

Función Exponencial

Crecimiento exponencial

Las amebas son seres unicelulares que se reproducen partiéndose en dos, fenómeno conocido como bipartición. La bipartición se produce más o menos rápido según las condiciones del medio en el que se encuentren.

Supongamos que inicialmente tenemos 20 amebas y que la bipartición se produce cada hora como se indica en la tabla adjunta.

t (en horas)	nº de Amebas
0	20
1	40
2	80
3	160
4	320
5	640

Este es uno de los muchos ejemplos que pueden darse de crecimiento de una población. La población podría ser de personas, animales, plantas, etc. En todos ellos la variable es el tiempo y la ley de crecimiento tendrá siempre la misma forma. Su expresión más frecuente es:

$$y = ka^t$$

donde “k” expresa la cantidad de unidades que hay en el instante inicial, “y” la cantidad que hay en cualquier instante y donde el crecimiento peculiar de cada población viene dado por el valor de la constante $a > 0$. El exponente t indicará la unidad de tiempo tenida en cuenta..

Ejemplo: La población de conejos es muy prolífica. Si disponen de comida suficiente y no hay depredadores que les puedan comer pueden llegar a doblar su número cada mes. Supongamos que dejamos 20 conejos en un ambiente favorable para ellos:

- ¿Cuántos conejos hay en el instante inicial? ¿Cuántos habrá al cabo de un año? ¿Y después de 5 años?
- Esboza la gráfica que muestra la evolución de la población de conejos durante el primer año.

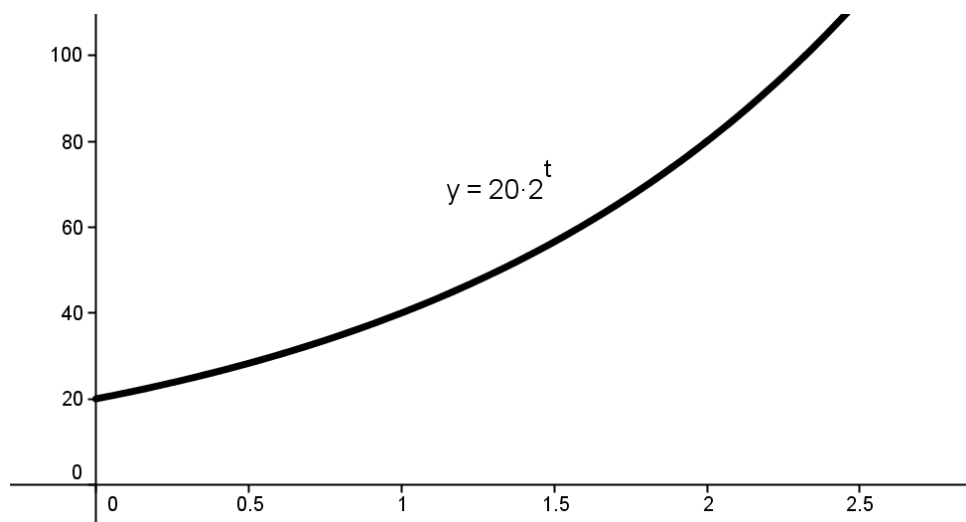
Solución:

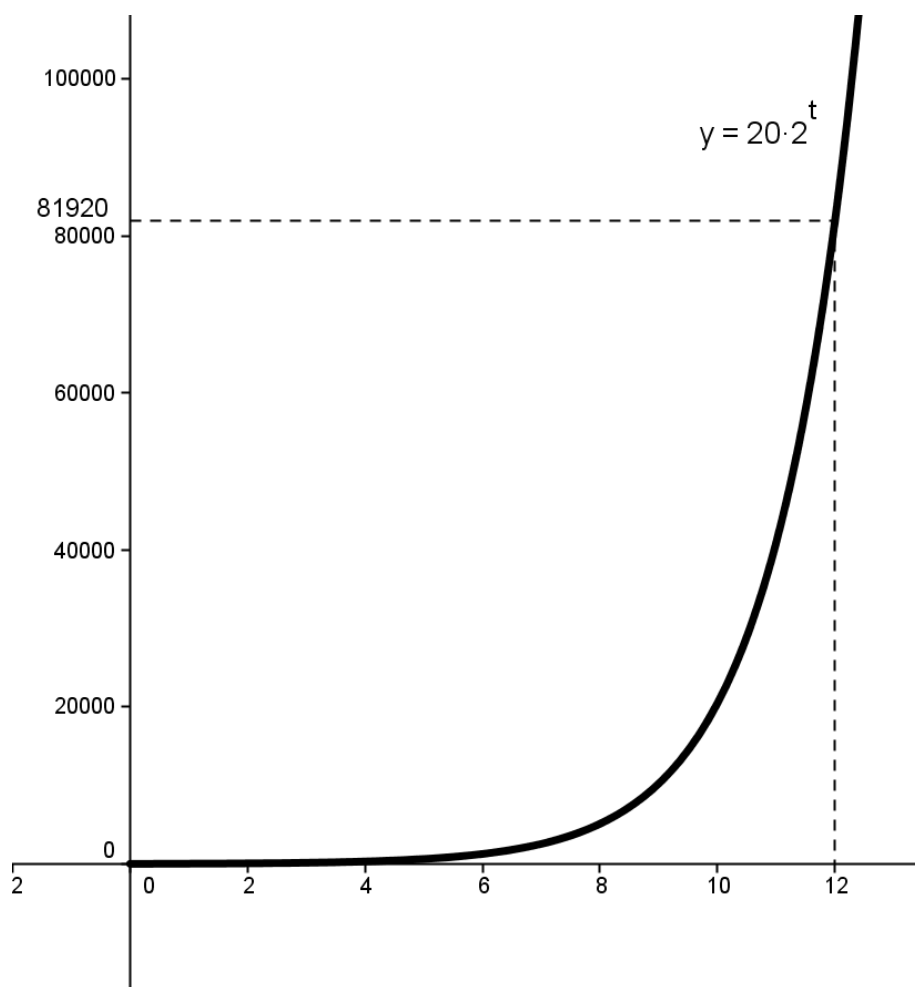
- a) En el instante inicial habrá $y = k \cdot a^t$ $y = 20 \cdot 2^0 = 20$.

Al cabo de un año (12 meses) habrá $y = k \cdot a^t$ $y = 20 \cdot 2^{12} = 81920$

Al cabo de 5 años (60 meses) habrá $y = k \cdot a^t$ $P = 20 \cdot 2^{60} = 2'305843 \cdot 10^{19}$

- b)





Interés Simple

Cuando una persona deposita en un Banco o Caja de Ahorros una suma de dinero, a la que llamaremos **capital** C_0 , el Banco le entrega al cabo de un año cierto porcentaje de la suma depositada, que se denomina **interés** i . Ahora bien, el depositante puede hacer dos cosas distintas con las cantidades que percibe en concepto de interés:

- Retirarlas, para disfrutar de ellas de manera inmediata. En estas condiciones, el capital colocado en el Banco continúa siendo el mismo.
- Dejarlas ingresadas en el Banco, incorporándolas al capital, que de esta manera aumenta.

En el primer caso, decimos que se trata de una situación de **interés simple**. En el segundo caso, se dice que el **interés es compuesto**. Si C es el capital invertido, r el rédito y t el tiempo en años, los intereses producidos i vienen dados por:

$$i = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$$

Si el tiempo no viene dado en años hay que pasarlo a años: $t \text{ meses} = \frac{t}{12} \text{ años}$ $t \text{ días} = \frac{t}{365} \text{ años}$

Ejemplo: Calcular el tiempo que debe estar invertido un capital de 13000 € al 5% de interés simple anual para obtener 3900 € de intereses.

Solución:

$$3900 = \frac{13000 \cdot 5 \cdot t}{100} \rightarrow t = \frac{3900 \cdot 100}{13000 \cdot 5} = 6 \text{ años}$$

Interés Compuesto

A partir de ahora nos va a ser más cómodo expresar el rédito, no en tanto por ciento como hemos venido haciéndolo hasta ahora, sino en tanto por uno. El tanto por uno, que designaremos por i , es el interés producido por un solo euro durante un año, por consiguiente $i = \frac{r}{100}$ (Si el rédito o tanto por cien es, por ejemplo, $r = 7\%$ anual, entonces $i = \frac{7}{100} = 0'07$).

Si un capital C_0 se coloca en un Banco, a un rédito i (tanto por uno), y **al cabo de un año no se retiran los intereses producidos**, estos se acumulan al capital y lo hacen crecer de año en año.

