Problema 1

En los siguientes ejemplos, calcular la distribución de probabilidad, la media y la desviación típica.

a) En una bolsa hay bolas numeradas: 9 bolas con un uno, 5 con un dos y 6 con un tres. Sacamos una bola y vemos qué número tiene.

b) Sacamos dos cartas de una baraja y anotamos el número de ases (0, 1 ó 2).

c) La distribución de probabilidad de un suceso viene dada por:

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0'1	0'3		0'2	0'3

a)

x_i	1	2	3
p_i	$\frac{9}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{6}{20}$

$$\mu = 1\cdot\frac{9}{20} + 2\cdot\frac{5}{20} + 3\cdot\frac{6}{20} = 1'85$$

$$\sigma = \sqrt{\left(1^2\cdot\frac{9}{20} + 2^2\cdot\frac{5}{20} + 3^2\cdot\frac{6}{20}\right) - 1'85^2} = 0'85$$

b)

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{36}{40}\cdot\frac{35}{39}$	$2\cdot\frac{4}{40}\cdot\frac{36}{39}$	$\frac{4}{40}\cdot\frac{3}{39}$

$$\mu = 0\cdot\frac{36}{40}\cdot\frac{35}{39} + 2\cdot\frac{4}{40}\cdot\frac{36}{39} + 2\cdot\frac{4}{40}\cdot\frac{3}{39} = 0'1923$$

$$\sigma = \sqrt{\left(0^2\cdot\frac{36}{40}\cdot\frac{35}{39} + 1^2\cdot 2\cdot\frac{4}{40}\cdot\frac{36}{39} + 2^2\cdot\frac{4}{40}\cdot\frac{3}{39}\right) - 0'1923^2} = 0'42$$

c) Como la suma de las probabilidades debe ser 1 entonces $p(3) = 0'1$.

$$\mu = 1\cdot 0'1 + +2\cdot 0'3 + 3\cdot 0'1 + 4\cdot 0'2 + 5\cdot 0'3 = 3'3$$

$$\sigma = \sqrt{\left(1^2\cdot 0'1 + 2^2\cdot 0'3 + 3^2\cdot 0'1 + 4^2\cdot 0'2 + 5^2\cdot 0'3\right) - 3'3^2} = 1'417$$

Problema 2

Una empresa hace un estudio de mercado para lanzar un producto A u otro producto B. Según el estudio, si comercializa A, tiene la probabilidad 0'8 de ganar 30 millones y una probabilidad 0'2 de perder 10 millones. Si comercializa B, tiene una probabilidad 0'6 de ganar 20 millones y una probabilidad 0'4 de perder 4 millones. ¿Qué producto crees que debe comercializar? ¿Por qué?

x_i	30	−10
p_i	0'8	0'2

$$\mu = 30\cdot 0'8 - 10\cdot 0'2 = 22$$

x_i	20	−4
p_i	0'6	0'4

$$\mu = 20\cdot 0'6 - 4\cdot 0'4 = 10'4$$

Es preferible comercializar el producto A ya que la media de una distribución de probabilidad se le llama ***esperanza matemática***, es decir, lo que se espera ganar por término medio.

Problema 3

En los siguientes problemas haz una tabla con las probabilidades, represéntalas gráficamente y calcula la media y la desviación típica.

a) Se lanzan tres monedas al aire y se cuenta el número de caras obtenidas.

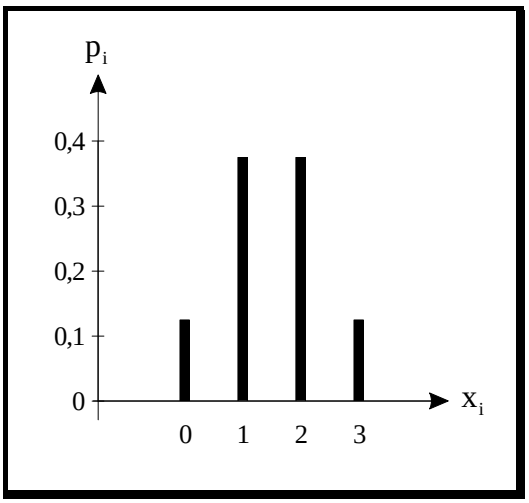
b) En las familias con 4 hijos nos fijamos en el número de hijas.

a)

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$\mu = 0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{3}{8}+3\cdot\frac{1}{8}=1'5$$

$$\sigma=\sqrt{\left(0^2\cdot\frac{1}{8}+1^2\cdot\frac{3}{8}+2^2\cdot\frac{3}{8}+3^2\cdot\frac{1}{8}\right)-1'5^2}=0'866$$

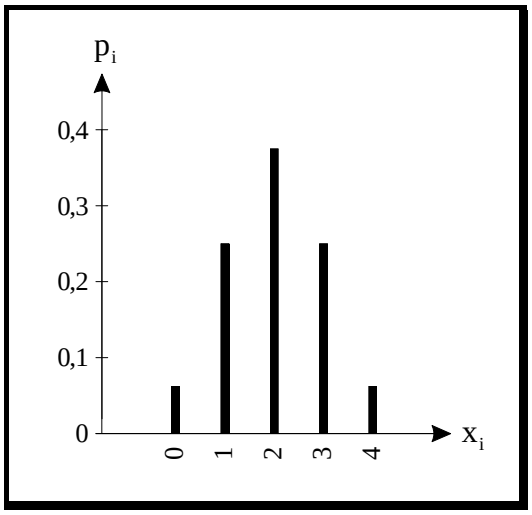


b)

x_i	0	1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

$$\mu = 0\cdot\frac{1}{16}+1\cdot\frac{4}{16}+2\cdot\frac{6}{16}+3\cdot\frac{4}{16}+4\cdot\frac{1}{16}=2$$

$$\sigma=\sqrt{\left(0^2\cdot\frac{1}{16}+1^2\cdot\frac{4}{16}+2^2\cdot\frac{6}{16}+3^2\cdot\frac{4}{16}+4^2\cdot\frac{1}{16}\right)-2}=1$$



Problema 4

Considérese el experimento consistente en lanzar dos dados y anotar el resultado de la suma de puntos obtenidos. Hallar:

a) Función de probabilidad y su representación.

b) Función de distribución y su representación.

c) Media y desviación típica de la distribución.

