Idea y significado de la interpolación

Hasta ahora, siempre que estudiábamos un problema en el que aparecía una función, se daba directamente una expresión de la forma $y = f(x)$, o bien los datos necesarios para establecerla. Ello nos permitía realizar un estudio acerca de sus características y comportamiento, y utilizarla en la resolución de un problema.

Se va a plantear ahora la situación inversa, es decir, dada una serie de puntos:

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ (x_3, y_3), \ldots\ldots\ldots\ldots, (x_n, y_n)$$

hallar una función real de variable real que verifique todos esos valores y además permita:

- Calcular el valor correspondiente en un punto intermedio de los que disponemos, de manera que el resultado se ajuste con el menor error posible al experimento realizado, o a los valores de la función (dependiendo del origen de la tabla de datos). Esta operación se llama **interpolación**.

  Interpolar: **Averiguar el valor de una magnitud en un intervalo cuando se conocen algunos de los valores que toma a uno y otro lado de dicho intervalo**

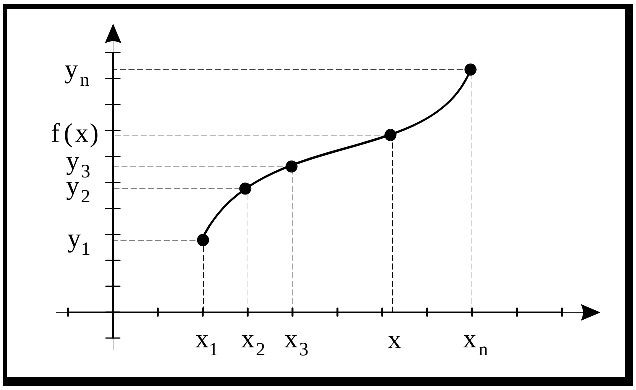
- Estudiar si la función obtenida se ajusta a los resultados esperados fuera del intervalo en el que se encuentran los valores dados de x. Este proceso recibe el nombre de **extrapolación.**

  Extrapolar: **Averiguar el valor de una magnitud para valores que se hallan fuera del intervalo en que dicha magnitud ha sido medida.**

La necesidad de plantear tal problema deriva del hecho siguiente: en la mayoría de los casos, las normas que rigen el comportamiento humano, la evolución de la naturaleza, etc., no vienen descritas por una fórmula concreta y conocida. Normalmente, sólo contamos con una serie más o menos amplia de valores recogidos de una forma experimental, que nos darán la pauta de su comportamiento; de ellos podremos deducir, con un error más o menos controlado, datos no contemplados en el estudio.

Si representamos los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots\ldots\ldots\ldots, (x_n, y_n)$ en un sistema de coordenadas cartesianas y los unimos por una curva, resolvemos el problema de la interpolación.

Si **f** es una función cuya gráfica en el intervalo $[x_1, x_n]$ es la curva dibujada a la derecha, a un cierto valor intermedio **x** le corresponde $f(x)$, tal como se ve en la figura. Es evidente que el valor $f(x)$ depende de la curva que tracemos uniendo los puntos dados y, obviamente, el número de curvas que podemos trazar es infinito.



La elección adecuada de la función y su expresión matemática pueden demostrarse algunas veces, pero en otros casos es imposible; de ahí la importancia de que el investigador, basado en su experiencia e intuición, tenga una cierta idea a priori de cómo debe ser la función que pretende encontrar.

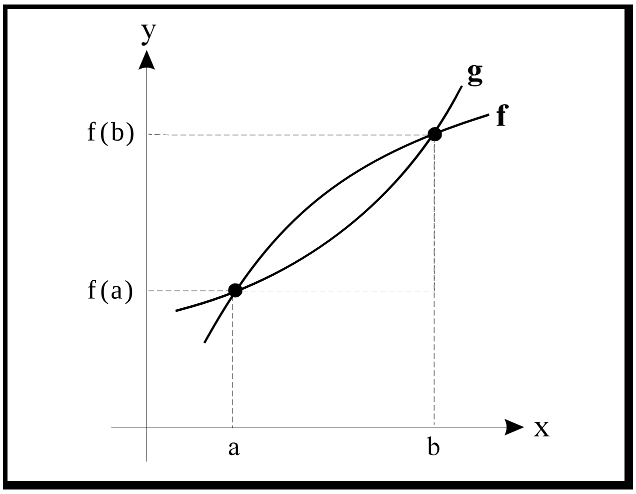
Interpolación de una función en un intervalo

La interpolación en funciones consiste especialmente en sustituir una función dada en un intervalo $[a,b]$ por otra más sencilla y manejable de evaluar en esos puntos.

Consideremos una función f y tomemos los puntos de su gráfica:

