Problema 1

Una variable aleatoria continua, tiene por función de densidad $f(x) = k \cdot x^2 + x$ si $x \in [0,1]$. Calcular:

a) El valor de la constante k.

b) La varianza de dicha distribución.

a) Sabemos que el área bajo la curva de la función de densidad (función de probabilidad) es 1.

$$\int_0^1 (kx^2 + x)\,dx = \left[\frac{kx^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{k}{3} + \frac{1}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{3}{2}$$

b) $\mu = \int_0^1 f(x) \cdot x\,dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^2 + x\right) x\,dx = \left[\frac{3x^4}{8} + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{3}{8} + \frac{1}{3} = \frac{17}{24}$

$$\sigma^2 = \int_0^1 f(x) \cdot x^2\,dx - \mu^2 = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^2 + x\right) x^2 dx - \left(\frac{17}{34}\right)^2 = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^4 + x^3\right) dx - \left(\frac{17}{34}\right)^2 =$$

$$\left[\frac{3x^5}{10} + \frac{x^4}{4}\right]_0^1 - \left(\frac{17}{34}\right)^2 = \frac{11}{20} - \left(\frac{17}{34}\right)^2 \cong 0'048$$

Problema 2

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{x^2}{9} & \text{si} \quad 0 \le x \le a \\ 0 & \text{si} \quad x > a \end{cases}$$

a) Calcular a para que sea una función de densidad.

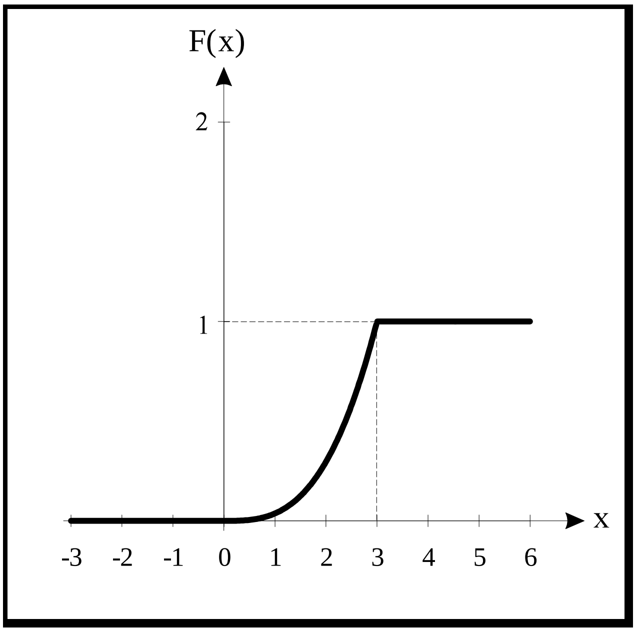
b) Calcular la función de distribución y representarla gráficamente.

c) Encontrar $p(x \le 1)$ y $p(x \ge 0'5)$.

a) Se tiene que cumplir $\int_0^a f(x)\,dx = 1 \to \int_0^a \frac{x^2}{9} dx = 1 \to \int_0^a \frac{x^2}{9} dx = \left[\frac{x^3}{27}\right]_0^a = \frac{a^3}{27} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 3$

b) La función de distribución es

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\left[\frac{t^3}{27}\right]_0^x=\frac{x^3}{27} \qquad 0\le x\le 3$$



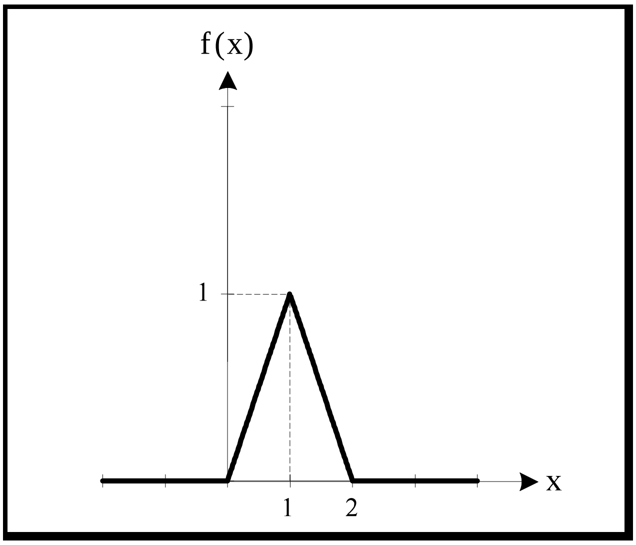
c) $p(x\le 1)=\int_0^1 \frac{x^2}{9}\,dx=F(1)=\frac{1}{27}$

$$p(x\ge 0'5)=1-p(x<0'5)=$$

$$1-\int_0^{0'5}\frac{x^2}{9}\,dx=1-F(0'5)=1-\frac{0'5^3}{27}=0'99537$$

Problema 3

La figura adjunta representa la función de densidad de cierta variable continua X. Determina su función de distribución.

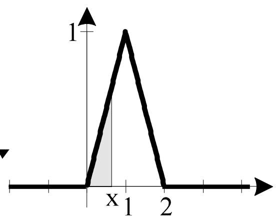


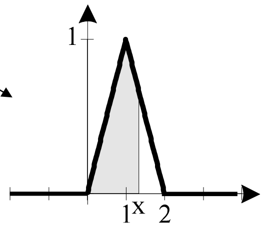
La función de densidad de X es:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ x & \text{si} \quad 0\le x\le 1 \\ 2-x & \text{si} \quad 1<x\le 2 \\ 0 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

La función distribución de X es:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ \int_0^x t\,dt=\frac{x^2}{2} & \text{si} \quad 0\le x\le 1 \\ \int_0^1 t\,dt+\int_1^x (2-t)\,dt=2x-\frac{x^2}{2}-1 & \text{si} \quad 1<x\le 2 \\ 1 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$





Problema 4

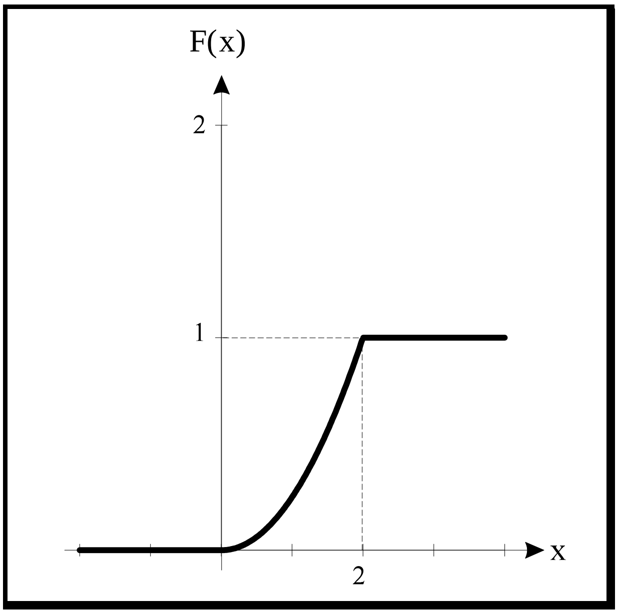
La función de distribución de una variable aleatoria continua X es

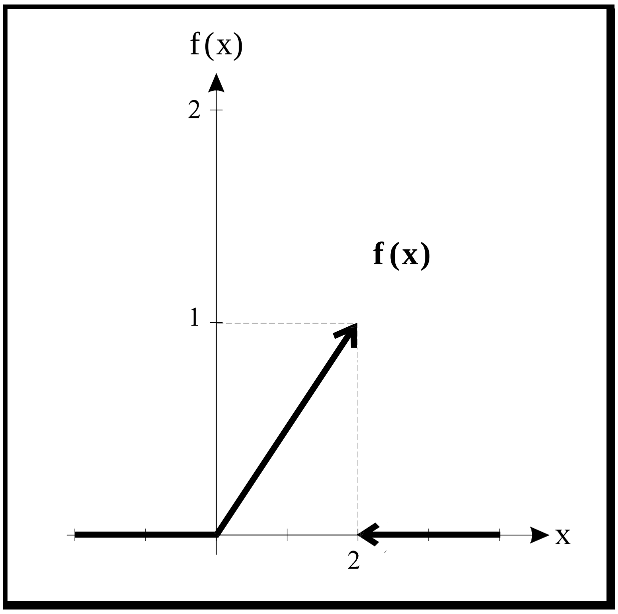
$$\mathbf{F(x)}=\begin{cases}\mathbf{0} & \mathbf{si} \quad \mathbf{x<0}\\ \dfrac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{4}} & \mathbf{si} \quad \mathbf{0\le x\le 2}\\ \mathbf{1} & \mathbf{si} \quad \mathbf{x>2}\end{cases}$$

Calcular la función de densidad.

Dado que $F(x)$ es continua $\forall x \in R$, podemos derivarla haciendo uso de la tabla de derivadas, pero teniendo en cuenta que $f(2)$ no existe ya que $F(x)$ no tiene derivada en $x=2$.