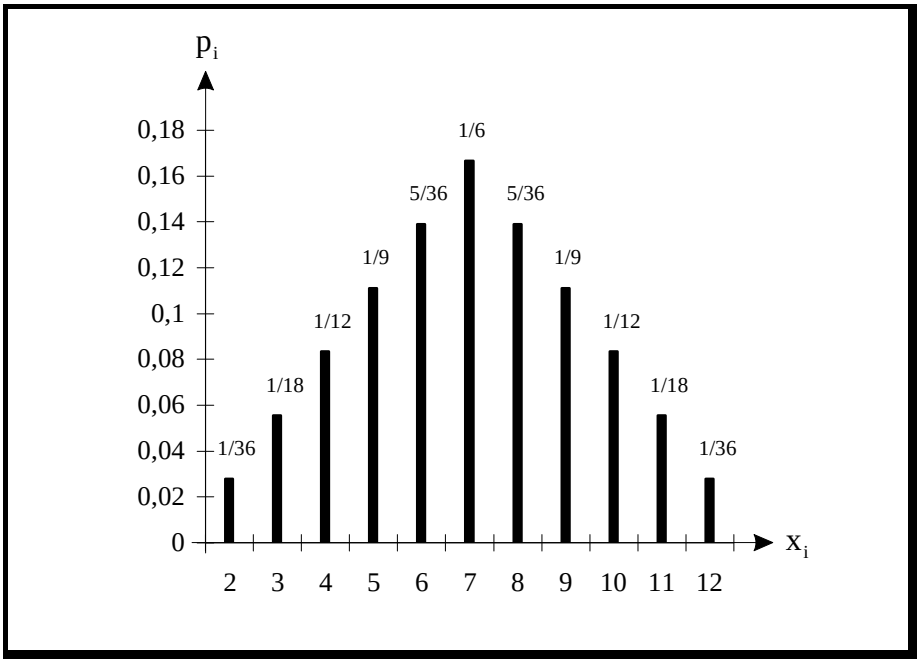
d) Sea X la variable aleatoria que expresa la suma del número de puntos de los dos dados. Hallar las siguientes probabilidades: $p(X\le 5)$; $p(X\ge 10)$; $F(4)$; $F(-2)$.

a) Al lanzar dos dados pueden darse $6 \cdot 6 = 36$ posibilidades distintas. Pero si atendemos solamente a la suma de los resultados, las posibilidades son: 2, 3, 4,.....,12.

Podemos utilizar la tabla adjunta para situar los resultados de las sumas:

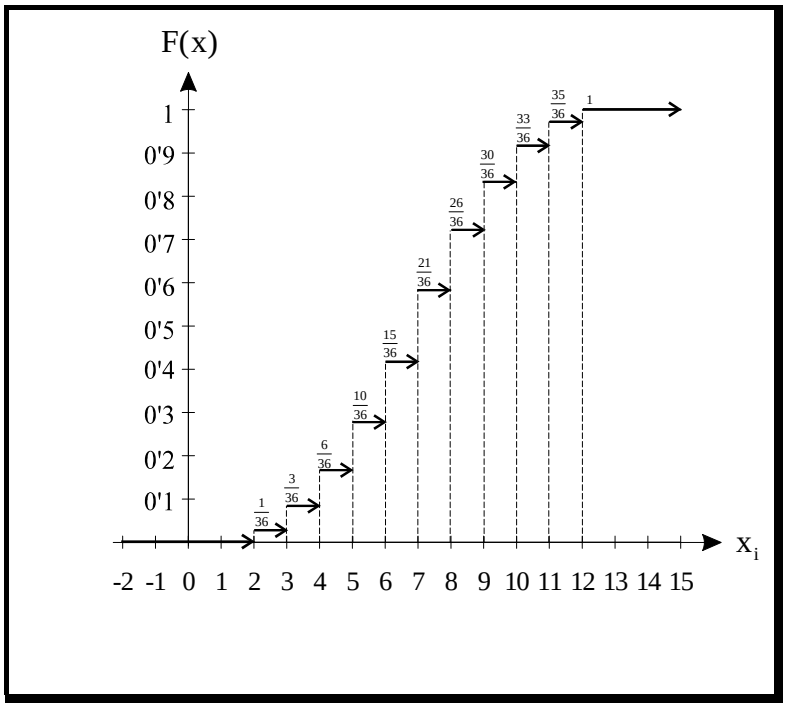
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$



b) Función de distribución:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<2 \\ \frac{1}{36} & \text{si} \quad 2\le x<3 \\ \frac{3}{36} & \text{si} \quad 3\le x<4 \\ \frac{6}{36} & \text{si} \quad 4\le x<5 \\ \vdots & \\ \vdots & \\ \vdots & \\ 1 & \text{si} \quad 12\le x \end{cases}$$



c) Primero hacemos la tabla para facilitar los cálculos:

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	
$x_i p_i$	$\frac{2}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{20}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{42}{36}$	$\frac{40}{36}$	$\frac{36}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{22}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{252}{36}$
$x_i^2 p_i$	$\frac{4}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{48}{36}$	$\frac{100}{36}$	$\frac{180}{36}$	$\frac{294}{36}$	$\frac{320}{36}$	$\frac{324}{36}$	$\frac{300}{36}$	$\frac{242}{36}$	$\frac{144}{36}$	$\frac{1974}{36}$

Media $\mu=\frac{252}{36}=7$ Desviación típica $\sigma=\sqrt{\frac{1974}{36}-7^2}=2'42$

d) $p(X\le 5)=p(X=2)+p(X=3)+p(X=4)+p(X=5)=\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}+\frac{4}{36}=0'278$

$p(X\ge 10)=p(X=10)+p(X=11)+p(X=12)=\frac{3}{36}+\frac{2}{36}+\frac{1}{36}=0'167$

$F(4)=p(X\le 4)=p(X=2)+p(X=3)+p(X=4)=\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}=0'167$

$F(-2)=p(X\le -2)=0$

Problema 5

En una fábrica de tornillos de precisión se ha observado el número de piezas defectuosas diarias, obteniéndose la siguiente distribución tras 30 días de recuento:

x_i	0	1	2	3
f_i	16	11	2	1

Se pide:

a) Evaluar la media diaria experimental de defectos y, a partir de ella, ajustar una binomial suponiendo que n = 3.

b) Calcular la probabilidad teórica de que, en un día, no aparezca más que una pieza defectuosa.

c) Evaluar la diferencia entre la última probabilidad teórica calculada y la experimental correspondiente. ¿Te parece bueno el ajuste realizado?

Para que el problema tenga sentido, hay que suponer que cada día se fabrican 3 tornillos de los que puede haber defectuosos 0, 1, 2 ó 3.

a) Cálculo de la media de la distribución empírica.

$$\overline{x} = \frac{18}{30} = 0'6$$

x_i	f_i	$x_i f_i$
0	16	0
1	11	11
2	2	4
3	1	3
	30	18

Igualando la media de la distribución empírica a la de la distribución teórica nos permitirá calcular p.

$$\mu = n \cdot p \quad \rightarrow \quad 0'6 = 3 \cdot p \quad \rightarrow \quad p = 0'2$$

La distribución teórica a la que, supuestamente, se ajusta la distribución dada es una binomial

$$B(3, 0'2)$$

b) $p(x \le 1) = p(x = 0) + p(x = 1) = \binom{3}{0} \cdot 0'2^0 \cdot 0'8^3 + \binom{3}{1} \cdot 0'2^1 \cdot 0'8^2 = 0'896$

c) $p(x \le 1) = p(x = 0) + p(x = 1) = \frac{16}{30} + \frac{11}{30} = \frac{27}{30} = 0'9$

resultado casi idéntico al obtenido en la teórica. A la vista de este único resultado, habría que concluir que el ajuste efectuado es óptimo.