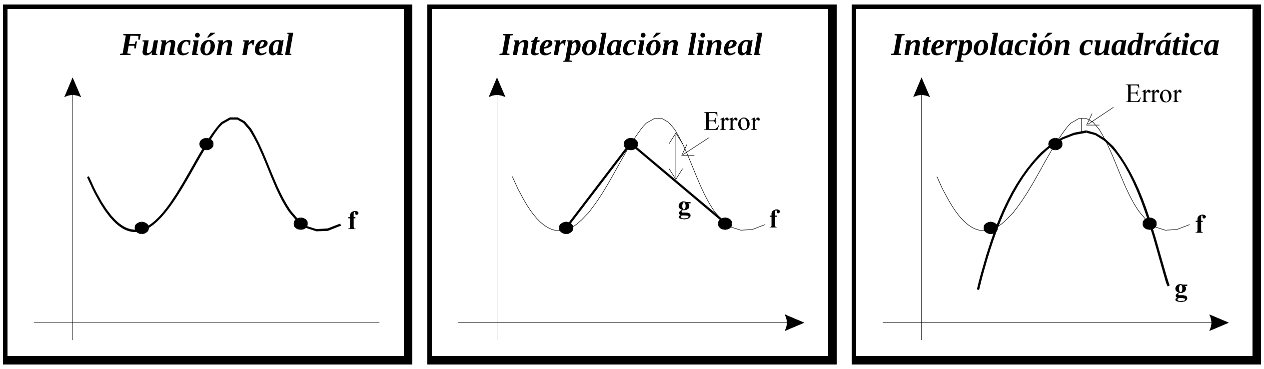
$$A(a,f(a)) \text{ y } B(b,f(b))$$

Cualquier función g que pase por esos dos mismos puntos recibe el nombre de **función de interpolación de f**.



Dado que se trata de sustituir una función f por otra g en un determinado intervalo, es evidente que g debe ser más sencilla que f. Las funciones que se suelen elegir son las polinómicas, pues aparte de la facilidad con que se realizan operaciones con ellas, permiten obtener expresiones sencillas para acotar el error cometido al reemplazar la función **f** por el polinomio **g**.

Error de interpolación



El **error de interpolación** es la diferencia, en valor absoluto, entre el valor de la función dada f y el que toma la función interpoladora g.

$$\boxed{\mathbf{Error} = |\mathbf{f(x)} - \mathbf{g(x)}|}$$

En la práctica hay que hacer una doble opción para determinar los resultados:

- Elegir la función de interpolación lo más sencilla posible.
- Hacer que el error cometido sea mínimo.

Interpolación polinómica

Interpolación lineal

Es el caso más sencillo de interpolación polinómica. **Es la que se realiza cuando dos puntos, $\mathbf{P_1(x_1,y_1)}$ y $\mathbf{P_2(x_2,y_2)}$ correspondientes a dos datos consecutivos, se unen mediante segmentos rectilíneos.**

El polinomio que se ajusta a esos puntos es de la forma:

$$\mathbf{P(x)=ax+b}$$

que es la expresión de la función lineal $\mathbf{f(x)=ax+b}$ cuya gráfica es una recta.

Los coeficientes **a** y **b**, desconocidos, son las soluciones del sistema

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{cases}$$

cuyas ecuaciones se obtienen imponiendo la condición de que $f(x)$ pase por $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$.

Ejemplo: Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos $\mathbf{A(1,13)}$ y $\mathbf{B(3,5)}$. Calcula los valores de interpolación cuando $\mathbf{x=2}$ y $\mathbf{x=4}$.

La ecuación general de una recta es $y=ax+b$, por tanto:

$$\left.\begin{aligned} 13 &= a\cdot 1+b \\ 5 &= a\cdot 3+b \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=17 \end{cases}$$

La recta pedida es $y=-4x+17$

$$\begin{cases} x=2 \quad \Rightarrow \quad y=-4\cdot 2+17=9 \\ x=4 \quad \Rightarrow \quad y=-4\cdot 4+17=1 \end{cases}$$

Ejemplo: Sabiendo que $\mathbf{\log 10=1}$ y $\mathbf{\log 100=2}$, halla, por interpolación lineal, $\mathbf{\log 7}$ y $\mathbf{\log 90}$. Mediante la calculadora determina el error cometido.

Los valores dados son $A(10,1)$ y $B(100,2)$.

$$\left.\begin{aligned} 1 &= 10a+b \\ 2 &= 100a+b \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{90} \\ b=\dfrac{8}{9} \end{cases} \Rightarrow \quad y=\frac{1}{90}x+\frac{8}{9}$$

Para $x=7$ se obtiene $y=0'966$. Para $x=90$ se obtiene $y=1'888$.

Utilizando la calculadora, tenemos: $\log 7 = 0'845$ y $\log 90 = 1'954$

Los errores cometidos han sido:

$$e = |0'845 - 0'966| = 0'121 \quad \text{para } \log 7$$

$$e = |1'954 - 1'888| = 0'066 \quad \text{para } \log 90$$

Ejemplo: El precio del recibo de la luz en función del número de Kilovatios-hora gastados viene dado aproximadamente por una función lineal $p(k) = ak + b$ donde a representa el precio del kw-h y b los gastos de potencia y equipo. De dos recibos sucesivos del año 1987 hemos sacado la siguiente tabla de consumo en kw-h y precio del recibo en pesetas (sin IVA):

k	**84**	**61**
p(k)	**1850**	**1593**

Halla el precio del kw-h y los gastos de potencia y equipo.

Sustituyendo en la función lineal $p(k) = ak + b$ se obtiene el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 1850 = 84a + b \\ 1593 = 61a + b \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 11'17 \\ b = 912 \end{array}\right. \Rightarrow \quad p(k) = 11'17k + 912$$

Se deduce entonces que el precio del kw-h en 1987 fue de 11'17 pts y los gastos de potencia y equipo fueron de 912 pts.

Interpolación por la regla de tres

Cuando se trata de interpolar un único valor entre otros dos dados por una tabla de la función, es mucho más rápido y sencillo utilizar el método de la **regla de tres**.

Supongamos que tenemos los valores $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$. Deseamos encontrar el valor de interpolación correspondiente a x_i.

