Los números y la medida

Los primeros números conocidos, tanto en la historia de la humanidad como en la personal de cada uno son los números naturales. Surgen de la necesidad de contar colecciones o conjuntos de objetos, lo que es también una forma de medir. Los representamos por:

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots\}$$

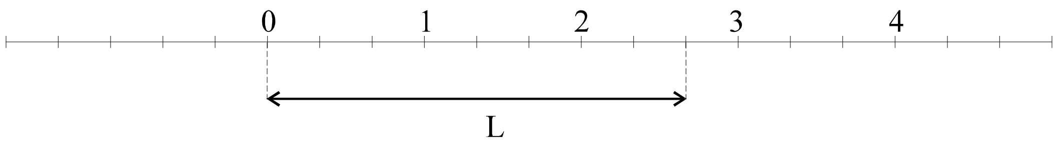
El conjunto de los números naturales se engrosa añadiendo otros que se forman a partir de aquellos anteponiéndoles el signo menos. De esta forma se obtienen los números enteros, y la nueva colección de números se designa con la letra **Z**

$$\mathbf{Z} = \{\ldots\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots\}$$

Ejemplo: Desde la madrugada la temperatura ha aumentado en 15º. Ahora estamos a 10ºC. ¿Qué temperatura hacía al amanecer?

La respuesta a la pregunta está en la ecuación $x + 15 = 10$, cuya solución es $x = -5$. En lenguaje coloquial hacía 5º bajo cero, pero es más cómodo sustituir ***bajo cero*** por el signo menos. Con los números negativos se pueden medir temperaturas.

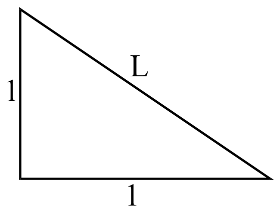
Pero otros problemas de medida revelan de inmediato la insuficiencia del conjunto Z. Ningún número entero puede darnos la longitud de L.



Sin embargo, el nuevo número o fracción $\frac{8}{3}$ lo indica fielmente: L contiene 8 terceras partes de la unidad.

Los números enteros junto con las llamadas fracciones forman lo que se conoce como conjunto de los números racionales y que se designa con la letra **Q**. Obviamente,

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$$



Por increíble que pueda parecer Q no proporciona suficientes números para medir: ningún número racional puede darnos la medida de L.

$$L^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

Al necesario número se le puso el nombre $\sqrt{2}$: su cuadrado es 2. Como no era racional, se le llamó irracional. Este número y otros como él, que hubieron de añadirse para medir cualquier longitud, forman, junto con Q, el conjunto de los números reales. Se le llamó **R** y es evidente que:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$$

Ecuaciones de segundo grado con soluciones imposibles

Resuelto el problema de la medida pareció que los matemáticos no iban a crear ya más números. Sin embargo, no fue así.

Desde el siglo XVI al XVIII llamaron la atención por la forma de sus soluciones, problemas de enunciado tan simple como el que sigue:

Ejemplo: Divídase 12 en dos partes cuyo producto sea 40.

Si x es una de esas partes, las ecuaciones $x(12-x)=40$ ó $x^2-12x+40=0$ proporcionan:

$$x=\frac{12\pm\sqrt{144-160}}{2}=\frac{12\pm\sqrt{4(36-40)}}{2}=\frac{12\pm 2\sqrt{-4}}{2}=6\pm\sqrt{-4}$$

Pero estas soluciones son imposibles, pues $\sqrt{-4}$ nada significa.

A pesar de todo, comenzaron a utilizarse unos nuevos entes, soluciones de ciertas ecuaciones de segundo grado, que tenían la forma:

$$a+\sqrt{-c} \quad \text{con } a \text{ y } c \quad \text{números reales y } c>0$$

Tal iniciativa se consideró al principio como un pasatiempo y sólo mereció de Newton el comentario: *Es justo que las raíces de las soluciones sean a menudo imposibles para que no se expongan casos de problemas que se presentan como posibles sin serlo.*

El número i

Con objeto de aligerar la escritura se introdujo el símbolo **i** para designar la **unidad imaginaria** $\sqrt{-1}$ ó, más precisamente para nombrar la entelequia cuyo cuadrado fuera -1. De manera que:

$$\boxed{\mathbf{i^2=i\cdot i=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=-1}}$$

Se sobreentiende que i funciona respecto de las operaciones de adición y multiplicación consigo misma y con los números reales igual que la familiar x de los polinomios. Con una sola excepción: $\mathbf{i^2 = -1}$ **.**

Nueva escritura de la expresión $\mathbf{a+\sqrt{-c}}$

Las condiciones impuestas a i permiten el cálculo siguiente:

$$\left(\sqrt{c}\,i\right)^2 = \left(\sqrt{c}\right)^2 \cdot i^2 = c \cdot i^2 = c \cdot (-1) = -c \qquad \text{ó} \qquad \sqrt{-c} = \sqrt{c \cdot (-1)} = \sqrt{c} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{c} \cdot i$$

De este modo las soluciones imposibles se pueden reescribir, poniendo b en lugar de $\sqrt{c}$, en la forma:

$$a + b \cdot i \qquad a, b \in R$$

Los números complejos

Llamamos número complejo a toda expresión de la forma:

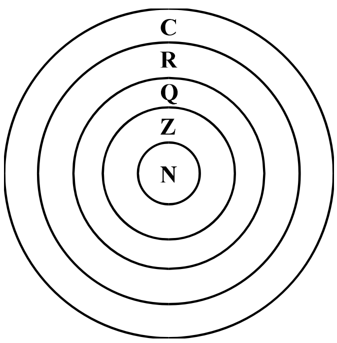
$$\boxed{\mathbf{a + b \cdot i}}$$

en donde a y b son números reales e $i^2 = -1$. El conjunto de todos ellos se designa por C.

En un número complejo $a + bi$ distinguimos:

$$a + b \cdot i \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{a} & \rightarrow \quad \textbf{Parte real} \\ \mathbf{b} & \rightarrow \quad \textbf{Parte imaginaria} \end{cases}$$

Un número complejo escrito en la forma $\mathbf{a + b \cdot i}$ se dice que está expresado en **<u>forma binómica</u>.**



Todos los números complejos en los que la parte imaginaria es cero son de la forma $\mathbf{a + 0 \cdot i = a}$ ***por lo que todos los números reales pueden considerarse también como complejos.***

- *Si* $b \neq 0$, *al número complejo le llamamos* ***imaginario.***

- *Si* $a = 0$ y $b \neq 0$, *el número complejo es de la forma* $\mathbf{b \cdot i}$ *y se le llama* ***imaginario puro.***

Igualdad de números complejos

Dos números complejos son iguales si lo son sus partes reales e imaginarias:

$$a + b \cdot i = a' + b' \cdot i \qquad \text{sólo si} \qquad a = a' \quad \text{y} \quad b = b'$$

Operaciones con números complejos

Suma y Diferencia

La suma y diferencia de números complejos se realiza sumando y restando partes reales entre sí y partes imaginarias entre sí.

$$\text{Suma} \quad \rightarrow \quad (a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i$$

$$\text{Diferencia} \quad \rightarrow \quad (a + bi) - (c + di) = a - c + (b - d)i$$

<u>**Propiedades**</u>

Conmutativa, Asociativa, Elemento Neutro $(0 + 0i)$ y Elemento Opuesto $(-a - bi)$

Ejemplo: Calcula x para que $(2 + xi) + (y - 3i) = 7 + 4i$

$$(2 + xi) + (y - 3i) = 2 + y + (x - 3)i = 7 + 4i \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2 + y = 7 & \rightarrow \quad y = 5 \\ x - 3 = 4 & \rightarrow \quad x = 7 \end{cases}$$

Producto de números complejos

El producto de dos números complejos se realiza aplicando la propiedad distributiva del producto respecto de la suma y teniendo en cuenta que $i^2 = -1$.

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$$

<u>**Propiedades**</u>

Conmutativa, Asociativa y Elemento Neutro ($1 = 1 + 0i$).

Ejemplo: Halla el valor de x e y para que se verifique $(2+i)(x-i)=y+3i$

$$(2+i)(x-i)=2x-2i+ix-i^2=(2x+1)+(x-2)i$$

Para que se cumpla la igualdad entre números complejos debe ser:

$$\left.\begin{array}{r}2x+1=y\\-2+x=3\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}x=5\\y=11\end{array}\right.$$

Ejemplo: Resuelve la ecuación $2z+5i-4=\dfrac{z-i-4}{3}$

$$6z+15i-12=z-i-4 \quad\to\quad 5z=8-16i \quad\Rightarrow\quad z=\frac{8}{5}-\frac{16}{5}i$$

Cociente de números complejos

La división de números complejos se hace racionalizando el divisor, es decir, multiplicando numerador y denominador por el complejo conjugado de éste.