También se obtiene un ajuste razonablemente bueno para valores de n superiores a 3. Por ejemplo, para $n = 6$ se obtiene $p = 0'1$ y la distribución binomial $B(6, 0'1)$ da la siguiente probabilidad:

$$p(x \le 1) = \binom{6}{0} \cdot 0'1^0 \cdot 0'9^6 + \binom{6}{1} \cdot 0'1^1 \cdot 0'9^5 = 0'8857$$

y algo parecido ocurre para valores de muy altos de n. Así, para $n = 6000$ es $p(x \le 1) = 0'878$.

Problema 6

Se lanza una moneda trucada de modo que la probabilidad de sacar cara es cuatro veces la de sacar cruz. Se lanza 6 veces la moneda. Calcular las siguientes probabilidades:

a) Obtener 2 veces cruz.

b) Obtener a lo sumo 2 veces cruz.

a) Del enunciado se deduce que la probabilidad de sacar cara es $\frac{4}{5} = 0'8$ y la de sacar cruz $\frac{1}{5} = 0'2$. Es una distribución binomial $B(6, 0'2)$

$$p(x = 2) = \binom{6}{2} \cdot 0'2^2 \cdot 0'8^4 = 15 \cdot 0'004 \cdot 0'4096 = 0'2457$$

b) $p(x \le 2) = p(x = 0) + p(x = 1) + p(x = 2) = \binom{6}{0} \cdot 0'2^0 \cdot 0'8^6 + \binom{6}{1} \cdot 0'2^1 \cdot 0'8^5 + \binom{6}{2} \cdot 0'2^2 \cdot 0'8^4 =$

$$0'2621 + 0'3932 + 0'2457 = 0'9011$$

Problema 7

Explica cuál es la fórmula que da la probabilidad de que al lanzar 3 monedas bien construidas se obtengan x caras. Supongamos ahora que se han lanzado tres monedas bien construidas. Se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener 1 cara?

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 caras?

c) Si sabemos que se ha obtenido un número impar de caras, ¿cuál es la probabilidad de que el número de caras obtenido sea 1?

Es una distribución binomial $B\left(3, \frac{1}{2}\right)$ a cuya variable llamaremos y.

Se nos pide $p(y = x)$, $p(y = 1)$ y $p(y = 3)$, así como la probabilidad condicionada $p(y = 1 / y \text{ es impar})$.

La fórmula que nos da el nº de caras es $p(y = x) = \binom{3}{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}$

a) $p(y = 1) = \binom{3}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$

b) $p(y = 3) = \binom{3}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$

c) $p(y=1/\text{ y es impar}) = \dfrac{p(y=1)}{p(y=1)+p(y=3)} = \dfrac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{8}+\frac{1}{8}} = \dfrac{3}{4}$

Problema 8

Al inspeccionar 1520 soldaduras hechas por una misma máquina 152 eran defectuosas. Si admitimos que sigue la producción en las mismas condiciones, ¿cuál es la probabilidad de que al coger 8 soldaduras hechas por esa máquina, 2 o más sean defectuosas?

Puesto que se admite que la producción sigue en las mismas condiciones, podemos suponer que la probabilidad de obtener una pieza defectuosa es $\dfrac{152}{1520} = 0'1$.

La variable aleatoria $X = "\text{nº de piezas defectuosas}"$ en un lote de 8 se distribuye como una binomial $B(8, 0'1)$.

$$p(X \geq 2) = 1 - p(X < 2) = 1 - \left[p(X=0) + p(X=1)\right] = 1 - \binom{8}{0} \cdot 0'1^0 \cdot 0'9^8 - \binom{8}{1} \cdot 0'1^1 \cdot 0'9^7 =$$

$$1 - 0'4305 - 0'3826 = 0'1869$$

Problema 9

El 30% de los habitantes de un país tienen sangre tipo O. Si se analiza la sangre de 10 personas, calcular:

a) La probabilidad de que exactamente 5 de esas personas tengan la sangre tipo O.

b) ¿Cuántas de las 5 personas es de esperar que tengan ese tipo de sangre?

a) La probabilidad de que una persona elegida al azar tenga la sangre tipo O será: $p = 0'3$.

La variable aleatoria $X = "\text{nº de personas con sangre del tipo O}"$ se distribuye como una $B(10, 0'3)$.

$$p(X=5) = \binom{10}{5} \cdot 0'3^5 \cdot 0'7^5 = 0'103$$

b) $E(X) = \mu = n \cdot p = 10 \cdot 0'3 = 3$

Significa que el resultado más probable, en una muestra de 10 personas, es que aparezcan 3 con sangre del tipo O.

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{10 \cdot 0'3 \cdot 0'7} = 1'449$$

En la mayoría de los casos aparecerán en la muestra entre $[3-1'449, 3+1'449]$ personas con sangre del tipo O, es decir 2, 3 o 4.

Problema 10

En una pequeña empresa trabajan 8 personas. Se ha observado que la probabilidad de que una cualquiera de ellas acuda al trabajo en coche es 0'4. La empresa desea construir suficientes puestos de aparcamientos reservados, para que todos los que vayan a trabajar en coche puedan aparcar en ellos al menos el 80% de las veces. ¿Cuántos debe construir?

La variable aleatoria que describe el nº de personas que van al trabajo en coche es una $B(8, 0'4)$.

Sea k el número de aparcamientos de coches que hay que construir. Para que todos encuentren aparcamiento al menos el 80% de las veces deberá cumplirse que $p(X \le k) \ge 0'80$

$$p(X \le k) = p(\text{ninguno vaya en coche}) + p(\text{vaya uno}) + p(\text{vayan dos}) + \ldots\ldots\ldots$$

hasta llegar al valor de k. Entonces deberemos ir sumando valores hasta alcanzar o superar el valor 0'80 lo que ocurre sumando los cinco primeros:

$$0'0168 + 0'0896 + 0'2090 + 0'2787 + 0'2322 = 0'8263$$

lo cual significa que la empresa debe construir 4 puestos de aparcamiento para garantizar que todos los que acudan al trabajo en coche puedan aparcar en ellos el 80% de los días.

