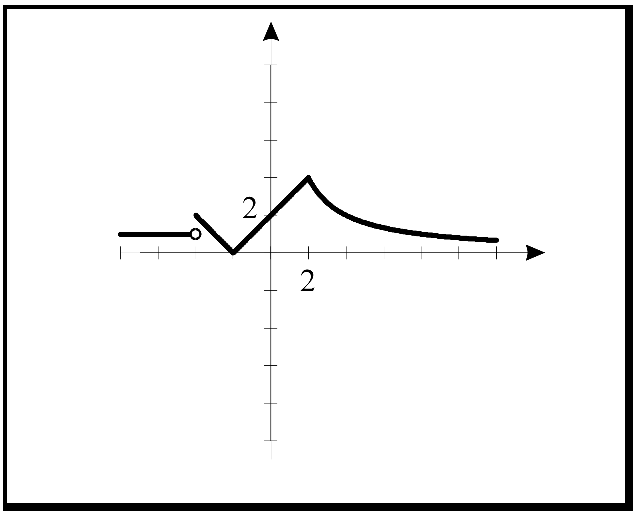
d) Determinar $f^{-1}(1)$.

a) Los diferentes trozos de la función son fáciles de representar (dos rectas y una hipérbola). El resultado es el mostrado al margen:



b) La función es discontinua en $x=-4$, constante en $[-8,4]$, creciente en $]-4,2[$ y decreciente en $]2,\infty[$.

c) La gráfica de $|f(x)|$ se obtiene sustituyendo los trozos de $f(x)$ que están bajo el eje de abscisas por los trozos correspondientes sobre el eje de abscisas.



d) Para $x=1$, la función es $f(x)=x+2$.

$$y=x+2 \quad \rightarrow \quad x=y+2 \quad \rightarrow$$

$$y=x-2 \quad \rightarrow \quad f^{-1}(x)=x-2$$

$$f^{-1}(1)=1-2=-1$$

Problema 32

Dada la función $f(x)=\begin{cases} \mathbf{0} & \textbf{si} \quad x<-1 \\ |x| & \textbf{si} \quad -1\le x\le 1 \\ \mathbf{0} & \textbf{si} \quad x>1 \end{cases}$

Encontrar sus valores máximos y mínimos. ¿En qué puntos es continua la función?

La función anterior la podemos expresar de la siguiente manera:

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -1 \\ -x & \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ x & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

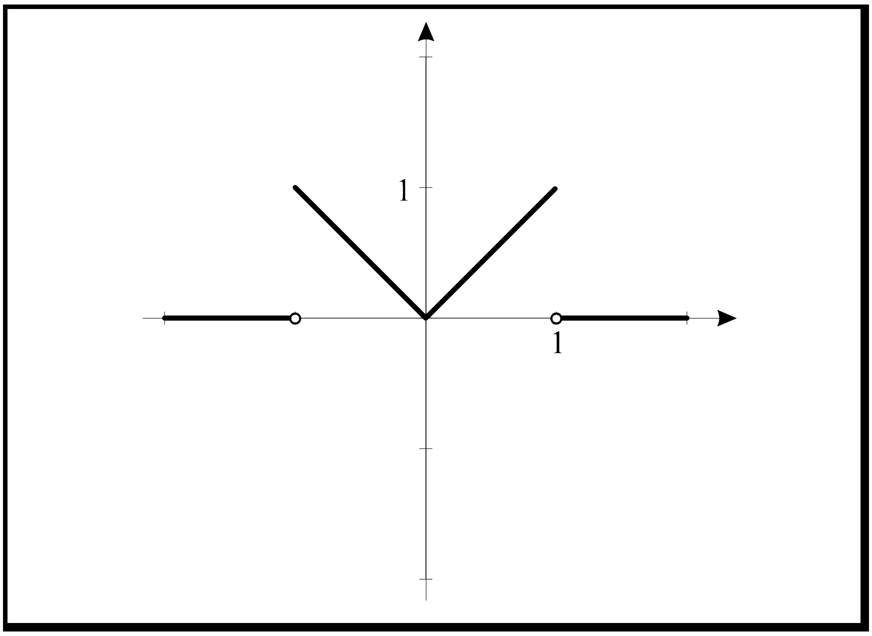
Hay máximos absolutos en los puntos de abscisa $x = -1$ y $x = 1$, y su valor es 1.

El valor mínimo es 0 y se alcanza en:

$$\left]-\infty, -1\right[\cup \{0\} \cup \left]1, \infty\right[$$

La función es continua en:

$$\forall x \in R - \{-1, 1\}$$



Problema 33

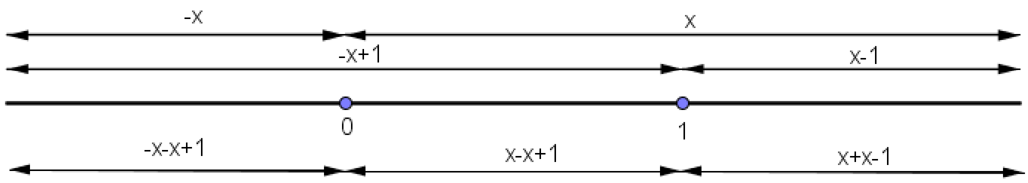
Representar gráficamente la función $y = |x| + |x - 1|$ e indicar razonadamente en qué puntos dicha función no es diferenciable.

Para representar una función dada como suma de valores absolutos conviene eliminar éstos. Para ello, cada una de las expresiones que están entre barras convendrá definirla en dos trozos:

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

$$|x - 1| = \begin{cases} -(x-1) = -x + 1 & \text{si} \quad x - 1 < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x - 1 = 0 \\ x - 1 & \text{si} \quad x - 1 > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad |x - 1| = \begin{cases} -x + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = 1 \\ x - 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

y después, ver la forma que adopta la función suma en los intervalos: $\left]-\infty, 0\right]$, $\left]0, 1\right[$, $\left]1, \infty\right[$.

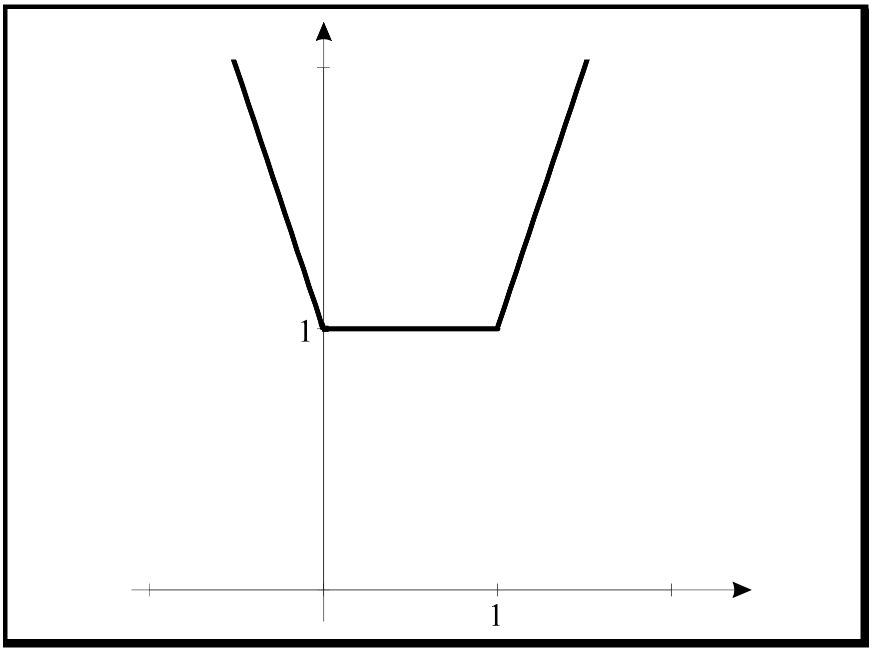


La función que resulta es: $$f(x)=\begin{cases} -2x+1 & \text{si} \quad x\in\left]-\infty,0\right] \\ 1 & \text{si} \quad x\in\left]0,1\right[\\ 2x-1 & \text{si} \quad x\in\left[1,\infty\right[\end{cases}$$

La función no es diferenciable en los puntos de abscisa:

$$x=0 \quad y \quad x=1$$

que, como se observa en la gráfica de la función, corresponden a puntos angulosos, si bien la función sí es continua en dichos puntos.



Problema 34

Se considera la función $\mathbf{f:R\to R}$ **definida por** $\mathbf{f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}}$

a) Estudiar en qué puntos es continua en cuáles derivable.

b) Encontrar $\mathbf{f''(x)}$**.**

c) Representar la curva $\mathbf{f(x)}$**.**

Lo mejor es deshacernos del valor absoluto distinguiendo intervalos.

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x} & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \dfrac{x}{1+x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) <u>*Continuidad*</u>

La función es claramente continua en $x < 0$ y $x > 0$.

En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{1-x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{1+x} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

La función es continua en $x = 0$.