Si llamamos al número $a-bi$ conjugado de $a+bi$ *tenemos:*

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)}=\frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2-(di)^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\cdot i$$

Ejemplo: Efectúa la operación $\dfrac{(2-3i)\cdot(1+6i)}{1+5i}$

$$\frac{(2-3i)\cdot(1+6i)}{1+5i}=\frac{2+12i-3i-18i^2}{1+5i}=\frac{20+9i}{1+5i}=\frac{(20+9i)\cdot(1-5i)}{(1+5i)\cdot(1-5i)}=$$

$$\frac{20-100i+9i-45i^2}{1-(5i)^2}=\frac{65-91i}{26}=\frac{65}{26}-\frac{91}{26}\cdot i$$

Potencias de números complejos

La potencia de un número complejo se hace desarrollando la potencia del binomio $a+bi$ y teniendo en cuenta las potencias del número i.

En la potenciación aparecen las sucesivas potencias de la unidad imaginaria i; su cálculo es sencillo:

$\mathbf{i^0 = 1}$ ***Por definición***

$\mathbf{i^1 = i}$ ***Por definición*** ------ $i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$ ------ $i^9 = \left(i^4\right)^2 \cdot i = i$

$\mathbf{i^2 = -1}$ ***Por definición*** ------ $i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$ ------ $i^{10} = \left(i^4\right)^2 \cdot i^2 = -1$

$\mathbf{i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i}$ ------ $i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$ ------ $i^{11} = \left(i^4\right)^2 \cdot i^3 = -i$

$\mathbf{i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1}$ ------ $i^8 = \left(i^4\right)^2 = 1$ ------ $i^{12} = \left(i^4\right)^3 = 1$

Observa que los valores de las potencias de i se repiten de cuatro en cuatro, de tal manera que las potencias del número i cuyo exponente es múltiplo de 4 son iguales a la unidad.

Así pues, para calcular las potencias de la unidad imaginaria dividiremos el exponente por 4 y calcularemos la potencia del número i que tiene por exponente el resto.

Ejemplo: Calcular $\mathbf{i^{6254}}$

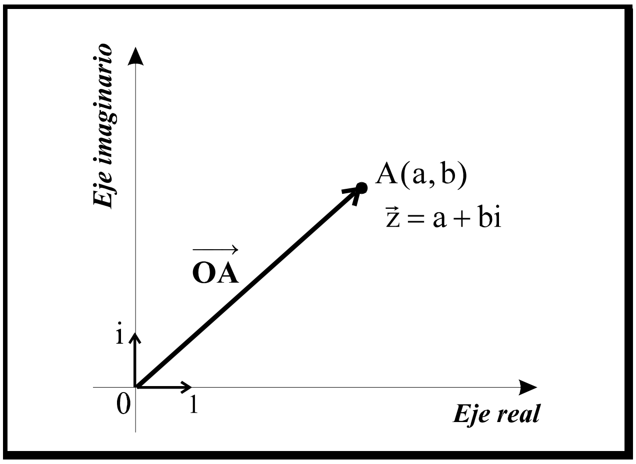
$$\text{Para } i^{6254} \rightarrow \begin{array}{l|l} 6254 & 4 \\ \hline 22 & 1563 \\ \ \ 25 & \\ \ \ \ 14 & \\ \ \ \ \ \ 2 & \end{array} \rightarrow 6254 = 1563 \cdot 4 + 2$$

$$i^{6254} = i^{1563\cdot 4+2} = i^{1563\cdot 4} \cdot i^2 = \left(i^4\right)^{1563} \cdot i^2 = 1^{1563} \cdot (-1) = 1 \cdot (-1) = -1$$

Los números complejos como pares de números reales

Gauss y otros matemáticos observaron, a principios del siglo XIX, que así como cada punto de una recta corresponde a un número real, cada punto del plano podía asociarse a un número complejo. Al eje horizontal, en el que se representan los números reales, se le llama **eje real**. Al vertical, que corresponde a los imaginarios puros, **eje imaginario**.

A cada número complejo $a + bi$ se le asocia el punto $A(a, b)$ que recibe el nombre de **afijo** de z.



A cada número complejo le hacemos corresponder un punto del plano y recíprocamente. Si unimos el origen O con el punto A obtenemos un segmento orientado que llamamos vector y representamos por $\overrightarrow{OA}$.

Los números complejos son vectores cuya base está formada por la unidad real y la unidad imaginaria $\mathbf{\{1, i\}}$.

Puesto que $a+bi$ y (a,b) pueden representar lo mismo, un punto, se acordó la identificación:

$$\mathbf{a+b\cdot i\equiv(a\,,b)}$$

lo que justifica la definición de que ***un número complejo es un par ordenado de números reales***.

Las operaciones de adición y multiplicación se definen ahora, entre pares, de modo que la suma y el producto se correspondan con los resultados conocidos:

$$(a,b)+(a',b')=(a+a',b+b')$$

$$(a,b)\cdot(a',b')=(aa'-bb',ab'+ba')$$

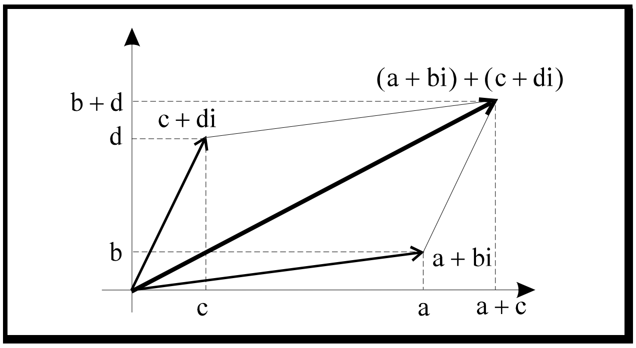
<u>Observación 1</u> ***Según la nueva definición, los números reales pasan a ser ahora pares de números, ya que***

$$\mathbf{a=a+0\cdot i\equiv(a\,,0)}$$

<u>Observación 2</u> ***Con la nueva definición, i deja de ser imaginario para convertirse, simplemente en el par*** $\mathbf{(0\,,1)}$.

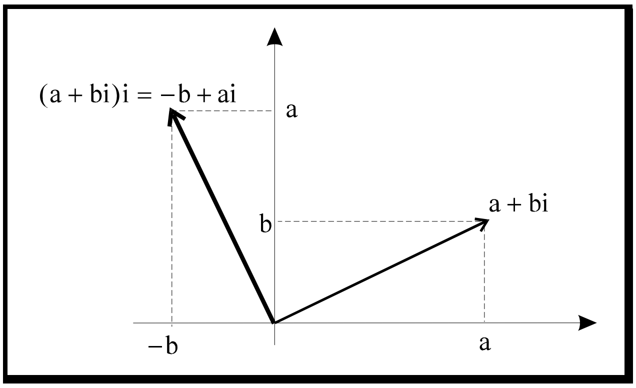
$$\mathbf{i=0+1\cdot i\equiv(0\,,1)}$$

Representación gráfica de la suma de números complejos



Podemos sumar gráficamente dos números complejos y lo haremos de igual forma que sumábamos vectores.

Representación gráfica del producto de un número complejo por i



Multipliquemos por i el número complejo $a+bi$:

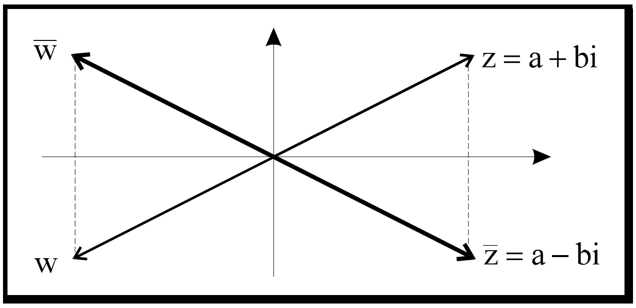
$$(a+bi)\cdot i = ai + bi^2 = -b + ai$$

De la gráfica se deduce que, multiplicar por la unidad imaginaria supone girar 90º el número complejo inicial.

Conjugado de un número complejo

Se llama conjugado de $z = a + bi$ al número complejo $\bar{z}$ definido por $\mathbf{\bar{z} = a - b \cdot i}$.

Los números complejos aparecen con frecuencia junto a sus conjugados. De modo natural, como en el caso de las soluciones complejas de una ecuación de segundo grado, o voluntariamente introducidos como ocurre con la división.



Desde un punto de vista geométrico un número complejo y su conjugado son simétricos respecto del eje real.

Propiedades de la conjugación

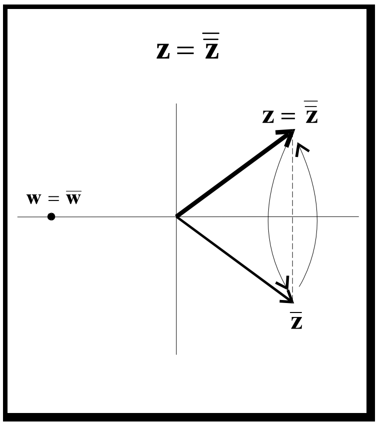
1. Coincide con su recíproca, es decir $\bar{\bar{z}} = z$ para todo complejo.