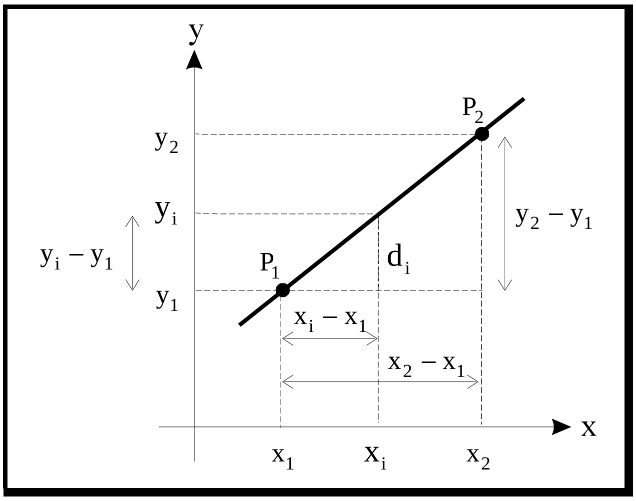
En la figura tenemos, por el Teorema de Thales que:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_i - y_1}{x_i - x_1}$$

$$y_i - y_1 = \frac{(y_2 - y_1)\cdot(x_i - x_1)}{x_2 - x_1} = d_i$$

Y el valor correspondiente a x_i será:

$$y_i = y_1 + d_i$$



Ejemplo: **Sabiendo que $\log 200 = 2'301030$ y $\log 202 = 2'305351$, calcular $\log 201$ por interpolación lineal (log designa el logaritmo en base 10).**

$$\frac{2'305351 - 2'301030}{202 - 200} = \frac{d}{201 - 200} \quad \to \quad d = 0'002161$$

Por tanto, $\log 201 = \log 200 + 0'002161 = 2'301030 + 0'002161 = 2'303191$

El verdadero valor es $\log 201 = 2'303196$. El error es del orden de unas millonésimas (sexta cifra redondeada).

Ejemplo: **En una cierta universidad, el número de alumnos matriculados en el curso 82-83 fue de 10.400 y en el curso 87-88 fue de 13.200. Estimar aproximadamente cuántos se matricularon el curso 84-85.**

$$\frac{13.200 - 10.400}{87 - 82} = \frac{d}{84 - 82} \quad \to \quad d = 1120$$

Por tanto, estimamos que en curso 84-85 había: $10.400 + 1.120 = 11.520$ alumnos.

Interpolación cuadrática

Se denomina **interpolación cuadrática a la que se realiza cuando tres puntos conocidos, y no alineados $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$, se ajustan mediante la parábola que pasa por ellos.**

El polinomio que se ajusta a esos puntos es de la forma $P(x) = ax^2 + bx + c$, conocido también con el nombre de función cuadrática, cuya gráfica es una parábola.

Los coeficientes a, b y c desconocidos son las soluciones del sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = a\,x_1^2 + b\,x_1 + c \\ y_2 = a\,x_2^2 + b\,x_2 + c \\ y_3 = a\,x_3^2 + b\,x_3 + c \end{array}\right\}$$

cuyas ecuaciones se obtienen imponiendo la condición de que $P(x)$ pase por P_1, P_2 y P_3.

Por tres puntos no alineados siempre pasa una parábola. Por tanto, este sistema será compatible determinado. Si los puntos estuviesen alineados, la incógnita "a" (coeficiente de x^2) tomaría el valor cero: la parábola degeneraría en una recta.

Ejemplo: Hallar la función cuadrática de interpolación correspondiente a los valores:

x	**1**	**3**	**4**	**5**
y	**4**	**9**	**?**	**18**

Determina su valor cuando $x = 4$.

La ecuación general de una parábola es de la forma $y = ax^2 + bx + c$.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Por pasar por } (1,\ 4) \text{ se tiene} & 4 = a + b + c \\ \text{Por pasar por } (3,\ 9) \text{ se tiene} & 9 = 9a + 3b + c \\ \text{Por pasar por } (5,\ 18) \text{ se tiene} & 18 = 25a + 5b + c \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{1}{2} \\ c = 3 \end{array}\right.$$

La ecuación de la parábola es $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3$

Si $x = 4$ la función toma el valor $y = 13$

Ejemplo: Dada la tabla de la función $f(x)$, hallar el error cometido cuando se calcula $f(4)$ mediante la interpolación cuadrática utilizando los otros valores de la tabla.

x	**1**	**2**	**3**	**4**
f(x)	**3**	**−5**	**6**	**−2**

La función cuadrática es $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Por pasar por } (1,\ 3) \text{ se tiene} & 3 = a + b + c \\ \text{Por pasar por } (2, -5) \text{ se tiene} & -5 = 4a + 2b + c \\ \text{Por pasar por } (3,\ 6) \text{ se tiene} & 6 = 9a + 3b + c \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{19}{2} \\ b = -\dfrac{73}{2} \\ c = 30 \end{array}\right.$$

La función de interpolación es $f(x)=\frac{19}{2}x^2-\frac{73}{2}x+30$

Si $x=4 \rightarrow f(x)=\frac{19}{2}\cdot 4^2+-\frac{73}{2}\cdot 4+30 \Rightarrow f(4)=36$

El error cometido es $e=|-2-36|=38$. Un error tan grande debe llevarnos a la conclusión de que la interpolación, en este caso, no es correcta.