Problema 11

Una variable aleatoria sigue una ley binomial $B(5, 0'2)$. Determínese la distribución de probabilidad, la media, la desviación típica y la función de distribución.

$$p(0) = \binom{5}{0} \cdot 0'2^0 \cdot 0'8^5 = 0'3277$$

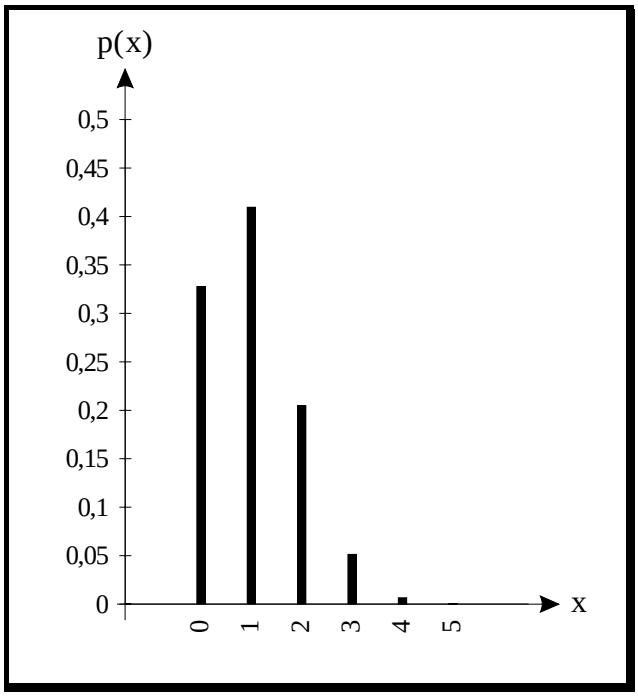
$$p(1) = \binom{5}{1} \cdot 0'2^1 \cdot 0'8^4 = 0'4096$$

$$p(2) = \binom{5}{2} \cdot 0'2^2 \cdot 0'8^3 = 0'2048$$

$$p(3) = \binom{5}{3} \cdot 0'2^3 \cdot 0'8^2 = 0'0512$$

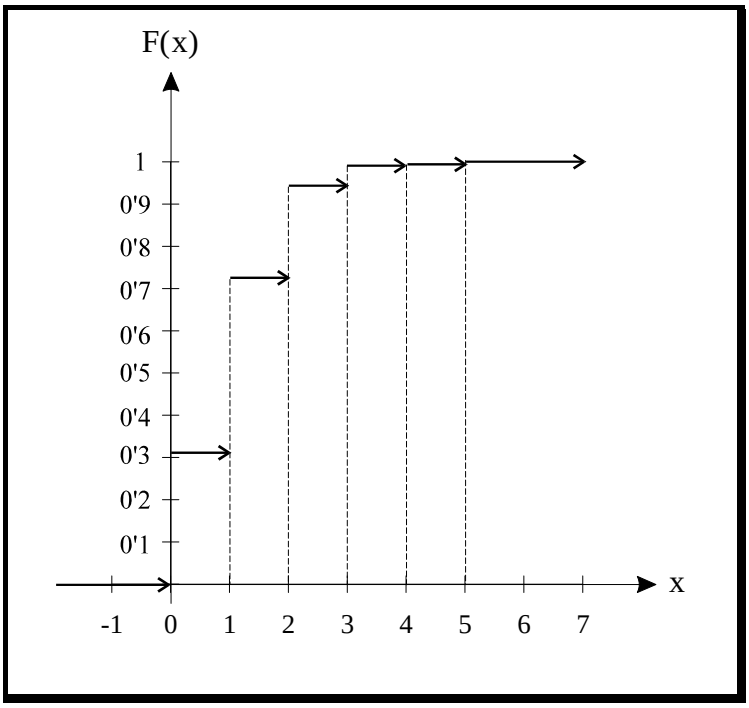
$$p(4) = \binom{5}{4} \cdot 0'2^4 \cdot 0'8^1 = 0'0064$$

$$p(5) = \binom{5}{5} \cdot 0'2^5 \cdot 0'8^0 = 0'0003$$



$$E(X) = n \cdot p = 5 \cdot 0'2 = 1 \qquad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{5 \cdot 0'2 \cdot 0'8} = 0'8944$$

$$F(X) = \begin{cases} 0 & si & x < 0 \\ 0'3277 & si & 0 \le x < 1 \\ 0'7373 & si & 1 \le x < 2 \\ 0'9421 & si & 2 \le x < 3 \\ 0'9933 & si & 3 \le x < 4 \\ 0'9997 & si & 4 \le x < 5 \\ 1 & si & x \ge 5 \end{cases}$$



Problema 12

Considerar la variable aleatoria X cuya distribución es binomial B(5,p). Sabiendo que su varianza es $\frac{5}{4}$, hállese la distribución de probabilidad, la media y $p(X \ge 2)$.

$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot q = n \cdot p \cdot (1-p) \;\rightarrow\; \frac{5}{4} = 5 \cdot p \cdot (1-p) \;\rightarrow\; 5p^2 - 5p + \frac{5}{4} = 0 \;\rightarrow\; 4p^2 - 4p + 1 = 0$$

$$p = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{8} = \frac{1}{2} \qquad E(X) = n \cdot p = 5 \cdot 0'5 = 2'5$$

$$p(0) = \binom{5}{0} \cdot 0'5^0 \cdot 0'5^5 = 0'0312 \quad p(1) = \binom{5}{1} \cdot 0'5^1 \cdot 0'5^4 = 0'1562 \quad p(2) = \binom{5}{2} \cdot 0'5^2 \cdot 0'5^3 = 0'312$$

$$p(3) = \binom{5}{3} \cdot 0'5^3 \cdot 0'5^2 = 0'312 \quad p(4) = \binom{5}{4} \cdot 0'5^4 \cdot 0'5^1 = 0'1562 \quad p(5) = \binom{5}{5} \cdot 0'5^5 \cdot 0'5^0 = 0'0312$$

$$p(X \ge 2) = 1 - p(X < 2) = 1 - \left[p(X=0) + p(X=1)\right] = 1 - (0'0312 + 0'1562) = 0'8126$$

Problema 13

La ley de probabilidad de una variable aleatoria discreta es:

X	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
P	**0'1**	**a**	**b**	**c**	**0'2**

Sabiendo que $p(x \le 2) = 0'7$ y $p(x \ge 2) = 0'75$

a) Hallar su esperanza matemática y su desviación típica.

b) Obtener la función de distribución.