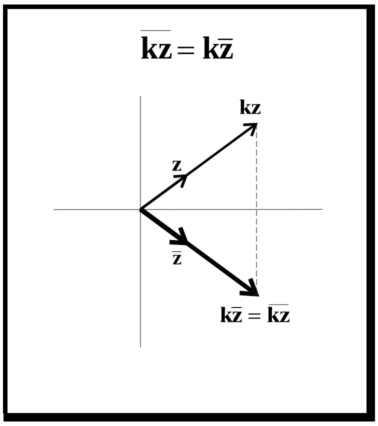
2. Conserva la suma y la diferencia, es decir $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ y $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$

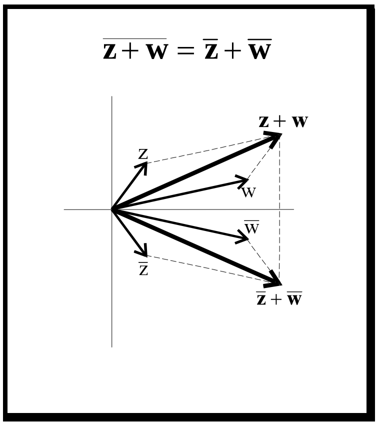
3. Conserva el producto y el cociente, es decir $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ y $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

4. Conserva la potencia, es decir $\overline{z^n} = \bar{z}^n$

Las siguientes figuras ponen en evidencia algunas de estas propiedades:







Las raíces conjugadas de una ecuación

Una ecuación de segundo grado no puede tener una raíz real y otra compleja: si hay una raíz compleja hay otra más: la conjugada.

Ejemplo: Calcular las raíces de la ecuación $x^2 + 9 = 0$

$$x^2 = -9 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{-9} = \begin{cases} x_1 = 3i \\ x_2 = -3i \end{cases}$$

En las ecuaciones de grado superior al segundo ocurre lo mismo: las raíces complejas se dan por pares.

Ejemplo: Calcular las raíces de la ecuación: $x^3 - 12x^2 + 40x = 0$

$$x^3 - 12x^2 + 40x = 0 \quad \rightarrow \quad x(x^2 - 12x + 40) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x^2 - 12x + 40 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 12x + 40 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 160}}{2} = \frac{12 \pm 4i}{2} = \begin{cases} x_2 = 6 + 2i \\ x_3 = 6 - 2i \end{cases}$$

Ejemplo: Dado el triángulo de vértices $A(1,1)$, $B(4,2)$ y $C(3,4)$, hállese:

a) Los vértices del triángulo simétrico respecto al eje de abscisas.

b) Los vértices del triángulo que se obtiene al aplicar a ABC un giro de centro en O (origen de coordenadas) y amplitud 90º.

c) Los vértices del transformado de ABC por una homotecia de centro en O y razón 3.

a) Como hemos visto anteriormente, los vértices del triángulo simétrico respecto al eje de abscisas serán los afijos de los conjugados, es decir:

$$A'(1,-1);\ B'(4,-2)\quad y\quad C'(3,-4)$$

b) En el plano complejo, multiplicar por 1_{90^o} equivale a girar 90º con centro en O.

Los vértices del triángulo resultante serán:

$$(1+i)\cdot i = i-1 \text{ es decir } A'(-1,1)$$

$$(4+2i)\cdot i = 4i-2 \quad \text{es decir} \quad B'(-2,4)$$

$$(3+4i)\cdot i = 3i-4 \quad \text{es decir} \quad C'(-4,3)$$

c) En el plano complejo, multiplicar por 3 equivale a efectuar una homotecia de centro en O y razón 3. Por tanto, los vértices del triángulo resultante de hacer la homotecia serán:

$$3\cdot(1+i) = 3+3i \quad \text{es decir} \quad A'(3,3)$$

$$3\cdot(4+2i) = 12+6i \quad \text{es decir} \quad B'(12,6)$$

$$3\cdot(3+4i) = 9+12i \quad \text{es decir} \quad C'(9,12)$$

Módulo y argumento de un número complejo

Un número complejo $z=a+bi$ se representa e identifica en el plano cartesiano respecto a la base $\{1,i\}$ con un punto, llamado afijo del complejo, cuyas coordenadas son (a,b). Este punto determina con el origen de coordenadas un vector al que llamamos vector de posición del número complejo. Su módulo será entonces:

$$\boxed{|\mathbf{z}| = \sqrt{\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2}}$$

Se llama módulo del número complejo $a+bi$ a la distancia de su afijo al origen de coordenadas.

<u>Propiedades del módulo</u>

1. $|z|=0 \quad \Leftrightarrow \quad z=0$

2. $|z|=|-z|$

3. $|z|=|\bar{z}|$

4. $|z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2|$

5. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

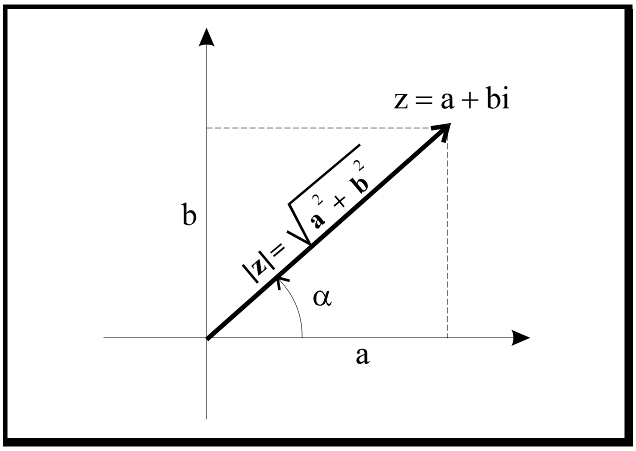
6. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

7. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

Se llama argumento del número complejo $z = a + bi$ al ángulo que forma su vector de posición con la dirección positiva del eje real.

$$\boldsymbol{\alpha = \mathrm{arctg}\,\frac{b}{a}}$$

Teniendo en cuenta la definición de tangente trigonométrica de un ángulo, se deduce:



$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{b}{a}$$

$$\alpha = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{b}{a} \quad \text{si} \quad a \neq 0$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}\ \text{rad} \quad \text{si} \quad a = 0 \quad \text{y} \quad b > 0$$

$$\alpha = \frac{3\pi}{2}\ \text{rad} \quad \text{si} \quad a = 0 \quad \text{y} \quad b < 0$$

El ángulo lo mediremos utilizando como sentido positivo el contrario al de las agujas del reloj, y como unidad el grado o el radián.

La expresión $\boldsymbol{\alpha = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{b}{a}}$ ***no determina unívocamente el argumento de un número, pues hay infinitos ángulos que cumplen la igualdad. Ahora bien, restringiendo el valor de*** α ***para*** $0 \le \alpha \le 2\pi$***, hay dos ángulos que difieren en*** π ***y tienen la misma tangente. Para saber cuál de ellos es el argumento tendremos en cuenta los signos de a y b, consiguiendo de esta forma averiguar en qué cuadrante está situado el afijo del número complejo. A este argumento le llamaremos argumento principal.***

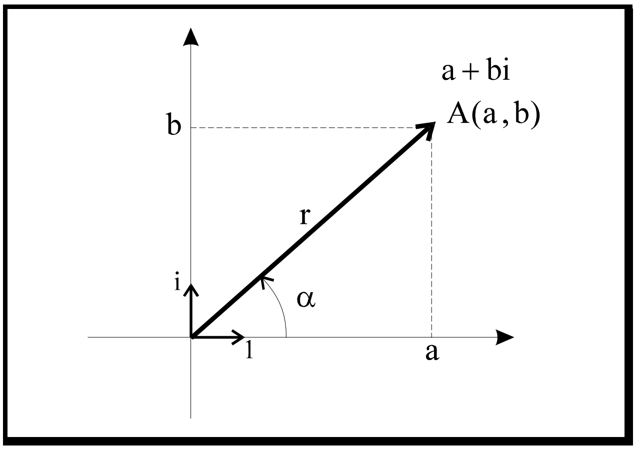
Ejemplo: **Pruébese que** $|\,\mathbf{z}\,| = \sqrt{\mathbf{z}\cdot\overline{\mathbf{z}}}$

Si $z = a + bi$ entonces:

$z\cdot\overline{z} = (a+bi)\cdot(a-bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2$ de donde se deduce que:

$$\sqrt{z\cdot\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2} = |\,z\,|$$

Forma Trigonométrica y Polar de un número complejo



Observando la figura adjunta, y teniendo en cuenta las definiciones de seno y coseno se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} a = r\cdot\cos\alpha \\ b = r\cdot\operatorname{sen}\alpha \end{array}\right\}$$

Sustituyendo estos valores de a y b en la expresión del complejo en forma binómica $a + bi$ se tiene:

$$z = a + bi = r\cos\alpha + i\cdot r\operatorname{sen}\alpha = r\cdot(\cos\alpha + i\cdot\operatorname{sen}\alpha)$$

Esta expresión se conoce con el nombre de **forma trigonométrica** del complejo.

Otra forma de expresar el número complejo $a + bi$ es $\mathbf{r}_\alpha$ que se llama **módulo argumental** o **polar**, donde r representa el módulo y α el argumento..