Al cabo del primer año el capital final es $C(1) = C_0 + C_0 \cdot i = C_0 \cdot (1 + i)$

Al cabo del segundo año el capital final es $C(2) = C(1) + C(1) \cdot i = C(1) \cdot (1 + i) = C_0 \cdot (1 + i)^2$

Al cabo de t años, el capital alcanza el valor: $C(t) = C_0 \cdot (1 + i)^t$

Si el capital inicial C_0 produce i euros en un año, en $\frac{1}{n}$ de año producirá $\frac{i}{n}$, es decir $\frac{i}{n}$ es el tanto por uno cuando los intereses se acumulan cada $\frac{1}{n}$ de año, y como hay n periodos de capitalización $\frac{1}{n}$ en un año, en t años habrá $n \cdot t$ veces $\frac{1}{n}$ de año. Por tanto, el capital C_0 al cabo de t años se convierte en

$$C(t) = C_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt}$$

En esta fórmula $C(t)$ es el capital final, C_0 el capital inicial, i el interés anual, n los periodos de capitalización y t el número de periodos. Si $n = 12$, resulta la fórmula del interés compuesto cuando los intereses se acumulan al capital cada mes. Si $n = 360$, resulta la fórmula del interés compuesto cuando los intereses se acumulan al capital cada día, etc.

Ejemplo: ¿Cuánto producen 1000 euros a un interés compuesto del 20% anual en un año?

- a) Cuando el periodo de capitalización es 1 año.
- b) Cuando el periodo de capitalización es 1 mes.
- c) Cuando el periodo de capitalización es 1 día.
- d) Cuando el periodo de capitalización es trimestral.

Solución:

$$a) C = C_o \left(1 + \frac{i}{1}\right)^{1 \cdot t} = 1000(1 + 0'2)^1 = 1200 \text{ €}$$

$$b) C = C_o \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12 \cdot t} = 1000 \left(1 + \frac{0'2}{12}\right)^{12 \cdot 1} = 1219'39 \text{ €}$$

$$c) C = C_o \left(1 + \frac{i}{365}\right)^{365 \cdot t} = 1000 \left(1 + \frac{0'2}{365}\right)^{365 \cdot 1} = 1221'34 \text{ €}$$

$$d) C = C_o \left(1 + \frac{i}{4}\right)^{4 \cdot t} = 1000 \left(1 + \frac{0'2}{4}\right)^{4 \cdot 1} = 1215'50 \text{ €}$$

Ejemplo: Una empresa invierte en un banco 1000 € durante 10 años al 6% anual. Calcular los intereses producidos si la inversión es a interés compuesto y la capitalización es semestral.

Solución:

$$C = C_o \left(1 + \frac{i}{1}\right)^{1 \cdot t} = 1000 \left(1 + \frac{0'06}{2}\right)^{2 \cdot 10} = 1806'11 \text{ €} \quad 1806'11 - 1000 = 806'11 \text{ €}$$

Ejemplo: Una empresa invierte en un banco 21000 € durante 4 años al 4% anual. Calcular cuánto de devolverán al final del periodo si la inversión es a interés compuesto.

Sol: 24567'029 €

Ejemplo: Una empresa invierte en un banco 97000 € durante 10 años al 1% anual. Calcular los intereses producidos si la inversión es a interés compuesto.

Sol: 10148'34 €

Ejemplo: Hallar el % anual de interés compuesto al que presté durante 4 años un capital de 48000 € si me pagaron de intereses 10344'3 €.

Sol: 5 %

Ejemplo: Una empresa invierte en un banco 88000 € durante 9 años al 9 % anual. Calcular los intereses producidos si la inversión es a interés compuesto y la capitalización es mensual.

Sol: 109218'92 €

El número e

Si el número π es el número más importante en la geometría, el número e es el más importante en el cálculo. Los dos son números irracionales, es decir, no se pueden expresar como cocientes de números enteros, por lo que tienen infinitas cifras decimales.

El número “e” es el límite de la función $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ cuando $x \rightarrow \infty$. Su valor es, como se observa en la tabla adjunta:

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 2'718281828$$

x	$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
1	2
10	2'5937
10^3	2'7169
10^6	2'718280
10^9	2'718281

Tanto el número π como el número e son números trascendentes, es decir, no son raíces de una ecuación polinómica con coeficientes enteros.

La fórmula más famosa en la que aparece el número e es $e^{\pi i} + 1 = 0$ conocida con el nombre de fórmula de Euler, donde $i = \sqrt{-1}$. Esta ecuación relaciona las cinco constantes más importantes de las matemáticas e, π , i, 1 y 0. También usa tres operaciones importantes de las matemáticas: adición, producto y la potenciación.

Interés continuo

Cuando el número de partes tiende a infinito, el interés se llama continuo, y se tiene:

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} C_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt} = C_0 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt} = C_0 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{i}}\right)^{nt} = C_0 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{i}}\right)^{\frac{n}{i} \cdot it}$$

Haciendo el cambio $\frac{n}{i} = a$ resulta: $C = C_0 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a}\right)^{ait} = C_0 \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a}\right)^a\right)^{it} = C_0 \cdot e^{it}$

$$C = C_0 \cdot e^{it}$$

Ejemplo: Calcular el capital de una empresa que invierte en un banco 1000 € durante 1 año a interés continuo del 20%.

Solución:

$$C = C_0 e^{it} = 1000 e^{0'2 \cdot 1} = 1221'40 \text{ €}$$

El interés continuo es, por tanto, el de máxima producción. ¿Habías imaginado alguna vez que vuestros ahorros estaban bajo el control del número e?

Decrecimiento exponencial

Desintegración radiactiva

Pero, si únicamente estudiásemos los crecimientos, nuestra actividad estaría incompleta. Los elementos radiactivos como el uranio, se desintegran transformándose en otras sustancias y lo hacen con mayor o menor rapidez según de la sustancia de que se trate. Se ha observado que el tiempo en que determinada sustancia se reduce a la mitad, llamado *vida media*, es una constante característica de ella e independiente de la cantidad que haya.

Algunos átomos pesados son inestables y se desintegran espontáneamente emitiendo radiaciones. Cuando lo hacen, se transforman en otros átomos más ligeros que también pueden ser radiactivos. Este proceso se repite hasta que se transforman en átomos estables.

Cuando se tiene una muestra de un elemento radiactivo, la fracción de átomos que se desintegra en la unidad de tiempo es una característica del elemento, independiente de todas las condiciones físicas y químicas a que esté sometido. La ley de Rutherford sobre la desintegración radiactiva dice que el número de átomos de un elemento radiactivo transformados en un tiempo determinado es proporcional al número de átomos de ese elemento que estén presentes en la sustancia. La fórmula que describe la desintegración es de la forma:

$$N(t) = N_0 e^{-kt}$$

donde:

- N_0 es el número de átomos que hay en instante $t = 0$.
- $N(t)$ es el número de átomos que hay en instante t .
- k es la constante de desintegración del elemento.
- t es el tiempo.

Se constata experimentalmente que el tiempo que tarda una determinada cantidad de sustancia en reducirse a la mitad es constante de cada elemento y constituye un dato característico. Por tanto, cualquier masa radiactiva se reduce con el tiempo, y además lo hace exponencialmente. La rapidez con que se desintegra una sustancia radiactiva se llama **período de semidesintegración (p)** o **vida media**, que es el tiempo en el que el número de átomos se reduce a la mitad.

La *vida media* de los elementos radiactivos puede utilizarse a veces para determinar la fecha de sucesos que han ocurrido en el pasado en la Tierra. Las edades de las rocas de más de 2000 millones de años pueden establecerse mediante la desintegración radiactiva del Uranio (de 4500 millones de vida media).

En un organismo vivo, cada gramo de Carbono contiene 10^{-6} gramos de C^{14} . Tras su muerte, el organismo deja de absorber carbono y la proporción de C^{14} decrece a medida que se va desintegrando. Su vida media es de unos 5730 años, de modo que es posible estimar la edad de restos orgánicos: los arqueólogos han fechado así conchas, semillas, objetos de madera, o la fecha en que se realizaron las pinturas rupestres.

Ejemplo: Una sustancia radioactiva se desintegra según la expresión $N = N_0 e^{-0.02t}$. Si en un momento dado tenemos 10^6 átomos de dicha sustancia, calcular cuántos habrá al cabo de un año.