Interpolación polinómica en general. Método práctico

La resolución de un sistema de n ecuaciones con n incógnitas es un proceso largo y pesado, a poco grande que sea n, tanto más cuando algunos coeficientes, como suele ocurrir en estos casos, son números muy grandes o decimales. Por eso no es de extrañar que los matemáticos se hayan esmerado en inventar otros métodos con los que el polinomio interpolador se encuentre más rápidamente.

En la práctica, la expresión inicial del polinomio interpolador que pasa por los puntos

$$(x_1,y_1),\ (x_2,y_2),\ (x_3,\ y_3),\dots\dots\dots\dots,(x_n,y_n)$$

puede ayudar a la simplificación de los cálculos.

La expresión natural es:

$$P(x)=a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-3}x^{n-3}+\dots\dots\dots\dots+a_2x^2+a_1x+a_o$$

Sin embargo, es más manejable la expresión alternativa:

$$y=a+b(x-x_1)+c(x-x_1)(x-x_2)+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots+r(x-x_1)(x-x_2)\dots\dots(x-x_{n-1})$$

pues el sistema que se obtiene al sustituir (x,y) por los valores conocidos es muy sencillo de resolver y, por tanto, se obtienen con facilidad los coeficientes a, b, c, ...,r.

Esto será siempre posible, ya que si $P(x)=a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\dots\dots\dots\dots+a_2x^2+a_1x+a_o$ es un polinomio, al dividir $P(x)$ por $(x-x_1)$ obtendríamos $P(x)=Q_1(x)(x-x_1)+a$.

A continuación, al dividir $Q_1(x)$ por $(x-x_2)$ obtendríamos $Q_1(x)=Q_2(x)(x-x_2)+b$ con lo que $P(x)=[Q_2(x)(x-x_2)+b](x-x_1)+a=Q_2(x)(x-x_2)(x-x_1)+b(x-x_1)+a$, etc.

Observa que en los dos casos el polinomio es de grado $n-1$, uno menos que el número de datos. Los n coeficientes son distintos en cada una de las expresiones.

Es frecuente que, después de tener el polinomio interpolador correspondiente a n puntos, se consiga un nuevo punto (x_{n+1},y_{n+1}). Si P_{n+1} es el polinomio que pasa por los $n+1$ primeros puntos, el nuevo polinomio será:

$$y = P_{n+1}(x) = P_n(x) + k(x - x_1)(x - x_2)..........(x - x_n)$$

Sustituyendo las coordenadas del nuevo punto, se obtiene una ecuación de la que se obtiene el valor de k.

Ejemplo: De una función conocemos tres puntos $(-3,5)$, $(1,-1)$ y $(3,11)$. ¿Qué podemos decir del valor de esa función cuando $x = 0$? ¿Y cuando $x = 10$?

El polinomio interpolador será de segundo grado. Su expresión genérica es:

$$y = a + b(x+3) + c(x+3)(x-1)$$

Sustituyendo por las coordenadas de los puntos dados se obtiene el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 5 = a + b(-3+3) + c(-3+3)(-3-1) \\ -1 = a + b(1+3) + c(1+3)(1-1) \\ 11 = a + b(3+3) + c(3+3)(3-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 5 \\ b = -\dfrac{3}{2} \\ c = \dfrac{15}{12} \end{array}\right.$$

El polinomio interpolador es:

$$y = 5 - \frac{3}{2}(x+3) + \frac{15}{12}(x+3)(x-1)$$

Si $x = 0 \Rightarrow y(0) = -\dfrac{13}{4}$

Esta interpolación es probablemente una buena aproximación del valor de la función desconocida en el punto de abscisa 0, pues esta abscisa es próxima a las que nos han servido para obtener el polinomio.

Si $x = 10 \Rightarrow y(10) = \dfrac{527}{4}$

El valor $\dfrac{527}{4}$ es probable que se parezca poco al valor de la función en el punto 10, pues es el resultado de una extrapolación muy lejana.

Ejemplo: Halla el polinomio interpolador engendrado por los puntos $(2,1), (3,7), (-1,4)$, y $(5,0)$.

Si una vez calculado el polinomio interpolador nos dan un nuevo punto $(8,211)$, obtener de nuevo el polinomio interpolador aprovechando el que ya tenemos

Su expresión genérica es :

$$y = a + b(x-2) + c(x-2)(x-3) + d(x-2)(x-3)(x+1)$$

Sustituyendo por las coordenadas de los puntos dados se obtiene el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 1 = a \\ 7 = a + b \\ 4 = a - 3b + 12c \\ 0 = a + 3b + 6c + 36d \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 6 \\ c = \dfrac{7}{4} \\ d = \dfrac{59}{72} \end{cases}$$

Sale un polinomio de tercer grado, cuya expresión es:

$$y = 1 + 6(x-2) + \frac{7}{4}(x-2)(x-3) - \frac{59}{72}(x-2)(x-3)(x+1)$$

Salvo que se indique algo en contra no es necesario operar en esta expresión. La expresión reducida es:

$$y = -\frac{59}{72}\cdot x^3 + \frac{362}{72}\cdot x^2 - \frac{257}{72}\cdot x - \frac{390}{72}$$

El nuevo polinomio interpolador contando con el punto $(8, 211)$ será:

$$y = -\frac{59}{72}\cdot x^3 + \frac{362}{72}\cdot x^2 - \frac{257}{72}\cdot x - \frac{390}{72} + k(x-2)(x-3)(x+1)(x-5)$$

Ahora calculamos k para que este polinomio de 4º grado pase por el punto $(8, 211)$.