<u>*Derivabilidad*</u>

La función es claramente derivable en $x > 0$ y $x < 0$.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{1}{(1+x)^2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

En el punto $x = 0$, como la función es continua podemos derivar utilizando la tabla:

$$\left.\begin{array}{l} f'_-(0) = \dfrac{1}{(1-0)^2} = 1 \\ f'_+(0) = \dfrac{1}{(1+0)^2} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0) = 1$$

Por tanto, la derivada existe $\forall x \in R$ y es:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ \dfrac{1}{(1+x)^2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

b) Ya que tenemos $f'(x)$, será sencillo obtener $f''(x)$ allí donde exista.

$$f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3} \quad \text{si} \quad x<0$$

$$f''(x)=\frac{-2}{(1+x)^3} \quad \text{si} \quad x>0$$

En el punto $x=0$ acudimos a la definición.

$$\left.\begin{array}{l} f''_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\dfrac{1}{(1-x)^2}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-(1-x)^2}{x(1-x)^2}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2x-x^2}{x(1-x)^2}=2 \\ f''_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{(1+x)^2}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-(1+x)^2}{x(1+x)^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-2x-x^2}{x(1+x)^2}=-2 \end{array}\right\}$$

$$\to \quad f''_-(0)\neq f''_+(0) \quad \Rightarrow \quad \nexists\, f''(0)$$

$$f''(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{(1-x)^3} & \text{si} \quad x<0 \\ \text{No existe} & \text{si} \quad x=0 \\ \dfrac{-2}{(1+x)^3} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

c) Para representar la curva, observamos primero que:

$$f(-x)=\frac{-x}{1+|-x|}=-\frac{x}{1+|x|}=-f(x)$$

lo que nos indica que hay simetría respecto al origen de coordenadas. <u>Basta representar</u> $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$, $x>0$ <u>y hacer luego una simetría.</u>

1. <u>Dominio</u>

$$D[f(x)]=\forall x>0$$

2. <u>Periodicidad</u>

No es periódica, ya que $f(x+T)=\dfrac{x+T}{1+x+T}\neq f(x)$.

3. *Asíntotas*

Asíntotas verticales

No tiene.

Asíntotas horizontales

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x}=1 \quad \Rightarrow \quad$ La recta $y=1$ es una asíntota horizontal.

4. *Cortes con los ejes*

Cortes con el eje de ordenadas

$\left.\begin{matrix} y=\frac{x}{1+x} \\ x=0 \end{matrix}\right\} \quad \to \quad y=0 \quad$ Corta en el punto $(0,0)$.

Cortes con el eje de abscisas

$\left.\begin{matrix} y=\frac{x}{1+x} \\ y=0 \end{matrix}\right\} \quad \to \quad \frac{x}{1+x}=0 \quad \to \quad x=0 \quad$ Corta en el punto $(0,0)$

6. *Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos*

$$f'(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$$

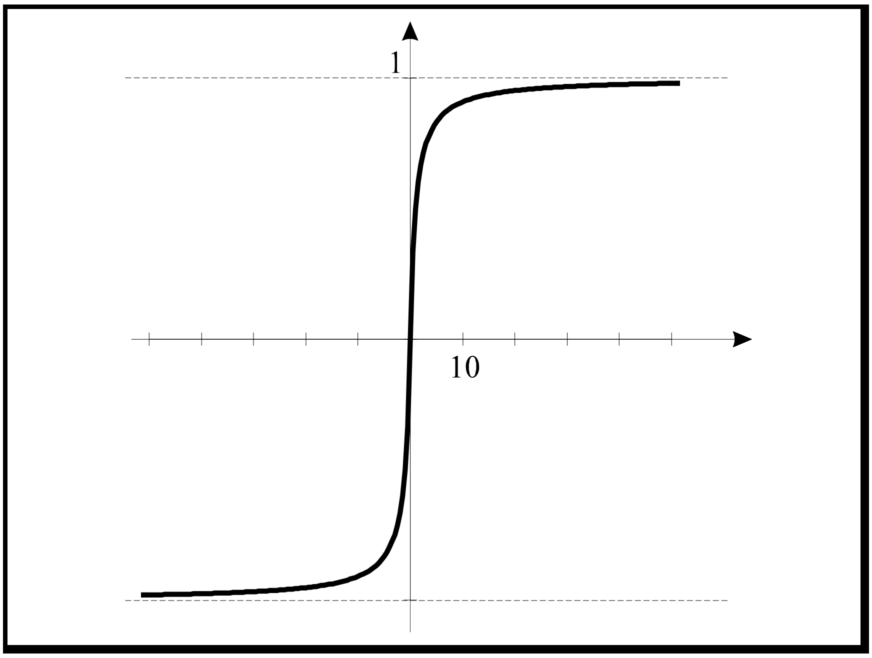
Como el numerador es 1 y el denominador es siempre positivo la función es siempre creciente. No tiene máximos ni mínimos.

7. *Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión*

$$f''(x)=\frac{-2}{(1+x)^3}$$

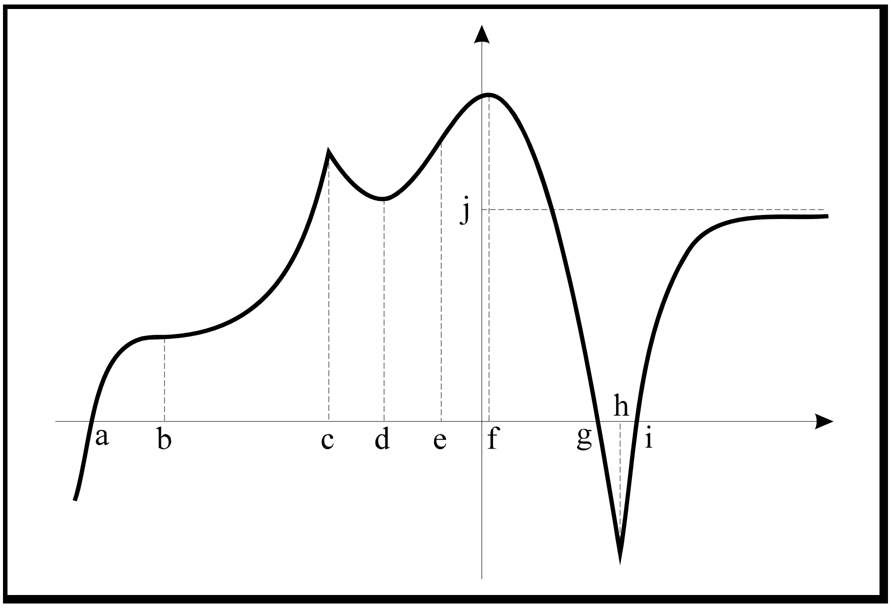
Como $x>0$ el cociente es siempre negativo, por tanto la función es convexa. No tiene puntos de inflexión.

x	f(x)
–50	–0'98
–40	–0'97
–20	–0'95
–0'5	–0'33
0'5	0'33
20	0'95
40	0'97
50	0'98



Problema 35

Sabiendo que la gráfica de una cierta función f es como se muestra en la figura, detallar toda la información que se pueda deducir sobre f (valor en algunos puntos, límites, continuidad y derivabilidad,...), su derivada f' (valor de f' en algunos puntos, signo,...) y sobre su derivada segunda (valor en algunos puntos, signo,...).



La función f es continua $\forall x \in R$.

La función f es creciente $\quad \forall x \in \left]-\infty, c\right[\cup \left]d, f\right[\cup \left]h, \infty\right[$

La función f es decreciente $\quad \forall x \in \left]c, d\right[\cup \left]f, h\right[$

Asíntota $\quad y = j$

Cortes con el eje de abscisas $\quad (a, 0),\ (g, 0),\ (i, 0)$

La función es derivable $\forall x \in R - \{c, h\}$. La derivada se anula en $x = b,\ x = d$ y $x = f$.

En $x = d$ y $x = h$ hay mínimos relativos, y en $x = c$ y $x = f$ hay máximos relativos.

En $x = b$ hay un punto de inflexión.

$f' > 0 \ \ \forall x \in \left]-\infty, c\right[\cup \left]d, f\right[\cup \left]h, \infty\right[$

$f' < 0 \ \ \forall x \in \left]c, d\right[\cup \left]f, h\right[\cup \left]h, \infty\right[$

$f'' > 0 \ \ \forall x \in \left]b, c\right[\cup \left]c, e\right[$

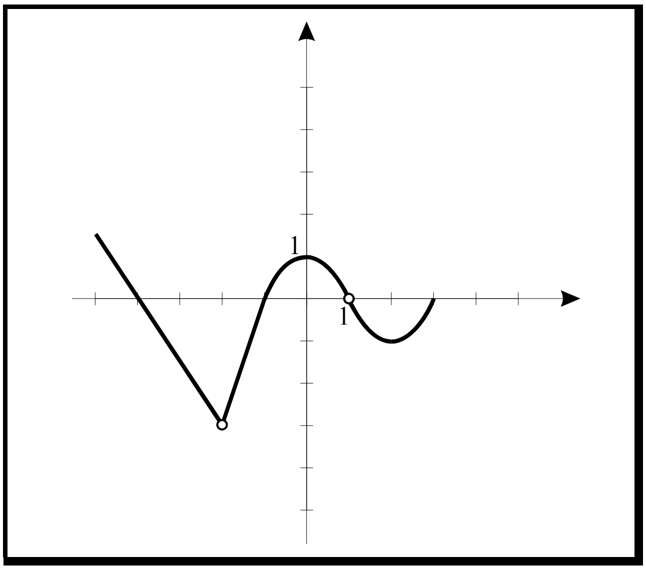
$f'' < 0 \ \ \forall x \in \left]-\infty, b\right[\cup \left]e, h\right[\cup \left]h, \infty\right[$

$f'' = 0$ en $x = b$ y $x = e$

Problema 36

Determinar el dominio, recorrido, puntos de discontinuidad y clasificación de éstos, así como la expresión algebraica de la función cuya gráfica es la de la figura. Hállense asimismo:

$$\lim_{x\to 1} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to -1} f(x)$$



Dominio $\qquad \forall x \in \left[-5, -2\right[\cup \left]-2, 1\right[\cup \left]1, 3\right]$

Recorrido $\qquad$ La recta que pasa por los puntos $(-4, 0)$ y $(-2, -3)$ tiene por ecuación:

$$y = -\frac{3}{2}(x+4), \text{ y así, para } x = -5 \Rightarrow y = \frac{3}{2}.$$

Por tanto, el recorrido es: $\left]-3, \frac{3}{2}\right]$

La función es continua en todos los puntos en los que está definida.