En resumen:

Forma Cartesiana	Forma Binómica	Forma Trigonométrica	Forma Polar
$(\mathbf{a},\mathbf{b})$	$\mathbf{a}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{i}$	$\mathbf{r}\cdot(\cos\alpha + \mathbf{i}\operatorname{sen}\alpha)$	$\mathbf{r}_\alpha$

Los complejos r_α y $r'_{\alpha'}$ sólo son iguales si sus módulos son iguales y sus argumentos difieren en $2\pi\cdot k$ rad, siendo k un número entero. Es decir:

$$r_\alpha = r'_{\alpha'} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r = r' \\ \alpha = \alpha' + 2\pi \cdot k \end{cases}$$

Ejemplo: Escribe de todas las formas posibles los siguientes complejos:

$$\mathbf{4+4\sqrt{3}\,i;\quad 3_{\frac{3\pi}{2}};\quad i;\quad 6_{225^o};\quad \sqrt{3}-i;\quad -2-2i}$$

$\mathbf{4+4\sqrt{3}\,i}$

$$\begin{cases} r = \sqrt{4^2 + \left(4\sqrt{3}\right)^2} = 8 \\ \alpha = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{4\sqrt{3}}{4} = 60^o \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Forma Polar} \rightarrow 8_{60^o} \\ \text{Forma Trigonométrica} \rightarrow 8 \bullet (\cos 60^o + i \operatorname{sen} 60^o) \end{cases}$$

$\mathbf{3_{\frac{3\pi}{2}}}$

$$\begin{cases} r = 3 \\ \alpha = 270^o \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Forma Trigonométrica} \rightarrow 3 \cdot \left(\cos \dfrac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \dfrac{3\pi}{2}\right) \\ \text{Forma Binómica} \rightarrow 3 \cdot \left(0 + i \cdot (-1)\right) = -3i \end{cases}$$

$\mathbf{i}$

$$\begin{cases} r = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1 \\ \alpha = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{0} = 90^o \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Forma Polar} \rightarrow 1_{90^o} \\ \text{Forma Trigonométrica} \rightarrow 1 \cdot (\cos 90^o + i \cdot \operatorname{sen} 90^o) \end{cases}$$

$\mathbf{6_{225^o}}$

$$\begin{cases} r = 6 \\ \alpha = 225^o \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Forma Trigonométrica} \rightarrow 6 \cdot (\cos 225^o + i \operatorname{sen} 225^o) \\ \text{Forma Binómica} \rightarrow 6 \cdot \left(-0'70 + i \cdot (-0'70)\right) = -4'24 - 4'24\,i \end{cases}$$

$\mathbf{\sqrt{3}-i}$

$$\begin{cases} r = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2 \\ \alpha = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{-1}{\sqrt{3}} = 330^o \quad (4^o \text{ cuadrante}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Forma Polar} \rightarrow 2_{330^o} \\ \text{Forma Trigonométrica} \rightarrow 2 \cdot (\cos 330^o + i \cdot \operatorname{sen} 330^o) \end{cases}$$

–2 – 2i

$$\begin{cases} r = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ \alpha = \text{arc tg}\,\dfrac{-2}{-2} = 225^{\circ} \quad (3^{er}\ \text{cuadrante}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Forma Polar} \quad \rightarrow \quad \left(2\sqrt{2}\right)_{225^{\circ}} \\ \text{Forma Trigonométrica} \quad \rightarrow \quad 2\sqrt{2}\cdot(\cos 225^{\circ} + i\cdot \text{sen}\,225^{\circ}) \end{cases}$$

Suma y Diferencia de números complejos en forma polar

La suma y diferencia de números complejos no es conveniente hacerla estando éstos expresados en forma polar, pues ni el módulo, ni el argumento del vector suma tienen una expresión sencilla en función de los módulos y argumentos de los sumandos. ***Es preferible efectuar estas operaciones utilizando la expresión binómica de los números complejos.***

Producto de complejos en forma polar

Para multiplicar dos números complejos en forma polar los escribiremos en forma trigonométrica y operaremos con ellos como en forma binómica:

$$r_{\alpha}\cdot r'_{\alpha'} = \left[r\,(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)\right]\cdot\left[r'(\cos\alpha' + i\,\text{sen}\,\alpha')\right] = rr'\cdot(\cos\alpha\cdot\cos\alpha' + \cos\alpha\cdot i\,\text{sen}\,\alpha' +$$

$$i\cdot\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\alpha' + i^2\cdot\text{sen}\,\alpha\cdot\text{sen}\,\alpha') = rr'\cdot(\cos\alpha\cdot\cos\alpha' - \text{sen}\,\alpha\cdot\text{sen}\,\alpha') +$$

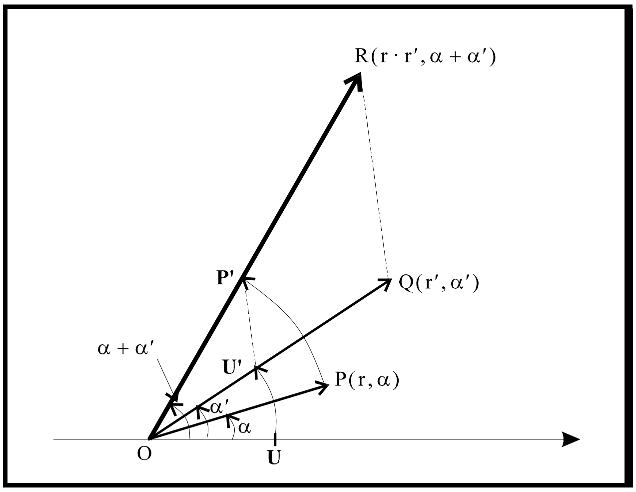
$$rr'\cdot i\cdot(\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\alpha' + \cos\alpha\cdot\text{sen}\,\alpha') = rr'\cdot\left[\cos(\alpha+\alpha') + i\cdot\text{sen}\,(\alpha+\alpha')\right] = \left(rr'\right)_{\alpha+\alpha'}$$

$$\boxed{\mathbf{r_{\alpha}\cdot r'_{\alpha'} = \left(r\cdot r'\right)_{\alpha+\alpha'}}}$$

El producto de dos números complejos en forma polar es otro número complejo que tiene por módulo el producto de los módulos y por argumento la suma de los argumentos.

Representación gráfica del producto de dos números complejos

Supongamos los números complejos r_{α} y $r'_{\alpha'}$. El proceso a seguir es el siguiente:



1º Sobre unos ejes coordenados tomamos el punto $U(1,0)$. Tomando OU como lado de un ángulo, construimos α y sobre el otro lado se construye un vector $\overrightarrow{OP}$ de módulo r. Ya tenemos el complejo r_α.

2º De forma análoga representamos el complejo $r'_{\alpha'}$. Tomando OU como lado de un ángulo, construimos α' y sobre el otro lado se construye un vector $\overrightarrow{OQ}$ de módulo r'. Ya tenemos el complejo $r'_{\alpha'}$.

3º Determinamos el argumento $\alpha+\alpha'$.

4º Con centro en O giramos P a P' y U a U'.

5º Unimos U' con P' y trazamos una paralela por Q a U'P'. R es el afijo del complejo producto, cuyo módulo es $r \cdot r'$ y cuyo argumento es $\alpha+\alpha'$. Esto es así porque los triángulos OU'P' y OQR son semejantes:

$$\frac{\left|\overrightarrow{OR}\right|}{\left|\overrightarrow{OP'}\right|}=\frac{\left|\overrightarrow{OQ}\right|}{\left|\overrightarrow{OU}\right|} \Rightarrow \left|\overrightarrow{OR}\right|=\frac{\left|\overrightarrow{OP'}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OQ}\right|}{\left|\overrightarrow{OU}\right|}=\frac{r \cdot r'}{1}=r \cdot r'$$

Ejemplo: Efectuar la operación $3_{45^\circ} \cdot 7_{235^\circ}$

$$3_{45^\circ} \cdot 7_{235^\circ}=(3 \cdot 7)_{45^\circ+235^\circ}=21_{280^\circ}$$

Ejemplo: Efectuar la operación $z \cdot w$ siendo $z=5+2i$ y $w=1_{\frac{\pi}{4}}$

$$5+2i \rightarrow \begin{cases} r=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29} \\ \alpha=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2}{5}=21^\circ 48' 5'' \end{cases} \Rightarrow 5+2i=\sqrt{29}_{\,21^\circ 48' 5''}$$

$$\text{Como} \quad 1_{\frac{\pi}{4}}=1_{45^\circ} \quad \Rightarrow \quad z \cdot w=\left(\sqrt{29}\right)_{21^\circ 48' 5''} \cdot 1_{45^\circ}=\sqrt{29}_{\,66^\circ 48' 5''}$$

Cociente de números complejos en forma polar

Sean $z_1 = r_\alpha$ y $z_2 = r'_{\alpha'}$ dos números complejos en forma polar y con $z_2 \neq 0$.

Nuestra intención es calcular el cociente $z = \dfrac{z_1}{z_2}$. Supongamos que z se expresa en forma polar como ρ_θ y calculamos los valores de ρ (módulo del cociente) y θ (argumento del cociente) en función de los módulos y de los argumentos de los números complejos dados.

$$z = \frac{z_1}{z_2} \rightarrow z_1 = z \cdot z_2 \rightarrow r_\alpha = \rho_\theta \cdot r'_{\alpha'} = (\rho \cdot r')_{\theta+\alpha'} \rightarrow \begin{cases} r = \rho \cdot r' & \rightarrow \quad \rho = \dfrac{r}{r'} \\ \alpha = \theta + \alpha' & \rightarrow \quad \theta = \alpha - \alpha' \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{\mathbf{z_1}}{\mathbf{z_2}} = \frac{\mathbf{r_\alpha}}{\mathbf{r'_{\alpha'}}} = \left(\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r'}}\right)_{\alpha-\alpha'}}$$

El cociente de dos números complejos en forma polar es otro número complejo que tiene por módulo el cociente de los módulos y por argumento la diferencia de los argumentos del dividendo y del divisor.