Sabemos que $f(x)=F'(x) \quad \Rightarrow \quad f(x)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad x<0\\ \dfrac{x}{2} & \text{si} \quad 0\le x<2\\ 0 & \text{si} \quad x>2\end{cases}$





Problema 5

La función de distribución de la variable continua X es:

$$\mathbf{F(x)}=\begin{cases}\mathbf{0} & \mathbf{si} \quad \mathbf{x<0}\\ \mathbf{kx^3} & \mathbf{si} \quad \mathbf{0\le x\le 2}\\ \mathbf{1} & \mathbf{si} \quad \mathbf{x>2}\end{cases}$$

Halla la función de densidad de X, su media y su varianza.

El parámetro k de $F(x)$ podemos calcularlo al ser $F(2)=1$ y $F(2)=k\cdot 8=1 \quad \Rightarrow \quad k=\frac{1}{8}$

La función de densidad verifica $f(x)=F'(x)$ es decir:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}\frac{3}{8}x^2 & \text{si} \quad 0\le x\le 2\\ 0 & \text{si} \quad x\notin[0,2]\end{cases} \qquad \mu=\int_0^2 x\bullet f(x)\,dx=\int_0^2 x\cdot\frac{3}{8}x^2\,dx=\left[\frac{3x^4}{32}\right]_0^2=\frac{3}{2}$$

$$\sigma^2=\int_0^2 x^2\cdot f(x)\,dx-\mu^2=\int_0^2 x^2\cdot\frac{3}{8}x^2\,dx-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\left[\frac{3x^5}{40}\right]_0^2-\frac{9}{4}=\frac{12}{5}-\frac{9}{4}=\frac{3}{20}$$

Problema 6

La función de densidad de una variable aleatoria continua X es:

$$\mathbf{f(x)}=\begin{cases}\mathbf{kx\cdot(x-3)} & \mathbf{si} \quad \mathbf{x\in[0,3]}\\ \mathbf{0} & \mathbf{si} \quad \mathbf{x\notin[0,3]}\end{cases}$$

a) Calcular razonadamente qué valor debe tener k.

b) Determinar la función de distribución de X.

c) Calcular $\mathbf{p(1\le X\le 2)}$.

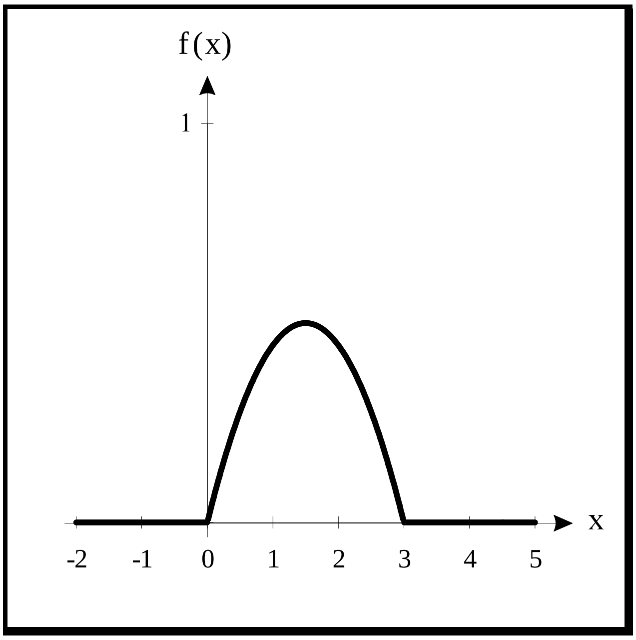
a) La función de densidad debe cumplir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$$

Como f(x) es nula fuera del intervalo $[0,3]$, es evidente que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_0^3 f(x)\,dx=$$

$$\int_0^3 (kx^2-3kx)\,dx=k\cdot\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=-\frac{9}{2}k$$



Aplicando la condición inicial, se deduce que $-\frac{9}{2}k=1 \quad \Rightarrow \quad k=-\frac{2}{9}$

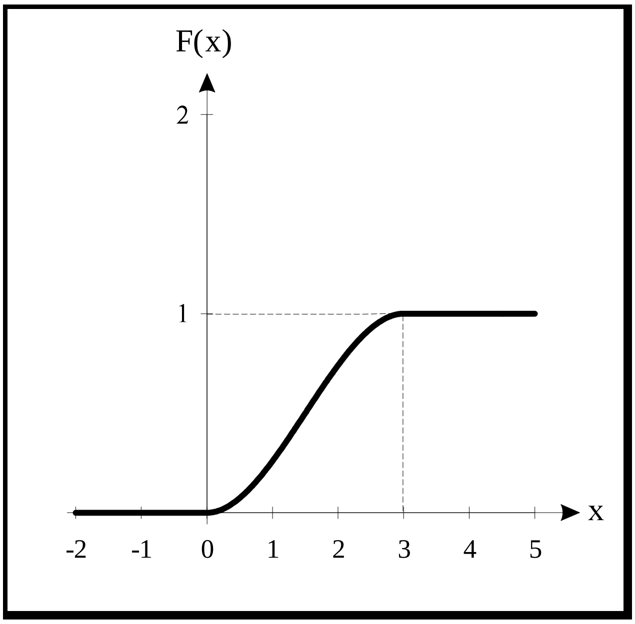
b) Recuérdese que $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

Es decir, la función de distribución es una primitiva de la función de densidad. Es obvio que F es anula para $x<0$, vale 1 para $x\geq 3$, y si $x\in[0,3]$ entonces se verifica:

$$F(x)=\int_0^x kt\cdot(t-3)\,dt=k\cdot\left[\frac{t^3}{3}-\frac{3t^2}{2}\right]_0^x=-\frac{2}{9}\cdot\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}\right]$$

Por tanto, F y su gráfica son como sigue:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ -\dfrac{2x^3}{27}+\dfrac{x^2}{3} & \text{si} \quad 0\leq x\leq 3 \\ 1 & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$$



c) $p(1\leq X\leq 2)=F(2)-F(1)=\left(-\frac{16}{27}+\frac{4}{3}\right)-\left(-\frac{2}{27}+\frac{1}{3}\right)=\frac{13}{27}$

Problema 7

Se sabe que bajo determinadas circunstancias, la probabilidad de que se presente un determinado tipo de úlcera es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de su longitud, que puede llegar a ser de 16 mm.

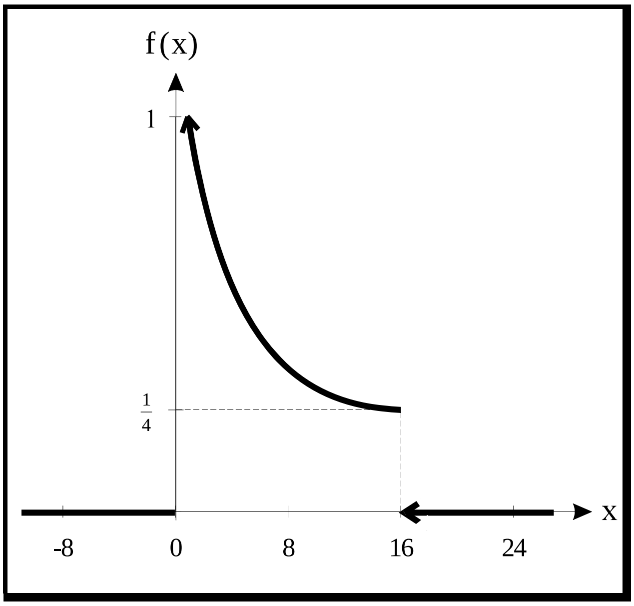
a) Calcular y representar la función de densidad de probabilidad y la función de distribución de la variable aleatoria "Longitud de la úlcera".

b) Halla la media y desviación típica.

c) Determina la probabilidad de que la úlcera sea mayor de 8 mm.

a) Sea $X=$"Longitud de la úlcera"

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{k}{\sqrt{x}} & \text{si} \quad 0<x\le 16\\ 0 & \text{si} \quad x\notin \left]0,16\right]\end{cases}$$