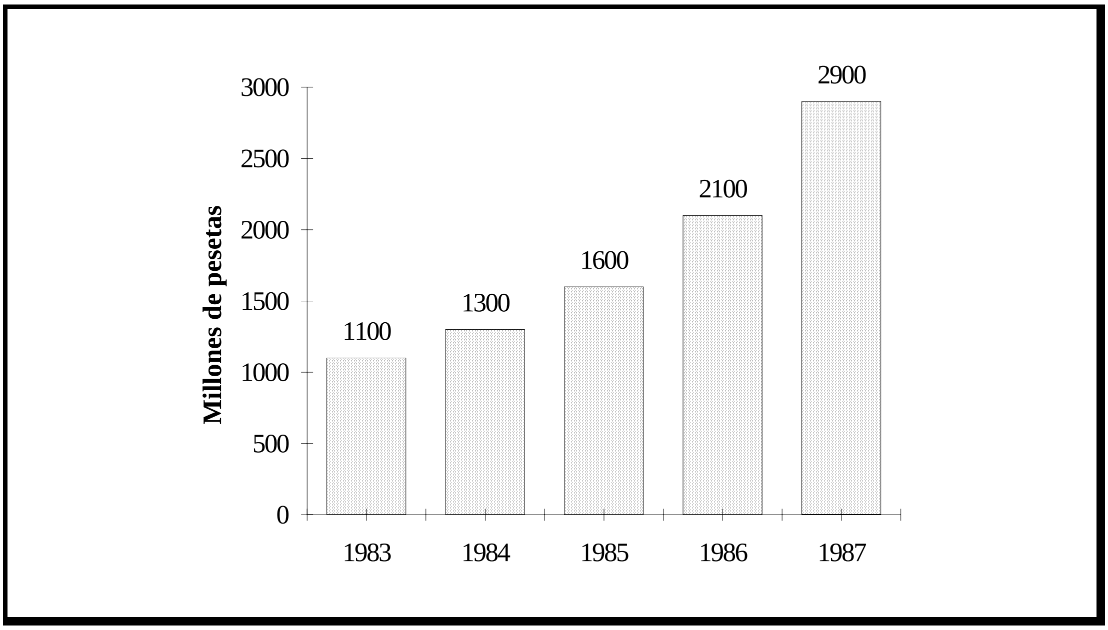
$$y(8) = \frac{59}{72}\cdot 8^3 + \frac{362}{72}\cdot 8^2 - \frac{257}{72}\cdot 8 - \frac{390}{72} + k(8-2)(8-3)(8+1)(8-5) = 211$$

$k = 0'4231 \quad \Rightarrow \quad$ el nuevo polinomio es:

$$y = -\frac{59}{72}\cdot x^3 + \frac{362}{72}\cdot x^2 - \frac{257}{72}\cdot x - \frac{390}{72} + 0'4231(x-2)(x-3)(x+1)(x-5)$$

Problema 1

En la revista Tiempo (8/2/88) apareció el siguiente gráfico que muestra las ganancias en millones de pesetas por las exportaciones de la empresa Codorniu entre 1983 y 1987.



Visto el crecimiento, es presumible que la función que expresa el número de millones de pesetas por exportación en función del tiempo transcurrido sea una parábola. Se pide:

a) Determinar la ecuación de dicha parábola tomando como variable t los años 1, 3 y 5 $\left(1\rightarrow 1983,\ 3\rightarrow 1985,\ 5\rightarrow 1987\right)$.

b) Comparar los datos teóricos que resultan para los años 2 y 4 con los verdaderos dados por la tabla.

c) Extrapolar para calcular los millones de exportación obtenidos en el año 1988.

a) La función de interpolación tendrá la forma $y = at^2 + bt + c$

Imponiendo que los puntos $(1,1100), (3,1600)$ y $(5,2900)$ satisfagan su ecuación, se obtiene el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 1100 = a + b + c \\ 1600 = 9a + 3b + c \\ 2900 = 25a + 5b + c \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 100 \\ b = -150 \\ c = 1150 \end{array}\right.$$

La función teórica que aproxima estos datos es $y = 100t^2 - 150t + 1150$

b) Si $t = 2$ se obtiene $y = 1250$, y para $t = 4$ el resultado es $y = 2150$.

El error de los datos teóricos respecto a los valores reales dados por la tabla es entonces:

$$t = 2 \quad \Rightarrow \quad |1300 - 1250| = 50 \text{ millones}$$

$$t = 4 \quad \Rightarrow \quad |2100 - 2150| = 50 \text{ millones}$$

c) El año 1988 corresponde a tomar $t = 6$ y se obtiene entonces que $y = 3850$. Por tanto, si la exportación continúa con el crecimiento experimentado en años anteriores, todo hace pensar que en 1988 se obtendrán 3850 millones de pesetas de ganancia, con un margen de error de aproximadamente 50 millones.

Problema 2

El número de turistas que visitaron España en el período 1970-1985 siguió la siguiente tendencia:

Años	**1970**	**1975**	**1980**	**1985**
Millones de turistas	**24'1**	**30'1**	**38'1**	**43'2**

a) Hallar la previsión para 1988 a partir de la función lineal del último trozo 1980-1985.

b) Efectuar la misma previsión con el polinomio de interpolación de 2º grado a partir de los datos de 1975 y 1985.

a) Lo más cómodo es hacernos una tabla adecuada, tomando como origen de tiempo el año 70. Así resulta:

0	5	10	15	18
24'1	30'1	38'1	43'2	?

