

Variable aleatoria

El valor numérico que arbitrariamente se asigna a un suceso se llama variable aleatoria o variable estocástica.

En cuanto a la notación, se designa con X (mayúscula) la variable como tal y con x (minúscula) el valor numérico que toma. Se ha definido así una función que va del espacio muestral, E , en los números reales y que representaremos por la letra X .

Consideremos los siguientes ejemplos:

1. Sea el experimento aleatorio consistente en lanzar dos monedas. El espacio muestral es:

$$E = \{cc, cx, xc, xx\}$$

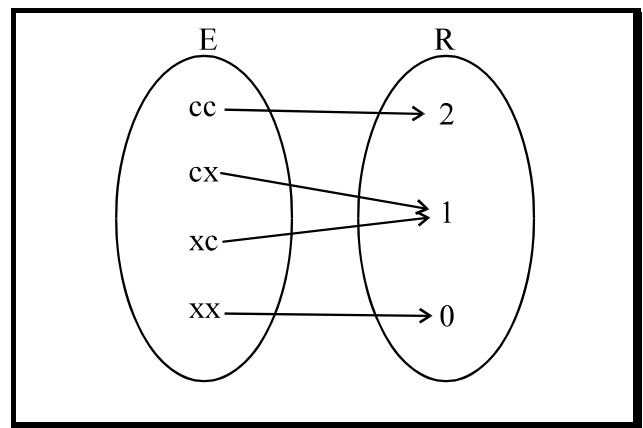
La variable X que designa al número de caras obtenidas tomaría los valores:

$$X(cc) = 2$$

$$X(cx) = 1$$

$$X(xc) = 1$$

$$X(xx) = 0$$



2. Supongamos que ahora lanzamos dos dados. El espacio muestral de este experimento aleatorio es:

$$E = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6), (2,1), \dots, (6,1), \dots, (6,6)\}$$

La ley que asocia a cada resultado la suma de los puntos obtenidos en cada dado es una variable aleatoria que toma los valores:

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$$

3. Consideremos el experimento que consiste en elegir al azar 100 judías verdes de una plantación y medir su longitud. La ley que asocia a cada judía su longitud es una variable aleatoria.
4. En un estudio antropométrico realizado sobre 1000 varones se les ha medido el perímetro craneal. La ley que asocia a cada uno de los varones su perímetro craneal es una variable aleatoria.

Variables aleatorias discretas

Una variable aleatoria es discreta cuando sólo puede tomar unos ciertos valores enteros.

Las variables de los ejemplos 1 y 2 son discretas.

En el ejemplo 1 la variable aleatoria X que representa el número de caras en el lanzamiento de dos monedas toma los valores 0, 1, 2. En el ejemplo 2, la variable aleatoria que representa la suma de las caras superiores de dos dados toma los valores 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Variables aleatorias continuas

Una variable aleatoria es continua cuando puede tomar, al menos teóricamente, todos los valores posibles dentro de un cierto intervalo de la recta real,

Las variables de los ejemplos 3 y 4 son continuas.

En el ejemplo 3, la variable X que representa la longitud de las judías verdes toma valores, por ejemplo, en el intervalo (0–20) cm., pudiendo tomar cualquier valor entre los infinitos que hay en ese intervalo.

En el ejemplo 4, la variable X que representa la medida del perímetro craneal de una serie de individuos toma valores, por ejemplo, en el intervalo (60–90) cm., pudiendo tomar cualquier valor entre los infinitos que hay en ese intervalo.

Cuando el número de valores de la variable aleatoria discreta es muy elevado, resulta más práctico considerarla como continua. Los cálculos se simplifican con este tratamiento, y los resultados no difieren sensiblemente de los obtenidos al considerarla como discreta. Supongamos, por ejemplo, la variable aleatoria X , consistente en tomar al azar un trabajador de una empresa determinada y considerar su salario. Las posibilidades son tantas, que consideraremos esta variable como continua.

Función de probabilidad

Supongamos que hemos lanzado 240 veces un dado perfecto y obtenemos los siguientes resultados:

Cara	1	2	3	4	5	6
Nº de veces	40	39	42	38	42	39

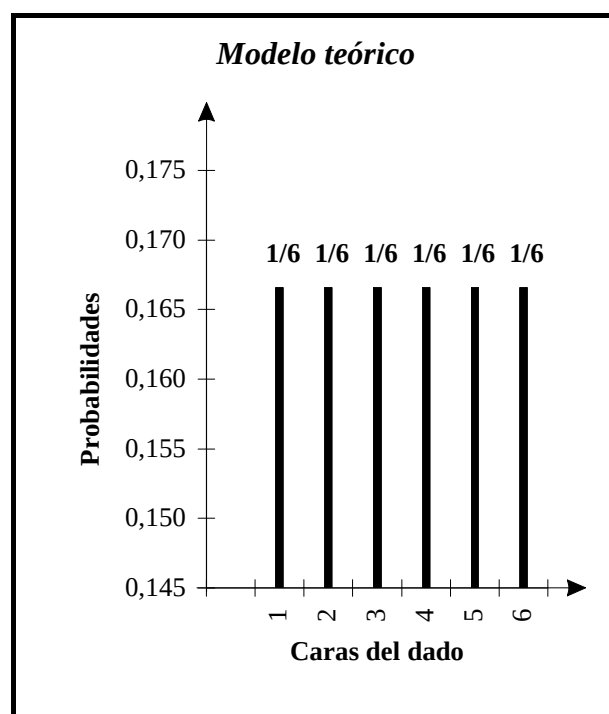
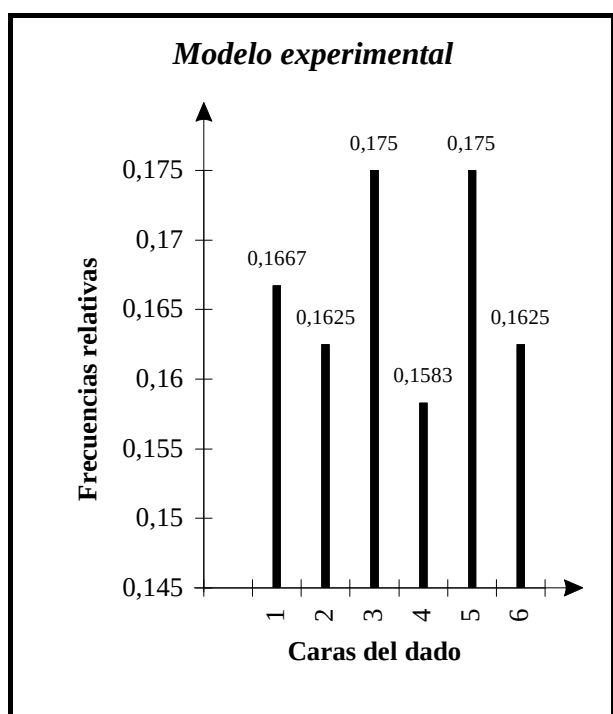
Construyamos la distribución de frecuencias absolutas y relativas de los resultados obtenidos a la izquierda, y a la derecha representemos los resultados esperados utilizando el cálculo de probabilidades.

Resultados obtenidos

Cara	F.absoluta	F.relativa
1	40	0'1667
2	39	0'1625
3	42	0'1750
4	38	0'1583
5	42	0'1750
6	39	0'1625
	240	1

Resultados esperados

Cara	Nº de veces	Pr obab.
1	40	1/ 6
2	40	1/ 6
3	40	1/ 6
4	40	1/ 6
5	40	1/ 6
6	40	1/ 6
	240	1



Si nos fijamos en el modelo teórico, observamos que a cada valor de la variable aleatoria le hacemos corresponder su probabilidad. A esa ley se la llama **función de probabilidad, ley de probabilidad o distribución de probabilidad**.

Se llama **función de probabilidad de una variable aleatoria X** a la aplicación que asocia a cada valor x_i de la variable su probabilidad p_i .