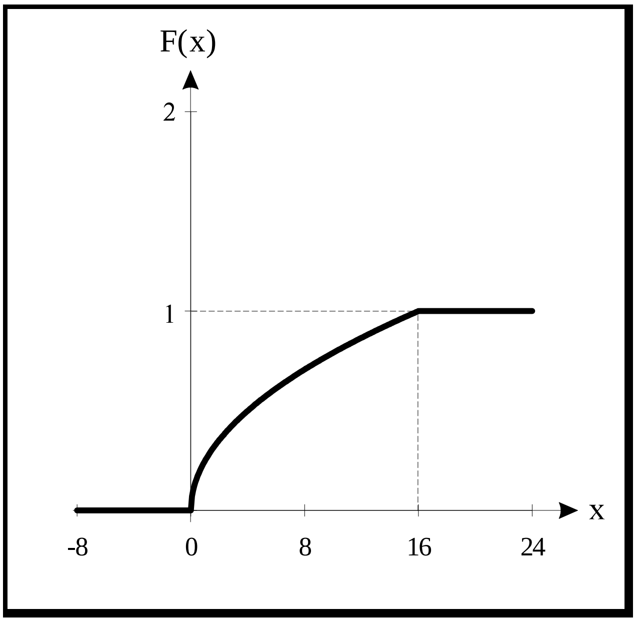
Sabemos que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{k}{\sqrt{x}}dx=1$

$$\int_0^{16}\frac{k}{\sqrt{x}}dx=\lim_{h\to 0}\int_h^{16}\frac{k}{\sqrt{x}}dx=\lim_{h\to 0}2k\cdot\left[\sqrt{x}\right]_h^{16}=$$

$$\lim_{h\to 0}\left(8k-2k\sqrt{h}\right)=8k \quad\to\quad 8k=1 \quad\Rightarrow\quad k=\frac{1}{8}$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{8\sqrt{x}} & \text{si} \quad 0<x\le 16\\ 0 & \text{si} \quad x\notin \left]0,16\right]\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si} & x\le 0\\ \displaystyle\int_0^x\frac{1}{8\sqrt{t}}dt & \text{si} & 0\le x\le 16\\ 1 & \text{si} & x>16\end{cases}$$



$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si} & x\le 0\\ \dfrac{\sqrt{x}}{4} & \text{si} & 0\le x\le 16\\ 1 & \text{si} & x>16\end{cases}$$

b) $\displaystyle E(X)=\mu=\int_0^{16}x\cdot\frac{1}{8\cdot\sqrt{x}}dx=\frac{1}{8}\cdot\int_0^{16}\sqrt{x}\,dx=\frac{1}{12}\cdot\left[x\cdot\sqrt{x}\right]_0^{16}=5'\widehat{3}$

$$\sigma^2(X)=\int_0^{16}x^2\cdot f(x)\,dx-\mu^2=\int_0^{16}x^2\cdot\frac{1}{8\sqrt{x}}dx-\left(5'\widehat{3}\right)^2=\frac{1}{8}\cdot\int_0^{16}x^{\frac{3}{2}}dx-\left(5'\widehat{3}\right)^2=$$

$$\frac{1}{20}\cdot\left[x^{\frac{5}{2}}\right]_0^{16}-\left(5'\widehat{3}\right)^2=51'2-28'\widehat{4}=22'\widehat{75} \quad\Rightarrow\quad \sigma=4'77$$

c) $p(X>8)=\int_8^{16}\frac{1}{8\sqrt{x}}\,dx=\frac{1}{4}\cdot\left[\sqrt{x}\right]_8^{16}=\frac{1}{4}\cdot 4-\frac{1}{4}\cdot\sqrt{8}=0'2928$ es decir el 29'28%

Problema 8

El autobús de Ondara a Denia tiene su salida a las 8'30 h., sin embargo nunca sale antes de las 8'40 h., ni tampoco después de las 9'15 h. La señora del kiosco ha hecho un seguimiento del horario y ha llegado a la conclusión:

"La salida del autobús se ajusta a la siguiente función de probabilidad:

$$\mathbf{f(x)}=\begin{cases}\mathbf{0} & \mathbf{si} \quad \mathbf{x<8'40}\\ \mathbf{x-k} & \mathbf{si} \quad \mathbf{8'40\le x\le 9}\\ \mathbf{1} & \mathbf{si} \quad \mathbf{9\le x\le 9'15}\\ \mathbf{0} & \mathbf{si} \quad \mathbf{x>9'15}\end{cases}$$

a) Hallar k para que $\mathbf{f(x)}$ sea una función de densidad.

b) Representa $\mathbf{f(x)}$ y $\mathbf{F(x)}$, funciones de densidad y de distribución respectivamente.

c) Bernarda, la empleada de la limpieza, hace la siguiente apuesta a Antonia (la kiosquera): "Si el autobús sale antes de las 9 h gano 1000 pts, en caso contrario pierdo 600". ¿Qué probabilidad de ganar tiene cada una? La apuesta de Bernarda le es beneficiosa o perjudicial?

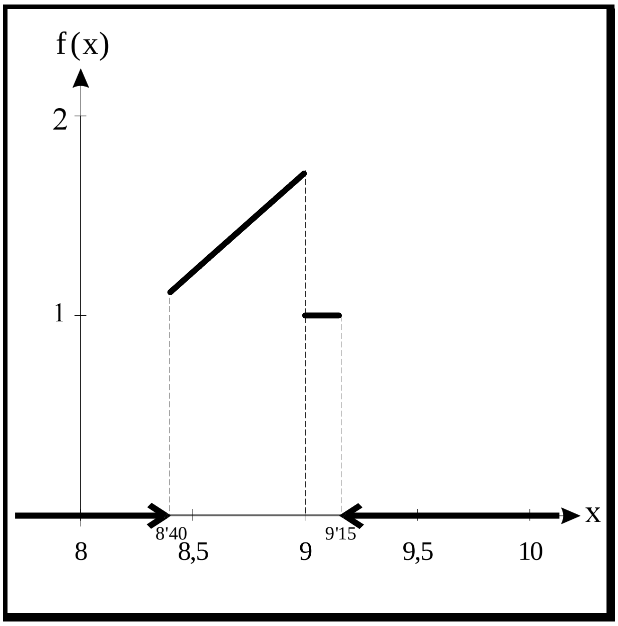
a) $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=\int_{8'40}^{9}(x-k)\,dx+\int_{9}^{9'15}1\cdot dx=\left[\frac{(x-k)^2}{2}\right]_{8'40}^{9}+\left[x\right]_9^{9'15}=$

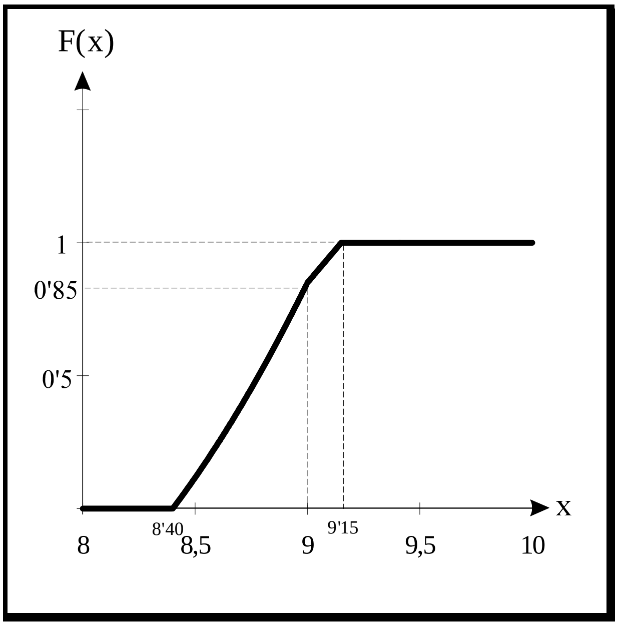
$$\frac{1}{2}\cdot\left[(9-k)^2-(8'40-k)^2\right]+0'15=\frac{1}{2}\cdot\left[10'44-1'2k\right]+0'15=-0'6k+5'37$$

$$-0'6k+5'37=1 \quad\Rightarrow\quad k=7'28\widehat{3}$$

b)

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad x<8'40\\ \int_{8'40}^{x}(t-k)\,dt=\frac{x^2}{2}-7'283x+25'89 & \text{si} \quad 8'40\le x\le 9\\ \int_{8'40}^{9}(t-7'283)\,dt+\int_9^x 1\,dt=x-8'15 & \text{si} \quad 9\le x\le 9'15\\ 1 & \text{si} \quad x>9'15\end{cases}$$





c) $p(X \leq 9) = \int_{8,40}^{9} f(x)\,dx = 0'85$ $\qquad$ $p(X > 9) = \int_{9}^{9'15} f(x)\,dx = 0'15$

La apuesta le es claramente beneficiosa.

$$x \cdot 0'85 = 600 \cdot 0'15 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{600 \cdot 0'15}{0'85} = 105'88 \text{ pts gana si sale antes de las 9.}$$

Problema 9

Suponiendo que la variable que expresa el número de meses que tarda en salir el primer diente a los niños es $N(7'5, 1'5)$, calcular la probabilidad de que a un niño le salgan los dientes:

a) Antes de los 5 meses.

b) Habiendo cumplido ya 1 año.

c) Con 7 meses (entre 7 y 8).

d) Antes de cumplir el primer mes.