Solución:

Tomando como $t = 0$ el instante en el que existen 10^6 núcleos, haciendo $t = 1$ año tenemos:

$$N = 10^6 e^{-0'021} = 980198'67 \text{ átomos}$$

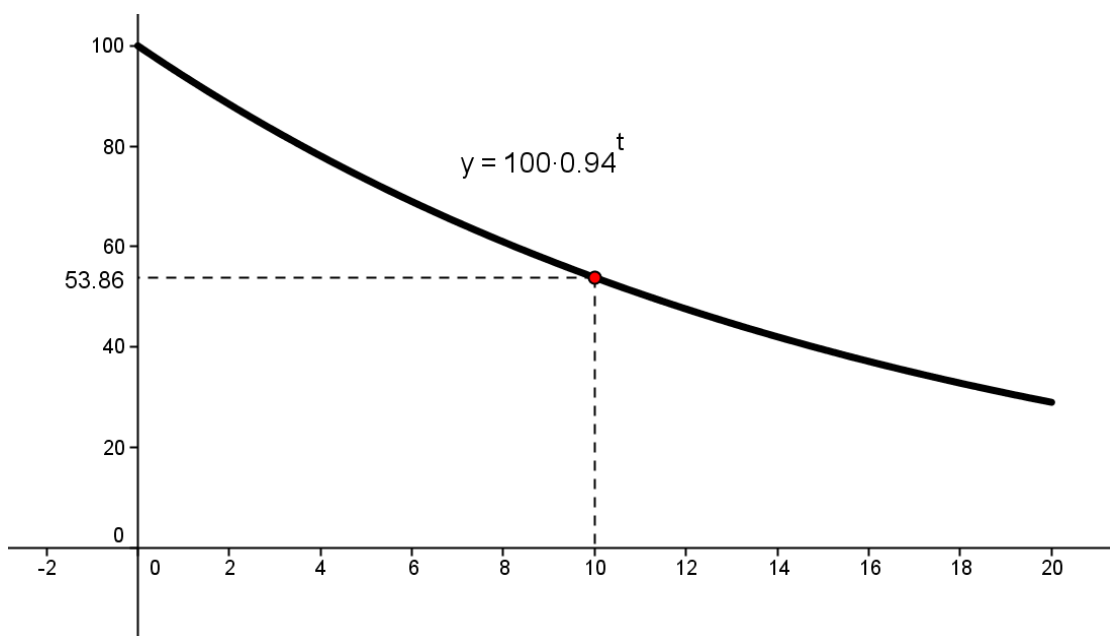
Ejemplo: Se sabe que la concentración en sangre de cierto tipo de anestesia viene dada por la fórmula $y = 100(0'94)^t$ donde 100 es la dosis inicial en mg. y t los minutos transcurridos desde que se administró.

- ¿Qué cantidad de anestesia tiene el paciente al cabo de 10 minutos?
- Representa gráficamente la función.

Solución:

a) $y = 100(0'94)^{10} = 53'8615 \text{ mg}$

b)



Inflación. Devaluación

Llamamos *inflación* a la pérdida del valor adquisitivo del dinero, es decir, si un artículo que costó 100 €, al cabo de un año cuesta 115 €, la inflación habrá sido del 15 %. En Economía, la **inflación** es el aumento sostenido y generalizado del nivel de precios de bienes y servicios. Se define también como la caída en el valor de mercado o del poder adquisitivo de una moneda en una economía en particular. La **devaluación** se refiere a la caída en el valor de la moneda de un país en relación a otra moneda cotizada en los mercados internacionales, como el dólar estadounidense, el euro o el yen.

Como sabes, el valor adquisitivo del dinero es cada vez menor. A esa pérdida de valor se llama devaluación. La moneda se devalúa cuando se modifica el tipo de cambio oficial en el sentido de reducir el valor de una moneda nacional con relación a las extranjeras y a su patrón metálico. Si con el mismo dinero que hace un año se podían adquirir 100 lápices hoy sólo se pueden adquirir 90, se dice que el dinero se ha devaluado un 10 %, es decir, al pasar un año el dinero vale

$$C(1) = C_0 \cdot (1 - 0'1) = 0'9 \cdot C_0$$

Si cada año la devaluación fuera i , la evolución del valor adquisitivo del dinero, al cabo de t años vendría dada por la función

$$C(t) = C_0 \cdot (1 - i)^t$$

Ejemplo: Supongamos una inflación constante del 15% anual. ¿Cuánto costará dentro de 5 años un terreno que hoy cuesta 30000 €?

Solución:

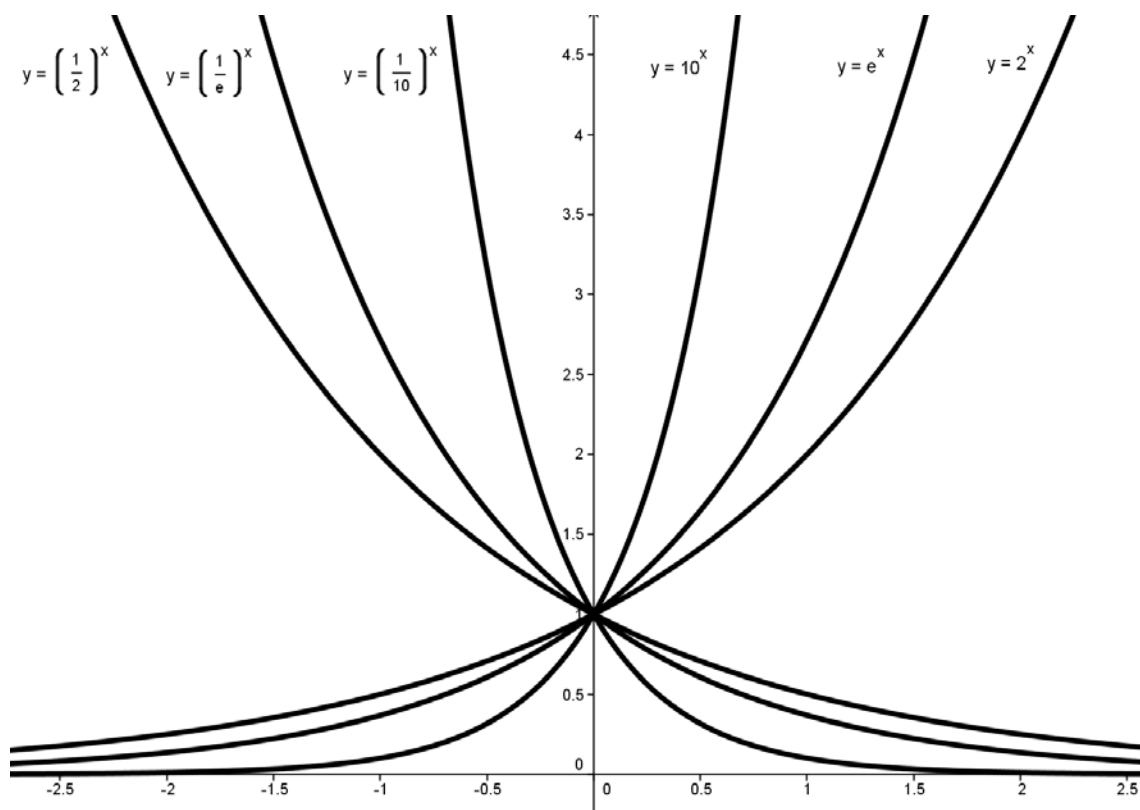
$$C = 30000(1 + 0'15)^5 = 60340'71\text{€}$$

Ejemplo: Si la moneda de un país se devalúa un 2% cada año, ¿cuál será su valor en el mercado al cabo de 5 años?

Solución:

$$C = C_0 (1 - 0'02)^5 = 0'9039 C_0$$

Función Exponencial. Gráficas y propiedades



Propiedades comunes a todas las funciones exponenciales $f(x) = a^x$

- El dominio de la función es la recta real $D = \forall x \in \mathbb{R}$
- El recorrido es el conjunto de los números reales positivos $R = \forall f(x) \in \mathbb{R}^+$
- $f(0) = 1$ ya que $a^0 = 1$. Todas las funciones pasan por el punto $(0, 1)$.
- $f(1) = a$ ya que $a^1 = a$
- La función es continua en su dominio.
- $f(x + x') = f(x) \cdot f(x') \longrightarrow a^{x+x'} = a^x \cdot a^{x'}$

Propiedades que dependen de la base

- Si $a > 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = +\infty \\ \text{La función es estrictamente creciente} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0 \end{cases}$

- Si $a < 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0 \\ \text{La función es estrictamente decreciente} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty \end{cases}$
- La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal

Ejemplo

Si consideramos las funciones:

$C = 1'1^t$ que representa el aumento de un capital colocado al 10 % anual.