Esta función la podemos expresar fácilmente mediante la tabla adjunta.

Es importante tener en cuenta que en toda función de probabilidad se ha de verificar:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$$

ya que se trata de la probabilidad del suceso cierto.

X	$p_i = p(X = x_i)$
x_1	p_1
x_2	p_2
x_3	p_3
$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_n
	1

La función de probabilidad de una variable aleatoria discreta se representa gráficamente mediante un **diagrama de barras no acumuladas**, de manera que cada ordenada representa la probabilidad del correspondiente valor de la variable.

También se puede representar mediante diagramas de rectángulos o **histogramas**. *El centro de las bases de los rectángulos son los puntos $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ y sus alturas se calculan dividiendo las probabilidades por la longitud de las bases (densidad de probabilidad). Las áreas de cada rectángulo representan ahora probabilidades en lugar de frecuencias.*

Función de distribución

Siguiendo con el ejemplo anterior, vamos a construir a la izquierda la distribución de frecuencias relativas acumuladas y a la derecha la de probabilidades acumuladas.

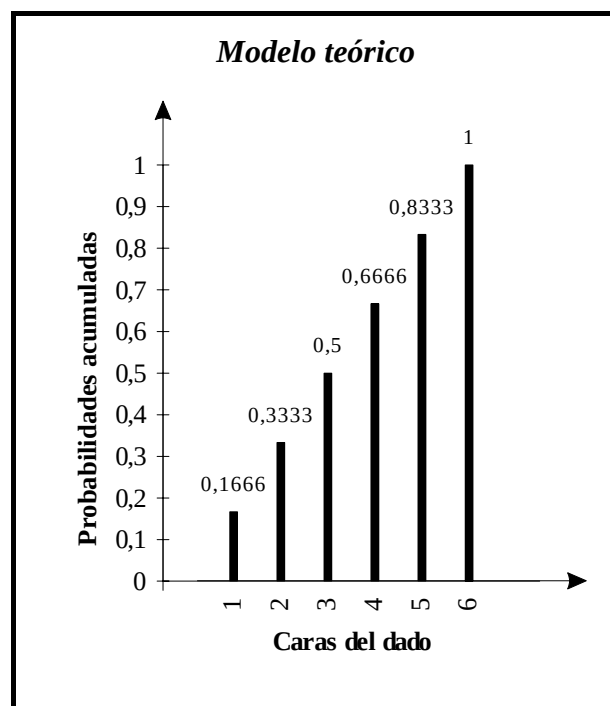
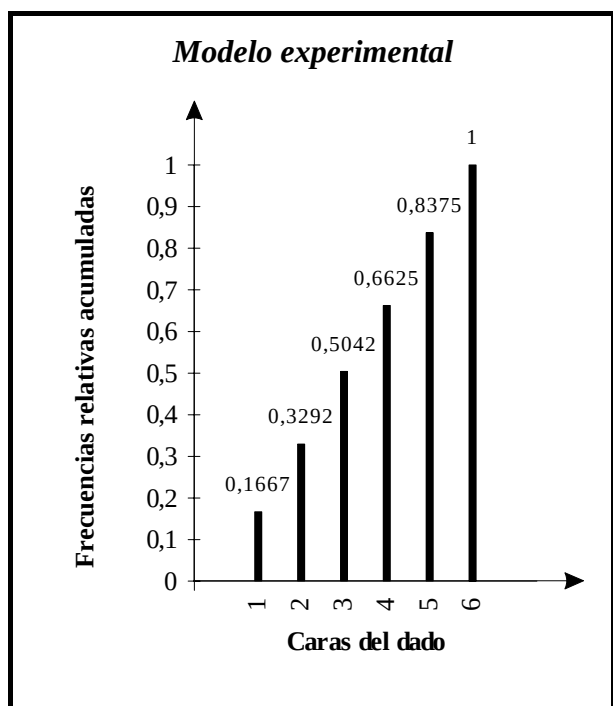
Modelo experimental

Cara	F.relat.	F.relat.acum.
1	0'1667	0'1667
2	0'1625	0'3292
3	0'1750	0'5042
4	0'1583	0'6625
5	0'1750	0'8375
6	0'1625	1
	1	

Modelo teórico

Cara	Probab.	Probab.acum.
1	1/6	1/6
2	1/6	2/6
3	1/6	3/6
4	1/6	4/6
5	1/6	5/6
6	1/6	1
	1	

Representemos en un diagrama de barras estos modelos:



Según lo anterior, definimos la función de distribución como:

Sea X una variable aleatoria discreta cuyos valores suponemos ordenados de menor a mayor. Llamaremos función de distribución de la variable X , y escribiremos $F(x)$, a la función

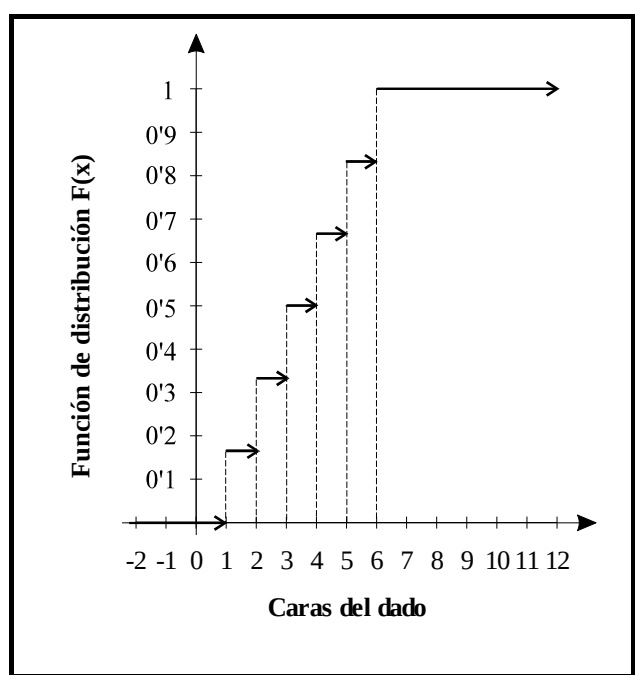
$$F(x) = p(X \leq x)$$

A la hora de utilizar esta fórmula conviene tener en cuenta lo siguiente:

1. X es el símbolo que representa a la variable aleatoria, en este caso discreta.
2. x es un número real cualquiera.
3. $p(X \leq x)$ se lee: probabilidad de que la variable aleatoria discreta X tome un valor menor o igual a x .

Es decir, **la función de distribución asocia a cada valor de la variable aleatoria la probabilidad acumulada hasta ese valor.**

Si formamos la tabla de la función de distribución del ejemplo anterior y la representamos en un diagrama tenemos:



Valor del número x	$F(x) = p(X \leq x)$
$x < 1$	0
$1 \leq x < 2$	$\frac{1}{6}$
$2 \leq x < 3$	$\frac{2}{6}$
$3 \leq x < 4$	$\frac{3}{6}$
$4 \leq x < 5$	$\frac{4}{6}$
$5 \leq x < 6$	$\frac{5}{6}$
$6 \leq x$	1

En general, si X es una variable aleatoria que tiene por función de probabilidad la tabla de la izquierda, la función de distribución es la siguiente

Función de probabilidad

X	$p_i = p(X = x_i)$
x_1	p_1
x_2	p_2
x_3	p_3
$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_n
	1