Para la interpolación lineal pedida hemos de buscar una expresión lineal que tome los valores dados para 10 y 15. Lo más cómodo es poner:

$$L(x) = a + b(x - 10)$$

Sustituyendo ahora para los puntos $(10, 38'1)$ y $(15, 43'2)$ obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} 38'1 = a \\ 43'2 = a + 5b \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} a = 38'1 \\ b = 1'02 \end{array}\right.$$

La expresión lineal queda de la forma $L(x) = 38'1 + 1'02\,(x - 10)$

Por tanto $L(18) = 38'1 + 1'02\,(18 - 10) = 46'26$

b) Análogamente, lo más cómodo es buscar ahora:

$$C(x) = a + b(x-10) + c(x-10)(x-15)$$

Sustituyendo para los puntos $(5, 30'1), (10, 38'1)$ y $(15, 43'2)$ obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} 30'1 = a - 5b + 50c \\ 38'1 = a \\ 43'2 = a + 5b \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 38'1 \\ b = 1'02 \\ c = -0'058 \end{array}\right.$$

La expresión que resulta es $C(x) = 38'1 + 1'02(x-10) - 0'058(x-10)(x-15)$, por tanto:

$$C(18) = 38'1 + 1'02 \cdot 8 - 0'058 \cdot 8 \cdot 3 = 44'868$$

Problema 3

Calcula el polinomio de segundo grado $P(x)$ tal que $P(0) = P(1) = 0$ y tal que $\int_0^1 p(x)\,dx = 1$.

El polinomio será de la forma $P(x) = ax^2 + bx + c$

$$P(0) = 0 \quad \rightarrow \quad c = 0$$

$$P(1) = 0 \quad \rightarrow \quad a + b = 0$$

$$\int_0^1 \left(ax^2 + bx\right) dx = \left[a \cdot \frac{x^3}{3} + b \cdot \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} a + b = 0 \\ \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -6 \\ b = 6 \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad P(x) = -6x^2 + 6x$$

Problema 4

Dada la siguiente tabla de valores de una función:

x	**1**	**2'5**	**4**	**5**
f(x)	**2**	**–1**	**8**	**30**

realiza una estimación del valor de la función para $x = 3$.

Lo más cómodo es buscar un polinomio cúbico de la forma:

$$p(x) = a + b(x-1) + c(x-1)(x-2'5) + d(x-1)(x-2'5)(x-4)$$

Sustituyendo tenemos:

$$\left.\begin{aligned} 2 &= a \\ -1 &= a + 1'5b \\ 8 &= a + 3b + 4'5c \\ 30 &= a + 4b + 10c + 10d \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \\ c = \dfrac{8}{3} \\ d = \dfrac{14}{15} \end{cases}$$

Así pues:

$$p(x) = 2 - 2(x-1) + \frac{8}{3}(x-1)(x-2'5) + \frac{14}{15}(x-1)(x-2'5)(x-4)$$

$$p(3) = 2 - 4 + \frac{8}{3}\cdot 2\cdot 0'5 + \frac{14}{15}\cdot 2\cdot 0'5\cdot(-1) = -\frac{4}{15}$$

Problema 5

El gasto en fotocopias en una oficina viene dado por los siguientes datos durante los tres primeros meses del año. Obtener el polinomio interpolador y deducir el gasto de fotocopias probable para el mes de Abril.

Enero	Febrero	Marzo
1100	**1500**	**1550**

Llamamos 1 al mes de Enero, 2 al mes de Febrero, 3 al mes de Marzo y 4 al mes de Abril.

1	2	3	4
1100	1500	1550	?

Como nos dan tres datos hemos de pensar en una parábola. El polinomio que buscamos lo podemos poner cómodamente en la forma:

$$P(x) = a + b(x-1) + c(x-1)(x-2)$$

Sustituyendo los datos del problema:

$$\left.\begin{aligned} 1100 &= 1 \\ 1500 &= a + b \\ 1550 &= a + 2b + 2c \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} a = 1100 \\ b = 400 \\ c = -175 \end{cases} \Rightarrow \quad P(x) = 1100 + 400(x-1) - 175(x-1)(x-2)$$

Para Abril se estiman: $P(4) = 1250$ fotocopias

Problema 6

Hallar $\sqrt{150}$ haciendo uso del polinomio interpolador de segundo grado de la función $f(x)=\sqrt{x}$ en los puntos $x_1=121$, $x_2=144$ y $x_3=169$.

$$f(x)=\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(121)=11 \\ f(144)=12 \\ f(169)=13 \end{cases}$$

Buscamos un polinomio interpolador de segundo grado de la forma:

$$P(x)=a+b(x-121)+c(x-121)(x-144)$$

Imponiendo las condiciones sobre P antes propuestas, resulta:

$$\left.\begin{array}{l} 11=a \\ 12=a+23b \\ 13=a+54b+1200c \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a=11 \\ b=\dfrac{1}{23} \\ c=-\dfrac{1}{13800} \end{cases}$$

El polinomio es:

$$P(x)=11+\frac{1}{23}(x-121)-\frac{1}{13800}(x-121)(x-144)$$

$$P(150)=12'2482$$

Con la calculadora tenemos $\sqrt{150}=12'2474$, por tanto hemos obtenido una buena aproximación.