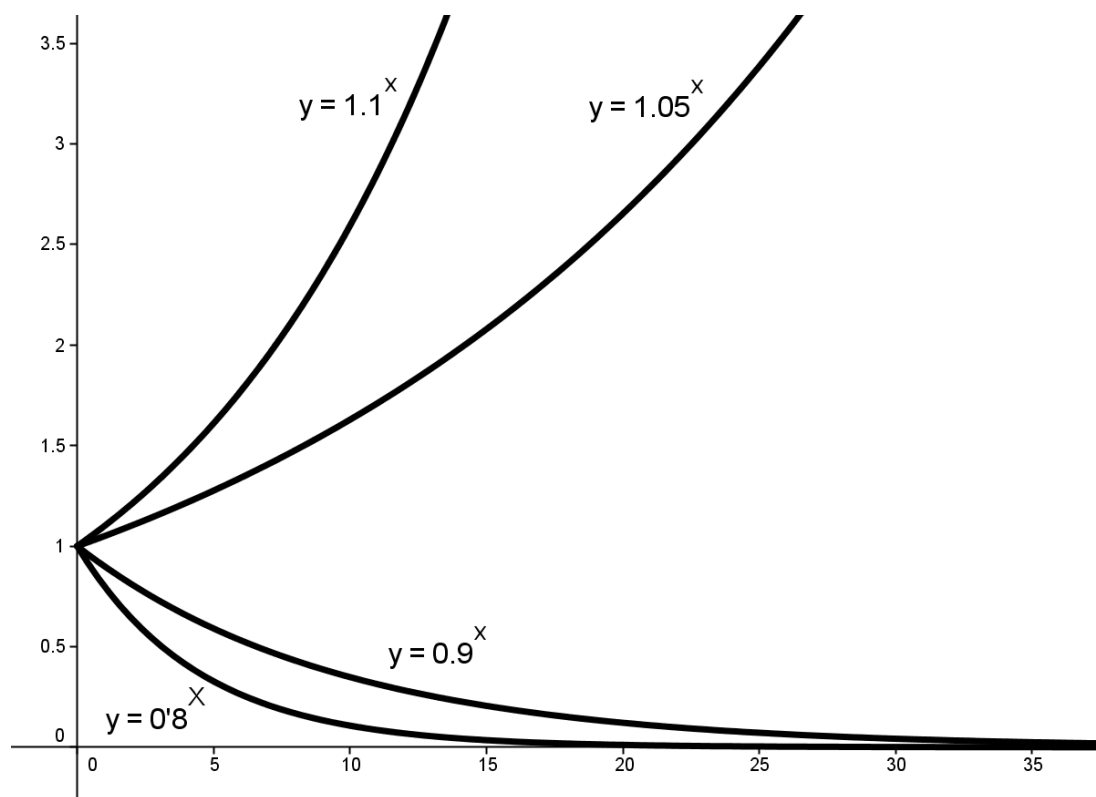
$C = 1'05^t$ que representa el aumento de un capital colocado al 5% anual.

$C = 0'9^t$ que representa una devaluación del 10 % anual.

$C = 0'8^t$ que representa una devaluación del 20 % anual.

t	$1'1^t$	$1'05^t$	$0'9^t$	$0'8^t$
0				
5				
10				
15				
20				
25				
30				

Represéntalas gráficamente mediante la tabla adjunta.



Modelos de Crecimiento Exponencial y Logístico

- El término **crecimiento exponencial** se aplica generalmente a una magnitud P (población) que crece con el tiempo t de acuerdo con la ecuación:

$$P(t) = P_0 (1 + r)^t$$

- P es la población en el instante t .
 - P_0 es la población inicial
 - r es la tasa de crecimiento instantánea.
- Las poblaciones de seres vivos comienzan creciendo según la curva exponencial, pero, si no hay catástrofes (incendios, epidemias, poderosos depredadores...), llegan a invadir su espacio vital y su crecimiento se va amortiguando. La curva matemática ideal que se ajusta a esta situación se llama **logística** o también **sigmoide**, a causa de su forma de S inclinada. Se expresa mediante una ecuación de la forma:

$$P(t) = \frac{kP_0 e^{rt}}{k + P_0 (e^{rt} - 1)}$$

donde k es la población límite ($y = k$ es asíntota cuando t tiende a infinito).

Ejemplo: Dejamos 1000 moscas en una isla en la que no había ninguna, en la que hay condiciones para que vivan, a lo sumo, 600000. Cada día, el número de moscas aumenta el 2 %.

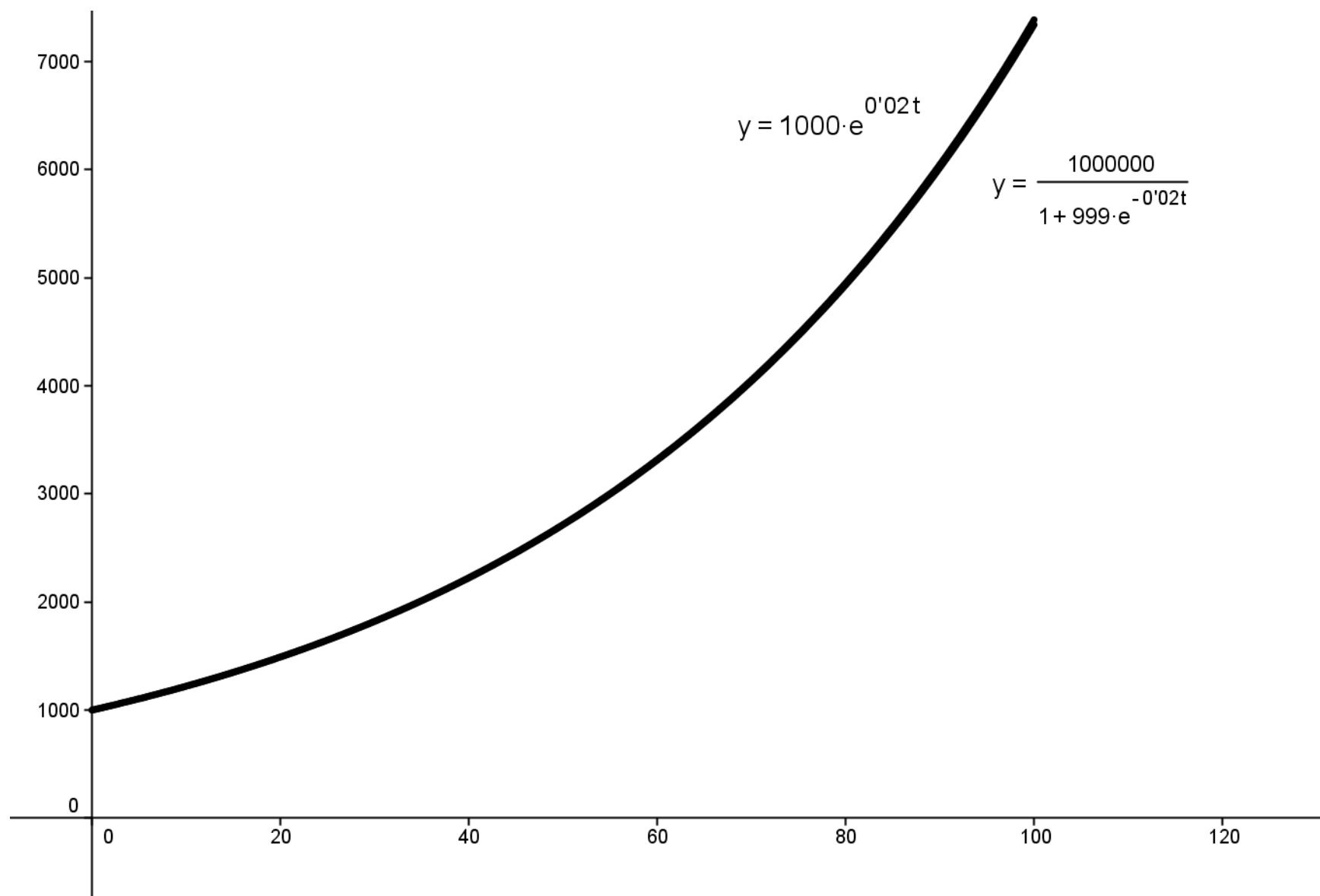
- Expresa el crecimiento según el modelo exponencial como si no hubiera limitación.
- Expresa el crecimiento según el modelo logístico.
- Compara, mediante una tabla, el número de moscas que habrá a los 10, 100, 150, 200, 250, 300 y 400 días según cada modelo y razona sobre las diferencias observadas.
- Representa en unos mismos ejes las gráficas de las dos funciones