Para calcular la expresión algebraica de la función, supondremos que en los intervalos $\left]-2,1\right[$ y $\left]1,3\right]$ la función es una parábola.

En $\left[-5,-2\right[$ tenemos $y=-\frac{3}{2}(x+4)$, como acabamos de ver.

En $\left]-2,1\right[$ tratamos de hallar la parábola que pasa por los puntos: $(-2,-3)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ y $(1,0)$, si existe. Será: $y=ax^2+bx+c$

$$(-1,0) \rightarrow 0=a-b+c$$

$$(0,1) \rightarrow 1=c$$

$$(1,0) \rightarrow 0=a+b+c$$

$$\left.\begin{array}{r} a-b+c=0 \\ c=1 \\ a+b+c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-1 \\ b=0 \\ c=1 \end{array}\right. \rightarrow y=-x^2+1 \text{ que efectivamente pasa por el punto } (-2,-3)$$

En $\left]1,3\right]$ tratamos de hallar la parábola que pasa por los puntos: $(1,0)$, $(2,-1)$, y $(3,0)$, si existe. Será: $y=mx^2+nx+p$

$$(1,0) \rightarrow 0=m+n+p$$

$$(2,-1) \rightarrow -1=4m+2n+p$$

$$(3,0) \rightarrow 0=9m+3n+p$$

$$\left.\begin{array}{r} m+n+p=0 \\ 4m+2n+p=-1 \\ 9m+3n+p=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} m=1 \\ n=-4 \\ p=3 \end{array}\right. \rightarrow y=x^2-4x+3$$

La expresión algebraica de f es por tanto:

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{3}{2}(x+4) & \text{si } x\in\left[-5,2\right[\\ -x^2+1 & \text{si } x\in\left]-2,1\right[\\ x^2-4x+3 & \text{si } x\in\left]1,3\right] \end{cases}$$

Claramente, $\lim_{x\to 1} f(x)=0$, $\lim_{x\to -1} f(x)=0$.

Problema 37

Dibujar la gráfica y escribir las ecuaciones de una función real que cumpla lo siguiente: sea continua en todos los puntos, sea lineal si $x < -3$, cuadrática en el intervalo cerrado $[-3, 3]$ y tienda a 0 cuando $x \to \infty$.

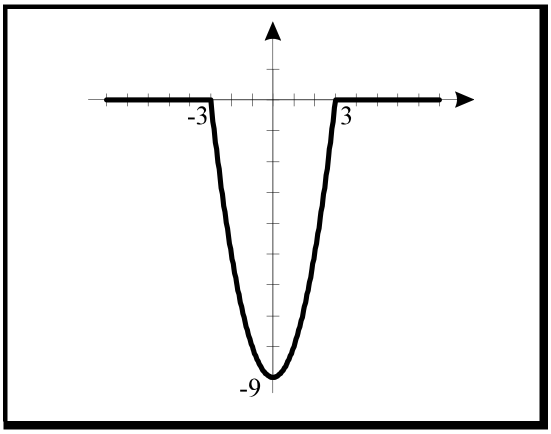
La gráfica más sencilla posible corresponde a la recta $y = 0$ si $x < -3$ y $x > 3$ y a una parábola, cuyo vértice coincide con el eje de ordenadas, $y = a x^2 + b$ si $-3 \le x \le 3$.

Si suponemos que $a = 1 \;\to\; y = x^2 + b$. Como la parábola pasa por los puntos $(-3, 0)$ y $(3, 0)$ tenemos:

$$(3,0) \;\to\; 0 = 3^2 + b \;\Rightarrow\; b = -9 \;\to\; y = x^2 - 9$$

La expresión de la función es:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -3 \\ x^2 - 9 & \text{si} \quad -3 \le x \le 3 \\ 0 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$



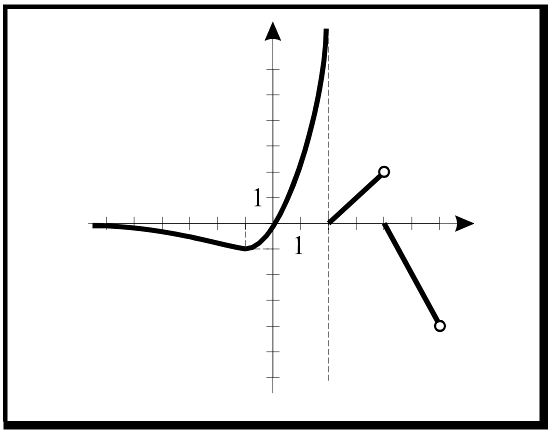
Problema 38

Observando la gráfica, justifica los siguientes apartados:

a) Tipos de discontinuidad en $x = 2$ y $x = 4$.

b) ¿Existe un "a" tal que: $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \infty$?

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos.



a) En $x = 2$ tenemos:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=0\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ Es una discontinuidad con un salto infinito.}$$

En $x=4$ tenemos:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=2 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=0\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ Es una discontinuidad con salto finito.}$$

b) Como hemos visto en a) tenemos que $a=2$.

c) La función $f(x)$ es creciente $\quad \forall x \in \left]-1,2\right[\cup \left]2,4\right[$

La función $f(x)$ es decreciente $\quad \forall x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]4,\infty\right[$

Mínimo relativo en $(-1,-1)$

No hay máximo relativo.

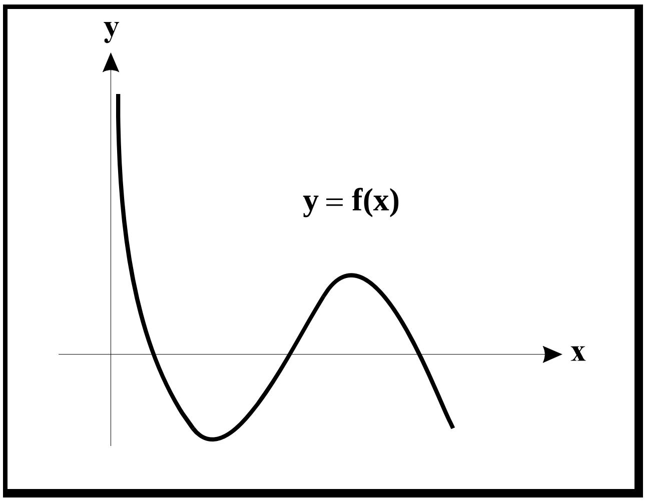
Problema 39

El esquema adjunto representa la gráfica de la función $f(x)$.

a) Hacer otro esquema que represente el gráfico de la función $-f(x)$.

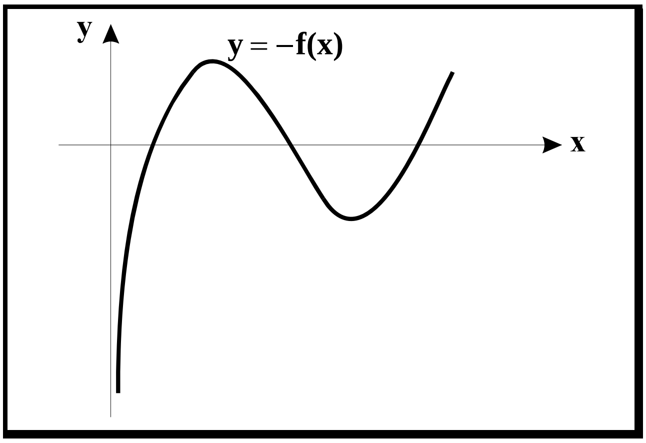
b) Hacer otro esquema que represente conjuntamente los gráficos de $y=f(x)$ y de $y=2f(x)$.

Explicar el fundamento para la construcción de estos esquemas.



