Problema 1

a) Calcula $(2-i)\cdot(3-4i)+i^{30}-(1-i)^3$

b) Calcula $\dfrac{2}{i}+(1+i)^2+\dfrac{1}{1-i}-\dfrac{4-i}{2+i}-i^{95}$

a) $(2-i)\cdot(3-4i)+i^{30}-(1-i)^3=6-8i-3i+4i^2+i^2-\left(1-3i+3i^2-i^3\right)=3-9i$

b) $\dfrac{2}{i}+(1+i)^2+\dfrac{1}{1-i}-\dfrac{4-i}{2+i}-i^{95}=\dfrac{2i}{i^2}+1+2i+i^2+\dfrac{1+i}{1^2-i^2}-\dfrac{(4-i)\cdot(2-i)}{(2+i)\cdot(2-i)}-i^3=$

$$-2i+1+2i-1+\frac{1}{2}+\frac{i}{2}-\frac{8-4i-2i+i^2}{4-i^2}+i=\frac{1}{2}+\frac{i}{2}-\frac{7-6i}{5}+i=\frac{5+5i-14+12i+10i}{10}=\frac{-9}{10}+\frac{27}{10}i$$

Problema 2

a) Dados los complejos $z_1=5_{45^\circ}$, $z_2=2_{15^\circ}$ **y** $z_3=4i$, **calcula:**

i) $z_1\cdot z_3$ **ii)** $\dfrac{z_1}{(z_2)^2}$ **iii)** $\dfrac{(z_1)^3}{z_2\cdot(z_3)^2}$

b) Calcular $\dfrac{\left(4_{45^\circ}\cdot 1_{25^\circ}\right)^3}{\left(6_{50^\circ}:3_{10^\circ}\right)^2}$

a) i) $z_1\cdot z_3=5_{45^\circ}\cdot(4i)=5_{45^\circ}\cdot 4_{90^\circ}=20_{135^\circ}$ ii) $\dfrac{z_1}{(z_2)^2}=\dfrac{5_{45^\circ}}{\left(2_{15^\circ}\right)^2}=\dfrac{5_{45^\circ}}{4_{30^\circ}}=\left(\dfrac{5}{4}\right)_{15^\circ}$

iii) $\dfrac{(z_1)^3}{z_2\cdot(z_3)^2}=\dfrac{\left(5_{45^\circ}\right)^3}{2_{15^\circ}\cdot(4i)^2}=\dfrac{125_{135^\circ}}{2_{15^\circ}\cdot(-16)}=\dfrac{125_{135^\circ}}{2_{15^\circ}\cdot 16_{180^\circ}}=\dfrac{125_{135^\circ}}{32_{195^\circ}}=\left(\dfrac{125}{32}\right)_{-60^\circ}=\left(\dfrac{125}{32}\right)_{300^\circ}$

b) $\dfrac{\left(4_{45^\circ}\cdot 1_{25^\circ}\right)^3}{\left(6_{50^\circ}:3_{10^\circ}\right)^2}=\dfrac{\left(4_{70^\circ}\right)^3}{\left(2_{40^\circ}\right)^2}=\dfrac{64_{210^\circ}}{4_{80^\circ}}=16_{130^\circ}$

Problema 3

Determina x para que el producto $(2-5i)\cdot(3+xi)$ sea:

a) Un número real.

b) Un número imaginario puro.

Hagamos el producto: $(2-5i)\cdot(3+xi)=6+2xi-15i-5xi^2=(6+5x)+(2x-15)i$

a) Para que el producto sea un número real, la parte imaginaria ha de ser nula:

$$2x-15=0 \qquad \Rightarrow \qquad x=\frac{15}{2}$$

b) Para que el producto sea un número imaginario puro, la parte real ha de ser nula:

$$6+5x=0 \qquad \Rightarrow \qquad x=-\frac{6}{5}$$

Problema 4

Dados los números complejos $2-ai$ y $3-bi$, halla los valores que deben tener a y b para que el producto de aquellos sea igual a $8+4i$.

$$(2-ai)\cdot(3-bi)=6-2bi-3ai+abi^2=(6-ab)-(2b+3a)i=8+4i$$

$$\left.\begin{array}{r}6-ab=8\\ -(2b+3a)=4\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r}6-ab=8\\ a=\dfrac{-2b-4}{3}\end{array}\right\} \rightarrow 6-\frac{-2b^2-4b}{3}=8 \rightarrow 18+2b^2+4b=24 \Rightarrow$$

$$2b^2+4b-6=0 \Rightarrow \begin{cases} b=1 & \rightarrow \quad a=-2 \\ b=-3 & \rightarrow \quad a=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Los números complejos pedidos son $\begin{cases} 2+2i \quad y \quad 3-i \\ ó \\ 2-\dfrac{2}{3}i \quad y \quad 3+3i \end{cases}$

Problema 5

Dado el número complejo $z = \sqrt{3} + i$, escribe su opuesto, su inverso, su conjugado y el inverso de su conjugado en forma binómica y en forma polar.