Para calcular a, b y c tendremos en cuenta que la suma de las cinco probabilidades ha de ser 1.

$$0'1 + a + b + c + 0'2 = 1$$

$$p(x \le 2) = 0'1 + a + b = 0'7$$

$$p(x \ge 2) = b + c + 0'2 = 0'75$$

$$\left.\begin{array}{l} a + b + c = 0'7 \\ a + b \quad\;\; = 0'6 \\ \quad\; b + c = 0'55 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a = 0'15 \\ b = 0'45 \\ c = 0'1 \end{cases}$$

a)

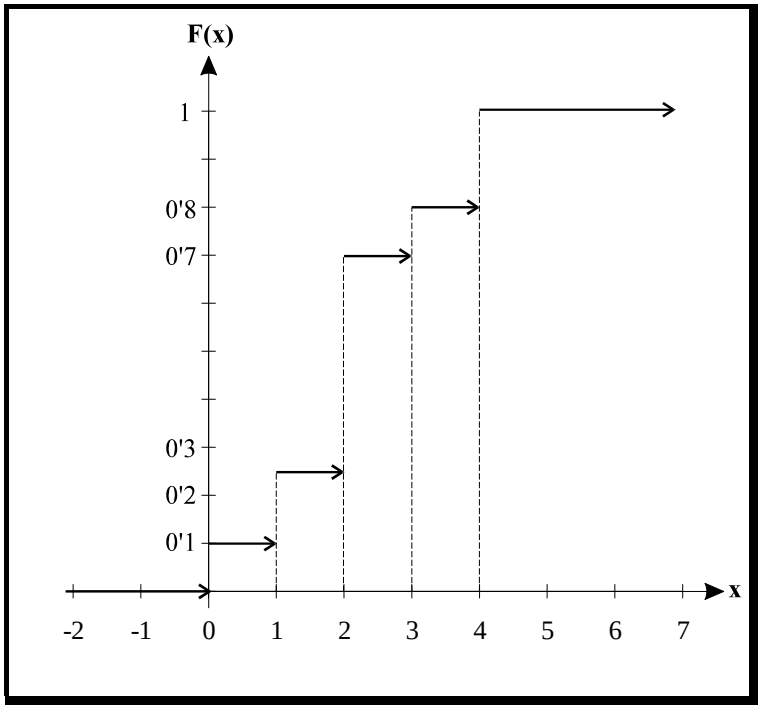
x_i	p_i	$x_i p_i$	$x_i^2 p_i$
0	0'1	0	0
1	0'15	0'15	0'15
2	0'45	0'9	1'8
3	0'1	0'3	0'9
4	0'2	0'8	3'2
		2'15	6'05

$$\mu = \sum x_i p_i = 2'15$$

$$\sigma = \sqrt{6'05 - 2'15^2} = 1'19$$

b) La función de distribución es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} & x < 0 \\ 0'1 & \text{si} & 0 \le x < 1 \\ 0'25 & \text{si} & 1 \le x < 2 \\ 0'7 & \text{si} & 2 \le x < 3 \\ 0'8 & \text{si} & 3 \le x < 4 \\ 1 & \text{si} & 4 \le x \end{cases}$$



Problema 14

Sea X una variable aleatoria de distribución binomial tal que $E(X) = 2$ y $\sigma^2 = \frac{4}{3}$. Hallar la función de probabilidad y su gráfica.

$$E(X)=2 \;\rightarrow\; n\cdot p=2 \qquad \sigma^2=\frac{4}{3} \;\rightarrow\; n\cdot p\cdot(1-p)=\frac{4}{3}$$

$$\left.\begin{array}{r} np=2 \\ np(1-p)=\dfrac{4}{3}\end{array}\right\} \quad 2\cdot(1-p)=\frac{4}{3} \;\rightarrow\; p=\frac{1}{3} \;\rightarrow\; n=6$$

Por tanto tenemos una distribución binomial $B\left(6,\frac{1}{3}\right)$

$$p(0)=\binom{6}{0}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^6=0'0878$$

$$p(1)=\binom{6}{1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5=0'2634$$

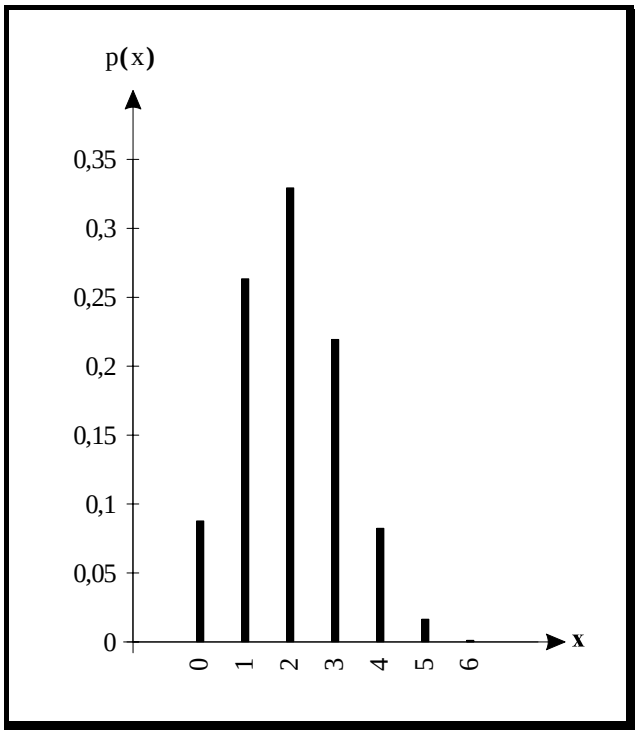
$$p(2)=\binom{6}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4=0'3293$$

$$p(3)=\binom{6}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3=0'2195$$

$$p(4)=\binom{6}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=0'0824$$

$$p(5)=\binom{6}{5}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^1=0'0165$$

$$p(6)=\binom{6}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^6\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^0=0'0011$$



Problema 15

En un total de 600 familias con 4 hijos, en cuantas de ellas cabe esperar que haya:

a) Al menos un niño.
b) Un niño y tres niñas.
c) Al menos un niño y una niña.

a) $p=\frac{1}{2}$ y $q=\frac{1}{2}$

$$p(X\geq 1)=1-p(X<1)=1-p(X=0)=1-\binom{4}{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=1-0'0625=0'9375$$

$$0'9375\cdot 600=562 \text{ familias}$$

b) $p(X=1)=\binom{4}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=0'25 \quad\rightarrow\quad 0'25\cdot 600=150$ familias

c) p(al menos un niño y una niña) $=1-\left[p(4\text{ niños})+p(4\text{ niñas})\right]=$

$$1-\binom{4}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0-\binom{4}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0=1-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}=0'875$$

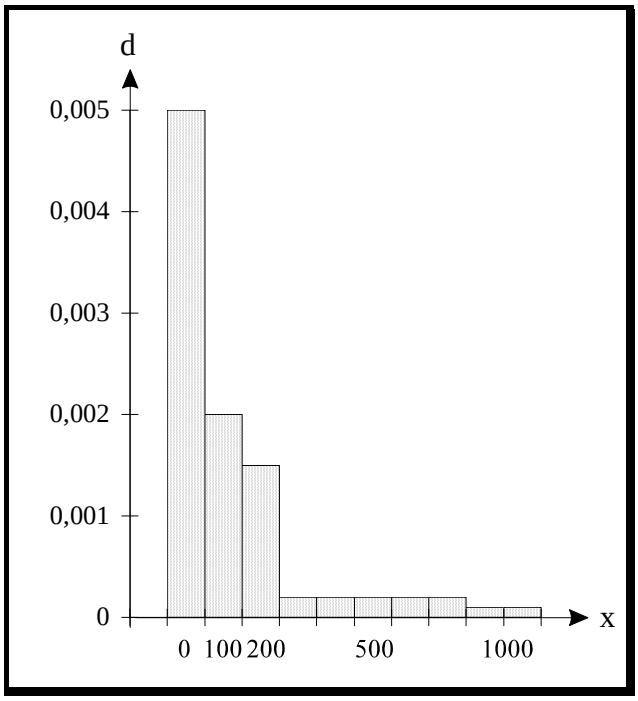
Problema 16

En una lotería de 100 números hay 5 premios de 1000 pts, 10 de 500 pts, 15 de 200, 20 de 100 y los restantes no tienen premio. Se considera la variable x que representa la cuantía del premio obtenido.

a) Función de probabilidad y su representación. b) Función de distribución y su representación. c) Media y desviación típica de la distribución.