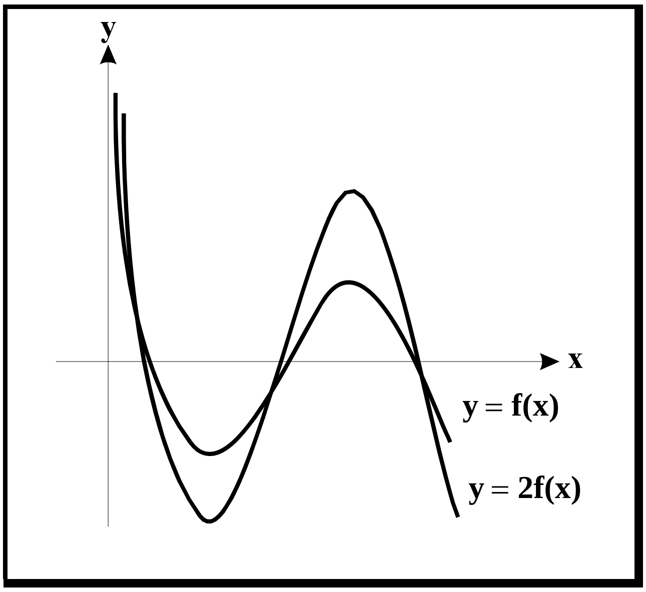
a) La curva $y = -f(x)$ es tal que para un x, el punto $(x, f(x))$ pertenece a la curva dada y el punto $(x, -f(x))$ pertenece a la curva pedida.

La curva $y = -f(x)$ se obtiene sin más que trazar la curva simétrica de $y = f(x)$ respecto del eje X.



b) La curva pedida $y = 2f(x)$ es tal que para un x, el punto $(x, f(x))$ pertenece a la curva dada y el punto $(x, 2f(x))$ pertenece a la curva pedida.

La curva $y = 2f(x)$ se obtiene sin más que multiplicar por 2 la ordenada de cada punto de la curva $y = f(x)$.



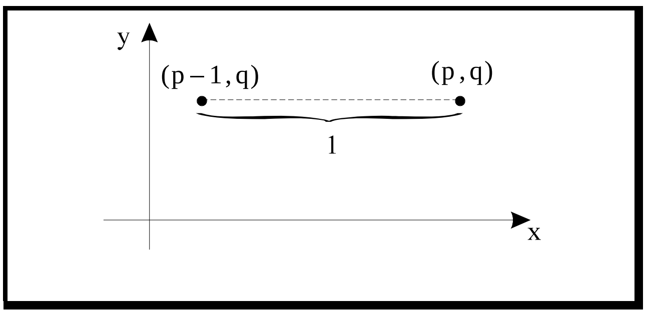
Problema 40

Conociendo la gráfica de $f(x) = e^x$ explicar, de una manera razonada, cómo se obtendría la gráfica de la función $g(x) = 3 + f(x-1)$. Realizar un dibujo aproximado de las dos gráficas.

Si (a, b) pertenece a la gráfica de $f(x)$ significa que $b = f(a)$.
Si (p, q) pertenece a la gráfica de $g(x) = f(x-1)$ significa que $q = f(p-1)$, es decir $(p-1, q)$ pertenece a la gráfica de $f(x)$.

Por tanto, (p, q) pertenece a la gráfica de $g(x)$ sólo y cuando $(p-1, q)$ pertenece a la gráfica de $f(x)$.

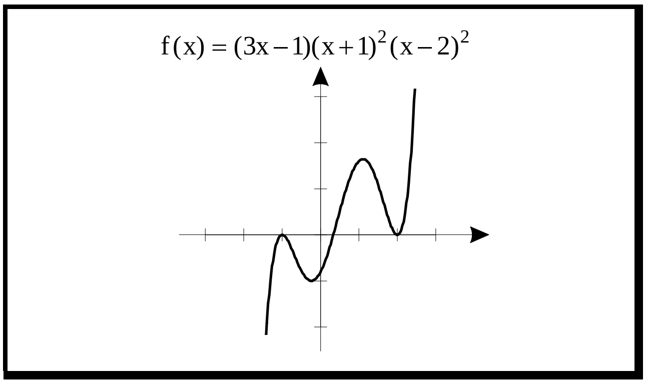
Así la gráfica de $g(x) = f(x-1)$ se obtiene trasladando la de $f(x)$ una unidad a la derecha.



Si (r,s) pertenece a la gráfica de $h(x)=3+f(x)$ significa que $s=h(r)=3+f(r)$, es decir que $s-3=f(r)$, o lo que lo mismo que $(r,s-3)$ es de la gráfica de $f(x)$.

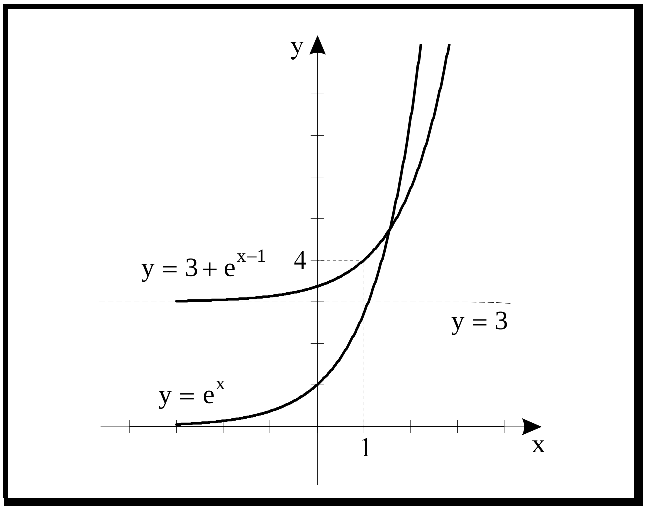
Por tanto, (r,s) pertenece a la gráfica de $h(x)$ sólo y cuando $(r,s-3)$ es de la gráfica de $f(x)$.

Así la gráfica de $h(x)=3+f(x)$ se obtiene trasladando la de $f(x)$ tres unidades hacia arriba.



Ahora es claro cómo obtener la gráfica de $3+e^{x-1}$ a partir de e^x.

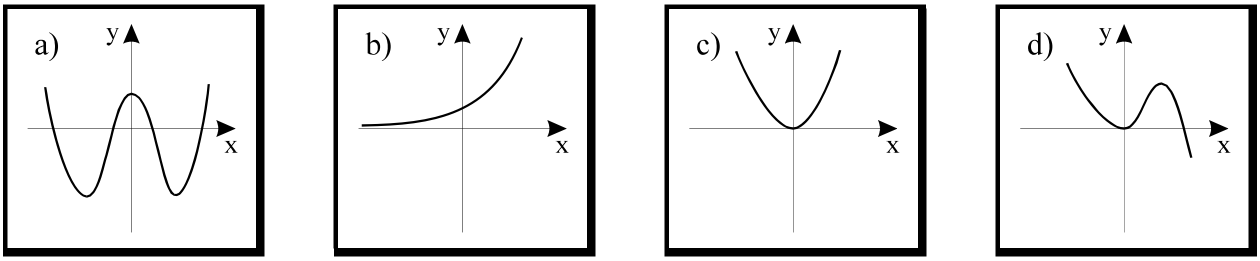
Primero se traslada una unidad hacia la derecha y luego 3 unidades hacia arriba.



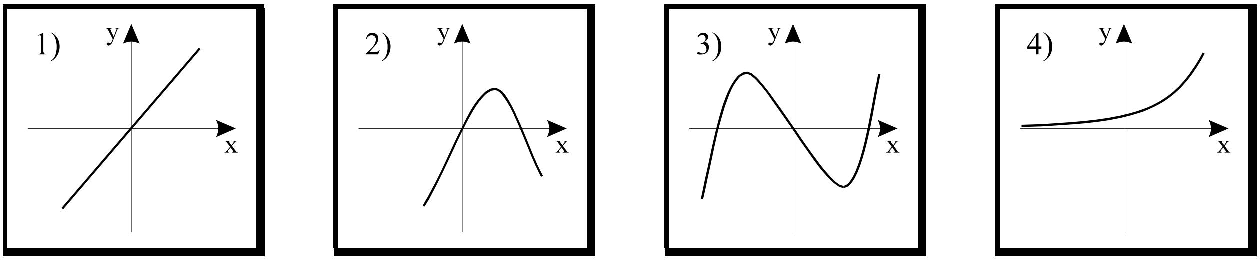
Problema 41

Asocia a cada una de las funciones que se dibujan la que crees que es su derivada, dando alguna explicación.

<u>Funciones</u>



__Derivadas__



Curva a) $\rightarrow$ decrece - crece - decrece - crece.

Derivada $\rightarrow$ negativa - positiva - negativa - positiva. La 3).

Curva b) $\rightarrow$ crece siempre.

Derivada $\rightarrow$ positiva siempre. La 4)

Curva c) $\rightarrow$ decrece - crece.

Derivada $\rightarrow$ negativa - positiva. La 1).

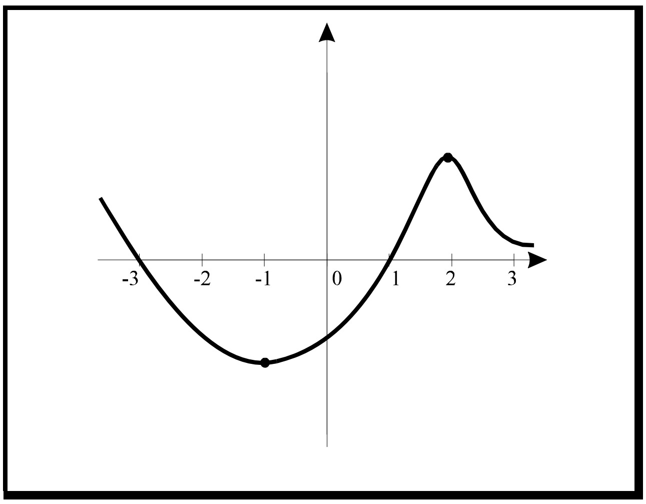
Curva d) $\rightarrow$ decrece - crece - decrece.