Forma Binómica

Opuesto $\qquad -z = -\sqrt{3} - i$

Conjugado $\qquad \bar{z} = \sqrt{3} - i$

Inverso $\qquad \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{\sqrt{3}+i} = \dfrac{\sqrt{3}-i}{(\sqrt{3}+i)\cdot(\sqrt{3}-i)} = \dfrac{\sqrt{3}-i}{\left(\sqrt{3}\right)^2 - i^2} = \dfrac{\sqrt{3}-i}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{1}{4}i$

Inverso conj $\qquad \dfrac{1}{\bar{z}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}-i} = \dfrac{\sqrt{3}+i}{(\sqrt{3}-i)\cdot(\sqrt{3}+i)} = \dfrac{\sqrt{3}+i}{(\sqrt{3})^2 - i^2} = \dfrac{\sqrt{3}+i}{3-i^2} = \dfrac{\sqrt{3}+i}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{1}{4}i$

Forma Polar

El complejo z en forma polar es $\left\{\begin{array}{l} r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2 \\ \alpha = \operatorname{arctag}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 30^{o} \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad \sqrt{3} + i = 2_{30^{o}}$

Opuesto $\qquad z = 2_{210^{o}}$

Conjugado $\qquad \bar{z} = 2_{330^{o}}$

Inverso $\qquad \dfrac{1}{z} = \dfrac{1_{0^{o}}}{2_{30^{o}}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)_{-30^{o}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)_{330^{o}}$

Inverso conj. $\qquad \dfrac{1}{\bar{z}} = \dfrac{1_{0^{o}}}{2_{330^{o}}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)_{-330^{o}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)_{30^{o}}$

Problema 6

a) Calcula el producto del número complejo 1+3i por su conjugado y comprueba que su producto es igual al cuadrado del módulo de dicho número.

b) Determina un número complejo cuyo cuadrado sea igual a su conjugado.

a) $(1+3i)\cdot(1-3i)=10 \quad \rightarrow \quad |1+3i|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10} \quad \Rightarrow \quad (1+3i)\cdot(1-3i)=|1+3i|^2$

b) Sea el número complejo $z=a+bi \quad \rightarrow \quad z^2=\overline{z} \quad \rightarrow \quad (a+bi)^2=a-bi$

$$a^2+2abi+b^2i^2=a-bi \;\rightarrow\; a^2-b^2+2abi=a-bi \;\Rightarrow\; \begin{cases} a^2-b^2=a \\ \quad 2ab=-b \;\rightarrow\; 2ab+b=0 \end{cases}$$

$$b(2a+1)=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} b=0 \\ a=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Si $b=0 \quad \rightarrow \quad a^2=a \quad \rightarrow \quad a^2-a=0 \quad \rightarrow \quad a(a-1)=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a=0 \;\Rightarrow\; z=0+0i \\ a=1 \;\Rightarrow\; z=1+0i \end{cases}$

Si $a=-\dfrac{1}{2} \rightarrow \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2-b^2=-\dfrac{1}{2} \rightarrow \dfrac{1}{4}-b^2=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow b=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \\ z=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$

Problema 7

La suma de dos números complejos conjugados es 8 y la suma de sus módulos es 10. ¿De qué números complejos se trata?

$$\begin{cases} a+bi+a-bi=8 \\ \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+(-b)^2}=10 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2a=8 \;\rightarrow\; a=4 \\ 2\sqrt{a^2+b^2}=10 \;\rightarrow\; a^2+b^2=25 \;\Rightarrow\; b=\pm 3 \end{cases}$$

Por tanto los números complejos son: $4+3i$ y $4-3i$

Problema 8

El producto de dos números complejos es -27. Calcula sus módulos y sus argumentos sabiendo que uno de ellos es el cuadrado del otro.

Sean r_α y s_β los dos números complejos. Según el enunciado del problema se verifican las siguientes condiciones:

$$\left.\begin{aligned} r_\alpha \cdot s_\beta &= -27 = 27_{180^o} \\ r_\alpha &= \left(s_\beta\right)^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} r \cdot s = 27 \\ \alpha + \beta = 180^o \\ r = s^2 \\ \alpha = 2\beta \end{cases}$$

Como $r = s^2 \quad \to \quad s^2 \cdot s = 27 \quad \to \quad s^3 = 27 \quad \Rightarrow \quad s = 3 \quad \Rightarrow \quad r = 9$

Como $\alpha = 2\beta \quad \to \quad 2\beta + \beta = 180^o \quad \to \quad 3\beta = 180^o \quad \Rightarrow \quad \beta = 60^o \quad \Rightarrow \quad \alpha = 120^o$

Por tanto, los números complejos son $\begin{cases} r_\alpha = 9_{120^o} \\ s_\beta = 3_{60^o} \end{cases}$

Problema 9

Cómo debe de ser un número complejo para que su cuadrado sea:

a) Imaginario puro.

b) Un número real positivo.

c) Un número real negativo.