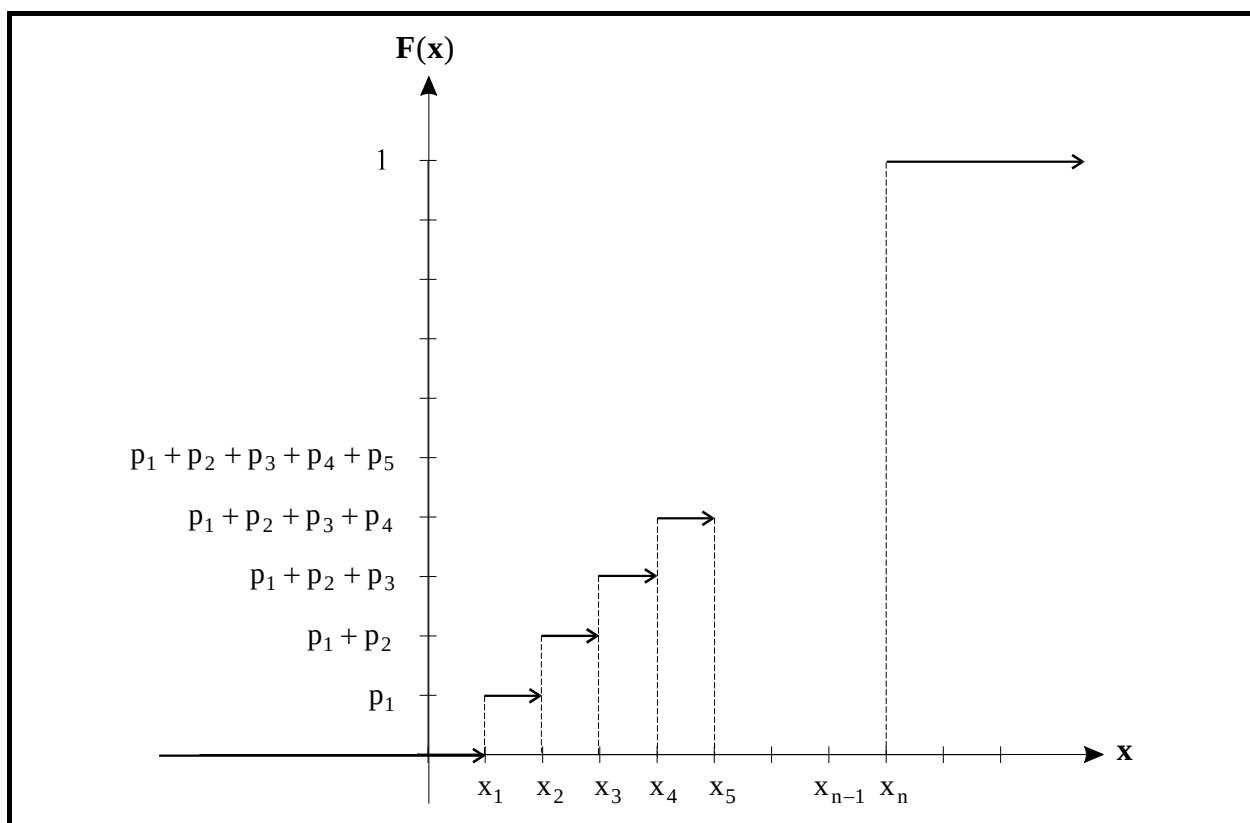
Función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_1 \\ p_1 & \text{si } x_1 \leq x < x_2 \\ p_1 + p_2 & \text{si } x_2 \leq x < x_3 \\ p_1 + p_2 + p_3 & \text{si } x_3 \leq x < x_4 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} & \text{si } x_{n-1} \leq x < x_n \\ 1 & \text{si } x_n \leq x \end{cases}$$

Esta función vale para cada x la suma acumulada de las probabilidades de todos los casos anteriores a x . Por ello, a $F(x)$ también se la llama **función de distribución acumulativa**.

$X = x_i$	$p_i = p(X = x_i)$	$F(x_i) = P(X \leq x_i)$
x_1	$p_1 = p(x_1)$	$p(x_1)$
x_2	$p_2 = p(x_2)$	$p(x_1) + p(x_2)$
x_3	$p_3 = p(x_3)$	$p(x_1) + p(x_2) + p(x_3)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	$p_n = p(x_n)$	$p(x_1) + p(x_2) + p(x_3) + \cdots + p(x_n) = 1$
	1	

El gráfico de la función de distribución $F(x)$ se denomina también gráfico de probabilidades acumuladas. Su representación gráfica es un diagrama en escalera



Veamos algunas propiedades de la función de distribución, que por otra parte ya han podido ser observadas en el diagrama.

- Como $F(x)$ es una probabilidad, se verifica: $0 \leq F(x) \leq 1$.

- La función de distribución $F(x)$ es constante entre cada dos valores consecutivos de la variable. De ahí que se trate de una función escalonada.
- La función de distribución $F(x)$ es nula para todo valor de x anterior al menor valor de la variable aleatoria.
- La función de distribución $F(x)$ es igual a la unidad para todo valor de x posterior al mayor valor de la variable aleatoria.
- La función de distribución $F(x)$ es creciente.

Media de una variable aleatoria discreta.

Volvamos al ejemplo anterior del lanzamiento del dado y calculemos en la tabla de la izquierda la media aritmética de la distribución de frecuencias obtenida.

Para ello conviene recordar que la media de una variable estadística se calcula del siguiente modo:

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_n f_n}{\sum f_i} = x_1 \cdot \frac{f_1}{\sum f_i} + \dots + x_n \cdot \frac{f_n}{\sum f_i} = x_1 \cdot f_{r_1} + x_2 \cdot f_{r_2} + \dots + x_n \cdot f_{r_n} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot f_{r_i}$$

En la tabla de la derecha hacemos los mismos cálculos, sustituyendo los valores de la variable estadística por los de la variable aleatoria (que en este caso son los mismos) y los valores de la frecuencia relativa por los de la probabilidad.

Modelo experimental

x_i	f_r	$x_i f_r$
1	0'1667	0'1667
2	0'1625	0'3350
3	0'1750	0'5250
4	0'1583	0'6332
5	0'1750	0'8750
6	0'1625	0'9750
	1	3'5099

Modelo teórico

x_i	p_i	$x_i p_i$
1	1/6	1/6
2	1/6	2/6
3	1/6	3/6
4	1/6	4/6
5	1/6	5/6
6	1/6	1
	1	21/6

La media aritmética de la distribución experimental es $\bar{x} = 3'5099$.

La media aritmética de la distribución teórica, o bien, de la variable aleatoria discreta (número de la cara del dado), es $\mu = \frac{21}{6} = 3'5$

Se llama media de una variable aleatoria X , que toma los valores $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, con probabilidades $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, respectivamente, al valor de la siguiente expresión:

$$\mu = E(x) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \cdots + x_n \cdot p_n = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i$$

De ahora en adelante reservamos el símbolo $\bar{x}$ para la media aritmética de una variable estadística y el símbolo μ para la media aritmética de una variable aleatoria.

Los premios y el valor esperado en los juegos de azar

Es frecuente llamar a la media μ de una variable aleatoria **valor esperado o esperanza matemática** de dicha variable (de ahí la notación $E(x)$ para la media), apelativos que provienen de los juegos de azar, origen del cálculo de probabilidades y **hacen referencia a la ganancia esperada por el jugador, en promedio, cuando efectúa un gran número de apuestas**. Justamente la media de un juego es el baremo que se establece para determinar su **equidad**.

Considerando como variable aleatoria la ganancia del juego, si la esperanza matemática $E(x) = \mu$ coincide con lo apostado por el jugador no existe ventaja ni para el jugador ni para la "banca", y diremos que el juego es equitativo. Cuando la esperanza matemática es mayor que la apuesta del jugador diremos que el juego es favorable para el jugador y cuando la esperanza matemática es menor que la apuesta entonces el juego es desfavorable para el jugador y por tanto favorable para la banca.