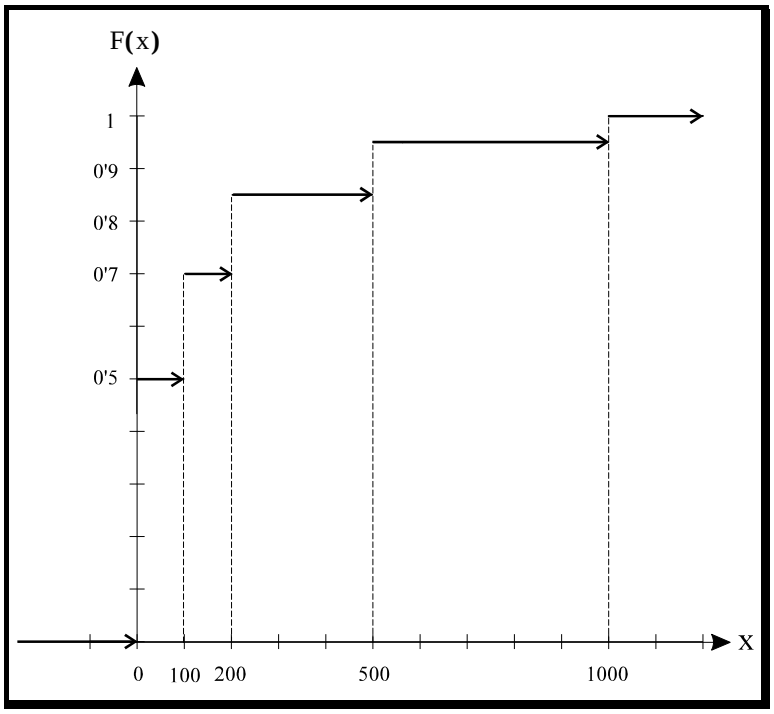
a)

x	p(x)	Densidad = d
0	**0'50**	**0'0050**
100	**0'20**	**0'0020**
200	**0'15**	**0'0015**
500	**0'10**	**0'0002**
1000	**0'05**	**0'0001**



b)

$$F(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x<0 \\ 0'5 & si \quad 0\le x<100 \\ 0'70 & si \quad 100x<200 \\ 0'85 & si \quad 200\le x<500 \\ 0'95 & si \quad 500\le x<1000 \\ 1 & si \quad x\ge 1000 \end{cases}$$



c)

x_i	p_i	$x_i p_i$	$x_i^2 p_i$
0	0'5	0	0
100	0'2	20	2000
200	0'15	30	6000
500	0'1	50	25000
1000	0'05	50	50000
		150	83000

$$\mu = E(x) = \sum x_i p_i = 150$$

$$\sigma = \sqrt{\sum x_i^2 p_i - \mu^2} = 245'96$$

Problema 17

En una caja hay 10 tornillos de los que 3 son de cabeza reducida. Se eligen al azar 2 tornillos. Calcular la esperanza matemática de la variable aleatoria "nº de tornillos de cabeza redonda elegidos"

Los posibles valores de la variable aleatoria son: $X=\{0,1,2\}$

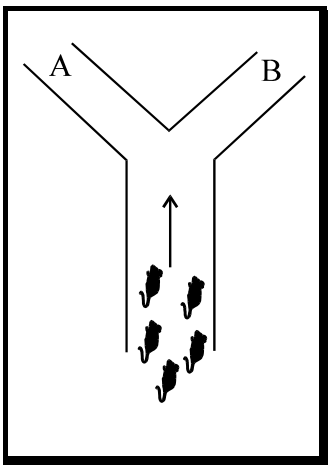
Las probabilidades de elegir 2 de ellos son:

$$p(0)=\frac{C_7^2}{C_{10}^2}=\frac{7}{15} \qquad p(1)=\frac{C_7^1\cdot C_3^1}{C_{10}^2}=\frac{7}{15} \qquad p(2)=\frac{C_3^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{15}$$

$$\mu = E(x) = \sum_{i=0}^{i=2} x_i p_i = 0\cdot\frac{7}{15}+1\cdot\frac{7}{15}+2\cdot\frac{1}{15}=0'6$$

Problema 18

Un laberinto tiene la entrada que se indica en la figura del margen, y estamos investigando con ratas. La probabilidad de que una rata vaya por A es 0'2 y por B de 0'8. Soltamos 5 ratas una detrás de otra y suponemos que el comportamiento de cada una es independiente. Cuál es la probabilidad de que:



a) 4 ratas vayan por A.

b) 2 ratas vayan por B.

c) Al menos una rata vaya por B

a) Sea $p = 0'2$ y $q = 0'8$

$$p(X = 4) = p(X = 4) = \binom{5}{4} \cdot 0'2^4 \cdot 0'8^1 = 0'0064$$

b) Que dos ratas vayan por B es lo mismo que tres vayan por A

$$p(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot 0'2^3 \cdot 0'8^2 = 0'0512$$

c) Consideramos el suceso éxito ir por B, por tanto ahora $p = 0'8$ y $q = 0'2$

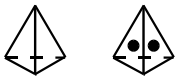
$$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{5}{0} \cdot 0'8^0 \cdot 0'2^5 = 0'96875$$

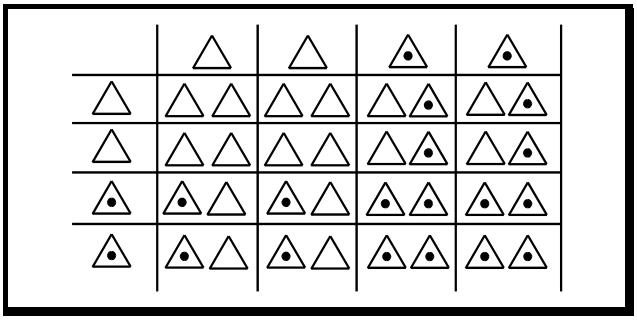
Problema 19

Se construyen dos dados especiales en forma de tetraedro, es decir, con cuatro caras que son triángulos equiláteros. Dos de las caras de cada dado se marcan con un punto y las otras dos quedan sin marcar. Se lanzan los dados simultáneamente. Trazar la gráfica de la correspondiente distribución de probabilidad, y estudiar teóricamente los resultados obtenidos al lanzar los dados 100 veces.