Sea el número complejo $z = a + bi \quad \to \quad z^2 = (a+bi)^2 = a^2 + 2abi + (bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$

a) z^2 será imaginario puro si la parte real es nula:

$$a^2 - b^2 = 0 \quad \to \quad (a+b)(a-b) = 0 \quad \to \quad \begin{cases} a + b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -b \\ a - b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = b \end{cases}$$

b) z^2 será un número real positivo si la parte imaginaria es nula y la parte real es positiva; es decir:

$$\left.\begin{aligned} a^2 - b^2 > 0 \\ 2ab = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} a^2 > 0 \\ b = 0 \end{aligned}\right\}$$

c) z^2 será un número real negativo si la parte imaginaria es nula y la parte real negativa; es decir:

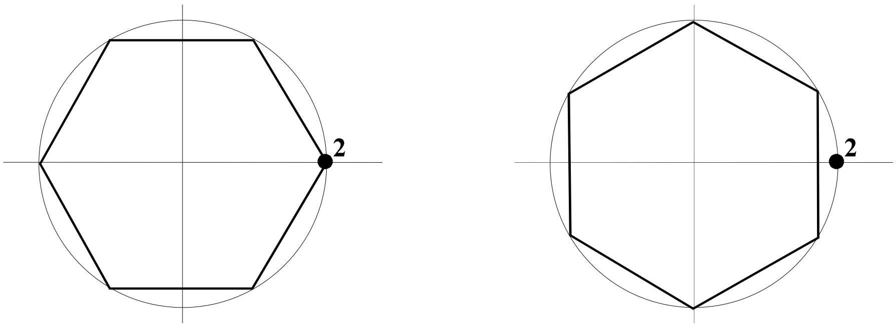
$$\left.\begin{array}{r} a^2-b^2<0 \\ 2ab=0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} b^2>0 \\ a=0 \end{array}\right\}$$

Problema 10

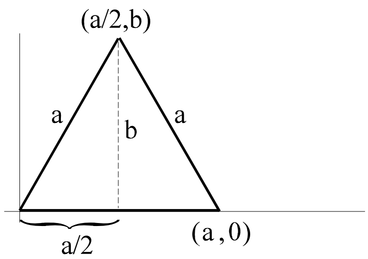
a) Halla dos números complejos sabiendo que el triángulo que forman sus afijos con el origen de coordenadas es equilátero y su área vale $2\sqrt{3}$.

b) Los afijos de $5+2i$ y $-1+4i$ son dos vértices opuestos A y C de un cuadrado ABCD. Halla las formas binómicas de los números complejos cuyos afijos son los otros dos vértices B y D de cuadrado.

c) Halla los números complejos correspondientes a los vértices de los siguientes hexágonos. Son las raíces sextas de números complejos. ¿Cuáles?



a) Supongamos que el lado del triángulo equilátero es a. Trazando la altura sobre uno de sus lados y aplicando el Tª de Pitágoras tenemos:



$$a^2=b^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad\rightarrow\quad a^2=b^2+\frac{a^2}{4} \quad\rightarrow\quad 4a^2=4b^2+a^2 \quad\rightarrow\quad 3a^2=4b^2 \quad\rightarrow\quad a=\frac{2b}{\sqrt{3}}$$

Por otra parte sabemos que el área es $2\sqrt{3}$, por tanto:

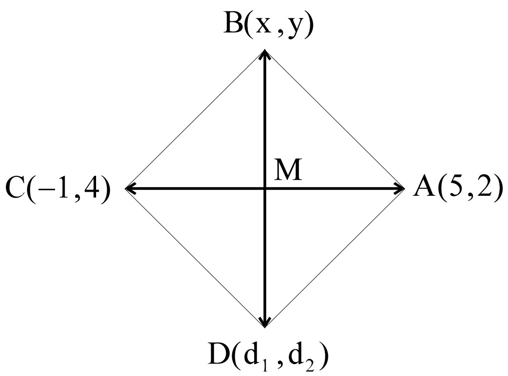
$$A=\frac{\frac{2b}{\sqrt{3}}\cdot b}{2}=2\sqrt{3} \quad\rightarrow\quad \frac{b^2}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3} \quad\rightarrow\quad b=\sqrt{6} \quad\Rightarrow\quad a=\frac{2b}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=2\sqrt{2}$$

Las coordenadas cartesianas son $(2\sqrt{2},0)$ y $(\sqrt{2},\sqrt{6})$.

Considerando esta distancia como el módulo de los afijos tenemos para las coordenadas:

$$2\sqrt{2}_{0^\circ} \quad y \quad 2\sqrt{2}_{60^\circ} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2\sqrt{2}_{0^\circ} = 2\sqrt{2}(\cos 0^\circ + i\,\mathrm{sen}\,0^\circ) = 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2}_{60^\circ} = 2\sqrt{2}(\cos 60^\circ + i\,\mathrm{sen}\,60^\circ) = \sqrt{2} - \sqrt{6}\,i \end{cases}$$

b) Por geometría tenemos:



$$M\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{4+2}{2}\right) = M(2,3)$$

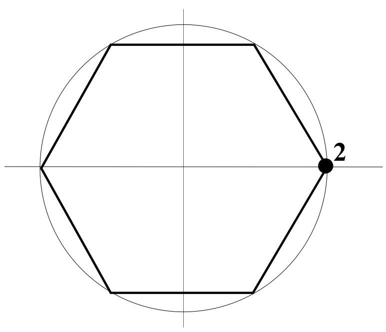
$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \\ |\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}| \end{array}\right\}$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (3,-1) \cdot (x-2, y-3) = 0 \quad \rightarrow \quad 3x - y = 3$$

$$|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}| \rightarrow \sqrt{9+1} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} \rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$$

$$\left.\begin{array}{r} 3x - y = 3 \\ x^2 + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \rightarrow y = 6 \\ x = 1 \rightarrow y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(3,6) \rightarrow 3 + 6i \\ D(1,0) \rightarrow 1 + 0i \end{cases}$$

c)