Si embargo no basta con que un juego sea equitativo para que nos interese apostar. En cualquier juego la esperanza sólo describe un aspecto: la ganancia media esperada en una larga serie de jugadas. Pero existen otros aspectos que pueden interesarnos más, como el de tener una probabilidad grande de no sufrir graves pérdidas. Así, el asegurar nuestro coche a todo riesgo, es un juego que no es equitativo, pero nos evita posibles pérdidas graves

Ejemplo: Supongamos una rifa de 100.000 números que vende cada número a 100 pts y regala un automóvil valorado en 1.200.000 pts al poseedor de un número determinado (en general en combinación con un sorteo oficial para darle garantías al apostante). ¿Cuál es el valor esperado?

La esperanza matemática del jugador es:

$$E(x) = 0 \cdot \frac{99.999}{100.000} + 1.200.000 \cdot \frac{1}{100.000} = 12 \text{ pts}$$

Es decir, el jugador recibe, como promedio 12 pts habiendo entregado 100 pts. Por tanto, el juego es desfavorable para el jugador, que pierde como promedio el 88% de lo que juegue. Para que este juego fuese justo, debería entregar un premio de 10.000.000 pts que equilibrase el precio de la apuesta, es decir, debería entregar en premios todo lo recaudado.

Ejemplo: Juzga la equidad de un juego que consiste en apostar 100 pts y lanzar dos dados, ganándose 600 pts al sacar parejas.

La probabilidad de ganar 600 pts es la de sacar un resultado doble. De las 36 posibilidades que hay, sólo 6 son favorables, por tanto la probabilidad de acertar es de $\frac{6}{36}$.

Por otra parte, la probabilidad de no acertar (ganancia 0) es $\frac{30}{36}$.

La esperanza matemática del juego será:

$$E(x) = 600 \cdot \frac{6}{36} + 0 \cdot \frac{30}{36} = 100$$

El juego es equitativo, pues la esperanza matemática iguala la apuesta.

Ejemplo: En el juego de la Lotería Nacional, se emiten 100.000 números a un precio de 10.000 pts cada uno (en el caso de sorteo extraordinario). Los premios ofrecidos en pesetas (que son los valores de la variable aleatoria X) con sus probabilidades se muestran en las columnas segunda y tercera del cuadro adjunto, teniéndose en la primera el número de premios de cada categoría. ¿Es equitativo el juego?

<i>Número de premios</i>	<i>Pesetas (x)</i>	<i>Probabilidad (p)</i>	<i>x · p</i>
1 del gordo	80.000.000	1/100.000	800
1 al décimo	492.000.000	1/1.000.000	492
1 del 2º premio	20.000.000	1/100.000	200
1 al décimo	198.000.000	1/1.000.000	198
2 aprox. al gordo	2.000.000	2/100.000	40
2 aprox. al 2º premio	1.180.000	2/100.000	23'6
40	250.000	40/100.000	100
297	100.000	297/100.000	297
2.499	50.000	2499/100.000	1.249'5
3.000	20.000	3000/100.000	600
Reintegros = 29.999	10.000	29999/100.000	2.999'9
Ninguno = 64.157	0	64157/100.000	0
TOTAL			7.000

El total de la última columna nos da el **valor esperado** del juego de la lotería que, como puede verse, es el 70% de los apostado, pues el billete tiene un precio de 10.000 pts. Es decir, un jugador empedernido, en promedio, debiera esperar recobrar sólo un 70% de lo jugado, quedándose el 30% restante en poder de la Administración, que financia así sus actividades.

Ejemplo: En el sorteo de la ONCE, cada serie consta de 100.000 números, que se venden a 100 pts cada uno. Los números van del 00000 al 99.999. Al igual que en problema de la Lotería Nacional tenemos la siguiente tabla:

<i>Número de premios</i>	<i>Pesetas (x)</i>	<i>Probabilidad (p)</i>	<i>x · p</i>
1 a las 5 cifras	2.500.000	1/100.000	25
9 a las 4 últimas cifras	50.000	9/100.000	4'5
90 a las 3 últimas cifras	5.000	90/100.000	4'5
900 a las 2 últimas cifras	500	900/100.000	4'5
9.000 a la última cifra	100	9.000/100.000	9
Ninguno = 90.000	0	90.000/100.000	0
TOTAL			47'5

Este resultado significa que de cada 100 pts jugadas, sólo se reparten 47'5 en premios; el resto, 52'5 pts. es el beneficio bruto, gastos de organización, etc., de la ONCE. Como sólo recibimos un premio de 47'5%, si jugamos muchas veces a este sorteo, en promedio cobraremos el 47'5% del total apostado.

Los porcentajes entregados en premios en otros juegos son: En las quinielas el 55% y en la Lotería primitiva el 55%.

Varianza y desv. típica de una variable aleatoria discreta

Recordemos la expresión de la varianza de una variable estadística:

$$s^2 = (x_1 - \bar{x})^2 \cdot f_{r_1} + (x_2 - \bar{x})^2 \cdot f_{r_2} + \dots + (x_n - \bar{x})^2 \cdot f_{r_n} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_{r_i}$$

o bien:

$$s^2 = x_1^2 \cdot f_{r_1} + x_2^2 \cdot f_{r_2} + \dots + x_n^2 \cdot f_{r_n} = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot f_{r_i} - \bar{x}^2$$

Utilizando esta última expresión, calculemos en la tabla de la izquierda la varianza de la distribución experimental del ejemplo del apartado anterior, y en la tabla de la derecha, estableciendo la analogía entre probabilidad y frecuencia relativa, la de la distribución teórica.

Modelo experimental

x_i	f_{r_i}	x_i^2	$f_{r_i} \cdot x_i^2$
1	0'1667	1	0'1667
2	0'1625	4	0'65
3	0'1750	9	1'575
4	0'1583	16	2'5328
5	0'1750	25	4'375
6	0'1625	36	5'85
	1		15'1495

Modelos teórico

x_i	p_i	x_i^2	$p_i \cdot x_i^2$
1	1/6	1	1/6
2	1/6	4	4/6
3	1/6	9	9/6
4	1/6	16	16/6
5	1/6	25	25/6
6	1/6	36	36/6
	1		15'166

La varianza de la distribución experimental es: $s^2 = 15'1495 - 3'5099^2 = 2'8301$

Análogamente $\sigma^2 = 15'166 - 3'5^2 = 2'916$, que es la varianza de la variable aleatoria discreta (nº de caras del dado).

Se llama varianza de una variable aleatoria X, que toma los valores $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ con probabilidades $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, respectivamente, al valor de la siguiente expresión:

$$\sigma^2 = (x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (x_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + \dots + (x_n - \mu)^2 \cdot p_n = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot p_i$$

O bien:

$$\sigma^2 = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 + x_3^2 \cdot p_3 + \dots + x_n^2 \cdot p_n - \mu^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i - \mu^2$$

De ahora en adelante reservaremos el símbolo s^2 para la varianza de una variable estadística y el símbolo σ^2 para la varianza de una variable aleatoria.

Se llama desviación típica de la variable aleatoria discreta X, a la raíz cuadrada positiva de la varianza. De ahí que se represente por σ .

En realidad, al igual que pasa con la esperanza matemática, la desviación típica es una desviación típica teórica que asignamos a cada distribución de probabilidad. En general, no es igual a la de una colección de valores realmente observados.

Tanto la varianza como la desviación típica son medidas de dispersión, de tal manera que cuanto menores son estos dos parámetros más agrupados se encuentran los valores de la distribución en torno los valores centrales; por el contrario, para valores grandes de la varianza o de la desviación típica los datos de la distribución se encuentran muy dispersos, es decir, poco agrupados en torno a los valores centrales.