Ejemplo: Efectuar $\dfrac{3_{\frac{\pi}{5}}}{8_{\frac{2\pi}{3}}}$

$$\frac{3_{\frac{\pi}{5}}}{8_{\frac{2\pi}{3}}} = \left(\frac{3}{8}\right)_{\frac{\pi}{5}-\frac{2\pi}{3}} = \left(\frac{3}{8}\right)_{-\frac{7\pi}{15}}$$

Ejemplo: Efectuar la operación $\dfrac{z}{w}$**, siendo** $z = 5 + 2i$ **y** $w = 1_{\frac{\pi}{4}}$

$$z = 5 + 2i = \sqrt{29}_{21^\circ 48' 5''} \qquad \frac{z}{w} = \frac{\sqrt{29}_{21^\circ 48'5''}}{1_{45^\circ}} = \left(\frac{\sqrt{29}}{1}\right)_{21^\circ 48'5''-45^\circ} = \sqrt{29}_{-23^\circ 11' 55''}$$

Potenciación de números complejos

Es un caso particular de la multiplicación cuando todos los factores son iguales:

$$z^n = (r_\alpha)^n = \overbrace{r_\alpha \cdot r_\alpha \cdots\cdots\cdots r_\alpha}^{n-veces} = \left(\overbrace{r \cdot r \cdots\cdots\cdots r}^{n-veces}\right)_{\alpha+\alpha+\cdots\cdots+\alpha} = (r^n)_{n\alpha} \qquad n \in N$$

La potencia n-ésima de un complejo tiene por módulo la potencia n-ésima del módulo y por argumento n veces el argumento.

Demostración

Para demostrarlo con cierto rigor hemos de emplear el ***principio de inducción completa***: "si una propiedad se verifica para un elemento cualquiera de un conjunto, y si, de suponer que se verifica para el que ocupa el lugar $h-1$, se deduce que también la verifica el siguiente h, entonces la verifican todos los elementos del conjunto".

Veámoslo teniendo en cuenta el producto de dos números complejos:

a) $n = 2 \quad \rightarrow \quad z^2 = r_\alpha \cdot r_\alpha = r_\alpha^2$

b) Suponemos que se verifica para $n = h - 1 \quad \rightarrow \quad z^{h-1} = r^{h-1}_{(h-1)\cdot\alpha}$

Multiplicando los dos miembros de la última igualdad por $z = r_\alpha$ tenemos:

$$z^{h-1} \cdot z = r^{h-1}_{(h-1)\cdot\alpha} \cdot r_\alpha = r^{h-1+1}_{(h-1)\cdot\alpha+\alpha} = r^h_{h\alpha}$$

Por tanto:

$$\boxed{(r_\alpha)^n = r^n_{n\cdot\alpha}}$$

Ejemplo: Dado el complejo $z = 2_{\frac{\pi}{4}}$, hallar z^3.

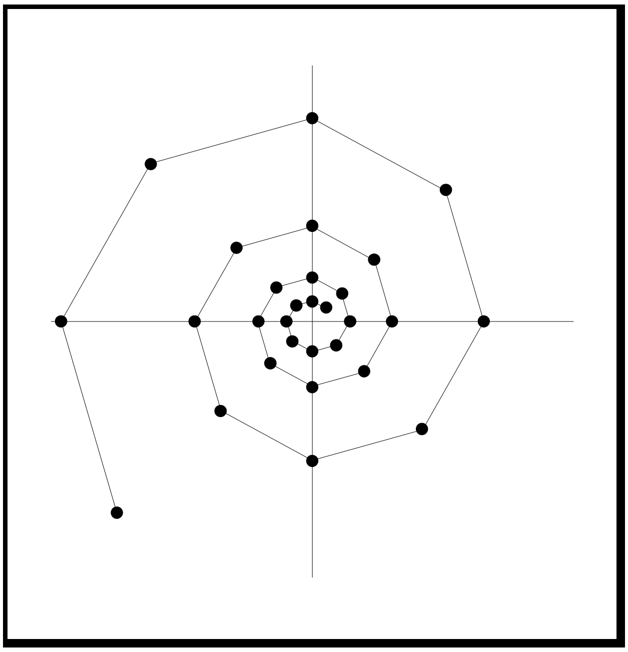
$$z^3 = \left(2_{\frac{\pi}{4}}\right)^3 = 2^3_{3\cdot\frac{\pi}{4}} = 8_{\frac{3\pi}{4}}$$

Representación gráfica de las potencias de un número complejo r_α

Si $r > 1$

Si representamos gráficamente las sucesivas potencias de un número complejo cuyo módulo es mayor que la unidad y unimos sus afijos, obtenemos una poligonal que da vueltas alrededor de un punto (origen de coordenadas), alejándose continuamente de él.

Ejemplo: Representar gráficamente las 29 primeras potencias del complejo $1'1_{45^\circ}$.



Las coordenadas de los seis primeros afijos son las siguientes:

$$(1'1_{45^\circ})^1 = 1'1_{45^\circ}$$

$$(1'1_{45^\circ})^2 = 1'21_{90^\circ}$$

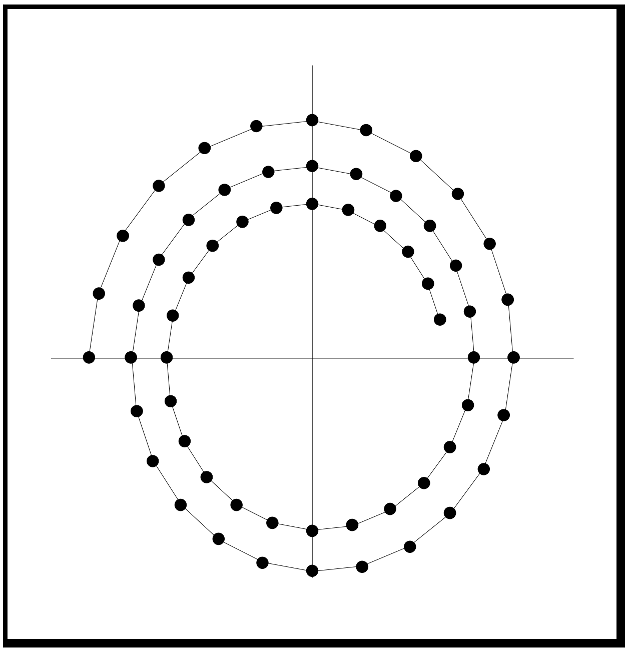
$$(1'1_{45^\circ})^3 = 1'331_{135^\circ}$$

$$(1'1_{45^\circ})^4 = 1'4641_{180^\circ}$$

$$(1'1_{45^\circ})^5 = 1'6105_{225^\circ}$$

$$(1'1_{45^\circ})^6 = 1'7715_{270^\circ}$$

Ejemplo: Representar gráficamente las 60 primeras potencias del complejo $1'009_{15^\circ}$.



Las coordenadas de los seis primeros afijos son las siguientes:

$$(1'009_{15^\circ})^1 = 1'009_{15^\circ}$$

$$(1'009_{15^\circ})^2 = 1'01808_{30^\circ}$$

$$(1'009_{15^\circ})^3 = 1'02724_{45^\circ}$$

$$(1'009_{15^\circ})^4 = 1'03648_{60^\circ}$$

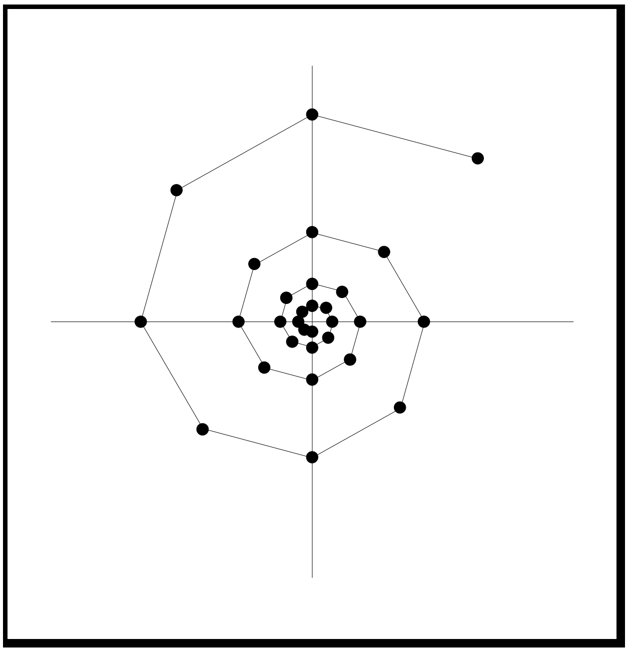
$$(1'009_{15^\circ})^5 = 1'04581_{75^\circ}$$

$$(1'009_{15^\circ})^6 = 1'055229_{90^\circ}$$

Si $0 < r < 1$

Si representamos gráficamente las sucesivas potencias de un número complejo cuyo módulo es mayor que cero y menor que la unidad, y unimos sus afijos, obtenemos una poligonal que da vueltas alrededor de un punto (origen de coordenadas), acercándose continuamente a él.