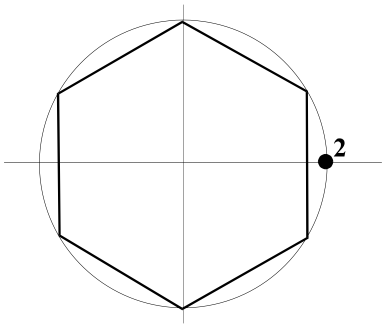


$$z_1 = 2_{0^\circ} \qquad z_1 = 2_{60^\circ} \qquad z_3 = 2_{120^\circ}$$

$$z_4 = 2_{180^\circ} \quad z_5 = 2_{240^\circ} \quad z_6 = 2_{300^\circ}$$

$$\sqrt[6]{r_\alpha} = 2_{0^\circ} \quad \Rightarrow \quad r_\alpha = \left(2_{0^\circ}\right)^6 = 64_{0^\circ}$$

Son las raíces sextas del complejo 64_{0°



$$z_1 = 2_{30^o} \qquad z_1 = 2_{90^o} \qquad z_3 = 2_{150^o}$$

$$z_4 = 2_{210^o} \quad z_5 = 2_{270^o} \quad z_6 = 2_{330^o}$$

$$\sqrt[6]{r_\alpha} = 2_{30^o} \quad \Rightarrow \quad r_\alpha = \left(2_{30^o}\right)^6 = 64_{180^o}$$

Son las raíces sextas del complejo 64_{180^o}

Problema 11

a) Una de las raíces cúbicas de un número complejo es $1+\sqrt{3}\,i$.Halla las otras dos raíces y ése número complejo.

b) Opera en la expresión $(9+3i)^2 \cdot \left(\frac{1}{3} - 2i\right)$ y calcula las raíces cúbicas del resultado.

a) $(1+\sqrt{3}i)^3 = \left(2_{60^o}\right)^3 = 8_{180^o}$. Tenemos que calcular las raíces cúbicas de este número complejo.

$$\sqrt[3]{8_{180^o}} = 2_{\frac{180^o+360^o\cdot k}{3}} \quad \rightarrow \quad \text{La razón es } \frac{360^o}{3} = 120^o \text{, por tanto las raíces cúbicas son:}$$

$$\begin{cases} k=0 \quad \Rightarrow \quad w_1 = 2_{60^o} = 2(\cos 60^o + i\,\mathrm{sen}\,60^o) = 1+\sqrt{3}\,i \\ k=1 \quad \Rightarrow \quad w_2 = 2_{180^o} = 2(\cos 180^o + i\,\mathrm{sen}\,180^o) = -2 \\ k=2 \quad \Rightarrow \quad w_3 = 2_{300^o} = 2(\cos 300^o + i\,\mathrm{sen}\,300^o) = 1-\sqrt{3}\,i \end{cases}$$

b)

$$(9+3i)^2 \cdot \left(\frac{1}{3} - 2i\right) = \left(81 + 54i + 9i^2\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - 2i\right) = (72+54i) \cdot \left(\frac{1}{3} - 2i\right) = 24 - 144i + 18i - 108i^2 =$$

$$132 - 126i \quad \rightarrow \quad \begin{cases} r = \sqrt{132^2 + (-126)^2} = 182'48 \\ \alpha = \mathrm{arctag}\,\frac{-126}{132} = -43'66^o = 316'33^o \end{cases} \quad \rightarrow \quad \sqrt[3]{182'48_{316'33^o}} = 5'67_{\frac{316'33^o+360^o\cdot k}{3}}$$

La razón de la progresión es 120º por tanto las raíces son:

$$\begin{cases} k=0 & \Rightarrow & w_1 = 5'67_{105^\circ 26' 36''} \\ k=1 & \Rightarrow & w_2 = 5'67_{225^\circ 26' 39''} \\ k=2 & \Rightarrow & w_3 = 5'67_{345^\circ 26' 39''} \end{cases}$$

Problema 12

Calculas las raíces quintas de la unidad. Si z y w son dos de estas raíces, comprueba si también son raíces quintas:

$$\mathbf{z \cdot w, \quad \frac{z}{w}, \quad z^2, \quad y \quad w^2}$$

$$\sqrt[5]{1+0i} = \sqrt[5]{1_{0^\circ}} = 1_{\frac{0^\circ+360^\circ \cdot k}{5}} \quad \rightarrow \quad \text{La razón es } \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ \text{, por lo tanto: } \begin{cases} k=0 & \Rightarrow & w_1 = 1_{0^\circ} \\ k=1 & \Rightarrow & w_2 = 1_{72^\circ} \\ k=2 & \Rightarrow & w_3 = 1_{144^\circ} \\ k=3 & \Rightarrow & w_4 = 1_{216^\circ} \\ k=4 & \Rightarrow & w_5 = 1_{288^\circ} \end{cases}$$

Son todas de la forma $1_{k \cdot 72^\circ}$ con $k \in Z$, luego si $z = 1_{k \cdot 72^\circ}$ y $w = 1_{h \cdot 72^\circ}$ con $k, h \in Z$, entonces:

$$z \cdot w = 1_{(k+h) \cdot 72^\circ}; \qquad \frac{z}{w} = 1_{(k-h) \cdot 72^\circ}; \qquad z^2 = 1_{2k \cdot 72^\circ}; \qquad w^2 = 1_{2h \cdot 72^\circ}$$

por tanto también son raíces quintas.