a) $p(X < 5) = p\left(Z < \frac{5 - 7'5}{1'5}\right) = p(Z < -1'66) = p(Z > 1'66) = 1 - p(Z < 1'66) = 1 - 0'9515 = 0'0485$

b) $p(X > 12) = p\left(Z > \frac{12 - 7'5}{1'5}\right) = p\left(Z > \frac{4'5}{1'5}\right) = p(Z > 3) = 1 - p(Z < 3) = 1 - 0'9987 = 0'0013$

c) $p(7 < X < 8) = p\left(\frac{7-7'5}{1'5} < Z < \frac{8-7'5}{1'5}\right) = p(-0'33 < Z < 0'33) = p(Z < 0'33) - p(Z < -0'33) =$

$$p(Z < 0'33) - p(Z > 0'33) = p(Z < 0'33) - [1 - p(Z < 0'33)] = 2p(Z < 0'33) - 1 = 0'2586$$

d) $p(X < 1) = p\left(Z < \frac{1-7'5)}{1'5}\right) = p(Z < -4'33) = p(Z > 4'33) = 1 - p(Z < 4'33) = 1 - 1 = 0$

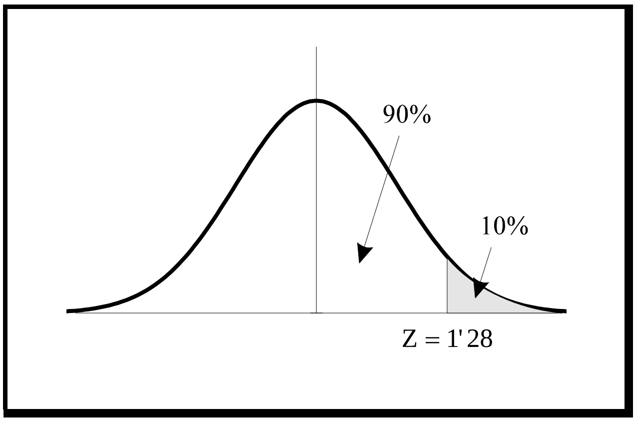
Problema 10

La puntuación media de un examen final de Matemáticas es de 7'2 y la desviación típica de 0'9. El profesor desea dar sobresaliente al 10% de la clase. ¿A partir de qué puntuación deberá de darlo?

Buscamos en la tabla el valor de Z para el cual la probabilidad de Z menor que ese número sea aproximadamente 0'90, y nos da $Z = 1'28$ ya que $p(Z \leq 1'28) = 0'8997$.

$$p\left(Z \leq \frac{x-7'2}{0'9}\right) = 0'90$$

$$1'28 = \frac{x-7'2}{0'9} \quad \Rightarrow \quad x = 8'35$$



Problema 11

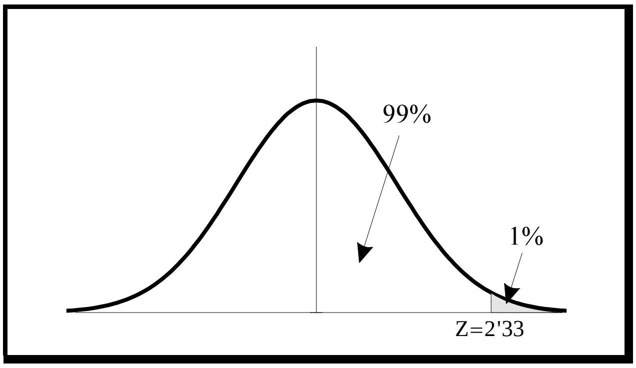
Se ha pasado un test a 10.000 personas y los resultados se distribuyen según una Normal de media 100 y varianza 36. Se quiere premiar a los 100 mejores. ¿A partir de qué puntuación hemos de seleccionar este grupo?

Sobre 10.000, los 100 mejores serán el 1%, es decir, 0'01, luego los restantes son el 99%, es decir, 0'99. Buscamos en la tabla el valor de Z para el cual la probabilidad de Z menor que ese número sea aproximadamente 0'99, y nos da $Z = 2'33$ ya que $p(Z \leq 2'33) = 0'9901$.

$$p\left(Z \leq \frac{x-100}{6}\right) = 0'990$$

$$\frac{x-100}{6} = 2'33 \quad \Rightarrow \quad x = 113'98$$

Hay que escoger a partir de 114 de puntuación.



Problema 12

Un test consta de 100 preguntas con 4 respuestas optativas cada una. Si se responden totalmente al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de acertar 50 o más preguntas?

b) ¿Y de acertar entre 25 y 75?

c) ¿Y menos de 25? ¿Y más de 75?

a) El problema trata de una binomial $B\left(100,\frac{1}{4}\right)$ que la podemos aproximar por una normal ya que

$$\left.\begin{array}{r} np=25 \\ nq=75 \\ npq=18'75 \end{array}\right\} \Rightarrow X'\to N\left(25,\sqrt{18'75}\right)=N(25,4'33) \quad \to \quad Z=\frac{X'-25}{4'33}$$

$$p(X\geq 50)=p(X'\geq 49'5)=p\left(Z\geq\frac{49'5-25}{4'33}\right)=p(Z\geq 5'65)=1-p(Z<5'65)=1-1=0$$

b) $p(25\leq X\leq 75)=p(24'5\leq X'\leq 75'5)=p\left(\frac{24'5-25}{4'33}\leq Z\leq\frac{75'5-25}{4'33}\right)=$

$$p\left(Z\leq\frac{75'5-25}{4'33}\right)-p\left(Z\leq\frac{24'5-25}{4'33}\right)=p(Z\leq 11'66)-p(Z\leq -0'11)=$$

$$p(Z\leq 11'66)-1+p(Z\leq 0'11)=1-1+0'5438=0'5438$$

c) $p(X<25)=p(X'\leq 24'5)=p\left(Z\leq\frac{24'5-25}{4'33}\right)=p(Z\leq -0'1154)=p(Z\geq 0'1154)=$

$$1-p(Z\leq 0'1154)=1-0'5438=0'4562$$

$$p(X>75)=p(X'\geq 75'5)=p\left(Z\geq\frac{75'5-25}{4'33}\right)=p(Z\geq 11'66)=1-p(Z\leq 11'66)=1-1=0$$

Problema 13

Si X es la variable aleatoria que describe el número de caras obtenidas en 1000 lanzamientos de una moneda. Calcular:

a) Probabilidad de obtener entre 475 y 525 caras.

b) ¿Entre qué valores cabe esperar que se halle el 95% de las caras obtenidas?

$$X \to B(1000, 0'5) \qquad \begin{cases} np = 500 \\ nq = 500 \\ npq = 250 \end{cases} \qquad X' \to N(500, 15'8)$$

a) $p(475 \le X \le 525) = p(474'5 \le X' \le 525'5) = p\left(\frac{474'5 - 500}{15'8} \le Z \le \frac{525'5 - 500}{15'8}\right) =$

$$p(-1'61 \le Z \le 1'61) = p(Z \le 1'61) - p(Z \le -1'61) = p(Z \le 1'61) - p(Z \ge 1'61) =$$

$$p(Z \le 1'61) - \left[1 - p(Z \le 1'61)\right] = 2 \cdot p(Z \le 1'61) - 1 = 2 \cdot 0'9463 - 1 = 0'8996$$

b) Parece lógico buscar ese intervalo *centrado en la media*, $\left[500 - r, 500 + r\right]$, de manera que se verifique $p(500 - r \le X \le 500 + r) = 0'95$.

$$p(500 - r \le X \le 500 + r) = p(499'5 - r \le X' \le 500'5 + r) =$$

$$p\left(\frac{499'5 - r - 500}{15'8} \le Z \le \frac{500'5 + r - 500}{15'8}\right)$$

$$p\left(\frac{-0'5 - r}{15'8} \le Z \le \frac{0'5 + r}{15'8}\right) = p\left(Z \le \frac{0'5 + r}{15'8}\right) - p\left(Z \le \frac{-0'5 - r}{15'8}\right) =$$

$$p\left(Z \le \frac{0'5 + r}{15'8}\right) - p\left(Z \ge \frac{0'5 + r}{15'8}\right) = p\left(Z \le \frac{0'5 + r}{15'8}\right) - \left[1 - p\left(Z \le \frac{0'5 + r}{15'8}\right)\right] =$$

$$2 \cdot p\left(Z \le \frac{0'5 + r}{15'8}\right) - 1 = 0'95 \quad \Rightarrow \quad p\left(Z \le \frac{0'5 + r}{15'8}\right) = 0'975 \quad \Rightarrow \quad \frac{0'5 + r}{15'8} = 1'96 \quad \Rightarrow \quad r = 30'468$$

por tanto el intervalo buscado será:

$$\left[500 - 30'468, 500 + 30'468\right] = \left[469'532, 530'468\right] \simeq \left[470, 530\right]$$

Podemos decir, que el nº de caras obtenidas lanzando 1000 monedas se hallará entre 470 y 530 en el 95% de las veces que realicemos el experimento.