Ejemplo: Un miembro de un consejo de administración de una empresa ha comprobado que, si bien todos los años tienen una junta, ha habido años que tienen hasta cinco. Por la experiencia acumulada durante años, sabe que el número de juntas anuales se distribuye de la forma siguiente:

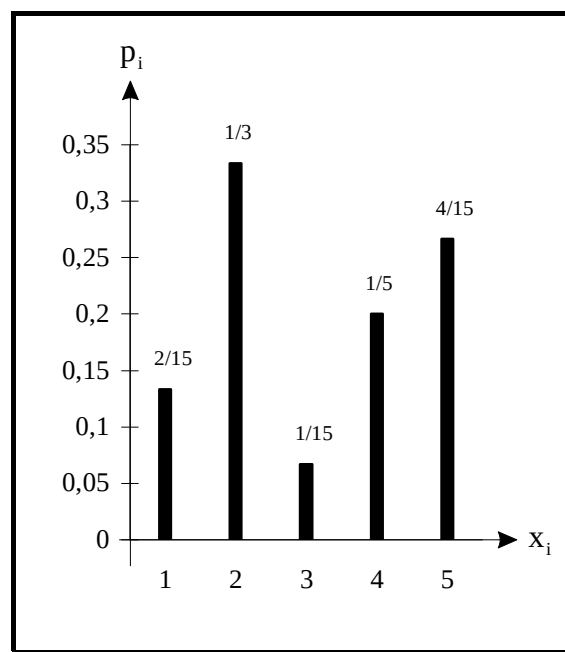
Nº de juntas al año	1	2	3	4	5
Probabilidad	$\frac{2}{15}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$

Se pide hallar:

- La función de probabilidad y su representación.
- La función de distribución y su representación.
- La media, varianza y desviación típica.
- La probabilidad de que en un año, elegido al azar, se celebren más de tres juntas.

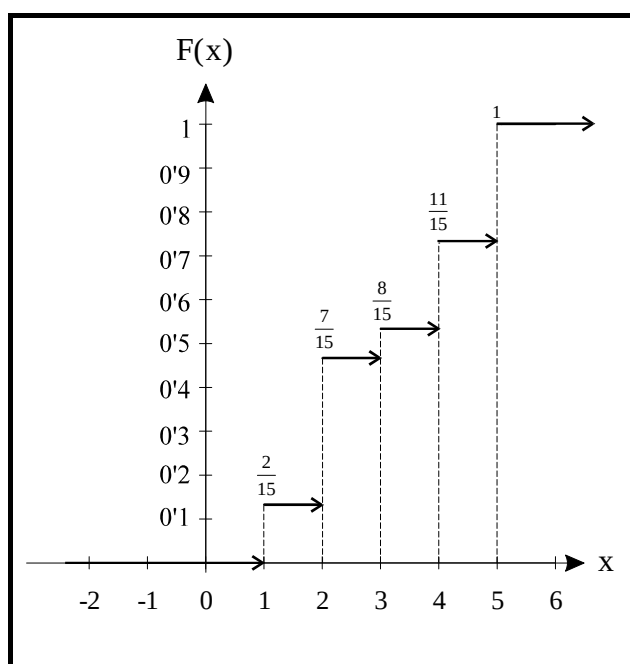
a)

x_i	$p_i = p(X = x_i)$
1	$\frac{2}{15}$
2	$\frac{5}{15}$
3	$\frac{1}{15}$
4	$\frac{3}{15}$
5	$\frac{4}{15}$
	1



b)

Valor de x	F(x)
$x < 1$	0
$1 \leq x < 2$	$\frac{2}{15}$
$2 \leq x < 3$	$\frac{7}{15}$
$3 \leq x < 4$	$\frac{8}{15}$
$4 \leq x < 5$	$\frac{11}{15}$
$5 \leq x$	1



c) Para los siguientes cálculos formamos la tabla correspondiente.

x_i	p_i	$x_i p_i$	$x_i^2 p_i$
1	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$
	$\frac{5}{15}$	$\frac{10}{15}$	$\frac{20}{15}$
2	$\frac{15}{15}$	$\frac{15}{15}$	$\frac{15}{15}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{9}{48}$
3	$\frac{15}{4}$	$\frac{15}{20}$	$\frac{15}{100}$
	$\frac{4}{15}$	$\frac{20}{15}$	$\frac{100}{15}$
5	$\frac{1}{15}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{5}{15}$
	1	$\frac{47}{15}$	$\frac{179}{15}$

$$\text{Media } \mu = \frac{47}{15} = 3'13$$

$$\text{Varianza } \sigma^2 = \frac{179}{15} - 3'13^2 = 2'13$$

$$\text{Desviación típica } \sigma = \sqrt{2'13} = 1'46$$

d) Probabilidad de que la variable $X > 3$:

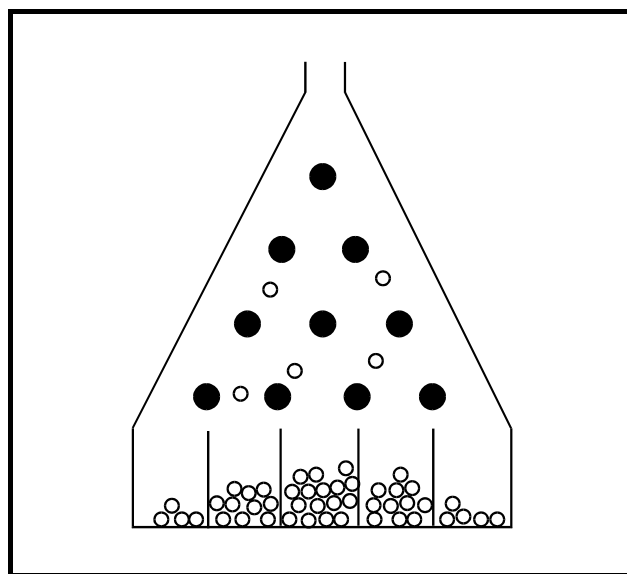
$$p(X > 3) = p(X = 4) + p(X = 5) = \frac{3}{15} + \frac{4}{15} = \frac{7}{15} = 0'466$$

El aparato de Galton-Pearson

El aparato de Galton-Pearson consiste en una serie de topes, dispuestos en filas, según la disposición que muestra la figura adjunta. Por la boca superior se echa un montón de canicas que van cayendo y se recogen en los casilleros inferiores.

¿Por qué las casillas centrales están más llenas que las extremas?

Para explicarlo, sigamos el camino recorrido por una canica e imaginemos que tiene la facultad de convertirse en dos cada vez que llega a una bifurcación: una que iría a la izquierda y otra a la derecha.

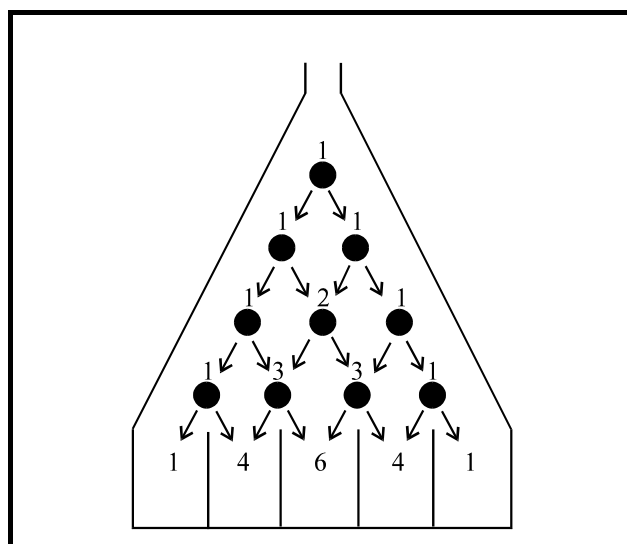


Al final habrá tantas canicas como posibles caminos y cada canica habrá seguido cada uno de esos itinerarios. Como cada canica que llega a cada bifurcación se duplica, habrá al final:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$$

canicas. Es decir, hay 2^4 posibles caminos.

Para averiguar cuantas canicas llegan a cada casillero, tengamos en cuenta que a cada tope llegan tantas como llegaron a los dos topes que tiene inmediatamente encima.



Esto quiere decir que el número aproximado de canicas que caerán en cada casillero es proporcional a 1, 4, 6, 4, 1, respectivamente, porque esos números son la cantidad de posibles itinerarios por los que se puede llegar a cada casillero.