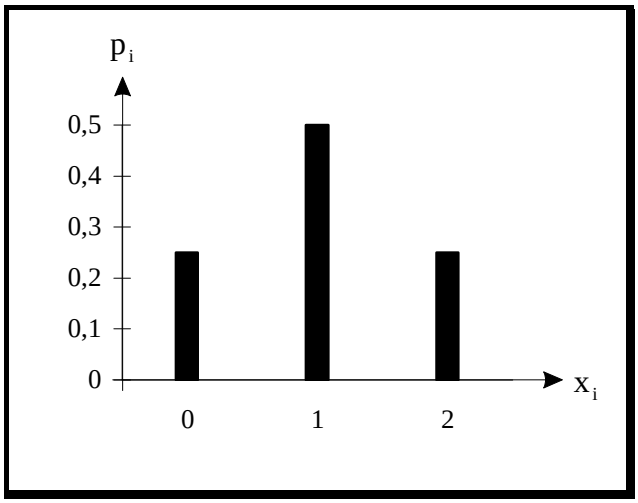
Veamos el espacio muestral:

Las caras del dado presentan el siguiente aspecto:





x_i	f_i	$\frac{f_i}{100}$	p_i
0	4	0'4	0'25
1	8	0'8	0'5
2	4	0'4	0'25
	16		1



Problema 20

Se efectúan tres disparos con probabilidades de hacer blanco $p_1 = 0'5$; $p_2 = 0'7$ y $p_3 = 0'2$ respectivamente. Calcular la esperanza matemática de la variable "nº total de blancos".

Sea $X = x_1 + x_2 + x_3$ la variable aleatoria nº total de blancos, donde x_1, x_2, y x_3 representan el número de blancos en el 1º, 2º y 3er disparo. Según lo anterior tenemos:

x_1	p_1
0	0'5
1	0'5

x_2	p_2
0	0'3
1	0'7

x_3	p_3
0	0'8
1	0'2

X	p
0	0'12
1	0'43
2	0'38
3	0'07

Los valores de la variable X se obtienen de la siguiente forma:

$$0 \rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

$$1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = 0 & x_3 = 1 \\ x_1 = x_3 = 0 & x_2 = 1 \\ x_2 = x_3 = 0 & x_1 = 1 \end{cases} \qquad 2 \rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = 1 & x_3 = 0 \\ x_1 = x_3 = 1 & x_2 = 0 \\ x_2 = x_3 = 1 & x_1 = 0 \end{cases}$$

$$3 \rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 1$$

Luego por ejemplo:

$$p_1 = 0'5 \cdot 0'3 \cdot 0'2 + 0'5 \cdot 0'8 \cdot 0'7 + 0'5 \cdot 0'3 \cdot 0'8 = 0'43 \quad \text{etc.}$$

por lo tanto:

$$\mu = E(X) = 0 \cdot 0'12 + 1 \cdot 0'43 + 2 \cdot 0'38 + 3 \cdot 0'07 = 1'40$$

Problema 21

Un examen consta de 20 preguntas, de cada una de las cuales se suministran 4 respuestas para que el alumno elija la que cree verdadera.

Estudiar la distribución binomial asociada a un alumno que no conoce absolutamente nada de la materia de examen y responde al azar. Si cada pregunta contestada correctamente

vale 0'5 puntos, ¿qué valor negativo hay que otorgar a las preguntas contestadas incorrectamente para que tal alumno obtenga, previsiblemente, un cero como puntuación global en el examen?

La probabilidad del suceso acertar (éxito) es $p = \frac{1}{4} = 0'25$, por tanto $q = \frac{3}{4} = 0'75$. Se verifica:

$$\binom{20}{0} \cdot 0'25^0 \cdot 0'75^{20} = 0'0317 \qquad \binom{20}{1} \cdot 0'25^1 \cdot 0'75^{19} = 0'0211 \qquad \binom{20}{2} \cdot 0'25^2 \cdot 0'75^{18} = 0'0669$$

$$\binom{20}{3} \cdot 0'25^3 \cdot 0'75^{17} = 0'1338 \qquad \binom{20}{4} \cdot 0'25^4 \cdot 0'75^{16} = 0'1896 \qquad \binom{20}{5} \cdot 0'25^5 \cdot 0'75^{15} = 0'2023$$

$$\binom{20}{6} \cdot 0'25^6 \cdot 0'75^{14} = 0'1686 \qquad \binom{20}{7} \cdot 0'25^7 \cdot 0'75^{13} = 0'1124 \qquad \binom{20}{8} \cdot 0'25^8 \cdot 0'75^{12} = 0'0608$$

$$\binom{20}{9} \cdot 0'25^9 \cdot 0'75^{11} = 0'0270 \qquad \binom{20}{10} \cdot 0'25^{10} \cdot 0'75^{10} = 0'0092 \qquad \binom{20}{11} \cdot 0'25^{11} \cdot 0'75^9 = 0'0030$$

$$\binom{20}{12} \cdot 0'25^{12} \cdot 0'75^8 = 0'0007 \qquad \binom{20}{13} \cdot 0'25^{13} \cdot 0'75^7 = 0'0001$$

A partir de $x = 14$ las probabilidades son prácticamente nulas.

La probabilidad más alta corresponde a contestar correctamente 5 preguntas, por tanto el nº de preguntas contestadas incorrectamente es de 15.

Con las 5 preguntas consigue $5 \cdot 0'5 = 2'5$ puntos.

La puntuación total correspondiente a las preguntas incorrectamente contestadas será: $15 \cdot y = 2'5$, es decir, $y = 0'166$. Por consiguiente, cada pregunta mal contestada debe puntuarse con $-0'166$ puntos.

Problema 22

Una urna contiene 3 bolas rojas y 7 verdes. Se saca una al azar, se anota el color y se vuelve a meter; y se realiza 5 veces esta experiencia. Calcula la probabilidad de obtener:

a) Tres rojas

b) Menos de tres rojas.

c) Más de tres rojas.

d) Alguna roja.