Problema 14

a) En una distribución $N(163, 12)$, ¿dónde están los percentiles P_{10} y P_{90}?

b) Hallar el 1º y 3º cuartil de una distribución $N(25, 3)$.

a) Para el percentil de orden 10 tenemos: $p(X \le x) = 0'10 \quad \rightarrow \quad p\left(Z \le \dfrac{X-163}{12}\right) = 0'10$

En las tablas $N(0,1)$ sólo encontramos el simétrico respecto de la media, es decir, el 0'90 que corresponde a $1'28$, por tanto a 0'10 le corresponderá el simétrico $-1'28$.

$$Z = -1'28 \quad \rightarrow \quad \frac{X-163}{12} = -1'28 \quad \rightarrow \quad X = 147'64 \quad \Rightarrow \quad P_{10} = 147'64$$

Para el percentil de orden 90 tenemos: $p(X \le x) = 0'90 \quad \rightarrow \quad p\left(Z \le \dfrac{X-163}{12}\right) = 0'90$

$$Z = 1'28 \quad \rightarrow \quad \frac{X-163}{12} = 1'28 \quad \rightarrow \quad X = 178'36 \quad \Rightarrow \quad P_{90} = 178'36$$

b) Cálculo del cuartil 1º

$$p(X \le x) = 0'25 \;\rightarrow\; p\left(Z \le \frac{X-25}{3}\right) = 0'25 \;\rightarrow\; Z = -0'67 \;\rightarrow\; \frac{X-25}{3} = -0'67 \;\Rightarrow\; X = 22'99$$

$$\text{Luego } Q_1 = 22'99$$

Cálculo del cuartil 3º

$$p(X \le x) = 0'75 \;\rightarrow\; p\left(Z \le \frac{X-25}{3}\right) = 0'75 \;\rightarrow\; Z = 0'67 \;\rightarrow\; \frac{X-25}{3} = 0'67 \;\Rightarrow\; X = 27'01$$

$$\text{Luego } \; Q_3 = 27'01$$

Problema 15

En una población de 1000 individuos se establecen dos grupos, A y B. Los cocientes intelectuales de ambos grupos se distribuyen según $N(100,30)$ y $N(120,35)$, respectivamente. Elegido, aleatoria e independientemente un individuo de cada grupo, se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el individuo del grupo A tenga un cociente intelectual superior a 90?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el individuo del grupo B tenga un cociente intelectual superior a 90?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos tengan un cociente intelectual superior a 90?

a) $p(X > 90) = p\left(Z > \dfrac{90-100}{30}\right) = p(Z > -0'33) = p(Z < 0'33) = 0'6293$

b) $p(Y > 90) = p\left(Z > \dfrac{90-120}{35}\right) = p(Z > -0'85) = p(Z < 0'85) = 0'8023$

c) $p = p(X > 90) \cdot p(Y > 90) = 0'6293 \cdot 0'8023 = 0'5048$

Problema 16

En la asignatura de psicología evolutiva se ha podido determinar que las calificaciones se distribuyen según una $N(5'5, 1'5)$.

a) ¿Entre qué valores en torno a la media se encontrará el 95% de los alumnos?

b) ¿Entre qué valores en torno a la media se encontrará el 50% de los alumnos?

c) ¿A partir de qué nota se encontrará el 10% de los alumnos mejor calificados?

a) Calculamos el valor de Z que deja a la izquierda el 97'5% del área. Nos da 1'96.

$$1'96 = \frac{x-5'5}{1'5} \quad \to \quad x = 8'44$$

$8'44 - 5'5 = 2'94$. Por simetría calculamos el otro extremo: $5'5 - 2'94 = 2'56$

Por tanto el intervalo pedido es

$$[2'56, 8'44]$$

b) Haciendo lo mismo que en apartado anterior se obtiene $[4'495, 6'505]$

c) $p\left(Z \leq \dfrac{X-5'5}{1'5}\right) = 0'90 \quad \to \quad \dfrac{X-5'5}{1'5} = 1'28 \quad \to \quad X = 7'42$

Luego, a partir de $7'42$ se encuentra el 10% de los alumnos mejor calificados.

Problema 17

Se sabe que dos poblaciones distintas, X e Y, se distribuyen normalmente con media 0. Además $p(X \geq 2) = p(Y \geq 3) = 0'1587$. Se pide que calcules sus respectivas varianzas. Indicaciones: Si Z es normal con parámetros 0, 1, entonces $P(Z \leq 1) = 0'8413$.

Se sabe que las variables aleatorias X e Y se distribuyen según una normal $N(0, \sigma_1)$ y $N(0, \sigma_2)$ respectivamente.

Como $p(X \geq 2) = 1 - p(X \leq 2) = 0'1587 \quad \to \quad p(X \leq 2) \leq 0'8413$ y $p(Y \leq 3) = 0'8413$

Como para una distribución normal Z, $N(0,1)$ se cumple que $p(Z \le 1) = 0'8413$ esto significa que 2 y 3 son, respectivamente, las desviaciones típicas de las variables X e Y, ya que:

$$\frac{2-0}{\sigma} = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma = 2 \\ \sigma^2 = 4 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \frac{3-0}{\sigma} = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma = 3 \\ \sigma^2 = 9 \end{cases}$$

Problema 18

Se supone que los resultados de un examen siguen una distribución normal con media de 78 y varianza 36. Se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que se presente al examen obtenga una calificación superior a 72?

b) Suponga que los estudiantes que se encuentran en el 10% de la parte superior de la distribución se les asigna una calificación A (A significa excelente). ¿Cuál es la puntuación mínima que debe alcanzar un estudiante para recibir la calificación A?

c) Calcular la proporción de estudiantes que tienen puntuaciones que exceden por lo menos en 5 puntos la puntuación que marca la frontera entre Apto y el No-Apto (son declarados No-Aptos el 25% de los estudiantes que obtuvieron las puntuaciones más bajas).

NOTA: Si Z es una variable $N(0,1)$ se sabe que:

$$\mathbf{p(Z > 1) \approx 0'16 \ ; \ p(Z > 0'76) \approx 0'25 \ \ y \ \ p(Z < 1'28) = 0'9}$$

a) Es un distribución $N(78,6)$

$$p(X \ge 72) = p\left(Z \ge \frac{72-78}{6}\right) = p(Z \ge -1) = p(Z \le 1) = 1 - p(Z \ge 1) = 1 - 0'16 = 0'84$$

b) $p\left(Z \ge \frac{x-78}{6}\right) = 0'1 \quad$ ó $\quad p\left(Z \le \frac{x-78}{6}\right) = 0'9 \quad \to \quad \frac{x-78}{6} = 1'28 \quad \Rightarrow \quad x = 85'68$

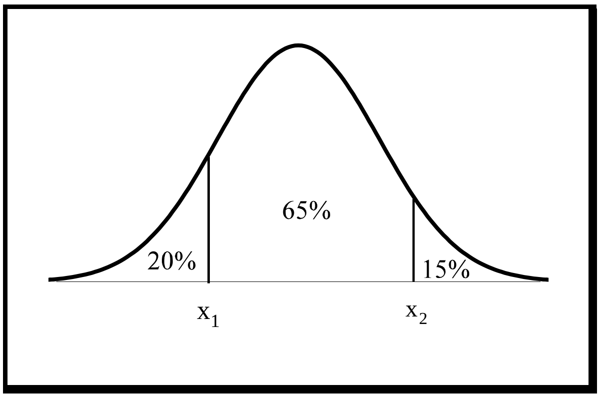
c) $p\left(Z \le \frac{x-78}{6}\right) = 0'25 \qquad$ Como $\quad p(Z > 0'76) = 0'25$, por simetría obtenemos:

$$\frac{x.-78}{6} = -0'76 \quad \to \quad x = 73'44 \quad \Rightarrow \quad x' = 73'44 + 5 = 78'44 \cong 50\%$$

Problema 19

Tras un test de cultura general se observa que las puntuaciones obtenidas siguen una distribución N(65,18). Se desea clasificar a los examinados en 3 grupos (de baja cultura general, de cultura general aceptable, de excelente cultura general) de modo que haya en el primero un 20% de la población, un 65% en el segundo y un 15% en tercero. ¿Cuáles han de ser las puntuaciones que marcan el paso de un grupo al otro?

Resolveremos el problema para una distribución N(0,1) y, después, destipificaremos los valores obtenidos.



$$p\left(Z \le \frac{x_1 - 65}{18}\right) = 0'2$$

$$p\left(Z \ge \frac{x_2 - 65}{18}\right) = 0'15$$

$$p\left(Z \le \frac{x_1 - 65}{18}\right) = 0'2 \;\rightarrow\; p\left(Z \ge -\frac{x_1 - 65}{18}\right) = 0'2 \;\rightarrow\; 1 - p\left(Z \le -\frac{x_1 - 65}{18}\right) = 0'2$$

$$p\left(Z \le -\frac{x_1 - 65}{18}\right) = 0'8 \;\rightarrow\; -\frac{x_1 - 65}{18} = 0'84 \;\Rightarrow\; x_1 = 49'88$$

$$p\left(Z \ge \frac{x_2 - 65}{18}\right) = 0'15 \;\rightarrow\; 1 - p\left(Z \le \frac{x_2 - 65}{18}\right) = 0'15 \;\rightarrow\; p\left(Z \le \frac{x_2 - 65}{18}\right) = 0'85$$

$$\frac{x_2 - 65}{18} = 1'04 \;\Rightarrow\; x_2 = 83'72$$

Puesto que lo razonable es marcar los límites con puntuaciones enteras, pondremos:

Baja cultura general: $\longrightarrow$ puntuaciones hasta 49 puntos inclusive

Cultura general aceptable: $\longrightarrow$ entre 50 y 83 puntos inclusive

Excelente cultura general: $\longrightarrow$ desde 84 en adelante

Problema 20

La demanda de una determinada revista en un kiosco tienen de media 190 y una desviación típica de 25. ¿Cuántos ejemplares de la revista deben encargar para atender el 80% de los clientes?