Ejemplo: Representar gráficamente las 30 primeras potencias del complejo $0'9_{45^\circ}$.



Las coordenadas de los seis primeros afijos son las siguientes:

$$(0'9_{45^\circ})^1 = 0'9_{45^\circ}$$

$$(0'9_{45^\circ})^2 = 0'81_{90^\circ}$$

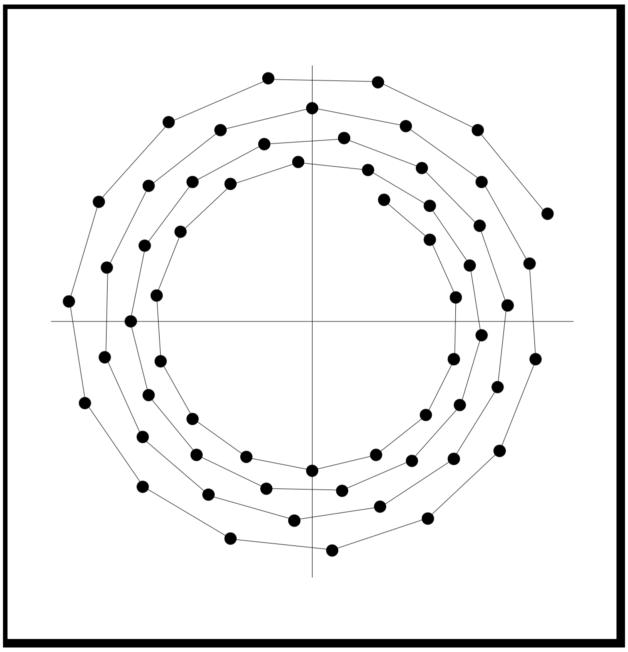
$$(0'9_{45^\circ})^3 = 0'729_{135^\circ}$$

$$(0'9_{45^\circ})^4 = 0'6561_{180^\circ}$$

$$(0'9_{45^\circ})^5 = 0'5904_{225^\circ}$$

$$(0'9_{45^\circ})^6 = 0'5314_{270^\circ}$$

Ejemplo: Representar gráficamente las 60 primeras potencias del complejo $0'99_{25^\circ}$.



Las coordenadas de los seis primeros afijos son las siguientes:

$$(0'99_{25^\circ})^1 = 0'99_{25^\circ}$$

$$(0'99_{25^\circ})^2 = 0'9801_{50^\circ}$$

$$(0'99_{25^\circ})^3 = 0'9702_{75^\circ}$$

$$(0'99_{25^\circ})^4 = 0'9605_{100^\circ}$$

$$(0'99_{25^\circ})^5 = 0'99_{125^\circ}$$

$$(0'99_{25^\circ})^6 = 0'9414_{150^\circ}$$

Fórmula de Moivre

Si escribimos el resultado obtenido al elevar a una potencia $\left(r_{\alpha}\right)^{n}=\left(r^{n}\right)_{n\alpha}$ en forma trigonométrica, obtenemos:

$$\left[r\cdot(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)\right]^{n}=r^{n}\cdot(\cos n\alpha+i\operatorname{sen} n\alpha)$$

Si hacemos $r=1$ obtenemos la **Fórmula de Moivre**:

$$\boxed{\mathbf{(\cos\alpha+i\,sen\,\alpha)^{n}=\cos(n\cdot\alpha)+i\,sen\,(n\cdot\alpha)}}$$

Esta fórmula permite calcular el $\operatorname{sen} n\alpha$ y $\cos n\alpha$ en función de $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$.

Ejemplo: Calcular $\operatorname{sen}4\alpha$ y $\cos4\alpha$ en función de $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$.

Por un lado: $(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)^{4}=\cos 4\alpha+i\operatorname{sen} 4\alpha$.

Por otro lado:

$$(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)^{4}=\binom{4}{0}\cos^{4}\alpha+\binom{4}{1}\cos^{3}\alpha\cdot i\operatorname{sen}\alpha+\binom{4}{2}\cos^{2}\alpha\cdot i^{2}\operatorname{sen}^{2}\alpha+$$

$$\binom{4}{3}\cos\alpha\cdot i^{3}\operatorname{sen}^{3}\alpha+\binom{4}{4}\cdot i^{4}\operatorname{sen}^{4}\alpha=\cos^{4}\alpha+4\cdot\cos^{3}\alpha\cdot i\operatorname{sen}\alpha-6\cdot\cos^{2}\alpha\cdot\operatorname{sen}^{2}\alpha$$

$$-4\cdot\cos\alpha\cdot i\operatorname{sen}^{3}\alpha+\operatorname{sen}^{4}\alpha=\cos^{4}\alpha-6\cdot\cos^{2}\alpha\cdot\operatorname{sen}^{2}\alpha+\operatorname{sen}^{4}\alpha+$$

$$i\cdot\left(4\cdot\cos^{3}\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha-4\cdot\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}^{3}\alpha\right)=$$

Igualando partes reales e imaginarias tenemos:

$$\cos4\alpha=\cos^{4}\alpha-6\cdot\cos^{2}\alpha\cdot\operatorname{sen}^{2}\alpha+\operatorname{sen}^{4}\alpha$$

$$\operatorname{sen}4\alpha=4\cdot\cos^{3}\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha-4\cdot\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}^{3}\alpha$$

Radicación de números complejos

El cálculo de las raíces n-ésimas de un número complejo no puede hacerse en forma binómica, pero en cambio resulta muy sencillo en forma polar. Supongamos que la raíz n-ésima de un número complejo ρ_θ es r_α. Entonces escribiremos:

$$\sqrt[n]{\rho_\theta} = r_\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \rho_\theta = \left(r_\alpha\right)^n = r^n_{n\cdot\alpha}$$

Sabemos que dos complejos son iguales cuando tienen el mismo módulo y sus argumentos se diferencian en un múltiplo de 2π radianes:

$$r^n_{n\cdot\alpha} = \rho_\theta \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} r^n = \rho \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[n]{\rho} \\ n\cdot\alpha = \theta + 2\pi\cdot k \quad \Rightarrow \quad \alpha = \dfrac{\theta + 2\pi\cdot k}{n} \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots, n-1$$

Dando a k los valores 0, 1, ..., n-1 obtenemos los n argumentos distintos que cumplen la condición impuesta, es decir $0 \le \alpha \le 2\pi$.

$$\alpha = \frac{\theta + 2\pi\cdot k}{n} = \begin{cases} k = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \dfrac{\theta}{n} \\ k = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = \dfrac{\theta + 2\pi}{n} \\ \quad \vdots \\ k = n-1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_n = \dfrac{\theta + 2\pi\cdot(n-1)}{n} \end{cases}$$

Las raíces n-ésimas buscadas son: $r_{\alpha_1};\ r_{\alpha_2};\ r_{\alpha_3}; \ldots\ldots\ldots; r_{\alpha_n}$

Para $k \ge n$ se obtienen argumentos que difieren de los anteriores en un número entero de 2π radianes, y en consecuencia coinciden con los anteriores.

Un número complejo $z = \rho_\theta$ posee n raíces n-ésimas distintas. El módulo es el mismo en todas ellas, la raíz n-ésima del módulo ρ del complejo z y sus n argumentos se obtienen al dividir el argumento general $\theta + 2\pi\cdot k$ entre n, donde k toma los valores $0, 1, 2, \ldots\ldots, n-1$.

$$\boxed{\sqrt[n]{\rho_\theta} = \left(\sqrt[n]{\rho}\right)_{\frac{\theta + 2\pi\cdot k}{n}} \qquad \mathbf{k = 0,\ 1,\ 2, \ldots\ldots\ldots, n-1}}$$

Observaciones

- ***Los argumentos forman una progresión aritmética de razón*** $\dfrac{2\pi}{n}$
- ***Los afijos de las n raíces n-ésimas de un nº complejo*** ρ_θ ***están sobre una circunferencia de radio*** $\sqrt[n]{\rho}$ ***y cada dos consecutivas forman un ángulo de*** $\dfrac{2\pi}{n}$ ***radianes.***
- ***Si representamos las n raíces n-ésimas de un nº complejo y unimos los afijos de cada una de las raíces, se obtiene un polígono regular de n lados.***
- ***Los números reales, considerados como números complejos, tienen n raíces n-ésimas cualquiera que sea su signo.***

Ejemplo: Resolver la ecuación $x^4+1=0$

Las soluciones son $x=\sqrt[4]{-1}$. Ponemos el complejo $-1+0i$ en forma polar.

$$-1+0i \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \rho=\sqrt{(-1)^2+0^2}=1 \\ \theta=\operatorname{arctag}\dfrac{0}{-1}=180^\circ \end{cases} \quad \Rightarrow \quad -1+0i=1_{180^\circ}$$

Como los argumentos forman una progresión aritmética cuya razón es $\dfrac{360^\circ}{4}=90^\circ$, tenemos.