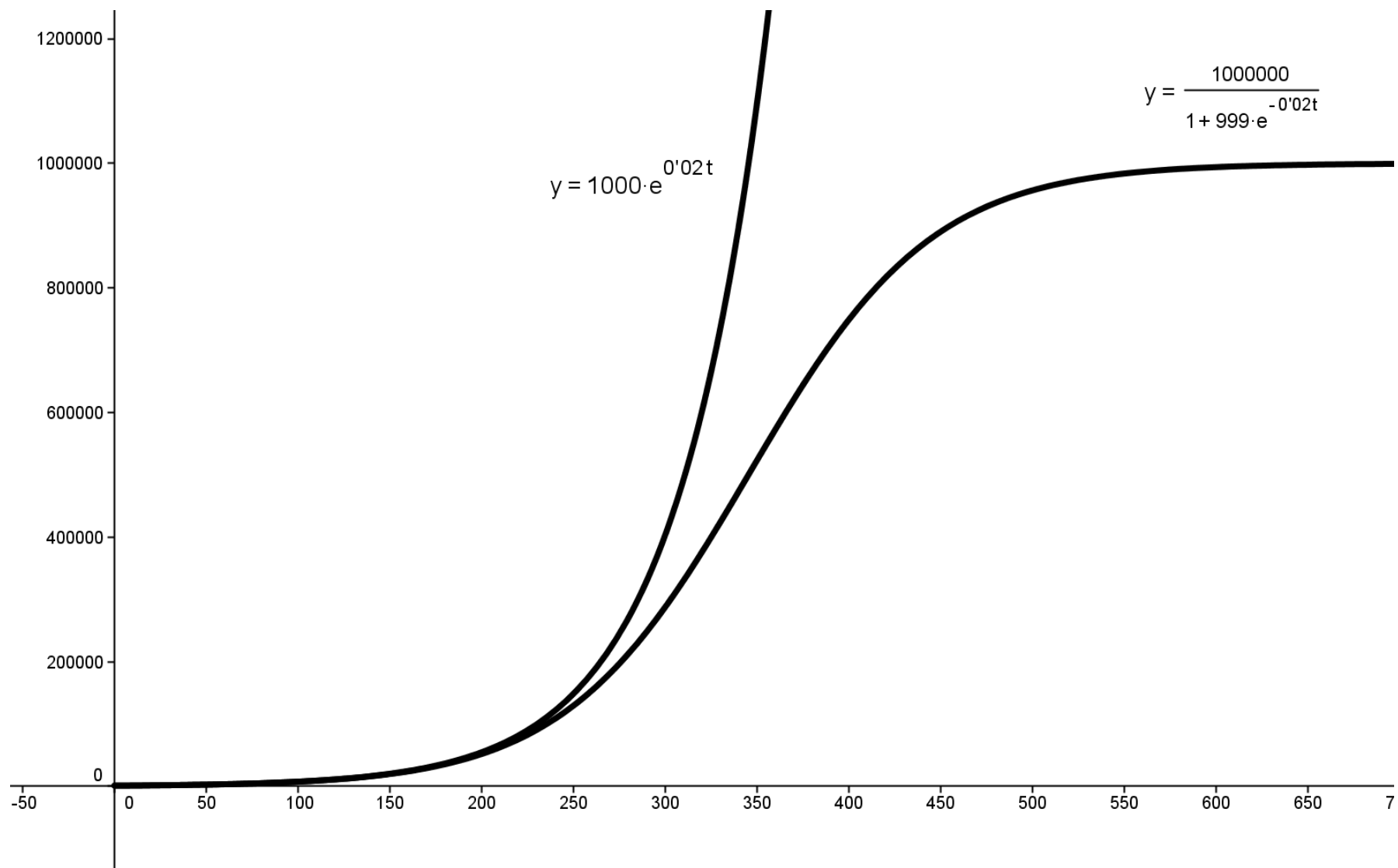
Ejemplo: Se diseña y construye una ciudad con objeto de instalar en ella la capital de una nación. En primera instancia acuden a ella funcionarios y personal de servicios oficiales, pero se desea que la población de la ciudad crezca limitadamente de forma espontánea por inmigración desde otras localidades del país. En este sentido, se toman las medidas necesarias para producir un incremento de población dado por la fórmula:

$$P(t) = \frac{10^6}{1 + 99 \cdot e^{-0.4595t}}$$

Construir la gráfica de la función y averiguar la población inicial y la que existirá al cabo de 5 años y de 10 años. ¿Cuál es la máxima población admisible?

Ejemplo: Las gráficas de las funciones exponencial y logística correspondientes a una población de moscas cuya función logística viene dada por la expresión $P(t) = \frac{10^6}{1 + 999 e^{-0.02t}}$ son:





Logaritmos

Definición

Se llama **logaritmo en base “a”** del número “x” al exponente “b” al que hay que elevar la base “a” para obtener dicho número “x” y se lee “el logaritmo en base a del número x es b”.

$$\log_a x = b \Leftrightarrow a^b = x$$

La base ha de ser positiva y distinta de 1, es decir, $a > 0$ y $a \neq 1$.

Logaritmos decimales y neperianos

Se llaman **logaritmos decimales** a los logaritmos que tienen por base el número 10. Al ser muy habituales es frecuente no escribir la base.

$$\log x = b \Leftrightarrow 10^b = x$$

Se llaman **logaritmos neperianos** a los logaritmos que tienen por base el número e. Se escriben de tres formas distintas:

$$\log_e x = \ln x = Lx \qquad \ln x = 5 \Leftrightarrow e^5 = x$$

Ejemplos:

► $\log_2 8 = 3$ (logaritmo en base 2 de 8 es igual a 3) pues 3 es el exponente al que hay que elevar 2 para que nos de $8 \rightarrow 2^3 = 8$.

► $\log_2 \frac{1}{8} = -3$ (logaritmo en base 2 de $\frac{1}{8}$ es igual a -3) pues -3 es el exponente al que hay que elevar 2 para que nos de $\frac{1}{8} \rightarrow 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

► $\log 10000 = 4$ (logaritmo en base 10 de 10000 es igual a 4) pues 4 es el exponente al que hay que elevar 10 para que nos de 10000 $\rightarrow 10^4 = 10000$.

► $\log 0'0001 = -4$ (logaritmo en base 10 de 0'0001 es igual a -4) pues -4 es el exponente al que hay que elevar 10 para que nos de 0'0001 $\rightarrow 10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10000}$

► $\ln 7'3890 = 2$ (logaritmo en base e de 7'3890 es igual a 2) pues 2 es el exponente al que hay que elevar e para que nos de $e^2 = 7'3890$.

Propiedades de los logaritmos

- ▶ Dos números tienen logaritmos distintos.

$$x \neq y \Rightarrow \log_a x \neq \log_a y$$

- ▶ El logaritmo de la base es 1.

$$\log_a a = 1 \text{ pues } a^1 = a$$

- ▶ El logaritmo de 1 es cero cualquiera que sea la base.

$$\log_a 1 = 0 \text{ pues } a^0 = 1$$

- ▶ No existen logaritmos de números negativos.

- ▶ El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

$$\log_a x y = \log_a x + \log_a y$$

$$\text{Ejemplo: } \log 15 = 1'1760 \quad \log(3 \cdot 5) = \log 3 + \log 5 = 0'4771 + 0'6989 = 1'1760$$

- ▶ El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\text{Ejemplo: } \log 15 = 1'1760 \quad \log \frac{30}{2} = \log 30 - \log 2 = 1'4771 - 0'3010 = 1'1761$$

- ▶ El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base de dicha potencia.

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

$$\text{Ejemplo: } \ln 5^3 = \ln 125 = 4'8283 \quad \ln 5^3 = 3 \ln 5 = 3 \cdot 1'609437 = 4'8283$$

- ▶ El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice de la raíz.

$$\text{Ejemplo: } \log \sqrt[5]{27} = 0'2862 \quad \log \sqrt[5]{27} = \log 27^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \log 27 = 0'2862$$

- ▶ Cambio de base: El logaritmo en base “a” de un número se puede obtener a partir de logaritmos en otra base “x” cualquiera.