En el triángulo numérico de la derecha, llamado **triángulo de Tartaglia**, se observa que los números extremos son unos, y cada número se obtiene sumando los dos que tiene encima.

Sólo con esta regla puede prolongarse el triángulo tanto como se quiera.

		1			1
		1	1		2
		1	2	1	4
	1	3	3	1	8
1	4	6	4	1	16

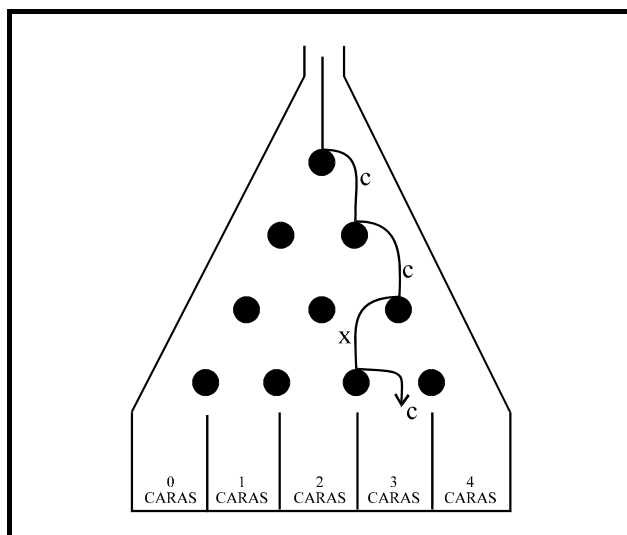
De todo lo anterior deducimos que la probabilidad de que una canica caiga en cada uno de los distintos casilleros es respectivamente:

$$\frac{1}{16}, \frac{4}{16}, \frac{6}{16}, \frac{4}{16}, \frac{1}{16}$$

Imaginemos ahora el aparato de Galton en el que vamos a imitar el recorrido de una canica lanzando una moneda 4 veces y haciendo la asignación Cara → Derecha, Cruz → Izquierda.

Por ejemplo, si se obtiene C, C, X, C, el itinerario de la canica es el que se muestra al margen.

Observa que se llegaría al mismo casillero si en los 4 lanzamientos obtuviéramos tres caras y una cruz en cualquier orden. Y que, por tanto, sólo si nos interesa el casillero en el que cae cada canica y no el recorrido que sigue, se podría simular la experiencia lanzando simultáneamente 4 monedas y contando el número de caras. En cada casillero caerán las canicas cuyo recorrido corresponda a un número de caras.



Al tirar 4 monedas, se dan las siguientes probabilidades:

$$p(0 \text{ caras}) = \frac{1}{16} \quad p(1 \text{ caras}) = \frac{4}{16} \quad p(2 \text{ caras}) = \frac{6}{16} \quad p(3 \text{ caras}) = \frac{4}{16} \quad p(4 \text{ caras}) = \frac{1}{16}$$

Fijémonos en un triángulo de Tartaglia hasta la fila 8. Correspondería a la proporción de canicas que caerían en cada uno de los 9 casilleros de un gran aparato de Galton con 8 filas de topes. Pero también, a partir de él, podríamos calcular las probabilidades de 0 caras, 1 cara, 2 caras,....., 8 caras, al lanzar 8 monedas.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

← Fila 0 →
← Fila 1 →
← Fila 2 →
.
.
.
.

$$\begin{array}{c} \binom{0}{0} \\ \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\ \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\ \cdot \\ \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\ \cdot \\ \binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\ \cdot \\ \binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5} \\ \binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6} \\ \binom{7}{0} \quad \binom{7}{1} \quad \binom{7}{2} \quad \binom{7}{3} \quad \binom{7}{4} \quad \binom{7}{5} \quad \binom{7}{6} \quad \binom{7}{7} \\ \binom{8}{0} \quad \binom{8}{1} \quad \binom{8}{2} \quad \binom{8}{3} \quad \binom{8}{4} \quad \binom{8}{5} \quad \binom{8}{6} \quad \binom{8}{7} \quad \binom{8}{8} \end{array}$$

Por ejemplo: $p(3 \text{ caras}) = \frac{56}{2^8} = \frac{56}{256}$ $p(7 \text{ caras}) = \frac{8}{2^8} = \frac{8}{256}$

Los números del triángulo de Tartaglia se llaman **números combinatorios** y, para referirnos a cada uno de ellos lo haremos nombrando su fila y el lugar que ocupa en ella.

Las filas son 0, 1, 2, 3,..... El lugar de los elementos en cada fila también se describe comenzando por el cero: 0, 1, 2, 3. Por ejemplo:

$$\binom{6}{3} = 20 \text{ (fila 6, lugar 3)} \quad \binom{5}{4} = 5 \quad \binom{7}{0} = 1 \text{ (fila 7 lugar 0)} \quad \binom{7}{7} = 1$$

Ejemplo: En un aparato de Galton con 4 filas de topes dejamos caer 400 perdigones. ¿Cuántos, aproximadamente, llegarán a cada casillero?

$$\frac{400}{16} \rightarrow 25 \text{ perdigones} \quad 4 \cdot \frac{400}{16} \rightarrow 100 \text{ perdigones} \quad 6 \cdot \frac{400}{16} \rightarrow 150 \text{ perdigones}$$

$$4 \cdot \frac{400}{16} \rightarrow 100 \text{ perdigones} \quad \frac{400}{16} \rightarrow 25 \text{ perdigones}$$

Ejemplo: Lanzamos 6 monedas y hemos de apostar por el número de caras que van a salir. ¿Por qué número apostarías? Apostar cuesta 1 peseta y, si ganas, te dan 4 pesetas. Al cabo de 64 partidas, ¿cómo irán tus finanzas aproximadamente?

Conviene apostar por 3 caras porque su probabilidad $p(3) = \frac{20}{64}$ es la mayor de todas.

Al cabo de 64 partidas has gastado 64 pts. Se ganará, por término medio, 20 partidas, a 4 pts por partida son 80 pts. Por tanto se irán ganando unas 16 pts aproximadamente.

Ejemplo: ¿Cuál es la probabilidad de que salga 3 veces cara en 7 lanzamientos de una moneda? ¿Y 4 veces cara en 9 lanzamientos?

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \cdot (7-3)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 35 \rightarrow p(3 \text{ caras}) = \frac{35}{128}$$

que coincide con la proporción de canicas que caen en el casillero 3 de un aparato de Galton que tiene 7 filas de topes.

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{4! \cdot (9-4)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 126 \rightarrow p(4 \text{ caras}) = \frac{126}{512}$$

que coincide con la proporción de canicas que caen en el casillero 4 de un aparato de Galton que tiene 9 filas de topes.

Cálculo de números combinatorios

Para calcular el número combinatorio $\binom{n}{k}$ se opera de la siguiente manera:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot [n-(k-1)] \cdot (n-k)!}{[k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1] \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot n-k+1}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{\text{k factores decrecientes a partir de n}}{\text{k factores decrecientes a partir de k}}$$

Distribución Binomial

Son frecuentes los fenómenos dicotómicos que, esencialmente, se reducen a dos resultados alternativos opuestos, pudiéndose estos caracterizar por los términos **éxito** y **fracaso**; ejemplos de la situación descrita lo constituyen la extracción de una bola y ver si es o no de un color determinado; lanzar una moneda y esperar el resultado cara; inspeccionar una serie de componentes y establecer su validez o no; observar si el número de hijos de una familia es mayor o menor que cierto número, etc.

En todos los casos descritos, el término **éxito** (E) se aplicará a la primera alternativa y **fracaso** (F) a la segunda, queriéndose con ello significar la consecución o no de un resultado prefijado.