Problema 13

Busca una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean $\sqrt{2}_{45^\circ}$ y $\sqrt{2}_{315^\circ}$.

$$\sqrt{2}_{45^\circ} = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ) = 1 + i \qquad \sqrt{2}_{315^\circ} = \sqrt{2}(\cos 315^\circ + i \operatorname{sen} 315^\circ) = 1 - i$$

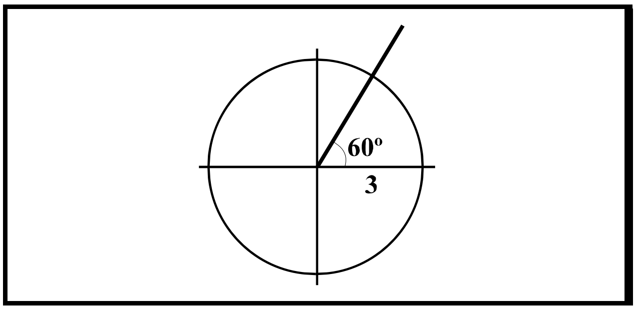
$$[x-(1+i)] \cdot [x-(1-i)] = [(x-1)-i] \cdot [(x-1)+i] = (x-1)^2 - (i)^2 = x^2 - 2x + 1 - i^2 =$$

$$x^2 - 2x + 2$$

Problema 14

Describe las imágenes geométricas de los números complejos que verifican respectivamente:

$$\textbf{a) } |z| = 3 \qquad \textbf{b) Arg } z = 60^\circ$$



a) Se trata de una circunferencia de centro el origen y radio 3.

b) Es la semirrecta que parte del origen y forma un ángulo de 60º con la dirección positiva del eje real.

Problema 15

a) ¿Qué figura determina en cada caso cada una de las igualdades siguientes?

$$|z| = 2; \qquad |z-(1+i)| = 5 \qquad |z-(5+2i)| = 3$$

b) Escribe todos los números complejos cuyos afijos estén en la circunferencia de centro $(1,1)$ y radio 3.

c) Resuelve gráficamente el sistema $\begin{cases} |z-(5+i)| = 5 \\ |z-(2+i)| = 2 \end{cases}$

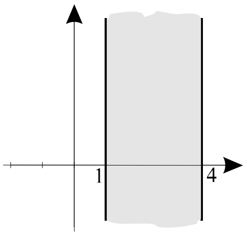
a) Son tres circunferencias con centros en $(0,0)$; $(1,1)$; $(5,2)$ y radios 2, 5 y 3 respectivamente.

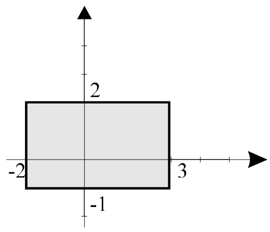
b) $\{z \;/\; |z-(1+i)| = 3\}$

c) La solución es $z = i$.

Problema 16

¿Qué expresión verifican los números complejos que tengan su afijo en la franja de la figura izquierda? ¿Y los que lo tengan en la zona coloreada de la figura de la derecha?





Para la franja de la izquierda se verifica: $2 \leq z + \overline{z} \leq 8$.

Para la franja de la derecha se verifica: $-4 \leq z + \overline{z} \leq 6$ y $-2 \leq z + \overline{z} \leq 4$

Problema 17

Halla todas las soluciones reales e imaginarias de la ecuación:

$$\mathbf{z^3 - 2z^2 + 4z - 8 = 0}$$

Factorizando esta expresión tenemos:

$$(z-2)\cdot(z^2+4) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z - 2 = 0 & \Rightarrow \quad z = 2 \\ z^2 + 4 = 0 & \Rightarrow \quad z = \sqrt{-4} = \pm 2i \end{cases}$$

Las soluciones de la ecuación son: $\begin{cases} z_1 = 2 \\ z_2 = 2i \\ z_3 = -2i \end{cases}$

Problema 18

Halla todas las soluciones reales e imaginarias de la ecuación:

$$\mathbf{z^6 - 28z^3 + 27 = 0}$$

Haciendo $z^3 = t \quad \Rightarrow \quad t^2 - 28t + 27 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 27 \end{cases}$

- Si $t=1 \rightarrow z^3=1 \rightarrow z=\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{1+0i}$

$$1+0i \rightarrow \begin{cases} \rho=\sqrt{1^1+0^2}=1 \\ \theta=\operatorname{arctag}\dfrac{0}{1}=0^o \end{cases} \Rightarrow 1+0i=1_{0^o}$$