Derivada $\rightarrow$ negativa - positiva - negativa. La 2).

Problema 42

De una función $f(x)$ se sabe que: su máximo absoluto vale 3; tiene un mínimo relativo donde alcanza el valor 0. Además la gráfica de su derivada es la de la figura adjunta.

Haz una representación gráfica aproximada de $f(x)$.



Observando la gráfica de $f'(x)$ tenemos:

$f'(x) > 0$ cuando $x \in \left]-\infty, -3\right[\cup \left]1, \infty\right[$

$f'(x) < 0$ cuando $x \in]-3, -1[$

$f'(x) = 0$ en $x = -3$ y en $x = 1$

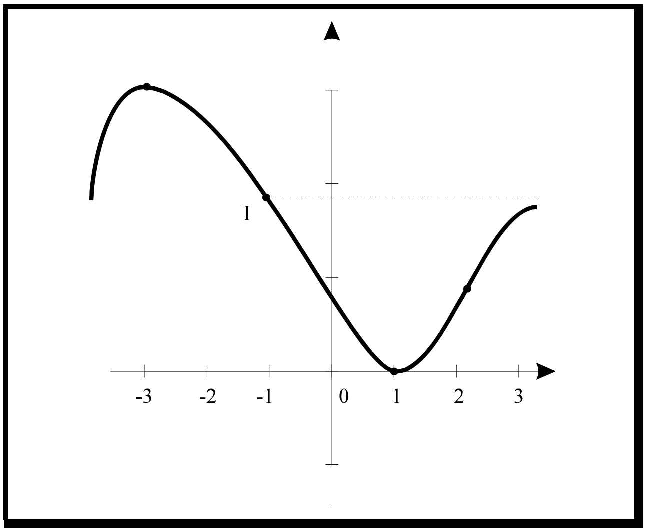
Esto nos indica que $f(x)$ será:

Creciente para $x \in]-\infty, -3[\cup]1, \infty[$

Decreciente para $x \in]-3, -1[$

En $x = -3$ tiene un máximo ($f(x)$ crece a la izquierda de -3 y decrece a la derecha), y en $x = 1$ tiene un mínimo ($f(x)$ decrece a la izquierda y crece a la derecha de $x = 1$.

Además $f''(x) = 0$ en los puntos $x = -1$ y $x = 2$ (observa que son los puntos singulares de $f'(x)$. Así pues, $x = -1$ y $x = 2$ serán puntos de inflexión.



Por otra parte, que $f'(x)$ tienda a cero cuando $x \to \infty$ significa que $f(x)$ tiene una asíntota horizontal hacia $+\infty$.

Como sabemos que el máximo vale 3 y el mínimo vale 0, tendremos $f(-3) = 3$ y $f(1) = 0$.

Problema 43

Determinar los máximos y mínimos relativos, así como los puntos de inflexión de la función $f(x) = \text{sen}^4 x$.

La función $f(x)$ es derivable $\forall x \in R$, por lo que se puede utilizar el criterio de la derivada segunda en la búsqueda de los extremos relativos.

$$f'(x) = 4\,\text{sen}^3 x \cdot \cos x = 0$$

$$\begin{cases} \text{sen}^3 x = 0 \quad \rightarrow \quad \text{sen}\, x = 0 \quad \rightarrow \quad x = \arcsin 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 + \pi k \\ \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \arccos 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k \end{cases} \qquad k \in Z$$

$$f''(x) = 4\left[3\,\text{sen}^2 x \cdot \cos x \cdot \cos x + \text{sen}^3 x \cdot (-\,\text{sen}\,x)\right] =$$

$$4\left[3\,\text{sen}^2 x \cdot (1 - \text{sen}^2 x) - \text{sen}^4 x\right] = 12\,\text{sen}^2 x - 16\,\text{sen}^4 x$$

Veamos el signo de la segunda derivada para los valores que anulan la primera derivada, es decir para:

$$0 + \pi k \quad \text{y} \quad \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$f''(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ no se puede asegurar la existencia de extremo local en ese punto.

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{en} \quad \left(\frac{\pi}{2} + \pi k\,, 1\right) \quad \text{hay máximos relativos}$$

Como la función es continua, entonces se cumple que entre dos máximos locales ha de existir un mínimo local, por tanto:

$$\text{En} \quad (0 + \pi k\,, 1) \quad \text{hay mínimos relativos.}$$

Para calcular los puntos de inflexión, igualamos la segunda derivada a cero:

$$f''(x) = 12\,\text{sen}^2 x - 16\,\text{sen}^4 x = 4\,\text{sen}^2 x \cdot (3 - 4\,\text{sen}^2 x) = 0$$

$$\begin{cases} \text{sen}^2 x = 0 \;\rightarrow\; \text{sen}\,x = 0 \;\rightarrow\; x = \text{arcsen}\,0 \;\Rightarrow\; x = 0 + \pi k \\[2ex] 3 - 4\,\text{sen}^2 x = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} \text{sen}\,x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \;\rightarrow\; x = \text{arcsen}\dfrac{\sqrt{3}}{2} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \\[4ex] \text{sen}\,x = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \;\rightarrow\; x = \text{arcsen}\dfrac{-\sqrt{3}}{2} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi k \\ x = \dfrac{5\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Se calcula la tercera derivada y se evalúa en los puntos que anulan la segunda derivada.

$$f'''(x) = 24\,\text{sen}\,x \cdot \cos x - 64\,\text{sen}^3\,x \cdot \cos x$$

$f'''(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ no se puede asegurar que $f(x)$ tenga un punto de inflexión en $x = 0$

$f'''\left(\dfrac{\pi}{3}\right) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x)$ tiene un punto de inflexión en $\left(\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, \dfrac{9}{16}\right)$

$f'''\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x)$ tiene un punto de inflexión en $\left(\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k, \dfrac{9}{16}\right)$

$f'''(\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ no se puede asegurar que $f(x)$ tenga un punto de inflexión en $x = \pi$

$f'''\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x)$ tiene un punto de inflexión en $\left(\dfrac{4\pi}{3} + 2\pi k, \dfrac{9}{16}\right)$

$f'''\left(\dfrac{5\pi}{3}\right) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x)$ tiene un punto de inflexión en $\left(\dfrac{5\pi}{3} + 2\pi k, \dfrac{9}{16}\right)$

Para estudiar los puntos $x = 0 + \pi k$ se aplica el criterio de las derivadas sucesivas.

$$f^{iv}(x) = 24\cos 2x - 64(3\,\text{sen}^2\,x - 4\,\text{sen}^4\,x)$$

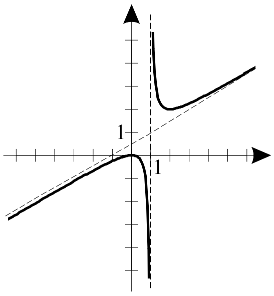
$f^{iv}(0) = 24 > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x)$ no tiene punto de inflexión en $x = 0 + \pi k$

La función es cóncava en los intervalos $\left(\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k, \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi k\right)$ ya que $f^{iv}(\pi + 2\pi k) = 24 > 0$,

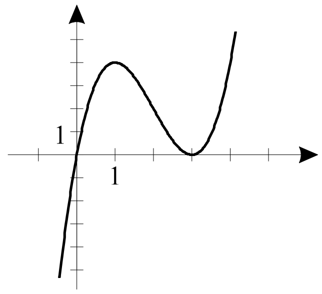
por tanto es convexa en los intervalos $\left(\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)$ y $\left(\dfrac{4\pi}{3} + 2\pi k, \dfrac{5\pi}{3} + 2\pi k\right)$.