$$\sqrt[4]{-1}=\sqrt[4]{1_{180^\circ}}=\left(\sqrt[4]{1}\right)_{\frac{180^\circ+360^\circ\cdot k}{4}}=1_{\frac{180^\circ+360^\circ\cdot k}{4}} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} k=0 \Rightarrow \alpha_1=\dfrac{180^\circ}{4}=45^\circ \\ k=1 \Rightarrow \alpha_2=45^\circ+90^\circ=135^\circ \\ k=2 \Rightarrow \alpha_3=135^\circ+90^\circ=225^\circ \\ k=3 \Rightarrow \alpha_4=225^\circ+90^\circ=315^\circ \end{cases}$$

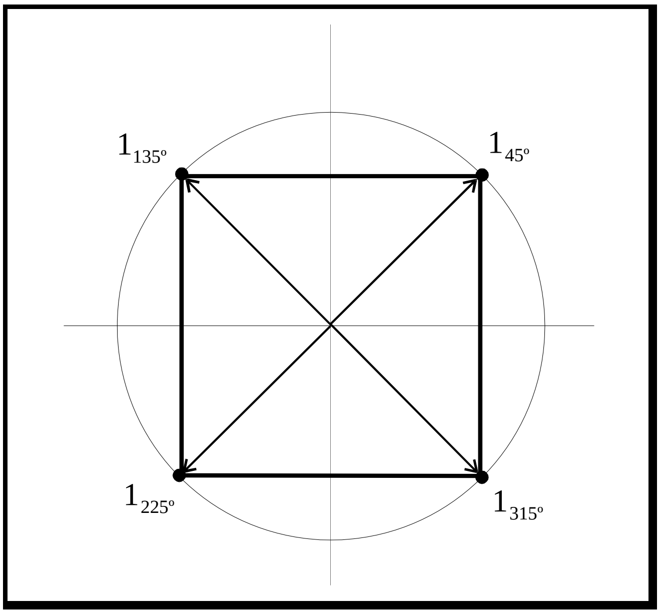
Las raíces son:

$$w_1=1_{45^\circ}=1\cdot(\cos 45^\circ+i\,\mathrm{sen}\,45^\circ)=0'70+0'70i$$

$$w_2=1_{135^\circ}=1\cdot(\cos 135^\circ+i\,\mathrm{sen}\,135^\circ)=-0'70+0'70i$$

$$w_3=1_{225^\circ}=1\cdot(\cos 225^\circ+i\,\mathrm{sen}\,225^\circ)=-0'70-0'70i$$

$$w_4=1_{315^\circ}=1\cdot(\cos 315^\circ+i\,\mathrm{sen}\,315^\circ)=0'70-0'70i$$



Los afijos están situados sobre una circunferencia de radio $\sqrt[4]{1}=1$. Al unirlos determinan un cuadrado inscrito en la misma.

Ejemplo: Resolver la ecuación $x^5-1=0$

$$x^5=1 \quad \rightarrow \quad x=\sqrt[5]{1}=\sqrt[5]{1+0i}$$

$$1+0i \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \rho=\sqrt{1^2+0^2}=1 \\ \theta=\text{arctag}\,\dfrac{0}{1}=0^o \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 1+0i=1_{0^o}$$

Como los argumentos están en progresión aritmética de razón $\dfrac{360^o}{5}=72^o$

$$\sqrt[5]{1}=\sqrt[5]{1_{0^o}}=\left(\sqrt[5]{1}\right)_{\frac{0^o+360^o\cdot k}{5}}=1_{\frac{0^o+360^o\cdot k}{5}} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} k=0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1=\dfrac{0^o}{5}=0^o \\ k=1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2=0^o+72^o=72^o \\ k=2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_3=72^o+72^o=144^o \\ k=3 \quad \Rightarrow \quad \alpha_4=144^o+72^o=216^o \\ k=4 \quad \Rightarrow \quad \alpha_5=216^o+72^o=288^o \end{cases}$$

Las raíces son:

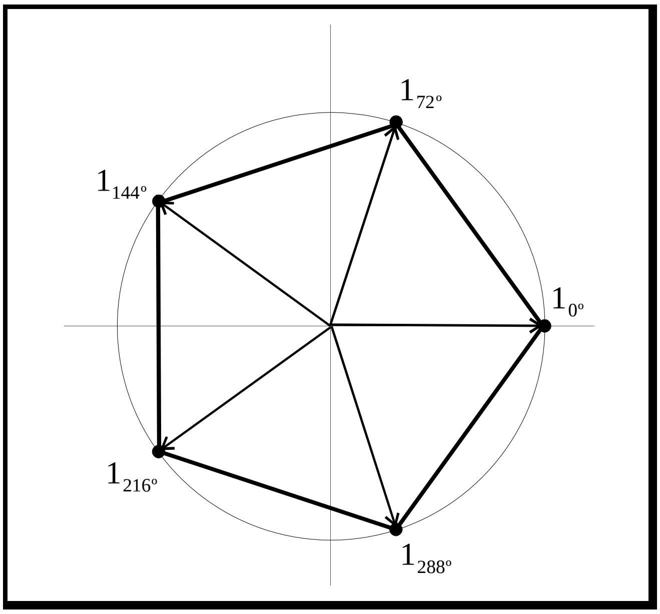
$$w_1=1_{0^o}=1\cdot(\cos 0^o+i\,\text{sen}\,0^o)=1$$

$$w_2=1_{72^o}=1\cdot(\cos 72^o+i\,\text{sen}\,72^o)=0'30+0'95i$$

$$w_3 = 1_{144^o} = 1\cdot(\cos 144^o + i\,\text{sen}\,144^o) = -0'80 + 0'58i$$

$$w_4 = 1_{216^o} = 1\cdot(\cos 216^o + i\,\text{sen}\,216^o) = -0'80 - 0'58i$$

$$w_5 = 1_{288^o} = 1\cdot(\cos 288^o + i\,\text{sen}\,288^o) = 0'30 - 0'95i$$



Los afijos están situados sobre una circunferencia de radio $\sqrt[4]{1} = 1$. Al unirlos determinan un pentágono inscrito en la misma. Hemos representado las coordenadas de los afijos en forma polar.

Ejemplo: Resolver la ecuación $\mathbf{z^9 + 1 = 0}$

Despejando z obtenemos: $z = \sqrt[9]{-1}$

$$-1 + 0i \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1 \\ \theta = \text{arctag}\dfrac{0}{-1} = 180^o \end{cases} \quad \Rightarrow \quad -1 + 0i = 1_{180^o}$$

Como los argumentos están en progresión aritmética de razón $\dfrac{360^o}{9} = 40^o$

$$\sqrt[9]{-1}=\sqrt[9]{1_{180^o}}=\left(\sqrt[9]{1}\right)_{\frac{180^o+360^o\cdot k}{9}}=1_{\frac{180^o+360^o\cdot k}{9}} \rightarrow \begin{cases} k=0 \Rightarrow \alpha_1=\frac{180^o}{9}=20^o \\ k=1 \Rightarrow \alpha_2=20^o+40^o=60^o \\ k=2 \Rightarrow \alpha_3=60^o+40^o=100^o \\ k=3 \Rightarrow \alpha_4=100^o+40^o=140^o \\ k=4 \Rightarrow \alpha_5=140^o+40^o=180^o \\ k=5 \Rightarrow \alpha_6=180^o+40^o=220^o \\ k=6 \Rightarrow \alpha_7=220^o+40^o=260^o \\ k=7 \Rightarrow \alpha_8=260^o+40^o=300^o \\ k=8 \Rightarrow \alpha_9=300^o+40^o=340^o \end{cases}$$

Las raíces son:

$$w_1=1_{20^o}=1\cdot(\cos 20^o+i\,\mathrm{sen}\,20^o)=0'93+0'34i$$

$$w_2=1_{60^o}=1\cdot(\cos 60^o+i\,\mathrm{sen}\,60^o)=0'5+0'86i$$

$$w_3=1_{100^o}=1\cdot(\cos 100^o+i\,\mathrm{sen}\,100^o)=-0'17+0'98i$$

$$w_4=1_{140^o}=1\cdot(\cos 140^o+i\,\mathrm{sen}\,140^o)=-0'76+0'64i$$

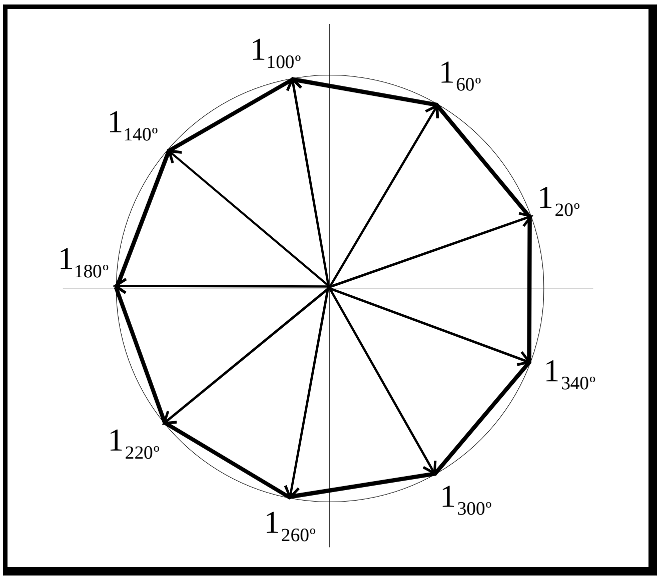
$$w_5=1_{180^o}=1\cdot(\cos 180^o+i\,\mathrm{sen}\,180^o)=-1$$

$$w_6=1_{220^o}=1\cdot(\cos 220^o+i\,\mathrm{sen}\,220^o)=-0'76-0'64i$$

$$w_7=1_{260^o}=1\cdot(\cos 260^o+i\,\mathrm{sen}\,260^o)=-0'17-0'98i$$

$$w_8=1_{300^o}=1\cdot(\cos 300^o+i\,\mathrm{sen}\,300^o)=0'5-0'86i$$

$$w_9=1_{340^o}=1\cdot(\cos 340^o+i\,\mathrm{sen}\,340^o)=0'93-0'34i$$



Los afijos están situados sobre una circunferencia de radio $\sqrt[4]{1} = 1$. Al unirlos determinan un eneágono inscrito en la misma. Hemos representado las coordenadas de los afijos en forma polar.