La razón de la progresión es $\dfrac{360^o}{3}=120^o$

$$\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{1_{0^o}}=\left(\sqrt[3]{1}\right)_{\frac{0^o+360^o\cdot k}{3}}=1_{\frac{0^o+360^o\cdot k}{3}} \rightarrow \begin{cases} k=0 \Rightarrow \alpha_1=\dfrac{0^o}{3}=0^o \\ k=1 \Rightarrow \alpha_2=0^o+120^o=120^o \\ k=2 \Rightarrow \alpha_3=120^o+120^o=240^o \end{cases}$$

Las tres raíces son:

$$w_1=1_{0^o}=1\cdot(\cos 0^o+i\,\mathrm{sen}\,0^o)=1$$

$$w_2=1_{120^o}=1\cdot(\cos 120^o+i\,\mathrm{sen}\,120^o)=-0'5+0'86i$$

$$w_3=1_{240^o}=1\cdot(\cos 240^o+i\,\mathrm{sen}\,240^o)=-0'5-0'86i$$

- Si $t=27 \rightarrow z^3=27 \rightarrow z=\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{27+0i}$

$$27+0i \rightarrow \begin{cases} \rho=\sqrt{27^2+0^2}=27 \\ \theta=\operatorname{arctag}\dfrac{0}{27}=0^o \end{cases} \rightarrow 27+0i=27_{0^o}$$

La razón de la progresión es $\dfrac{360^o}{3}=120^o$

$$\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{27_{0^o}}=\left(\sqrt[3]{27}\right)_{\frac{0^o+360^o\cdot k}{3}}=3_{\frac{0^o+360^o\cdot k}{3}} \rightarrow \begin{cases} k=0 \Rightarrow \alpha_1=\dfrac{0^o}{3}=0^o \\ k=1 \Rightarrow \alpha_2=0^o+120^o=120^o \\ k=2 \Rightarrow \alpha_3=120^o+120^o=240^o \end{cases}$$

Las tres raíces son:

$$w_4=3_{0^o}=3\cdot(\cos 0^o+i\,\mathrm{sen}\,0^o)=3$$

$$w_5=3_{120^o}=3\cdot(\cos 120^o+i\,\mathrm{sen}\,120^o)=-1'5+2'59i$$

$$w_6=3_{240^o}=3\cdot(\cos 240^o+i\,\mathrm{sen}\,240^o)=-1'5-2'59i$$

Por tanto las seis soluciones de la ecuación de partida son:

$$1;\ 3;\ -0'5-0'86i;\ -0'5+0'86i;\ -1'5-2'59i \quad y \quad -1'5+2'59i$$

Problema 19

Calcula $\sqrt[3]{\dfrac{-1+i}{1+\sqrt{3}i}}$

$$-1+i \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \rho=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2} \\ \theta=\text{arctag}\dfrac{1}{-1}=135^\circ \end{cases} \qquad -1+i=\left(\sqrt{2}\right)_{135^\circ}$$

$$1+\sqrt{3}i \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \rho=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2 \\ \theta=\text{arctag}\dfrac{\sqrt{3}}{1}=60^\circ \end{cases} \qquad 1+\sqrt{3}i=2_{60^\circ}$$

$$\sqrt[3]{\dfrac{\left(\sqrt{2}\right)_{135^\circ}}{2_{60^\circ}}}=\sqrt[3]{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)_{135^\circ-60^\circ}}=\sqrt[3]{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)_{75^\circ}}=\left(\sqrt[3]{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}\right)_{\frac{75^\circ+360^\circ\cdot k}{3}}=0'89_{\frac{75^\circ+360^\circ\cdot k}{3}}$$

La razón de la progresión es $\dfrac{360^\circ}{3}=120^\circ$, por tanto los argumentos serán:

$$0'89_{\frac{75^\circ+360^\circ\cdot k}{3}} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} k=0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1=\dfrac{75^\circ}{3}=25^\circ \\ k=1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2=25^\circ+120^\circ=145^\circ \\ k=2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_3=145^\circ+120^\circ=265^\circ \end{cases}$$

Las raíces son:

$$w_1=0'89_{25^\circ}=0'89\cdot(\cos 25^\circ+i\,\text{sen}\,25^\circ)=0'80+0'37i$$

$$w_2=0'89_{145^\circ}=0'89\cdot(\cos 145^\circ+i\,\text{sen}\,145^\circ)=-0'72+0'51i$$

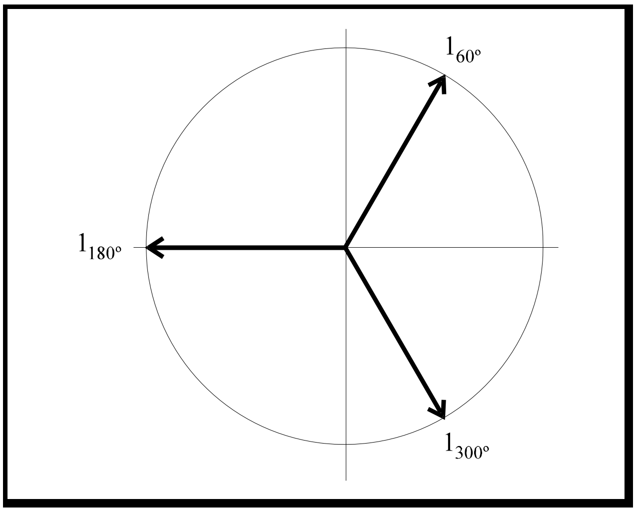
$$w_3=0'89_{265^\circ}=0'89\cdot(\cos 265^\circ+i\,\text{sen}\,265^\circ)=-0'08-0'88i$$