Gráficas de funciones polinómicas

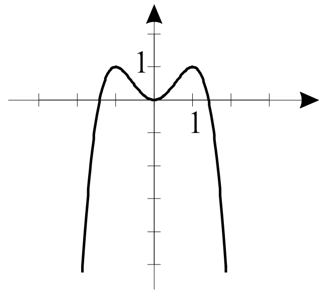
$$f(x)=\frac{0'5x^2}{x-1}$$



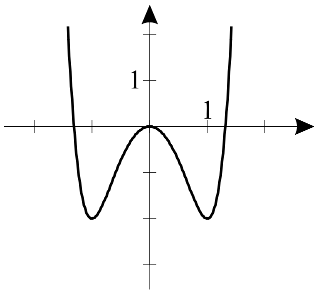
$$y=x^3-6x^2+9x$$



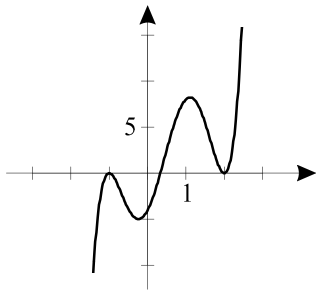
$$y=-x^4+2x^2$$



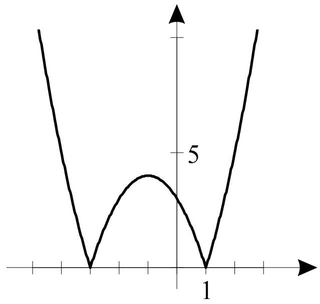
$$y=x^6-3x^2$$



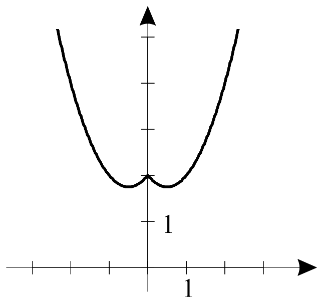
$$f(x)=(3x-1)(x+1)^2(x-2)^2$$



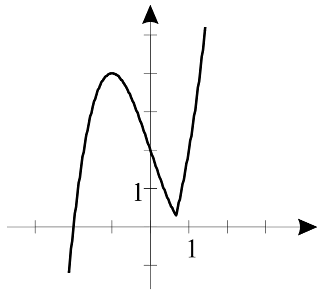
$$f(x)=\left|x^2+2x-3\right|$$



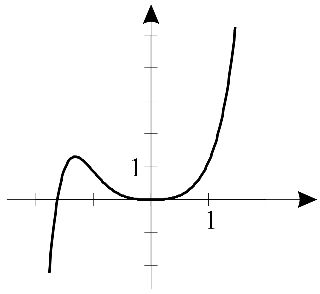
$$y=x^2-|x|+2$$



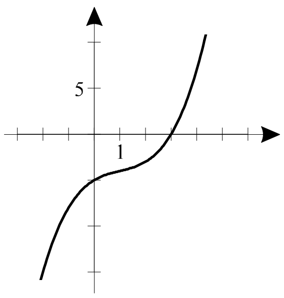
$$f(x)=x^3+|3x-2|$$



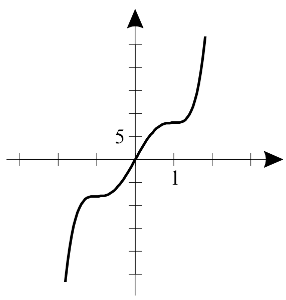
$$y=\frac{1}{7}x^7+\left|x^3\right|$$



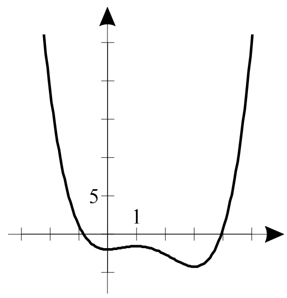
$$y=\left(\frac{x^2+5}{3}\right)(x-3)$$



$$y=3x^5-10x^3+15x$$

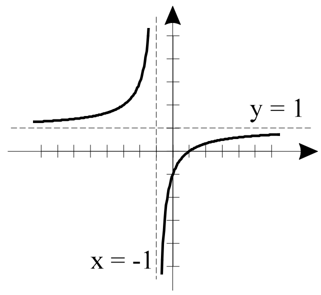


$$y=\frac{3x^4-16x^3+18x^2-24}{12}$$

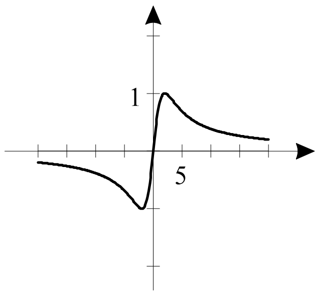


Gráficas de funciones racionales

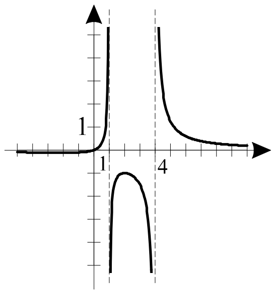
$$y=\frac{x-1}{x+1}$$



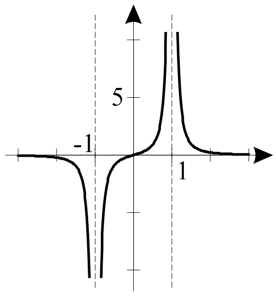
$$y=\frac{4x}{x^2+4}$$



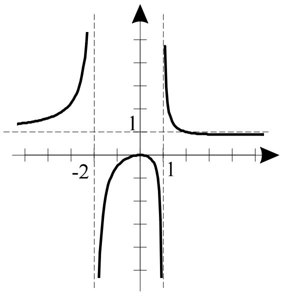
$$y=\frac{x}{x^2-5x+4}$$



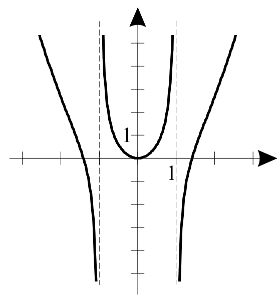
$$y=\frac{x}{(1-x^2)^2}$$



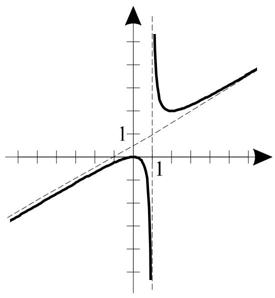
$$f(x)=\frac{x^2}{x^2+x-2}$$



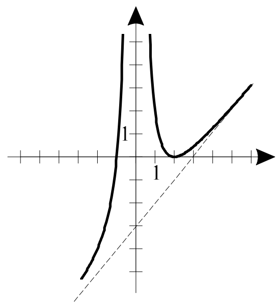
$$f(x)=\frac{x^4-2x^2}{x^2-1}$$



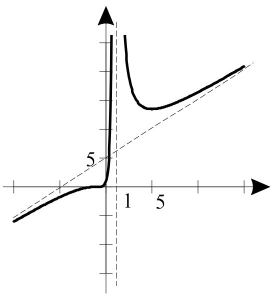
$$f(x)=\frac{0'5x^2}{x-1}$$



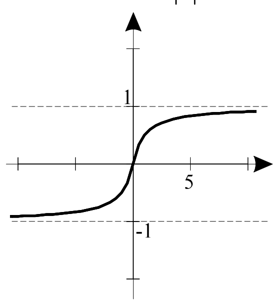
$$y=\frac{x^3-3x^2+4}{x^2}$$



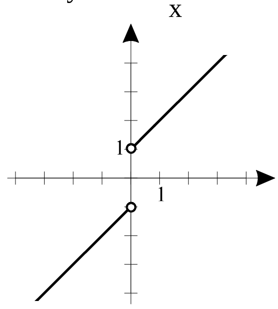
$$f(x)=\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$$