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a} = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$\text{Ejemplo: } \log_5 3 = \frac{\ln 3}{\ln 5} = \frac{1'098612288}{1'609437912} = 0'6826$$

Ejemplo: Explica si son verdaderas o falsas las siguientes relaciones:

- a) $\log a + \log b = \log(a + b)$ b) $\log a - \log b = \log(a \cdot b^{-1})$ c) $\log \sqrt{a} = (\log a)^{\frac{1}{2}}$
d) $\log a^2 = \log a + \log a$ e) $\log x + \log 7 = \log y \Leftrightarrow x + 7 = y$
Sol: a) F b) V c) F d) V e) F

Ejemplo: Explica si son verdaderas o falsas las siguientes relaciones:

- a) $x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$ b) $\log x = \log y \Rightarrow x = y$ c) $2\log x = \log y^2 \Rightarrow x = y$
Sol: a) F $\rightarrow x = \pm y$ b) V c) F $\rightarrow x = \pm y$

Ejemplo: Calcular x en las siguientes ecuaciones:

- a) $\ln x - 1 = 0$ b) $\log x + \log 20 = 3$ c) $2\log x = \log(10 - 3x)$
d) $\log 2 + \log(x - 3) = \log \sqrt{2x}$ e) $5\log_2(x + 3) = \log_2 32$
Sol: a) $x = e$ b) $x = 50$ c) $x = 2$ d) $x = \frac{9}{2}$ e) $x = -1$

Ejemplo: Elimina los logaritmos en las expresiones siguientes:

- a) $\ln x + \ln y = 1$ b) $4\log x - 3\log y = 2$ c) $\frac{2\log x}{3} - 1 = \log y$ d) $\ln(\ln x) = 1$
Sol: a) $x \cdot y = e$ b) $x^4 = 100y^3$ c) $x^2 = 1000y^3$ d) $x = e^e$

Ejemplo: ¿Cuál es el valor de la expresión $\log_x \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$? Sol: $-\frac{1}{6}$

Ejemplo: Calcular x en las siguientes ecuaciones:

- a) $\ln x - 1 = 0$ b) $\log x + \log 20 = 3$ c) $2\log x = \log(10 - 3x)$
d) $\log 2 + \log(x - 3) = \log \sqrt{2x}$
Sol: a) $x = e$ b) $x = 50$ c) $x = 2$ d) $x = \frac{9}{2}$

Ejemplo: Calcular x en las siguientes ecuaciones:

- a) $e^x = 3^5$ b) $3^x = 0'75$ c) $2^x = 3^{x+1}$ d) $3^{2x^3-1} = 2$
Sol: a) $x = 1'25$ b) $x = -0'26$ c) $x = -2'70$ d) $x = 0'93$

Ejemplo: Una sustancia radiactiva se desintegra según la expresión $N = N_0 e^{-0'5t}$. Calcular el periodo de semidesintegración de dicha sustancia.

Solución:

El periodo de semidesintegración es el tiempo que tarda esa sustancia en reducirse a la mitad, luego, si en la ecuación anterior hacemos $N = \frac{N_0}{2}$ obtenemos:

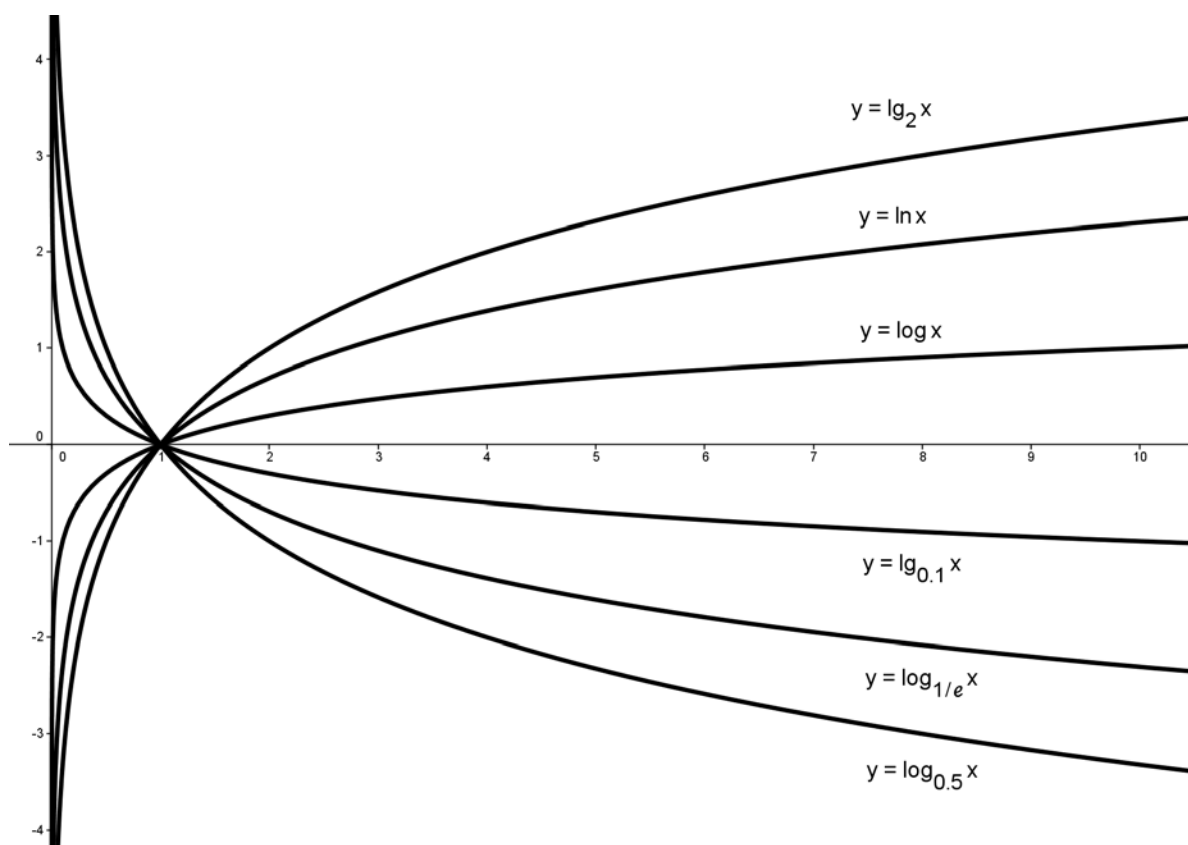
$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-0'5t}$$

Tomando logaritmos neperianos en los dos miembros obtenemos el valor de t.

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-0'5t} \quad \frac{1}{2} = e^{-0'5t} \quad \ln \frac{1}{2} = \ln e^{-0'5t} \quad \ln 1 - \ln 2 = -0'5t \ln e$$