La probabilidad de que salga roja es $p = \frac{3}{10} = 0'3$, por tanto:

a) $p(x = 3) = \binom{5}{3} \cdot 0'3^3 \cdot 0'3^2 = 0'1323$

b) $p(x<3)=p(x=0)+p(x=1)+p(x=2)=$

$$\binom{5}{0}\cdot 0'3^0\cdot 0'7^5+\binom{5}{1}\cdot 0'3^1\cdot 0'7^4+\binom{5}{2}\cdot 0'3^2\cdot 0'7^3=0'16807+0'36015+0'3087=0'83692$$

c) $p(X>3)=p(x=4)+p(x=5)=\binom{5}{4}\cdot 0'3^4\cdot 0'7^1+\binom{5}{5}\cdot 0'3^5\cdot 0'7^0=0'03078$

d) $p(x>0)=1-p(x=0)=1-0'16807=0'83193$

Problema 23

Reconoce en cada uno de los siguientes ejercicios una distribución binomial, y di los valores de n, p, μ y σ.

a) Un examen tipo test tiene 70 preguntas y cada pregunta 4 respuestas diferentes, sólo una de las cuales es correcta. Número de ellas que se responderán correctamente si se responde al azar.

b) Lanzamos 10 dados pretendiendo que salga 6 en los 10. hacemos esto durante un año, una tirada cada 3 segundos. Número de veces que conseguiremos lo pretendido.

c) La probabilidad de que una persona, su padre y su abuelo paterno tengan el mismo cumpleaños es $\left(\frac{1}{365}\right)^2=7'5\cdot 10^{-8}$. Nos preguntamos por el número de personas con esta propiedad que habrá en una ciudad de dos millones de habitantes.

d) Una moneda se lanza 400 veces. Número de caras.

a) Es una binomial $B(70,0'25)\ \rightarrow\ \mu=70\cdot 0'25=17'5\ \rightarrow\ \sigma=\sqrt{70\cdot 0'25\cdot 0'75}=3'62$

por tanto, se espera que responda correctamente a 17 ó 18 preguntas.

b) Es una binomial en la que el número de veces que se tiran los dados es:

Si tiramos un dado cada 3 segundos, tardaremos en tirar los 10 dados 30 segundos es decir medio minuto, por tanto en un minuto tiramos los 10 dados 2 veces. En una hora 120 veces, en un día 2880 veces y en un año 10.512.000. Como queremos que salga 6 en el primero y 6 en el segundo y 6 en el tercero, etc. la probabilidad será $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdots\cdots$.

En definitiva tenemos una distribución binomial $B\left(1.051.200,\left(\frac{1}{6}\right)^{10}\right)$

$$\mu=1.051.200\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{10}=0'0173\ \rightarrow\ \sigma=\sqrt{1.051.200\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{10}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{6}\right)^{10}\right)}=0'131$$

c) Es una binomial $B\left(2.000.000, 7'5\cdot 10^{-6}\right) \rightarrow \mu = 2.000.000\cdot 7'5\cdot 10^{-6} = 15$

$$\sigma = \sqrt{2.000.000\cdot 7'5\cdot 10^{-6}\cdot\left(1-7'5\cdot 10^{-6}\right)} = 3'87$$

d) Es una binomial $B(400, 0'5) \rightarrow \mu = 400\cdot 0'5 = 200 \rightarrow \sigma = \sqrt{400\cdot 0'5\cdot 0'5} = 10$

Problema 24

Disponemos de un dado cúbico no sesgado. Apuestas por el 6 ("éxito").

a)¿Qué probabilidad tienes de ganar en un lanzamiento? ¿Cómo deben ser las apuestas?

b) ¿Tendrás la misma probabilidad que tu contrincante si apuestas por un éxito al menos en dos lanzamientos?

c) ¿A cuántos lanzamientos debes apostar por un éxito al menos para tener más posibilidades de ganar que tu contrincante?

a) $p(6) = \frac{1}{6} \rightarrow p\left(\overline{6}\right) = \frac{5}{6} \Rightarrow$ Apuestas 5 a 1 a favor de $\overline{6}$.

b) En dos lanzamientos puede salir un seis o dos. La probabilidad de que salga algún seis es:

$$p(1 \text{ seis}) + p\left(2 \text{ seises}\right) = \binom{2}{1}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^1 + \binom{2}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{10}{36} + \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$$

La probabilidad de que no salga ninguno será: $1 - \frac{11}{36} = \frac{25}{36}$

Luego las apuestas serán de 25 a 11 a favor de no salir ningún 6.

c) Debe apostar como mínimo a 4 lanzamientos, ya que calculando la probabilidad de que no salga ningún seis tendríamos que para el caso de 4 lanzamientos ya es menor.

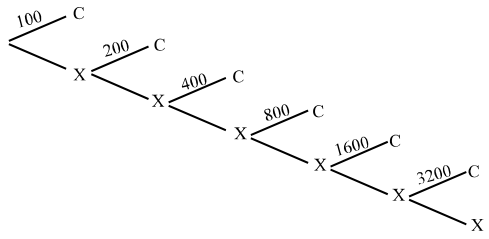
$$\binom{4}{0}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^0\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296} = 0'482$$

luego la probabilidad de que al menos salga un 6 será $1 - 0'482 = 0'517$.

Problema 25

Una persona apuesta al juego de cara y cruz. Para ganar adopta la siguiente estrategia: Apuesta 100 pts. Si gana deja de jugar y si pierde apuesta el doble, es decir, 200 pts con el fin de recuperar las 100 pts perdidas anteriormente, e intenta ganar 100 pts de nuevo. Si ahora gana deja de jugar, y si pierde apuesta el doble 400 pts con el mismo fin anterior y así sucesivamente.

Esta estrategia es buena, ya que acabará por ganar alguna vez, pero tiene el defecto de que el jugador no tenga el suficiente dinero para aguantar jugando hasta el final. Supongamos que el jugador tiene 6300 pts:
¿Es ventajoso el juego para nuestro jugador? ¿Cuál es la probabilidad de ganar 100 pts? ¿Y la de perder 6300 pts?



$$p(\text{perder } 6300) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{64}$$

$$p(\text{ganar } 100) = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64} = \frac{63}{64}$$

$$p(\text{ganar } 100) = 1 - p(\text{perder } 6300) = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$$

De todo lo anterior se deduce que el juego es ventajoso ya que tiene 63 posibilidades de ganar frente a 1 de perder.

Problema 26

Se lanzan dos dados y la suma de los puntos puede ser mayor igual o menor que 7. Si se apuesta al 7 y se acierta se recupera el dinero y 3 veces lo apostado. Si se apuesta a mayor que 7 se recupera el dinero y se recibe tanto como se ha apostado y lo mismo si se apuesta a menor que 7. ¿Cuál será la mejor estrategia?

Sea "x" la cantidad de dinero que ha apostado.

Suma de puntos igual a 7 $\rightarrow$ $X = \{3x, -x\}$. Es decir, $3x$ si gana y $-x$ si pierde

Suma de puntos mayor que 7 $\rightarrow$ $X = \{x, -x\}$.

Suma de puntos menor que 7 $\rightarrow$ $X = \{x, -x\}$.

$$p(7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \qquad p(>7) = \frac{15}{36} \qquad p(<7) = \frac{15}{36}$$

Para la suma de puntos igual a 7 la esperanza matemática es: $E(x) = 3x\cdot\frac{6}{36} + (-x)\cdot\frac{30}{36} = \frac{-12x}{36}$

Para la suma de puntos mayor o menor que 7 la esperanza matemática es:

$$E(x) = x\cdot\frac{15}{36} + (-x)\cdot\frac{21}{36} = \frac{-6x}{36} = -\frac{x}{6}$$

Como es mayor $\frac{-x}{6}$ que $\frac{-12x}{36}$ la mejor estrategia es apostar a menor que 7 ó a mayor que 7.