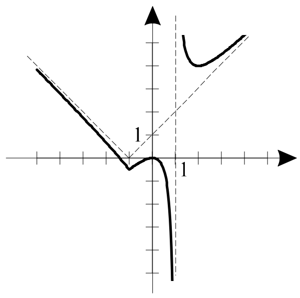
$$f(x)=\frac{x}{1+|x|}$$



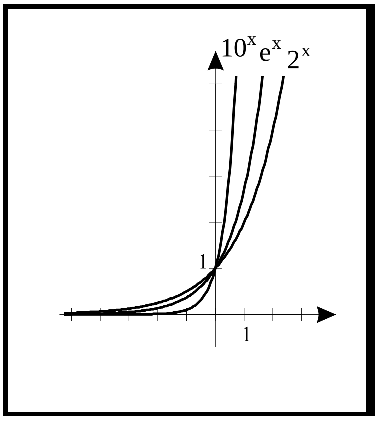
$$y=x+\frac{|x|}{x}$$

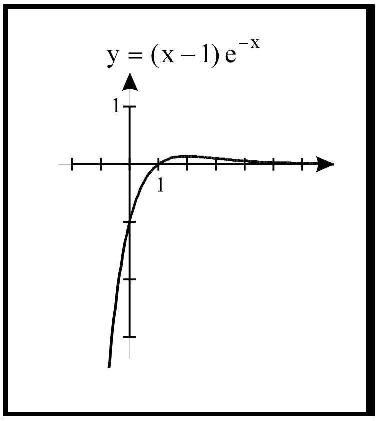


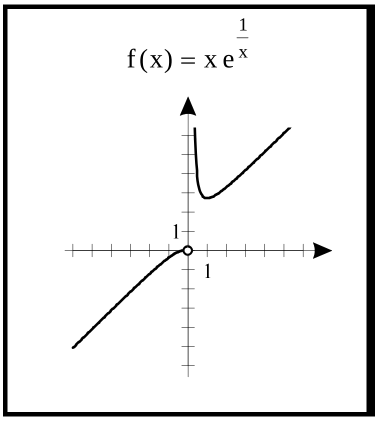
$$y=|x+1|+\frac{1}{x-1}$$

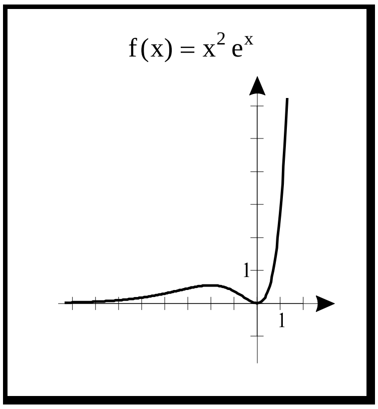


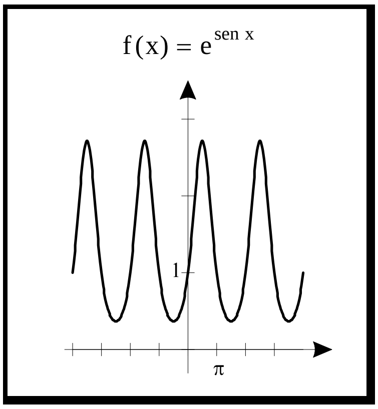
Gráficas de funciones exponenciales

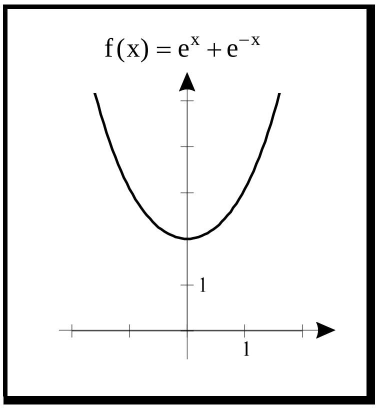


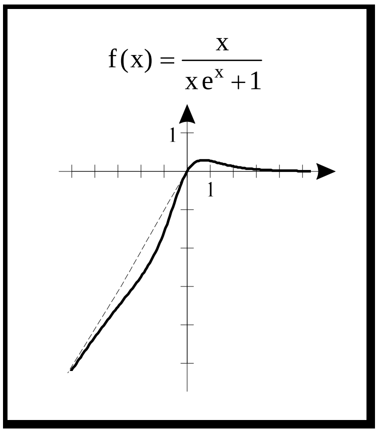


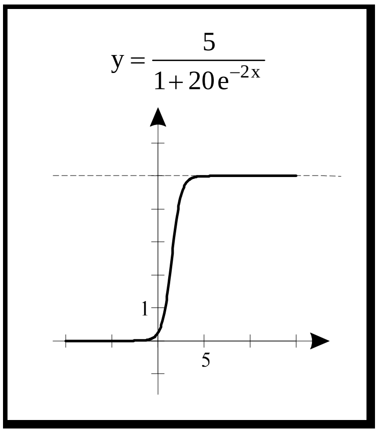


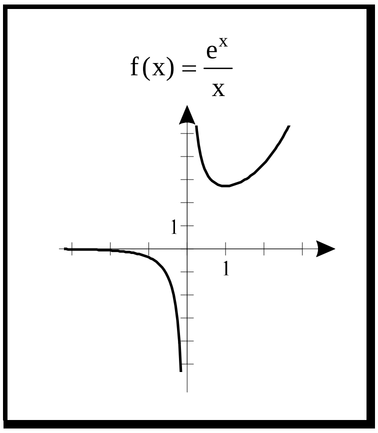


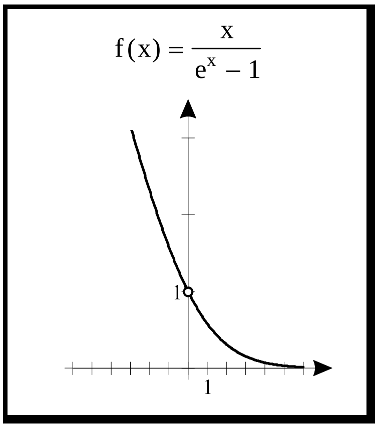


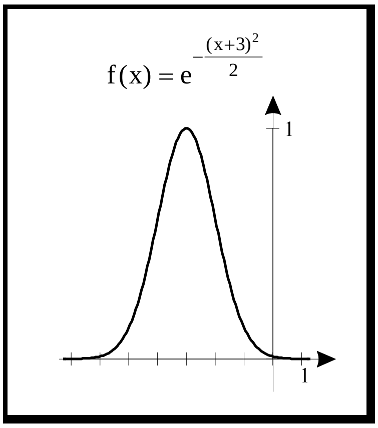


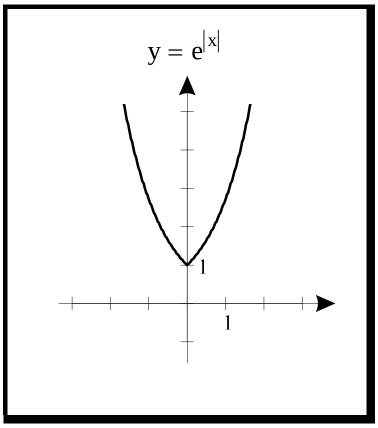




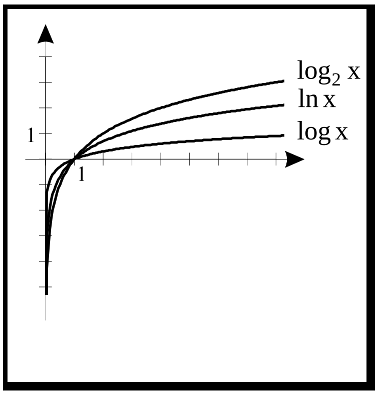


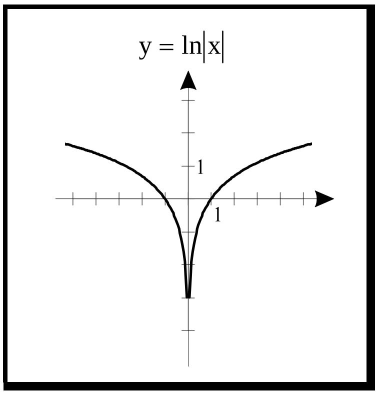


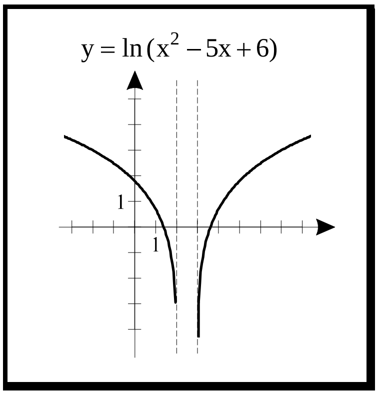


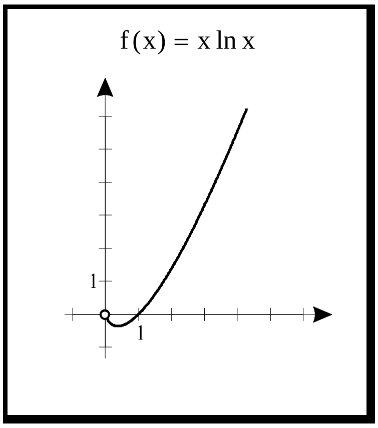


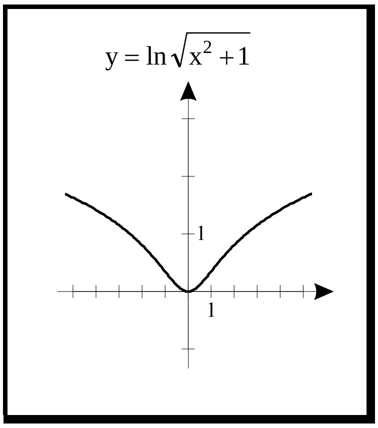
Gráficas de funciones logarítmicas

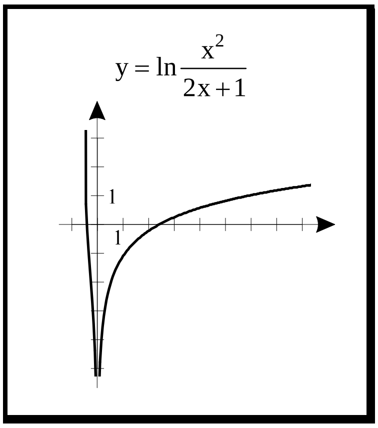


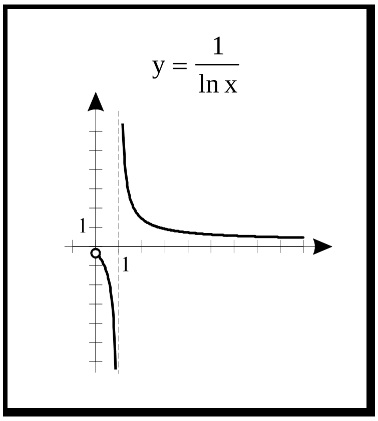


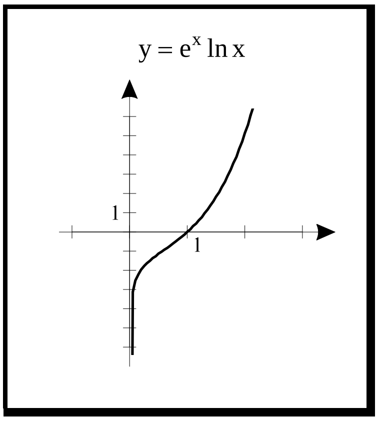


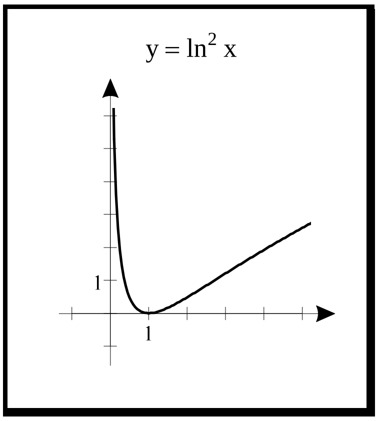


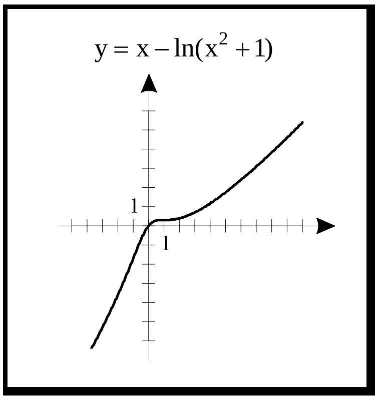


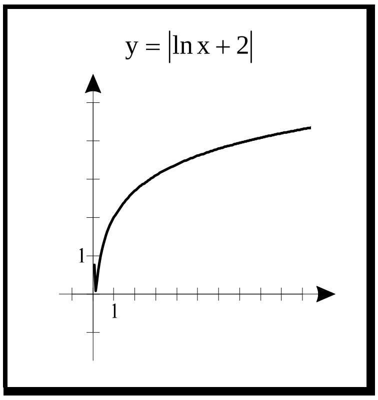


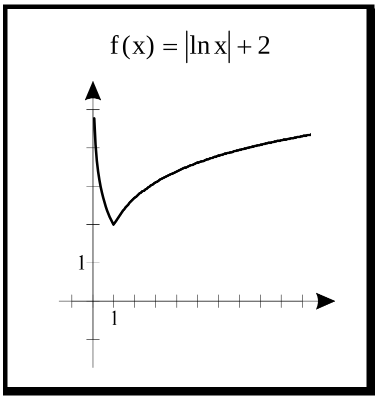






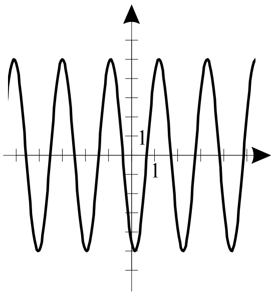




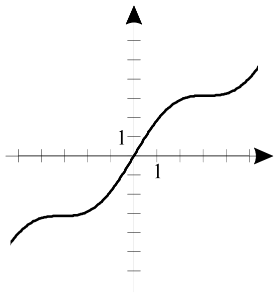


Gráficas de funciones trigonométricas

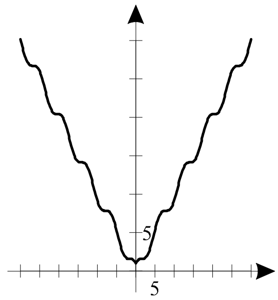
$y = 5\,\mathrm{sen}(3x - 2)$



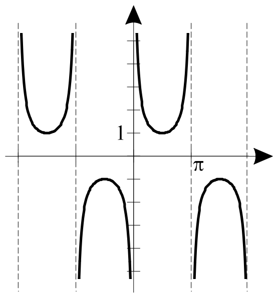
$y = x + \mathrm{sen}\,x$



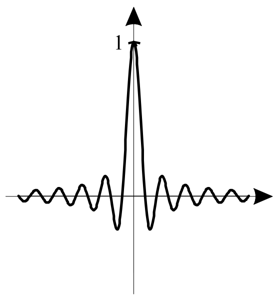