$$t = \frac{\ln 2}{0'5} = 1'3862 \text{ años}$$

Función Logarítmica. Gráficas y propiedades



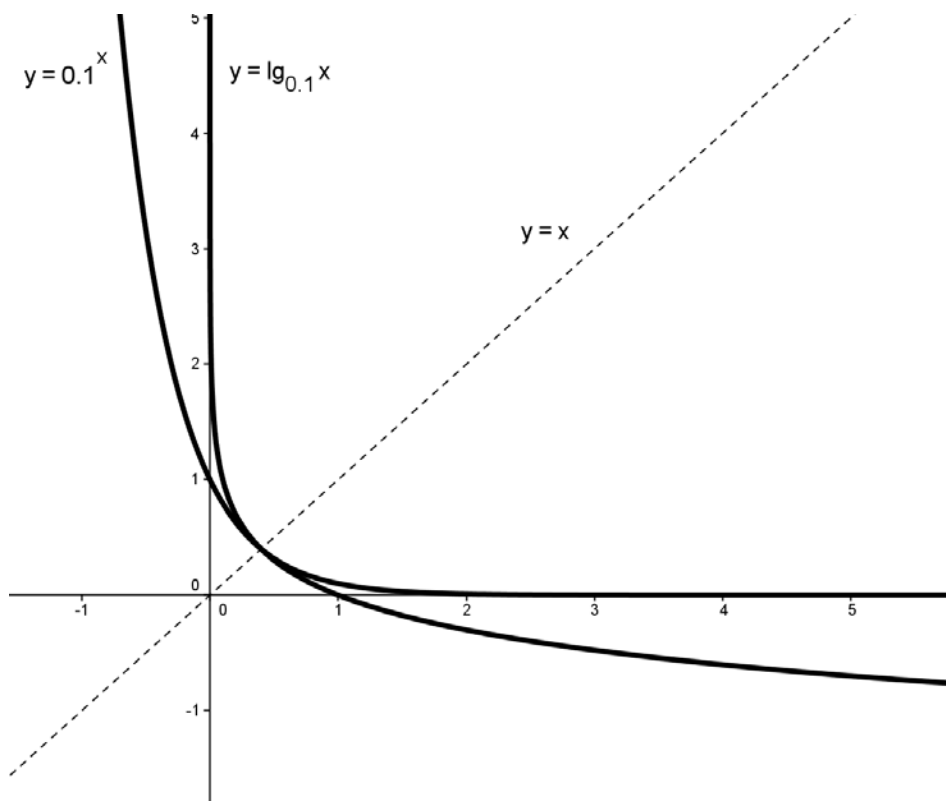
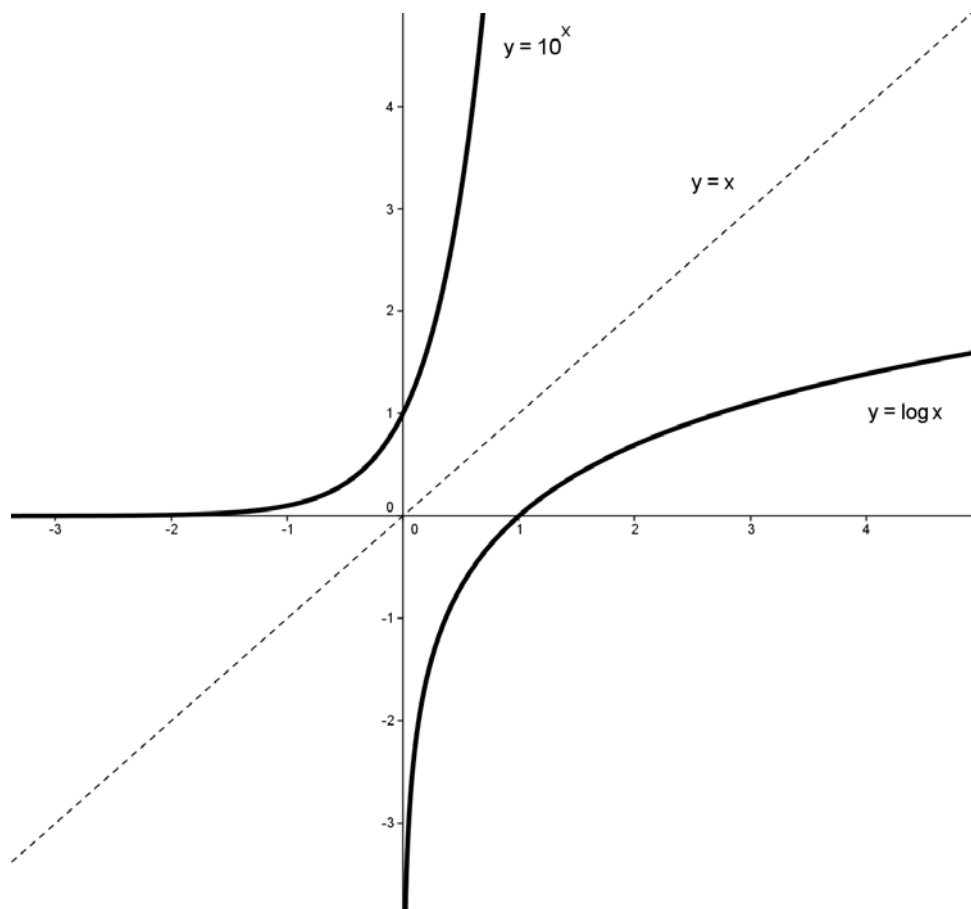
Propiedades comunes a todas las funciones logarítmicas $f(x) = \log_a x$

- El dominio de la función es el semieje real positivo $D = \forall x \in \mathbb{R}^+$
- El recorrido es el conjunto de los números reales $R = \forall f(x) \in \mathbb{R}$
- $\log_a 1 = 0$ ya que $a^0 = 1$ Todas las funciones pasan por el punto (1,0)
- $\log_a a = 1$ ya que $a^1 = a$
- La función es continua en su dominio.
- $\log_a (x \cdot x') = \log_a x + \log_a x'$

Propiedades que dependen de la base

- Si $a > 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{La función es negativa para valores de } x \text{ menores que } 1 \\ \text{La función es positiva para valores de } x \text{ mayores que } 1 \\ \text{La función es estrictamente creciente} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (\log_a x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\log_a x) = +\infty \end{cases}$
- Si $a < 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{La función es positiva para valores de } x \text{ menores que } 1 \\ \text{La función es negativa para valores de } x \text{ mayores que } 1 \\ \text{La función es estrictamente decreciente} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (\log_a x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\log_a x) = -\infty \end{cases}$
- La recta $x = 0$ es una asíntota vertical

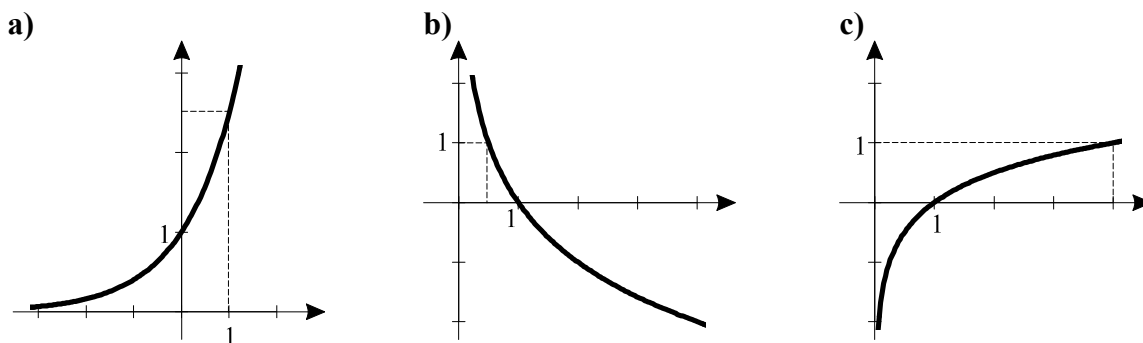
Gráficas de las Funciones Inversas



Las gráficas de las funciones exponencial y logarítmica son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

Problemas sobre la función Exponencial y Logarítmica

- 1) Se calcula que un bosque tiene 24.000 m^3 de madera y que aumenta un 3,5 % al año.
 - a) ¿Cuánta madera tendrá al cabo de 12 años si sigue creciendo en estas condiciones?
 - b) ¿Cuánto tiempo tardará en duplicarse suponiendo que sigue ese ritmo de crecimiento?
- 2) Pedimos dinero en un banco y nos comprometemos a devolverlo, todo, a los 5 años. Nos dicen que habremos de devolver exactamente el doble de lo que nos dieron. ¿Qué intereses anuales nos están cobrando?
- 3) El contrato de alquiler de nuestro apartamento incluye una cláusula de revalorización anual del 5%. Si actualmente pagamos 350 € al mes, ¿cuánto pagaremos dentro de 5 años? ¿y dentro de 8?
- 4) La masa bacteriana de un cultivo viene dada por la "logística": $C(t) = \frac{600}{1 + 52e^{-0.4t}}$
 - a) ¿De qué masa se ha partido?
 - b) ¿Cuál es la masa máxima que se puede esperar? Indicación: deberás calcular un límite determinado.
- 5) Dos capitales, uno el doble que el otro, se colocan a interés compuesto del 6% y 10% respectivamente. ¿Al cabo de cuántos años los finales serán iguales?
- 6) Una calculadora con la tecla x^y puede calcular potencias directamente, pero números tan grandes como 893^{55} , 602^{60} ó 120^{80} producen un mensaje de error, pues sobrepasa su capacidad. ¿Cómo puedes saber cuál de los tres es el menor y cuál es el mayor?
- 7) El número 2^{10000} es muy grande. ¿Cuántas cifras tendrá una vez desarrollado?
- 8) Calcula x en cada uno de los siguientes casos:
 - a) $3^{-x} = 3^{x-2}$
 - b) $3^x = 9^{x^2-3}$
 - c) $(4^{3-x})^{2-x} = 1$
 - d) $\sqrt[3]{7} = 7^x$
 - e) $343^x = 16807$
 - f) $5^x = \frac{1}{125}$
- 9) Se sabe que la concentración en sangre de cierto tipo de anestesia viene dada por la fórmula $y = 100(0.94)^t$ donde 100 es la dosis inicial en mg y t los minutos transcurridos desde que se administró.
 - a) ¿Qué cantidad de anestesia tiene el paciente al cabo de 10 minutos? Representa gráficamente la función.
 - b) Se va a realizar una operación que dura media hora y para que se desarrolle bien, es necesario que la cantidad de anestesia en el paciente no sea inferior a 28 mg. Calcula al cabo de cuántos minutos hay que inyectarle de nuevo.
 - c) ¿Será suficiente que la dosis sea ahora 50 mg para terminar la operación?
- 10)
 - a) Representa e^x y e^{-x} y haz un estudio de todas las propiedades de las dos gráficas.
 - b) Representa 3^x y $\log_3 x$ y haz un estudio de todas las propiedades de las dos gráficas.
 - c) Dada la función $y = 2^{x-1}$, halla su función inversa.
- 11) Las siguientes gráficas corresponden a funciones exponenciales y logarítmicas. Di a quién corresponde cada una, da sus ecuaciones e indica sus propiedades.