Si el kiosquero encarga 190 revistas, tiene una probabilidad del 50% de atender a todos los clientes.

Vamos a averiguar cuántas revistas ha de encargar para tener una probabilidad del 80% (o de 0'8) de atender a la totalidad de la demanda:

$$p\left(Z \le \frac{x-190}{25}\right) = 0'8 \quad \rightarrow \quad \frac{x-190}{25} = 0'84 \quad \Rightarrow \quad x = 211$$

Es decir, si el kiosquero compra 211 revistas tiene una probabilidad de 0'8 (80%) de atender a toda la demanda. Podríamos preguntarnos cuántas ha de adquirir para tener una probabilidad de por ejemplo 0'95 de atender al 80% de la demanda. Para ello, calcularíamos X tal que $p(X < x_1) = 0'95$ y hallaríamos el 80% del x_1 así obtenido.

Problema 21

Varios test de inteligencia dieron una puntuación que sigue una ley normal con media 100 y desviación típica 15.

a) Determina el porcentaje de población que obtendría un coeficiente entre 95 y 110.

b) ¿Qué intervalo centrado en 100 contiene al 50% de la población?

c) En una población de 2500 individuos ¿cuántos individuos se espera que tengan un coeficiente superior a 125?

a) $p(95 < X < 110) = p\left(\frac{95-100}{15} < Z \frac{110-100}{15}\right) = p(-0'33 < Z < 0'67) =$

$$p(Z < 0'67) - p(Z < -0'33) = p(Z < 0'67) - p(Z > 0'33) = p(Z < 0'67) - \left[1 - p(Z < 0'33)\right] =$$

$0'7486 - 1 + 0'6293 = 0'3779 \quad \rightarrow$ El 37'79% de la población cumple la condición requerida.

b) $p(100 - r \le X \le 100 + r)$

$$p\left(\frac{100-r-100}{15} \le Z \le \frac{100+r-100}{15}\right) = p\left(\frac{-r}{15} \le Z \le \frac{r}{15}\right) = p\left(Z \le \frac{r}{15}\right) - p\left(Z \le \frac{-r}{15}\right) =$$

$$p\left(Z \le \frac{r}{15}\right) - p\left(Z \ge \frac{r}{15}\right) = p\left(Z \le \frac{r}{15}\right) - \left[1 - p\left(Z \le \frac{r}{15}\right)\right] = 2 \cdot p\left(Z \le \frac{r}{15}\right) - 1$$

$$2 \cdot p\left(Z \le \frac{r}{15}\right) - 1 = 0'5 \quad \rightarrow \quad p\left(Z \le \frac{r}{15}\right) = 0'75$$

$$\frac{r}{15}=0'67 \quad\rightarrow\quad r=10'05 \quad\rightarrow\quad 100-10'05=89'95 \quad y \quad 100+10'05=110'05$$

El intervalo pedido es, pues, (90, 110).

c) $p(X>125)=p\left(Z>\frac{125-100}{15}\right)=p(Z>1'67)=1-0'9525=0'0475$

$$2500\cdot 0'0475=118'75\cong 119$$

Habrá unos 119 individuos con un C.I. superior a 125.

Problema 22

El porcentaje de españoles con estudios medios es del 35%. Elegidos 8 al azar, calcular la probabilidad de que entre 3 y 5 (ambos inclusive) tengan estudios medios, aplicando:

a) La distribución binomial.

b) La distribución normal como aproximación de la binomial.

a) Recordando que en una distribución binomial:

$$B(8,0'35) \quad\rightarrow\quad p(X=k)=\binom{8}{k}\cdot 0'35^{k}\cdot 0'65^{8-k}$$

tenemos:

$$p(3\le X\le 5)=p(X=3)+p(X=4)+p(X=5)=$$

$$\binom{8}{3}\cdot 0'35^{3}\cdot 0'65^{5}+\binom{8}{4}\cdot 0'35^{4}\cdot 0'65^{4}+\binom{8}{5}\cdot 0'35^{5}\cdot 0'65^{3}=0'2786+0'1875+0'0808=0'5469$$

b) $X \quad\rightarrow\quad B(8,0'35) \quad\rightarrow\quad X' \begin{cases} 8\cdot 0'35=2'8 \\ 8\cdot 0'35\cdot 0'65=1'82 \quad\rightarrow\quad N(2'8,1'35) \quad\rightarrow\quad Z \;\; N(0,1) \\ \sqrt{1'82}=1'35 \end{cases}$

$$p(3\le X\le 5)=p(2'5<X'<5'5)=p\left(\frac{2'5-2'8}{1'35}<Z<\frac{5'5-2'8}{1'35}\right)=p(-0'22<Z<2)=$$

$$p(Z<2)-p(Z<-0'22)=p(Z<2)-p(Z>0'22)=p(Z<2)-\left[1-p(Z<0'22)\right]=$$

$$0'9772-(1-0'5871)=0'5643$$

La diferencia observada, no suficientemente pequeña, es debida a que la aproximación de la binomial a la normal no es buena, pues $n \cdot p = 8 \cdot 0'35 = 2'8$ es notablemente menor que 5, cota a partir de la cual se suele dar por buena la aproximación.

Problema 23

Un estudio ha mostrado que, en un cierto barrio, el 60% de los hogares tiene al menos dos televisores. Se elige al azar una muestra de 50 hogares en el citado barrio. Se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 20 de los citados hogares tenga cuando menos dos televisores?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que entre 30 y 40 hogares tengan cuando menos dos televisores?

Se trata de una distribución binomial $B(50, 0'6)$. $\begin{cases} n \cdot p = 50 \cdot 0'6 = 30 \\ n \cdot q = 50 \cdot 0'4 = 20 \end{cases}$

Como $n{\cdot}p$ y $n{\cdot}q$ son mayores que 5, podemos aproximar esta binomial a una normal tal que:

$$\begin{cases} \mu = n \cdot p = 30 \\ \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = 3'464 \end{cases} \quad \rightarrow \quad X \quad B(50, 0'6) \quad \rightarrow \quad X' \quad N(30, 3'464) \quad \rightarrow \quad Z \quad N(0,1)$$

a) $p(X \geq 20) = p(X' \geq 19'5) = p\left(Z \geq \dfrac{19'5 - 30}{3'464}\right) = p(Z \geq -3'03) = p(Z \leq 3'03) = 0'9988$

b) $p(30 \leq X \leq 40) = p(29'5 \leq X' \leq 40'5) = p\left(\dfrac{29'5 - 30}{3'464} \leq Z \leq \dfrac{40'5 - 30}{3'464}\right) = p(-0'14 \leq Z \leq 3'03) =$

$p(Z \leq 3'03) - p(Z \leq -0'14) = p(Z \leq 3'03) - p(Z \geq 0'14 = p(Z \leq 3'03) - \left[1 - p(Z \leq 0'14\right] =$

$0'9988 - (1 - 0'5557) = 0'5545$

Problema 24

El peso de los adultos de una población numerosa se distribuye normalmente con media 65 kg. y desviación típica 3 kg. Se eligen dos individuos al azar. Calculando las correspondientes probabilidades, justifica qué es más probable:

a) Que cada uno de los individuos tenga un peso comprendido entre 63'5 y 66'5 kg.

b) Que uno de ellos tenga un peso comprendido entre 62 y 68 kg. y el otro tenga un peso no comprendido entre 62 y 68 kg.

a) El peso de un individuo de la población indicada se distribuye según una normal $N(65,3)$. Puesto que elegimos dos al azar, sus pesos (x e y) siguen ambos esta distribución, siendo además independientes.

$$p(63'5 < X < 66'5 \text{ y } 63'5 < Y < 66'5) = p(63'5 < X < 66'5) \cdot p(63'5 < Y < 66'5) =$$

Empezamos por calcular la probabilidad $p(63'5 < X < 66'5)$ tipificando los extremos y pasando así a la normal $N(0,1)$.