La calculadora y los números complejos

R→P

Tecla de conversión de coordenadas Rectangulares a Polares.

Introduciremos primero la coordenada "x", pulsaremos seguidamente la tecla de conversión y a continuación introduciremos la coordenada "y". Al pulsar la tecla del igual nos aparecerá en la pantalla un número que corresponde al valor del módulo ρ. Finalmente pulsaremos la tecla $\mathbf{x \leftrightarrow y}$ y obtendremos en la pantalla el valor del argumento θ en grados sexagesimales. Si trabajamos con radianes deberemos tener activado el mode "RAD".

P→R

Tecla de conversión de coordenadas Polares a Rectangulares.

Introduciremos primero el módulo, pulsaremos seguidamente la tecla de conversión y a continuación introduciremos el argumento en grados sexagesimales. Al pulsar la tecla del igual aparecerá en la pantalla un número que corresponde al valor de la coordenada **x**. Finalmente pulsaremos la tecla $\mathbf{x \leftrightarrow y}$ y obtendremos en la pantalla el valor de la coordenada **y**.

Ejemplos: a) Expresar en coordenadas polares un número complejo cuyas coordenadas cartesianas son $(1, -1)$

$1 \ \boxed{R \to P} \ -1 \ \boxed{=}$ Aparecerá en pantalla el módulo $\rho = 1'4142$ $\boxed{X \leftrightarrow Y}$ Aparecerá en pantalla el argumento $\theta = 315^\circ$

b) Expresar en coordenadas cartesianas el número complejo cuyas coordenadas polares son $\sqrt{2}_{315^\circ}$.

$2 \ \boxed{\sqrt{\ }} \ \boxed{P \to R} \ 315 \ \boxed{=}$ Aparecerá en pantalla la coordenada $x = 1$ $\boxed{X \leftrightarrow Y}$ Aparecerá en pantalla la coordenada $y = -1$

Los objetos fractales y los números complejos

El término fractal proviene de la palabra latina “fractus” que significa roto, irregular, y fue acuñado a finales de la década de los 70 por el matemático Benoit B. Mandelbrot del Centro de Investigación Thomas J. Watson de IBM en Yorktown Heights, Nueva York.

Un fractal consta de fragmentos geométricos de orientación y tamaño variable, pero de aspecto similar. Si lo ampliamos nos irá mostrando una serie repetitiva de niveles de detalle, de modo que a todas las escalas que se examine, la estructura presentada será similar. Así un objeto fractal ofrecería el mismo aspecto observado a una escala de metros o milímetros.

Una de las formas más comunes de definir básicamente un fractal es de la de un objeto geométrico que posee autosemejanzas, es decir, las partes más pequeñas del dibujo son altamente similares (incluso idénticas) a las partes más grandes. En una costa, por ejemplo, tomemos el nivel de detalle que tomemos siempre observaremos ciertas similitudes con el nivel de detalle anterior. Por ejemplo, si deseamos medir la Costa del Sol podemos efectuar una medición a partir de las fotografías realizadas por un satélite, pero qué duda cabe que si sobrevolamos la costa con un helicóptero tomando fotografías podremos precisar aún más la medida anterior, obteniendo a la vez una medida mayor. Pero si bajamos a la costa con una regla de un metro y realizamos medidas sobre el terreno la medida obtenida será más precisa y mayor. Si repetimos la medición con una regla más pequeña obtendremos una medida cada vez mayor, y así hasta el infinito, con lo que llegamos a la sorprendente respuesta de que la ¡¡¡Costa del Sol tiene longitud infinita!!! Esta es una curiosa propiedad de gran número de curvas fractales, ya que son curvas que ocupan una región finita pero, sin embargo, su longitud es infinita.

Otra forma de definir los fractales es recurriendo al concepto de dimensión euclídea (ojo, en este caso el tiempo no vale como dimensión). Por ejemplo, una línea tiene una dimensión, la longitud de la línea; una hoja de papel tiene dos dimensiones, el ancho y el largo; una caja tiene tres dimensiones, ancho, alto y profundidad. Dado que un fractal está compuesto por estructuras similares de detalle cada vez más fino, su longitud no está taxativamente definida. Cuando se intenta medir la longitud de una línea fractal con una determinada regla, algunos detalles serán siempre más finos de lo que la regla puede medir. Así, conforme aumenta la resolución del instrumento de medida, va creciendo la longitud de un fractal. Hablaremos por tanto de una longitud_L en la que según la resolución L del instrumento con el que se efectúe la medición se obtendrá una u otra longitud.

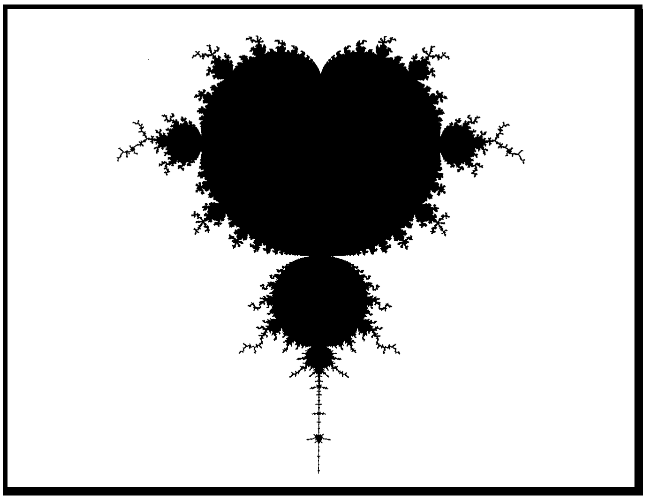
Dado que no podemos hablar de una longitud concreta, sino de una longitud dependiente de L, la noción de longitud carece de significado en el caso de los fractales. Por ello se ha ideado un número llamado dimensión para cuantificar de qué modo llena el espacio un fractal. Mientras que una línea euclídea ocupa exacta y precisamente un espacio unidimensional, una línea fractal se extiende en un espacio bidimensional. En consecuencia, una línea fractal tiene dimensión comprendidas entre uno y dos. Cuanto mayor sea la dimensión de un objeto fractal, tanto mayor es la probabilidad de que una región dada del espacio contenga una porción de objeto fractal.

De esta forma podemos encontrar otra definición de fractal diciendo que es un conjunto de dimensión no entera, es decir, que podemos encontrar objetos de, por ejemplo, una dimensión y media. Una costa, tal y como comentábamos anteriormente tiene una dimensión entre 1’15 y 1’25.

Desde que Benoit B. Maldelbrot creó la revolucionaria definición de objeto fractal, científicos y matemáticos han dado grandes pasos en la comprensión de cómo la naturaleza crea sus formas y desarrolla un crecimiento basado en modelos fractales.

Hay cada vez más pruebas de que la naturaleza siente una predilección especial por las formas fractales. Se han identificado fractales en la forma de las galaxias, de las costas marinas, las montañas y rocas, los bosques y árboles, las nubes y relámpagos, en nuestro propio organismo, en hojas, plumas, escamas, etc., además de en un gran número de procesos físicos y químicos, como la cristalización, fractura, movimiento de partículas en un fluido, descargas eléctricas, electrólisis, etc.

La mayoría de la más bellas imágenes fractales provienen de la iteración de funciones de una variable compleja. En 1979, John Hubbard, matemático estadounidense, utilizando el método de Newton (que sirve para resolver ecuaciones mediante tanteo), hizo que el ordenador fuera explorando muchos de los infinitos puntos que componen el plano complejo, asignando colores a los puntos y a medida que fue obligando al ordenador a realizar una exploración más detallada se fue desconcertando pues obtenía imágenes que mucho tiene que ver con los fractales.



El “conjunto de Mandelbrot” llamado así en honor del matemático franco-polaco B. Mandelbrot ha sido considerado por la revista *Scientific American* como el objeto matemático más bello que existe. Básicamente es una cardioide (semejante a un corazón) y tangente a ella un disco de menor tamaño. También podemos apreciar infinidad de discos tangentes a esta figura y otros tangentes a estos últimos y así sucesivamente.