Problema 20

Calcula el valor de $\dfrac{i^7 - i^{-7}}{2i}$ **y de** $\dfrac{5i^3 + 3i^{-5}}{i^6}$ **y representa los afijos de sus raíces cúbicas.**

$$\frac{i^7 - i^{-7}}{2i} = \frac{i^7 - \frac{1}{i^7}}{2i} = \frac{-i + \frac{1}{i}}{2i} = \frac{-i^2 + 1}{2i^2} = \frac{2}{-2} = -1 \qquad \sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1_{180^o}} = 1_{\frac{180^o + 360^o \cdot k}{3}}$$

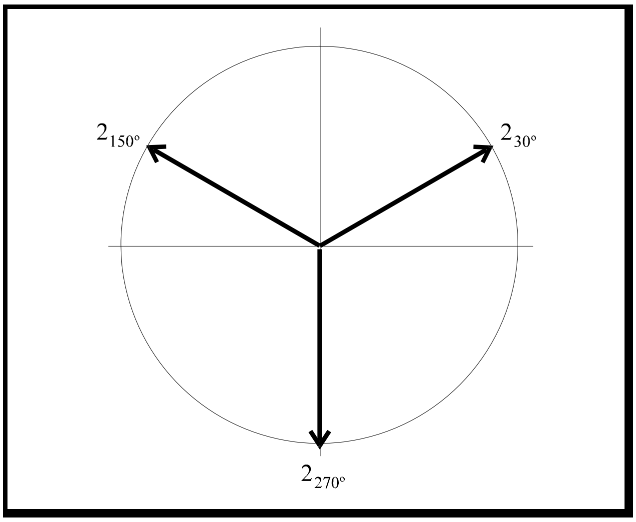
La razón de la progresión es $\dfrac{360^o}{3} = 120^o$, por tanto los argumentos serán:



$$\begin{cases} k=0 \Rightarrow \alpha_1 = \dfrac{180^o}{3} = 60^o \\ k=1 \Rightarrow \alpha_2 = 60^o + 120^o = 180^o \\ k=2 \Rightarrow \alpha_3 = 180^o + 120^o = 300^o \end{cases}$$

$$\frac{5i^3 + 3i^{-5}}{i^6} = \frac{-5i + \frac{3}{i^5}}{i^2} = \frac{-5i + \frac{3}{i}}{-1} = \frac{-5i^2 + 3}{-i} = \frac{8}{-i} = \frac{8i}{-i^2} = 8i \qquad \sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8_{90^o}} = 2_{\frac{90^o + 360^o \cdot k}{3}}$$

La razón de la progresión es $\dfrac{360^o}{3} = 120^o$, por tanto los argumentos serán:

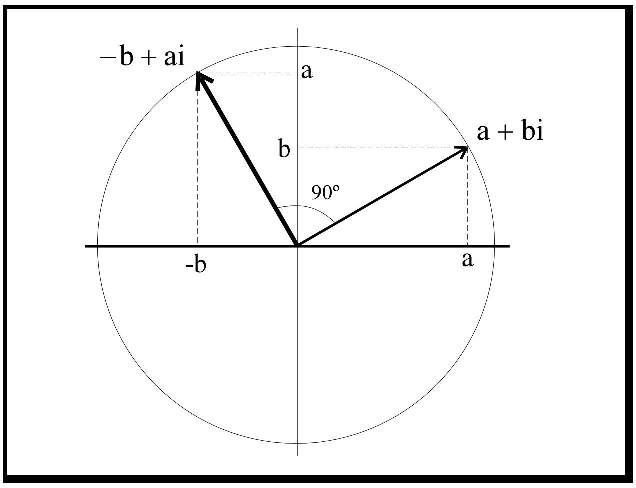


$$\begin{cases} k=0 \Rightarrow \alpha_1 = \dfrac{90^o}{3} = 30^o \\ k=1 \Rightarrow \alpha_2 = 30^o + 120^o = 150^o \\ k=2 \Rightarrow \alpha_3 = 150^o + 120^o = 270^o \end{cases}$$

Problema 21

Explica detalladamente cuál es el resultado geométrico de multiplicar un número complejo por i, i^2, i^3 e i^4.

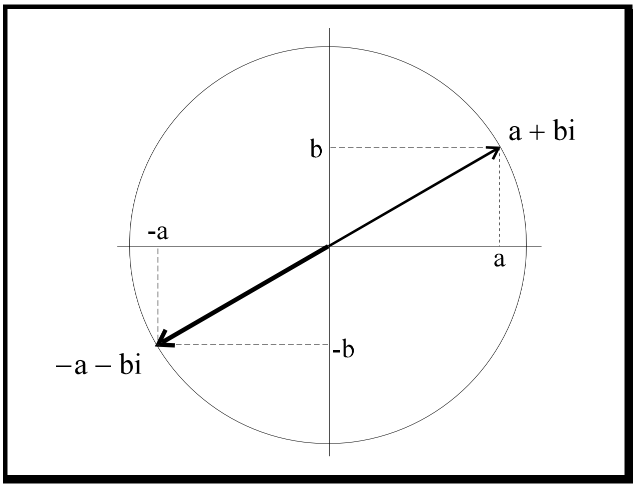
Forma Binómica Sea el número complejo $a + bi$



$$(a + bi)\cdot i = ai + bi^2 = ai - b = -b + ai$$

El resultado de multiplicar un número complejo por i es otro número complejo cuya parte real es el número opuesto de la parte imaginaria del número complejo de partida, y cuya parte imaginaria coincide con la parte real del numero complejo de partida.