$$p(63'5 < X < 66'5) = p\left(\frac{63'5 - 65}{3} < Z < \frac{66'5 - 65}{3}\right) = p(-0'5 < Z < 0'5) =$$

$$p(Z < 0'5) - p(Z < -0'5) = p(Z < 0'5) - p(Z > 0'5) = p(Z < 0'5) - \left[1 - p(Z < 0'5)\right] =$$

$$2 \cdot p(Z < 0'5) - 1 = 2 \cdot 0'6915 - 1 = 0'3830$$

$$p(\text{ambos tengan peso entre } 63'5 \text{ y } 66'5) = 0'3830 \cdot 0'3830 = 0'1467$$

b) $p(62 < X < 68) = p\left(\frac{62 - 65}{3} < Z < \frac{68 - 65}{3}\right) = p(-1 < Z < 1) = p(Z < 1) - p(Z < -1) =$

$$p(Z < 1) - p(Z > 1) = p(Z < 1) - \left[1 - p(Z < 1)\right] = 2 \cdot p(Z < 1) - 1 = 2 \cdot 0'8413 - 1 = 0'6826$$

$$p\left[\text{no } (62 < X < 68)\right] = 1 - 0'6826 = 0'3174$$

$$p(\text{uno tenga peso entre } 62 \text{ y } 68 \text{ y el otro no}) = 0'6826 \cdot 0'3174 + 0'3174 \cdot 0'6826 = 0'4333$$

Problema 25

El tiempo necesario para que una ambulancia llegue a un centro deportivo se distribuye según una variable normal de media 17 minutos y desviación típica 3 minutos.

a) Calcular la probabilidad de que el tiempo de llegada esté comprendido entre 13 y 21 minutos.

b) ¿Para qué valor de t, la probabilidad de que la ambulancia emplee más de t minutos en llegar es el 5%?

a) $p(13 \le X \le 21) = p\left(\frac{13 - 17}{3} \le Z \le \frac{21 - 17}{3}\right) = p(-1'33 \le Z \le 1'33) = 2 \cdot p(0 \le Z \le 1'33) =$

$$2 \cdot \left[p(Z \le 1'33) - p(0)\right] = 2 \cdot (0'9082 - 0'5) = 0'8164$$

b) $p\left(Z \ge \frac{t - 17}{3}\right) = 0'05 \quad \rightarrow \quad p\left(Z \le \frac{t - 17}{3}\right) = 0'95 \quad \rightarrow \quad \frac{t - 17}{3} = 1'65 \quad \Rightarrow \quad t = 21'95$

El tiempo para el que la probabilidad de espera es menor que 0'05 es, aproximadamente 22 minutos.

Problema 26

En un gran estadio deportivo se quiere instalar focos para iluminar el campo de juego. El suministrador asegura que el tiempo de vida de los focos es, aproximadamente, normal con media de 40 h y desviación típica 4 horas.

a) Escogiendo un foco al azar, ¿cuál es la probabilidad de que luzca por lo menos 30 horas?

b) Si se compran 1500 focos, ¿cuántos pueden esperarse que luzcan por lo menos 30 horas?

c) Si se comprueba que sólo 1400 focos lucen durante más de 30 horas ¿qué puede deducirse?

a) $p(X \geq 30) = p\left(Z \geq \frac{30-40}{4}\right) = p(Z \geq -2'5) = p(\leq 2'5) = 0'9938$

b) $1500 \cdot 0'9938 = 1490'7 \cong 1491$

c) Hay que considerar que los datos aportados por el suministrador son falsos. Veamos:

$$\frac{1400}{1500} = 0'9333 \qquad p(Z < z_o) = 0'9333 \;\rightarrow\; z_o = 1'50 \;\rightarrow\; p(Z \geq -1'50) = 0'9333$$

$$p(Z \geq -1'50) = 0'9333 \;\rightarrow\; \mu - 1'50 \cdot 4 = 30 \;\rightarrow\; \mu = 36$$

Es decir, si damos por buena la desviación típica, la media de la población más acorde con los datos experimentales es de 36 horas, y no las 40 que se nos dijo.

Problema 27

Para aprobar unas oposiciones se necesita obtener 100 puntos, o más, en una prueba. Por experiencias anteriores, se sabe que la distribución de los puntos obtenidos por los opositores es una normal de media 110 puntos y desviación típica 15.

a) ¿Qué probabilidad hay de que un opositor apruebe?

b) Si sabemos que hay 1000 opositores y sólo 300 plazas, ¿cuántos puntos se deberá exigir para ajustar el número de plazas al número de opositores aprobados?

a) $p(X \geq 100) = p\left(Z \geq \frac{100-110}{15}\right) = p(Z \geq -0'67) = p(Z \leq 0'67) = 0'7486$

b) $p(Z \geq z_o) = \dfrac{300}{1000} = 0'3 \;\rightarrow\; p(Z \leq z_o) = 0'7 \;\rightarrow\; z_o = 0'52 \;\rightarrow\; 0'52 = \dfrac{x_o - 110}{15}$

$$x_o = 15 \cdot 0'52 + 110 \cong 118 \text{ puntos}$$

Habría que aprobar con un mínimo de 118 puntos para que el número de aprobados se ajustara a las 300 plazas disponibles, es decir, que hubiera el 30 % de aprobados.

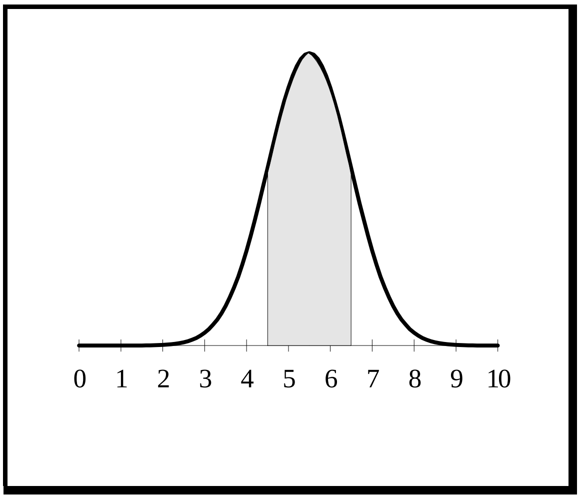
Problema 28

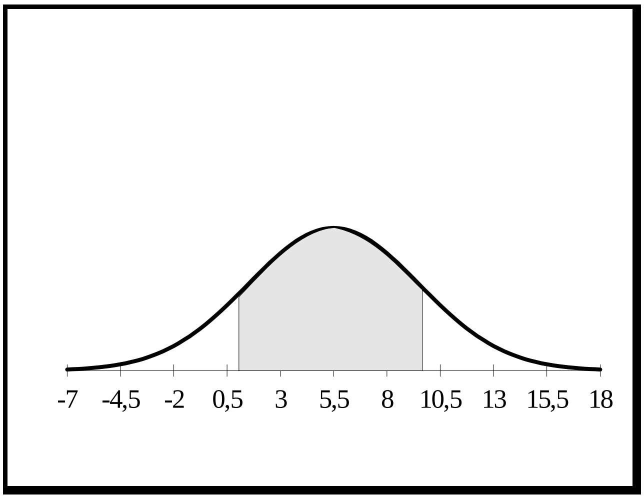
Las calificaciones en un examen de Matemáticas II en dos grupos A y B de COU se ajustan ambos a una distribución normal. En el grupo A se ha obtenido una media de 5'5 y una desviación típica de 1. En el grupo B la media es, también, de 5'5 pero la desviación típica es de 4.

a) Hacer las gráficas aproximadas de cada una de estas distribuciones justificando en qué se fundamentan.

b) Suponiendo que en otro grupo C la media fuese 5'5 y la desviación típica cero ¿qué se puede afirmar de la calificación de cada alumno?

a)





En el intervalo $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ debe de estar el 99'74% de la distribución, por tanto:

$$\text{Para la } 1^{a} \;\rightarrow\; (5'5 - 3, 5'5 + 3) = (2'5, 8'5)$$

$$\text{Para la } 2^{a} \;\rightarrow\; (5'5 - 12, 5'5 + 12) = (-6'5, 17'5)$$

b) Todos los alumnos tienen la misma calificación: 5'5.

Problema 29

Las calificaciones de los estudiantes de un curso siguen una distribución normal. Si las puntuaciones tipificadas de dos estudiantes fueron $0'8$ y $-0'4$ y sus notas reales fueron 88 y 64 puntos, ¿cuál es la media y la desviación típica de las puntuaciones del examen?