Estos procesos quedan recogidos y explicados por la distribución de una variable aleatoria X, llamada **binomial**, que responde a los rasgos siguientes:

1. El resultado de una prueba del experimento aleatorio debe concretarse en dos únicas opciones que llamaremos **éxito** y **fracaso**.
2. Se realizan n ensayos del experimento, **independientes unos de otros**.
3. La probabilidad de éxito es constante a lo largo de las n pruebas y suele denotarse por la letra **p**. Como el suceso fracaso es el contrario del suceso éxito tenemos que la probabilidad del fracaso también es constante y se denota por $q = 1 - p$, ya que $p + q = 1$.
4. La variable aleatoria X trata de contar el número de éxitos en las n pruebas. Por tanto es una variable discreta ya que sus posibles valores son 0, 1, 2, ..., n, suponiendo que se han realizado n pruebas.

Representaremos por **B(n,p)** a la variable de la distribución binomial, siendo **n** (nº de repeticiones) y **p** (probabilidad de éxito) los parámetros de dicha distribución.

Función de probabilidad

Supongamos un experimento aleatorio cuyos resultados únicamente pueden ser el suceso $A = \text{"éxito"}$ y el suceso $\bar{A} = \text{"fracaso"}$, con probabilidades p y $q = 1 - p$, respectivamente.

Realizamos n pruebas del experimento y deseamos saber la probabilidad de obtener r éxitos en las n pruebas.

- Consideremos uno de los casos en los que se obtienen r éxitos en las n pruebas. Sea el suceso:

$$B = \overbrace{A \cap A \cap \dots \cap A}^{r \text{ éxitos}} \cap \overbrace{\bar{A} \cap \bar{A} \cap \dots \cap \bar{A}}^{n-r \text{ fracasos}}$$

La probabilidad de este suceso, teniendo en cuenta la independencia en pruebas sucesivas, será:

$$p(B) = \overbrace{p(A) \cdot p(A) \cdot \dots \cdot p(A)}^r \cdot \overbrace{p(\bar{A}) \cdot p(\bar{A}) \cdot \dots \cdot p(\bar{A})}^{n-r} = p^r q^{n-r}$$

- Tal como vimos en el aparato de Galton, las posibles maneras de obtener r éxitos y $n - r$ fracasos será el número combinatorio $\binom{n}{r}$.
- Si representamos por X la variable aleatoria binomial que representa el número de éxitos obtenidos en las n pruebas del experimento, se concluye:

$$p(\text{obtener } r \text{ éxitos}) = p(X = r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r} \quad r = 0, 1, 2, \dots, n$$

Esta expresión recibe el nombre de **función de probabilidad de la distribución binomial** o **función de probabilidad de la distribución de Bernoulli**.

La distribución de probabilidad de la binomial $B(n, p)$ puede resumirse como sigue:

r	0	1	...	r	...	n
$p(X = r)$	$\binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot q^{n-0} = q^n$	$\binom{n}{1} \cdot p^1 \cdot q^{n-1}$	...	$\binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}$	...	$\binom{n}{n} \cdot p^n \cdot q^0 = p^n$

Debe de notarse que la suma de las probabilidades es la unidad, pues recordando el desarrollo del **binomio de Newton** se tiene que:

$$\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r} = (p + q)^n = 1^n = 1$$

origen del adjetivo binomial que se aplica a estas distribuciones.

Ejemplo: Una prueba de inteligencia está compuesta por 10 preguntas, cada una de las cuales tiene 4 respuestas, siendo sólo una de ellas correcta. Un alumno tiene prisa por acabar la prueba y decide contestar a lo loco, es decir, aleatoriamente. Se pide:

- a) Probabilidad de acertar exactamente 4 preguntas.
- b) Probabilidad de no acertar ninguna.
- c) Probabilidad de acertar todas.
- d) Probabilidad de acertar al menos 8.
- e) Probabilidad de acertar a lo sumo 3.

Sea el suceso éxito "contestar bien". La probabilidad del suceso éxito es por tanto $p = \frac{1}{4} = 0'25$, y la del fracaso $q = 1 - p = 0'75$. Por tanto se trata de una distribución binomial de parámetros $B(10, 0'25)$.

Sea X la variable aleatoria que representa el número de preguntas contestadas correctamente. Entonces se tiene:

$$a) \ p(\text{acertar } 4) = p(X = 4) = \binom{10}{4} \cdot 0'25^4 \cdot 0'75^6 = 0'1460$$

$$b) \ p(\text{no acertar ninguna}) = p(X = 0) = \binom{10}{0} \cdot 0'25^0 \cdot 0'75^{10} = 0'0563$$

$$c) \ p(\text{acertar todas}) = P(x = 10) = \binom{10}{10} \cdot 0'25^{10} \cdot 0'75^0 \cong 0$$

$$d) \ p(\text{acertar al menos } 8) = p(X \geq 8) = p(X = 8) + p(X = 9) + p(X = 10) =$$

$$\binom{10}{8} \cdot 0'25^8 \cdot 0'75^2 + \binom{10}{9} \cdot 0'25^9 \cdot 0'75^1 + \binom{10}{10} \cdot 0'25^{10} \cdot 0'75^0 = 0'005$$

e)

$$p(\text{acertar a lo sumo } 3) = p(X \leq 3) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) =$$

$$\binom{10}{0} \cdot 0'25^0 \cdot 0'75^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0'25^1 \cdot 0'75^9 + \binom{10}{2} \cdot 0'25^2 \cdot 0'75^8 + \binom{10}{3} \cdot 0'25^3 \cdot 0'75^7 = 0'7759$$

Los cálculos de estas expresiones son muy laboriosos, razón por la cual se han construido tablas que nos proporcionan, para los distintos valores de n y r , la probabilidad de que la variable X tome los distintos valores de 0 a n .

Media y varianza de la distribución binomial

Estudiemos un caso particular de la distribución binomial, aquel en el que únicamente se realiza una prueba en lugar de n .

A esta variable se la llama variable aleatoria de Bernoulli, y su función de probabilidad es la que muestra la tabla del margen.

Variable (valor)	1	0
Probabilidad	p	$q = 1 - p$

La **media** o **esperanza matemática** será:

$$E(x) = \mu = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$$

La **varianza** de esta variable será:

$$\sigma^2 = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1 - p) - p^2 = p - p^2 = p \cdot (1 - p) = p \cdot q$$

Consideremos ahora el caso de una distribución binomial con n pruebas repetidas; únicamente tendremos que multiplicar por n los resultados anteriores. Se tiene entonces:

Media	$E(x) = \mu = n \cdot p$
Varianza	$\sigma^2 = n \cdot p \cdot q$
Desviación típica	$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$

Ejemplo: Se sabe que la probabilidad de que un alumno de COU apruebe la selectividad en la convocatoria de junio es de un 72 por 100. Un instituto presenta 150 alumnos a dicha prueba. Hallar el número de alumnos que se espera aprueben. Hallar también la desviación típica.

Es una distribución binomial $B(150, 0'72)$, por tanto:

$$E(x) = \mu = n \cdot p = 150 \cdot 0'72 = 108$$

Se espera que aprueben 108 alumnos.

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{150 \cdot 0'72 \cdot 0'28} = 5'4990$$

Ejemplo: La probabilidad de que una jugadora de golf haga hoyo en un lanzamiento a cierta distancia es 0'2. Si lo intenta 5 veces, calcular la probabilidad de que:

- a) No acierte ninguna.
- b) Acierte alguna.
- c) Acierte 2.
- d) Si haces tandas de 5 lanzamientos, ¿cuál será el nº medio de aciertos? ¿Cuál será su desviación típica?
- e) Si lanzara 1.000 veces y su capacidad de acierto se mantuviera (ni aumentara por el entrenamiento ni disminuyera por el cansancio), ¿qué probabilidad hay de que acierte más de 200 veces?