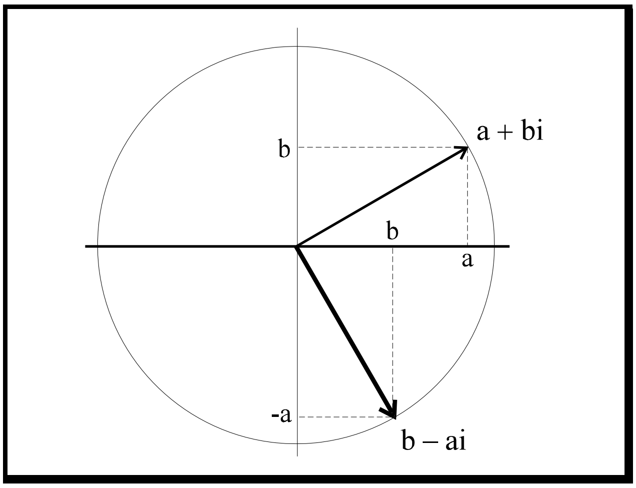
Geométricamente equivale a girar el afijo del complejo de partida 90º.



$$(a + bi)\cdot i^2 = ai^2 + bi^3 = -a - bi$$

El resultado de multiplicar un número complejo por i^2 es otro número complejo cuya parte real es el número opuesto de la parte real del número complejo de partida, y cuya parte imaginaria es el número opuesto de la parte imaginaria del numero complejo de partida.

Geométricamente equivale a girar el afijo del complejo de partida 180º.



$$(a + bi)\cdot i^3 = ai^3 + bi^4 = -ai + b = b - ai$$

El resultado de multiplicar un número complejo por i^3 es otro número complejo cuya parte real coincide con la parte imaginaria del número complejo de partida, y cuya parte imaginaria es el número opuesto de la parte real del numero complejo de partida.

Geométricamente equivale a girar el afijo del complejo de partida 270º.

Como $i^4 = 1$, al multiplicar un complejo por i^4 obtenemos el mismo número complejo.

Forma Polar

Sea el número complejo r_α. teniendo en cuenta que:

$$i = 1_{90^\circ}; \qquad i^2 = -1 = 1_{180^\circ}; \qquad i^3 = -i = 1_{270^\circ} \quad \text{e} \quad i^4 = 1 = 1_{0^\circ}$$

$r_\alpha \cdot 1_{90^\circ} = (r \cdot 1)_{\alpha+90^\circ} = r_{90^\circ+\alpha}$ $\rightarrow$ Módulo el mismo y el argumento aumenta en 90º

$r_\alpha \cdot 1_{180^\circ} = (r \cdot 1)_{\alpha+180^\circ} = r_{180^\circ+\alpha}$ $\rightarrow$ Módulo el mismo y el argumento aumenta en 180º

$r_\alpha \cdot 1_{270^\circ} = (r \cdot 1)_{\alpha+270^\circ} = r_{270^\circ+\alpha}$ $\rightarrow$ Módulo el mismo y el argumento aumenta en 270º

$r_\alpha \cdot 1_{0^\circ} = (r \cdot 1)_{\alpha+0^\circ} = r_{0^\circ+\alpha}$ $\rightarrow$ Módulo el mismo y el argumento el mismo

Problema 22

Calcula las raíces quintas de $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100}$ expresando el resultado en forma binómica.

$$1+i = \sqrt{2}_{45^\circ} \qquad 1-i = \sqrt{2}_{315^\circ} \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{\sqrt{2}_{45^\circ}}{\sqrt{2}_{315^\circ}}\right)^{100} = \left(1_{-270^\circ}\right)^{100} = \left(1_{90^\circ}\right)^{100} = 1_{9000^\circ} = 1_{0^\circ}$$

Como la razón de la progresión es $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$, tenemos:

$$\sqrt[5]{1_{0^\circ}} = 1_{\frac{0^\circ+360^\circ\cdot k}{5}} \rightarrow \begin{cases} k=0 \rightarrow w_1 = 1_{0^\circ} = \cos 0^\circ + i\,\text{sen}\,0^\circ = 1+0i \\ k=1 \rightarrow w_2 = 1_{72^\circ} = \cos 72^\circ + i\,\text{sen}\,72^\circ = 0'30+0'95i \\ k=2 \rightarrow w_3 = 1_{144^\circ} = \cos 144^\circ + i\,\text{sen}\,144^\circ = -0'80+0'58i \\ k=3 \rightarrow w_4 = 1_{216^\circ} = \cos 216^\circ + i\,\text{sen}\,216^\circ = -0'80-0'58i \\ k=4 \rightarrow w_5 = 1_{288^\circ} = \cos 288^\circ + i\,\text{sen}\,288^\circ = 0'30-0'95i \end{cases}$$