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{88-\mu}{\sigma}=0'8\\ \dfrac{64-\mu}{\sigma}=-0'4\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}88-\mu=0'8\sigma\\ 64-\mu=-0'4\sigma\end{array}\right\} \Rightarrow \mu=72 \quad \sigma=20$$

Como se trata de una distribución normal será $N(72,20)$

Problema 30

Una industria produce piezas con diámetros distribuidos según una normal de media 0'75 cm. y desviación típica 0'002 cm.

a) Determina los cuartiles de la población de diámetros.

b) Supongamos que el control de calidad exige que las piezas tengan un diámetro entre 0'745 y 0'755 cm. Cualquier pieza fuera de ese rango es rechazada. Si se examina una muestra de 1000 piezas, ¿cuántas es de esperar que sean rechazadas?

a) El segundo cuartil q_2 es la mediana, que coincide con la media, luego $q_2=0'75$. El primer y tercer cuartil son simétricos respecto a 0'75. Como $p(X\leq q_3)=0'75$, consultando las tablas y por interpolación:

$$\frac{q_3-0'75}{0'002}=0'6744 \quad \Rightarrow \quad q_3=0'7513 \quad y \quad q_1=0'75-0'674\cdot 0'0002\cong 0'7487$$

b) $p(0'745\leq X\leq 0'755)=p\left(\dfrac{0'745-0'75}{0'002}\leq Z\leq \dfrac{0'755-0'75}{0'002}\right)=p(-2'5\leq Z\leq 2'5)=$

$$p(Z\leq 2'5)-p(Z\leq -2'5)=0'9938-0'0062=0'9876$$

La probabilidad de que una pieza sea rechazada es: $1-0'9876=0'0124$

Y se rechazarán $1000\cdot 0'0124\cong 12$ piezas

Problema 31

Un test de sensibilidad musical da resultados que se distribuyen N(65,18). Se quiere hacer un baremo por el cual, a cada persona, junto con la puntuación obtenida, se le asigna uno de los siguientes comentarios:
Duro de oído, poco sensible a la música, normal, sensible a la música, extraordinariamente dotado para la música, de modo que haya, respectivamente, en cada uno de los grupos, un 10 %, un 35 %, un 30 %, un 20 % y un 5 % del total de individuos observados. ¿En qué puntuaciones pondrías los límites entre los distintos grupos?

El valor de Z bajo el cual hay un 10 % de la población es opuesto a aquél por encima del cual hay un 10 %, es decir, por debajo del cual hay un 90 %.

$$p\left(Z \leq \frac{x-65}{18}\right) = 0'1 \quad \rightarrow \quad p\left(Z \geq -\frac{x-65}{18}\right) = 0'1 \quad \rightarrow \quad 1 - p\left(Z \leq -\frac{x-65}{18}\right) = 0'1$$

$$p\left(Z \leq -\frac{x-65}{18}\right) = 0'9 \quad \rightarrow \quad -\frac{x-65}{18} = 1'28 \quad \Rightarrow \quad x = 41'96$$

Análogamente, el valor correspondiente al 45 % (10%+35%) lo obtenemos buscando en la tabla una probabilidad lo más próxima posible al 55%, es decir, a 0'55.

$$p\left(Z \leq \frac{x-65}{18}\right) = 0'45 \quad \rightarrow \quad p\left(Z \geq -\frac{x-65}{18}\right) = 0'45 \quad \rightarrow \quad 1 - p\left(Z \leq -\frac{x-65}{18}\right) = 0'45$$

$$p\left(Z \leq -\frac{x-65}{18}\right) = 0'55 \quad \rightarrow \quad -\frac{x-65}{18} = 0'13 \quad \Rightarrow \quad x = 62'66$$

El valor correspondiente al 30% (10%+35%+30%) será:

$$p\left(Z \leq \frac{x-65}{18}\right) = 0'75 \quad \rightarrow \quad \frac{x-65}{18} = 0'67 \quad \Rightarrow \quad 77'06$$

El valor correspondiente al 20% (10%+35%+30%+20%) será:

$$p\left(Z \leq \frac{x-65}{18}\right) = 0'95 \quad \rightarrow \quad \frac{x-65}{18} = 1'65 \quad \Rightarrow \quad 94'7$$

El baremo lo realizamos "destipificando" los valores obtenidos para z:

$$\text{BAREMO}\begin{cases}\text{Hasta } 42 & \longrightarrow \text{ duro de oído}\\ \text{de } 42 \text{ a } 62 & \longrightarrow \text{ poco sensible}\\ \text{de } 63 \text{ a } 77 & \longrightarrow \text{ normal}\\ \text{de } 77 \text{ a } 94 & \longrightarrow \text{ sensible}\\ \text{más de } 95 & \longrightarrow \text{ extraordinario}\end{cases}$$

Problema 32

a) Si lanzamos un dado 1000 veces, ¿cuál es la probabilidad de que el número de cincos obtenidos sea menor que 100?

b) Si lanzamos una moneda 400 veces, ¿cuál es la probabilidad de que el número de caras difiera de 200 en más de 10? ¿Y de que difiera en más de 20?

a) Como $n \cdot p = 1000 \cdot \frac{1}{6} = 166'66$ y $n \cdot q = 1000 \cdot \frac{5}{6} = 833'33$ tenemos:

$$X \text{ es } B(1000, 0'1667) \quad \to \quad X' \text{ es } N(166'7, 11'79)$$

$$p(X < 100) = p(X < 99'5) = p\left(Z < \frac{99'5 - 166'7}{11'79}\right) = p(Z < -5'70) = p(Z > 5'70) =$$

$$1 - p(Z < 5'70) = 1 - 1 = 0$$

b) $X \text{ es } B(400, 0'5) \quad \to \quad X' \text{ es } N(200, 10)$

$$p(X < 190 \text{ ó } X > 210) = 2 \cdot p(X' \le 189'5) = 2 \cdot p(Z \le -1'05) = 2 \cdot 0'1469 = 0'2938$$

$$p(X < 180 \text{ ó } X > 220) = 2 \cdot p(X' \le 179'5) = 2 \cdot p(Z \le -2'05) = 0'0404$$

Problema 33

La posibilidad de que una persona, su padre y su abuelo paterno tengan el mismo cumpleaños es $7'5 \cdot 10^{-6}$. En una ciudad con dos millones de habitantes:

a) ¿Cuántos habrá por término medio que presenten esta curiosa coincidencia?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya menos de 10?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que haya menos de 5?

a) X es $B(2.000.000, 7'5\cdot10^{-6}) \rightarrow \begin{cases} n\cdot p = 2.000.000\cdot 7'5\cdot 10^{-6} = 15 \\ n\cdot p\cdot q = 2.000.000\cdot 7'5\cdot 10^{-6}\cdot(1-7'5\cdot 10^{-6}) = 3'87 \end{cases}$

X' es $N(15, 3'87) \Rightarrow$ por término medio habrá 15.

b) $p(X<10) = p(X' \le 9'5) = p\left(Z \le \frac{9'5-15}{3'87}\right) = p(Z \le -1'42) = p(Z \ge 1'42) = 1 - p(Z \le 1'42) =$

$$1 - 0'9222 = 0'0778$$

c) $p(X<5) = p(X' \le 4'5) = p\left(Z \le \frac{4'5-15}{3'87}\right) = p(Z \le -2'71) = p(Z \ge 2'71) = 1 - p(Z \le 2'71) =$

$$1 - 0'9966 = 0'0034$$

Problema 34

El 11% de los billetes de lotería recibe algún tipo de premio aunque sea el reintegro. En una familia juegan 46 números. ¿Cuál es la probabilidad de obtener premio, al menos 10 de ellos?

$$X \text{ es } B(46,\ 0'11) \rightarrow \begin{cases} n\cdot p = 46\cdot 0'11 = 5'06 \\ n\cdot p\cdot q = 40\cdot 0'11\cdot 0'89 = 4'50 \end{cases} \rightarrow X' \text{ es } N(5'06, 2'12)$$

$$p(X \ge 10) = p(X' \ge 9'5) = p\left(Z \ge \frac{9'5-5'06}{2'12}\right) = p(Z \ge 2'09) = 1 - p(Z \le 2'09) = 1 - 0'9817 = 0'0183$$

Problema 35

Un examen tipo test tiene 50 preguntas y cada pregunta tres respuestas diferentes, sólo una de las cuales es correcta. Para aprobar, hace falta responder correctamente 25 preguntas, para un notable, 35, y para un sobresaliente, 45 preguntas. Un estudiante responde al azar. ¿Cuál es la probabilidad de aprobar? ¿Y de sacar un notable? ¿Y un sobresaliente?

$$X \text{ es } B(50,\ 0'333) \rightarrow \begin{cases} n\cdot p = 50\cdot 0'333 = 16'66 \\ n\cdot p\cdot q = 50\cdot 0'333\cdot 0'666 = 11'11 \end{cases} \rightarrow X' \text{ es } N(16'66, 3'33)$$

$$p(X \ge 25) = p(X' \ge 24'5) = p\left(Z \ge \frac{24'5-16'66}{3'33}\right) = p(Z \ge 2'35) = 0'0094 \cong 0'94\%$$

$$p(X \ge 35) = p(X' \ge 34'5) = p\left(Z \ge \frac{34'5-16'66}{3'33}\right) = p(Z \ge 5'36) = 1 - p(Z \le 5'36) = 1 - 1 = 0$$

La probabilidad de sacar notable o sobresaliente es cero.