Problema 7

Las diferentes contracciones de un resorte (en mm.), dependiendo de las cargas aplicadas (en kp), vienen dadas en la siguiente tabla:

Carga (x)	**5**	**10**	**15**	**20**	**25**
Contracc (y)	**49**	**105**	**172**	**253**	**352**

Halla la función cuadrática que se ajusta a las contracciones correspondientes a $x=5$, $x=15$ y $x=25$. ¿Qué error se comete si la empleamos para calcular las contracciones cuando las cargas son $x=10$ y $x=20$?

Los valores a considerar son: $(5, 49), (15, 172)$ y $(25, 352)$

El polinomio interpolador será: $P(x) = a + b(x-5) + c(x-5)(x-15)$

Sustituyendo tenemos:

$$\left.\begin{array}{r} 49 = a \\ 172 = a + 10b \\ 352 = a + 20b + 200c \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 49 \\ b = 12'3 \\ c = 0'285 \end{array}\right. \rightarrow \quad p(x) = 49 + 12'3(x-5) + 0'285(x-5)(x-15)$$

$$p(10) = 49 + 12'3 \cdot 5 + 0'285 \cdot 5 \cdot (-5) = 103'375$$

$$e = |105 - 103'375| = 2'375$$

$$p(20) = 49 + 12'3 \cdot 15 + 0'285 \cdot 15 \cdot 5 = 254'875$$

$$e = |253 - 254'875| = 1'875$$

En los dos casos, el error es comparativamente pequeño.

Problema 8

El número de calorías por español y día, en el período 1962-1987, siguió esta tendencia:

Año	**1962**	**1970**	**1980**	**1987**
Miles de calorías	**2'76**	**2'87**	**3'32**	**3'49**

a) Halla la previsión para 1990 a partir de la función lineal de los dos últimos años.

b) Efectúa la misma previsión con el polinomio de interpolación de 2º grado a partir de los datos de 1970 a 1987.

a) Si tomamos como origen del tiempo el año 1962, la tabla de datos que resulta es:

Año	0	8	18	25
Miles de calorías	2'76	2'87	3'32	3'49

La función lineal será: $f(x) = a + b(x-18)$

$$\left.\begin{array}{l}3'32 = a \\ 3'49 = a + 7b\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}a = 3'32 \\ b = 0'0242\end{array}\right. \rightarrow f(x) = 3'32 + 0'0242\,(x-18) \rightarrow f(x) = 0'0242x + 2'88$$

Para 1990 $x = 28$ vale $f(28) = 0'0242 \cdot 28 + 2'88 = 3'5576$

b) El polinomio interpolador de segundo grado será ahora:

$$P(x) = a + b\,(x-8) + c\,(x-8)\,(x-18)$$

$$\left.\begin{array}{l}2'87 = a \\ 3'32 = a + 10b \\ 3'49 = a + 17b + 119c\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}a = 2'87 \\ b = 0'045 \\ c = -0'0012\end{array}\right.$$

$$f(x) = a + b\,(x-8) + c\,(x-8)\,(x-18)$$

$$f(x) = 2'87 + 0'045(x-8) - 0'0012\,(x-8)\,(x-18)$$

Para 1990 $x = 28$ vale $f(28) = 2'87 + 0'045 \cdot 20 - 0'0012 \cdot 20 \cdot 10 = 3'53$

La diferencia entre ambas soluciones es debida al redondeo.

Problema 9

Aproxima la función $f(x) = e^x$ mediante una recta en el intervalo $[0,1]$. ¿Qué error se comete en $x = 0'7$ cuando se sustituye la función exponencial por la lineal? (Para determinarla utiliza la calculadora).

La ecuación de la recta es $y = ax + b$

$$\begin{array}{ll}\text{Para } x = 0 \quad y = e^0 = 1 & \\ \text{Para } x = 1 \quad y = e^1 = e & \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l}1 = a \cdot 0 + b \\ e = a \cdot 1 + b\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}a = e - 1 = 1'71828 \\ b = 1\end{array}\right.$$

La función lineal es:

$$y = 1'71828x + 1$$

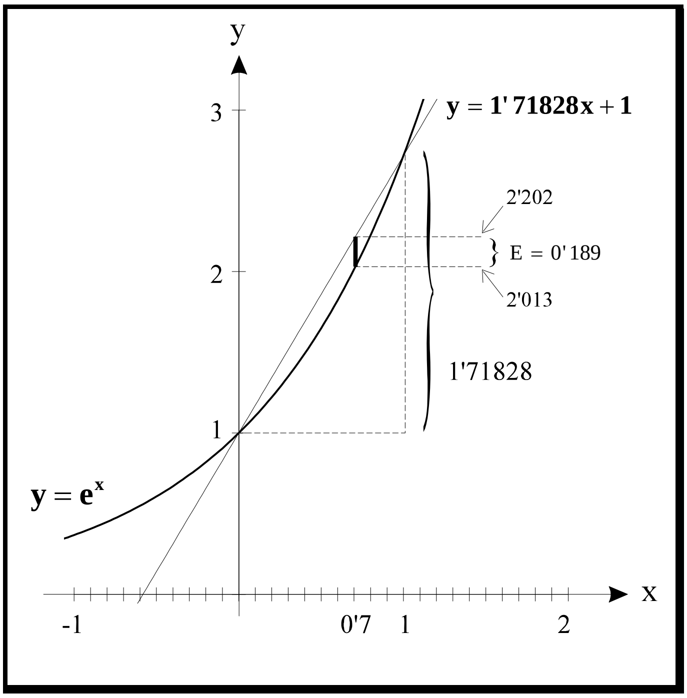
$$x = 0'7 \quad y = 1'71828 \cdot 0'7 + 1 = 2'202796$$

En la calculadora obtenemos

$$e^{0'7} = 2'01375271$$

El error cometido es

$$|2'01375271 - 2'202796| = 0'189$$



Problema 10

Los siguientes datos corresponden a la evolución de la población en Madrid. Las poblaciones de los años múltiplos de 5 se obtienen mediante censos y las del resto según los datos oficiales de altas y bajas (nacimientos, defunciones, traslados, etc.):

Halla el polinomio interpolador correspondiente a los años censales 1965, 1970, 1975 y 1980. Calcula los valores correspondientes a los años anteriores a un censo (1969, 1974, 1979) compáralos con los de la tabla. Interpreta el resultado.