Se trata de una distribución binomial $B(5, 0'2)$, pues consiste en repetir 5 veces la misma prueba, manteniéndose constante la probabilidad de éxito en 0'2.

a) $p(0 \text{ aciertos}) = \binom{5}{0} \cdot 0'2^0 \cdot 0'8^5 = 0'32768$

b) $p(\text{acierta alguna}) = 1 - p(\text{no acierta ninguna}) = 1 - p(0) =$

$$1 - \binom{5}{0} \cdot 0'2^0 \cdot 0'8^5 = 1 - 0'32768 = 0'67232$$

c) $p(2 \text{ aciertos}) = \binom{5}{2} \cdot 0'2^2 \cdot 0'8^3 = 0'2048$

d) $\mu = n \cdot p = 5 \cdot 0'2 = 1$ (acertará 1 por término medio).

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{5 \cdot 0'2 \cdot 0'8} = 0'8944$$

e) En este caso se trata de una binomial $B(1000, 0'2)$ y hay que calcular:

$$p(X = 221) + p(X = 222) + \dots + p(X = 1000)$$

Como ves, prácticamente imposible si no es con ordenador. Sin embargo, hay un método por el cual se puede resolver fácilmente. Se verá en el próximo tema.

Ejemplo: En una baraja se llaman figuras a las cartas AS, SOTA, CABALLO y REY. Hay, pues, 4 figuras por cada 10 cartas.

Realizamos la siguiente experiencia: extraemos una carta, la miramos y la devolvemos al mazo; y esto lo hacemos 5 veces.

- a) ¿Se trata de una distribución binomial? En caso afirmativo cuánto valen n y p ?
- b) Calcula la probabilidad de no obtener ninguna figura, la de obtener alguna figura y la de obtener 4 figuras.
- c) Calcula la media y la desviación típica y explicar qué significan.

- a) Es una distribución binomial porque las pruebas son independientes entre sí y sólo tenemos dos sucesos: el éxito (salir figura) y el fracaso (no salir figura).

Como hay 16 figuras en el mazo de cartas, la probabilidad del suceso éxito es:

$$p = \frac{16}{40} = 0'4 \Rightarrow q = 0'6$$

Por tanto $n = 5$ y $p = 0'4$.

$$b) p(0 \text{ figuras}) = \binom{5}{0} \cdot 0'4^0 \cdot 0'6^5 = 0'0777$$

$$p(\text{alguna figura}) = 1 - p(\text{ninguna}) = 1 - 0'0777 = 0'9222$$

$$p(4 \text{ figuras}) = \binom{5}{4} \cdot 0'4^4 \cdot 0'6^1 = 0'0768$$

$$c) \mu = n \cdot p = 5 \cdot 0'4 = 2 \qquad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{5 \cdot 0'4 \cdot 0'6} = 1'0954$$

Que $\mu = 2$ significa que por término medio se obtienen 2 figuras.

Ejemplo: En una mano de póker se dan, a cada jugador, 5 cartas y nos preguntamos por la probabilidad de que un jugador tenga k figuras ($k = 0, 1, 2, 3, 4$ o 5). ¿Por qué no se trata de una distribución binomial?

No es una distribución binomial porque los sucesos no son independientes, ya que al no devolver cada vez la carta al mazo la probabilidad de que cada una de las cartas sea figura depende de los resultados de las anteriores.

Ajuste de una distribución binomial

El estudio de las distribuciones de probabilidad (teóricas) basa su interés en poder explicar las distribuciones de frecuencias reales, obtenidas en la experiencia y práctica del investigador. No es infrecuente, entonces, encontrar este tipo de distribuciones cuyo comportamiento puede inducir a la creencia de que corresponden a las características binomiales.

Para contrastar tal creencia se ajusta una distribución binomial cuya media coincida con la media muestral y se comparan las probabilidades teóricas de la binomial ajustada con las frecuencias relativas. **Lo que se hace entonces es igualar la media de la muestra $\bar{x}$, con la de una distribución binomial, que, como sabemos es $\mu = n \cdot p$, y puesto que se conoce el valor de n se obtiene enseguida el de p .** Veámoslo con un ejemplo:

Ejemplo: Cierta variable X presenta la distribución de frecuencias mostrada en la tabla:

X	0	1	2	3	Total
f_i	292	421	250	37	1000
f_r	0'292	0'421	0'250	0'037	1

Ajusta una distribución binomial a tales datos y estima la bondad del ajuste.

Calculemos la media muestral de los datos:

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 292 + 1 \cdot 421 + 2 \cdot 250 + 3 \cdot 37}{1000} = 1'032$$

La media de la binomial es $\mu = n \cdot p = 3 \cdot p = 1'032 \Rightarrow p = \frac{1'032}{3} = 0'344 \cong 0'35$

Por tanto, una binomial $B(3, 0'35)$ sería la de mejor ajuste. Veamos en qué grado:

$$p(X = 0) = \binom{3}{0} \cdot 0'35^0 \cdot 0'65^3 = 0'2746$$

$$p(X = 1) = \binom{3}{1} \cdot 0'35^1 \cdot 0'65^2 = 0'443$$

$$p(X = 2) = \binom{3}{2} \cdot 0'35^2 \cdot 0'65^1 = 0'2388$$

$$p(X = 3) = \binom{3}{3} \cdot 0'35^3 \cdot 0'65^0 = 0'0428$$

que comparándolas con las frecuencias relativas de la tabla puede afirmarse el origen binomial de los datos.

Ejemplo: En un lote de 600 piezas cada una de tres componentes, se han tenido las siguientes frecuencias de datos:

Número de componentes defectuosos	0	1	2	3
Número de piezas	311	227	59	3

Ajustar una distribución binomial y calcular cuál es la probabilidad teórica de que un componente sea defectuoso.

$$\text{La media de la muestra es } \bar{x} = \frac{0 \cdot 311 + 1 \cdot 227 + 2 \cdot 59 + 3 \cdot 3}{600} = 0'59$$

$$0'59 = n \cdot p = 3 \cdot p \Rightarrow p = 0'196 \hat{=} 0'2$$

Calcularemos las frecuencias teóricas correspondientes. Como $p = 0'2 \Rightarrow q = 0'8$

$$p(X = 0) = \binom{3}{0} \cdot 0'2^0 \cdot 0'8^3 = 0'512$$

$$p(X = 1) = \binom{3}{1} \cdot 0'2^1 \cdot 0'8^2 = 0'384$$

$$p(X = 2) = \binom{3}{2} \cdot 0'2^2 \cdot 0'8^1 = 0'096$$

$$p(X = 3) = \binom{3}{3} \cdot 0'2^3 \cdot 0'8^0 = 0'008$$

Como sabemos, estas probabilidades deben sumar 1.

En 600 piezas, teniendo en cuenta las probabilidades calculadas de encontrar 0, 1, 2 y 3 defectos en cada pieza, se tienen:

$$600 \cdot 0'512 \hat{=} 307 \text{ piezas con 0 defectos}$$

$$600 \cdot 0'384 \hat{=} 230 \text{ piezas con 1 defectos}$$

$$600 \cdot 0'096 \hat{=} 58 \text{ piezas con 2 defectos}$$

$$600 \cdot 0'008 \hat{=} 5 \text{ piezas con 3 defectos}$$

Como se ve, las frecuencias teóricas no difieren excesivamente de los valores reales: la distribución de componentes defectuosos sigue un comportamiento aleatorio según una binomial $B(3, 0'2)$.

Distribución de Poisson

Para los casos de distribución binomial en los que n sea muy grande y p muy pequeña, pero con $n \cdot p$ constante (al producto $n \cdot p$ se le llama λ) se utiliza la **distribución discreta de Poisson**, que viene dada por la expresión:

$$p(X = x) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}$$

Su media es λ y su desviación típica es $\sqrt{\lambda}$. Por ser una distribución que se utiliza cuando p es muy pequeña, se le llama "ley de los casos raros". En la práctica se usa esta aproximación cuando $p < 0.10$.