$y = |x| + \cos x$



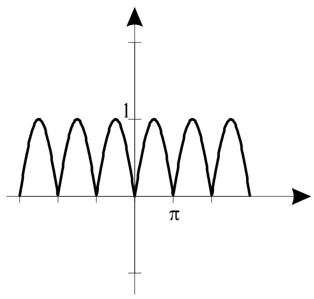
$y = \dfrac{1}{\mathrm{sen}\,x}$



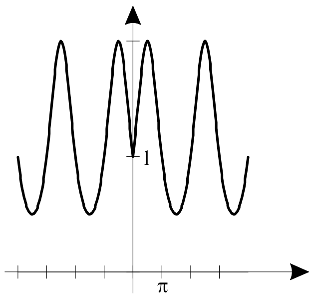
$y = \dfrac{\mathrm{sen}\,x}{x}$



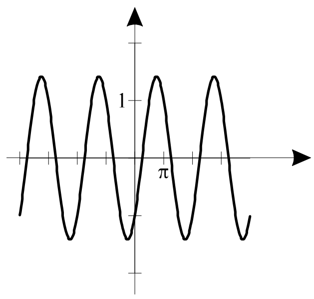
$y = |\mathrm{sen}\,x|$



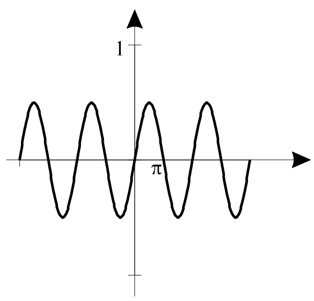
$y = 2^{\mathrm{sen}|x|}$



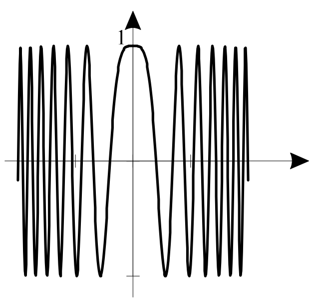
$y = \mathrm{sen}\,x - \cos x$



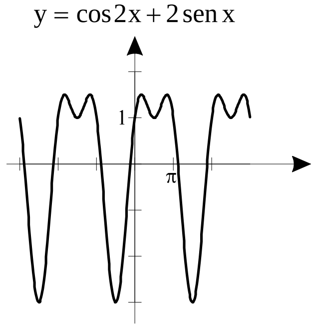
$y = \mathrm{sen}\,x \cdot \cos x$



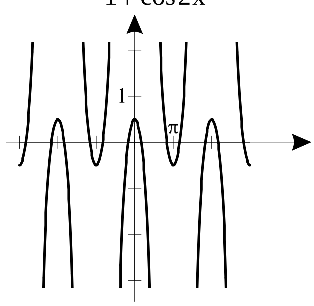
$y = \cos x^2$



$y = \cos 2x + 2\,\mathrm{sen}\,x$

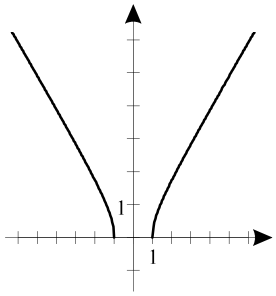


$y = \dfrac{\cos 3x}{1 + \cos 2x}$

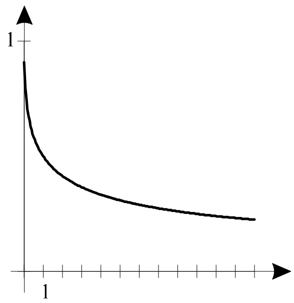


Gráficas de funciones con radicales

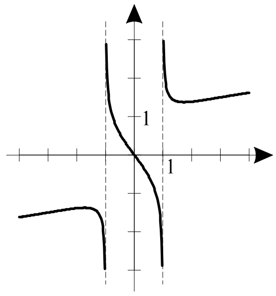
$$y = +\sqrt{x^2 - 1}$$



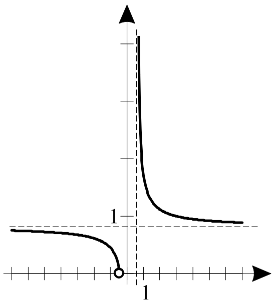
$$y = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$$



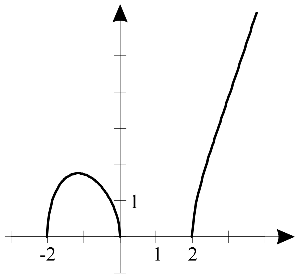
$$y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$$



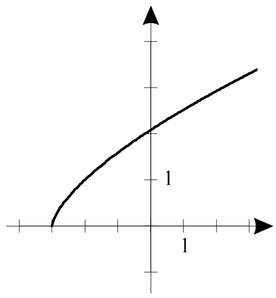
$$y = +\sqrt{\frac{2x + 1}{3x - 2}}$$



$$y = \sqrt{x^3 - 4x}$$

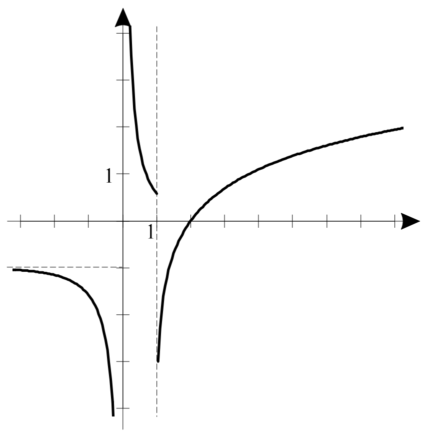


$$y = \sqrt[3]{(x + 3)^2}$$



Gráficas de funciones definidas a intervalos

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{e^x - 1} & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \ln(x - 1) & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2 - 9} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{x^3}{x \cdot \sqrt{x^2 + 1}} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$