Años	Población	Años	Población
1965	2.620.797 h.	1974	3.274.043 h.
1966	2.712.641 h.	1975	3.228.057 h.
1967	2.803.416 h.	1976	3.322.460 h.
1968	2.870.849 h.	1977	3.355.720 h.
1969	2.937.734 h.	1978	3.367.438 h.
1970	3.120.941 h.	1979	3.368.466 h.
1971	3.164.848 h.	1980	3.357.903 h.
1972	3.209.246 h.	1981	3.158.818 h.
1973	3.247.108 h.	1982	3.169.628 h.

Tomando el año 1965 como año cero tenemos:

Años	Población
0	2.620.797 h.
5	3.120.941 h.
10	3.228.057 h.
15	3.357.903 h.

El polinomio interpolador será del tipo:

$$P(x) = a + b(x-0) + c(x-0)(x-5) + d(x-0)(x-5)(x-10)$$

$$\left.\begin{array}{r}2.620.797 = a \\ 3.120.941 = a + 5b \\ 3.228.057 = a + 10b + 50c \\ 3.357.903 = a + 15b + 150c + 750d\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}a = 2.620.797 \\ b = 100.028'8 \\ c = -7.860'56 \\ d = 554'34\end{array}\right.$$

El polinomio interpolador es:

$$P(x) = 2.620.797 + 100.028'8 \cdot x - 7.860'56 \cdot x \cdot (x-5) + 554'34 \cdot x \cdot (x-5) \cdot (x-10)$$

$$P(4) = 3.065.659 \qquad P(9) = 3.218.120 \qquad P(14) = 3.310.159$$

Los datos difieren considerablemente con los de la tabla porque los datos más fiables corresponden a los años censales y los menos fiables a los inmediatamente anteriores.

Problema 11

Se lanza un proyectil, y tras describir una trayectoria parabólica cae a 2'4 Km de su lugar de lanzamiento. Halla la ecuación de su trayectoria sabiendo que alcanza una altura máxima de 180 m.

Los puntos a considerar para la interpolación son $(0,0), (1'2, 0'180)$ y $(2'4, 0)$

El polinomio interpolador es:

$$P(x) = a + b(x-0) + c(x-0)(x-1'2)$$

$$\left.\begin{array}{r}0 = a \\ 0'180 = a + 1'2b \\ 0 = a + 2'4b + 2'88c\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}a = 0 \\ b = 0'15 \\ c = -0'125\end{array}\right.$$

$$P(x) = 0'15 \cdot x - 0'125 \cdot x \cdot (x - 1'2) = 0'3x - 0'125x^2$$

Problema 12

Un empresario ha obtenido las siguientes ganancias, en millones de pts, en los últimos 5 años:

1985	**1986**	**1987**	**1988**	**1989**
1700	**1900**	**2200**	**2700**	**3500**

a) Determina la ecuación de la parábola que se obtiene tomando los datos correspondientes a los años 1985, 1987 y 1989.

b) Obtén, a partir de la parábola, las ganancias correspondientes a los años 1986 y 1988 y compara con los que se te dan en la tabla.

c) Extrapola para obtener las ganancias que se espera conseguir en el año 1990.

Indicación: Llama 1, 2, 3, 4 y 5 a los años que aparecen en la tabla.

a) El polinomio interpolador es:

$$P(x) = a + b(x-1) + c(x-1)(x-3)$$

$$\left.\begin{array}{l} 1700 = a \\ 2200 = a + 2b \\ 3500 = a + 4b + 8c \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1700 \\ b = 250 \\ c = 100 \end{array}\right.$$

$$P(x) = 1700 + 250 \cdot (x-1) + 100 \cdot (x-1)(x-3) = 100x^2 - 150x + 1750$$

b) $P(2) = 1850$ millones de pts. $P(4) = 2750$ millones de pts.

c) $P(6) = 3600 - 900 + 1750 = 4450$ millones de pts.

Problema 13

Estima $\mathbf{sen\,15^o}$ a partir de los valores de $\mathbf{sen\,0^o = 0}$, $\mathbf{sen\,30^o = 0'5}$ y $\mathbf{sen\,45^o = 0'7071}$

Los puntos son: $(0^o, 0), (30^o, 0'5)$ y $(45^o, 0'7071)$

El polinomio interpolador es:

$$P(x) = a + b(x-0) + c(x-0)(x-30)$$

$$\left.\begin{array}{r} 0 = a \\ 0'5 = a + 30b \\ 0'7071 = a + 45b + 675c \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0'0166667 \\ c = -0'00006355568 \end{array}\right.$$

$$sen\,x = 0'0166667x - 0'00006355568 \cdot x(x-30)$$

$$sen\,15^o = 0'25975$$