12)

- a) ¿Cuáles son los números cuyos logaritmos decimales están comprendidos entre 0 y 3?
¿Y entre -2 y -1 ?
- b) Si $\log a = 1 + \log b$, ¿qué relación hay entre a y b ?

13) Calcular x en las siguientes ecuaciones:

a) $e^x = 3^5$ b) $3^x = 0.75$ c) $2^x = 3^{x+1}$ d) $3^{2x^3-1} = 2$

14) Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $y = \log(x^2 - 5x + 6)$ b) $f(x) = \log \sqrt{x^2 - 9}$ c) $f(x) = \log \frac{x-1}{x+1}$ d) $y = 2 \log \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$

15) Reduce las siguientes expresiones de manera que el logaritmo aparezca una sola vez.

a) $\log x^4 - \log \sqrt{xy}$ b) $\log x - 2 \log y$ c) $3 \log x + \log(1-x)$ d) $\frac{\log x}{2} + \frac{1}{4} \log y$

e) $-\log x - \log y$ f) $\log x^{\log x}$

16)

- a) Sabiendo que $\log_5 N = h$, determina el logaritmo en base 5 de $\frac{N}{125}$
- b) Si $\log_a N = k$, ¿cuánto vale $\log_{\frac{1}{a}} N$?
- c) ¿Qué relación existe entre los números A y B si se verifica que $\log A + \log B = 0$?
- d) Si $\log_a N = 2$ y $\log_a 32 \cdot N = 5$, ¿cuánto vale a ?
- e) Demuestra que $\log_a b \cdot \log_b a = 1$

17) Dada la función exponencial $f(x) = k a^x$, se sabe $f(0) = 5$ y $f(3) = 40$. ¿Cuánto vale la constante k y la base a ?

18) El crecimiento de dos cultivos diferentes de bacterias queda determinado, respectivamente por: $C_1(t) = 3 \cdot 2 \cdot 10^{3t}$ y $C_2 = 5 \cdot 4 \cdot 10^{65t}$ (t medida en horas y $C(t)$ en millares)

- a) Al cabo de cuánto tiempo coincidirá el número de individuos de cada tipo?
- b) A partir de este momento ¿qué cultivo crecerá más rápidamente?

19) Las exponenciales $y = 0.4^x$ e $y = k^{2x}$ son iguales. Calcular el valor de k .

20) Una tribu de indios observa que la manada de búfalos del territorio donde se han instalado se reduce según una función de decrecimiento exponencial dada por $f(t) = k a^t$. Hace 12 lunas contabilizaron 1944 búfalos y actualmente hay 1296 búfalos en la manada. Si se mantiene el decrecimiento exponencial, calcular dentro de cuántas lunas tendrán que abandonar la pradera, sabiendo que esa tribu cambia de territorio cuando quedan menos de 100 búfalos.

21) Calcular x en cada uno de los siguientes casos:

$$\begin{array}{llll} \text{g)} \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}} = 2^x & \text{h)} 7^{x^3} = \left(\frac{1}{7}\right)^{2x^2+x} & \text{i)} 3^{4x} + 3^{2x} - 90 = 0 & \text{j)} 5^{4x^2-8x+3} = 1 \\ \text{k)} \frac{4^{x-1}}{2^{x+2}} = 128 & \text{l)} 5^{x-2} + 5^x + 5^{x+2} = 651 & \text{m)} 3^x + 9^{x-1} = 69 & \text{n)} \sqrt[4]{e^{x+1}} = \sqrt{e} \cdot e^{x+1} \\ \text{o)} 9^x - 2 \cdot 3^{x+2} + 81 = 0 & \text{p)} \frac{8}{6^x} = 3^{-x} & \text{q)} (2^x)^x = 16 \cdot 8^{-x^2} & \text{r)} \frac{2}{4^x - 2^x} = 1 \\ \text{s)} 7^{2x+3} - 8 \cdot 7^{x+1} + 1 = 0 \end{array}$$

22) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \left. \begin{array}{l} 5^x = 5 \cdot 25^{y-1} \\ 4^x = 4 \cdot 2^{2y} \end{array} \right\} & \text{b)} \left. \begin{array}{l} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x+2} - 5^{y+1} = -9 \end{array} \right\} & \text{c)} \left. \begin{array}{l} 3 \cdot 5^x + 2 \cdot 6^{y+1} = 807 \\ 15 \cdot 5^{x-1} - 6^y = 339 \end{array} \right\} & \text{d)} \left. \begin{array}{l} 16^x = 4^{1+y} \\ 64^x \cdot 2^{2y} = 64^3 \end{array} \right\} \end{array}$$

23) Calcular x en las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \log_x(20x-4) - \log_x 25 = 2 & \text{b)} 5 = e^{\ln x^2} & \text{c)} 3 = 4^{\log_2 x^2} & \text{d)} \frac{\ln x - 2}{\ln x - 1} = 3 \quad \text{e)} 3^{1-x^2} = \frac{1}{30} \\ \text{f)} \log_x 0'0001 = -4 & \text{g)} \frac{\log_b(35-x^3)}{\log_b(5-x)} = 3 & \text{h)} \log|1-3x| = \frac{2}{5} & \text{i)} \log \frac{4(x^2-1)}{4x-1} = 0 \end{array}$$

24) Resolver los siguientes sistemas:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \left. \begin{array}{l} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = 1 \end{array} \right\} & \text{b)} \left. \begin{array}{l} 2 \log x + \log y = 2 \\ \log x = 6 + \log y^2 \end{array} \right\} & \text{c)} \left. \begin{array}{l} \log_2 x + 3 \log_2 y = 5 \\ \log_2 \frac{x^2}{y} = 3 \end{array} \right\} \\ \text{d)} \left. \begin{array}{l} \log_y(9-x) = \frac{1}{2} \\ x^2 = y+9 \end{array} \right\} & \text{e)} \left. \begin{array}{l} \log(x+y) - \log(x-y) = \log 5 \\ 2^x = 4 \cdot 2^y \end{array} \right\} \\ \text{f)} \left. \begin{array}{l} \log(x+y) + \log(x-y) = \log 5 \\ e^x = \frac{e^5}{e^y} \end{array} \right\} & \text{g)} \left. \begin{array}{l} x-y = 25 \\ \log y = \log x - 1 \end{array} \right\} & \text{h)} \left. \begin{array}{l} x^2 - y^2 = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{array} \right\} \end{array}$$

25) El periodo de semidesintegración del Carbono 14, es decir, el tiempo que tarda en reducirse a la mitad, es de 5568 años. De esta manera, 100 gr. de carbono 14 se convierten en 50 gr. después de un periodo, en 25 gr. después de dos periodos y así sucesivamente.

a) Si se dispone de 1 Kg. de carbono 14, determina la función que nos dará la evolución de su desintegración según los periodos transcurridos.

- b) ¿Cuánto carbono 14 quedará después de transcurridos 3 periodos? ¿y después de 2000 años?
- c) ¿Cuánto tiempo tendrá que transcurrir para que se reduzca a la mitad?

26) Supongamos que al comienzo de nuestra era, es decir, con el nacimiento de Cristo, la Tierra comienza a viajar a la velocidad de la luz. En su avance perforará el espacio y abrirá un tubo cilíndrico de radio el de la Tierra, y de longitud, la velocidad de la luz multiplicada por el tiempo que durará este movimiento de traslación, que será hasta el año 2000. Imaginemos que este cilindro es de oro macizo y queremos calcular el valor.

Por otra parte, al mismo tiempo, en el año 0 colocamos 1 € a interés compuesto del 5%. El capital que tendremos en el año 2000, ¿nos permitirá comprar el cilindro de oro macizo a que nos hemos referido?

Datos: radio terrestre = 6366 km; velocidad de la luz = 300.000 km/sg; densidad del oro = 19,3 gr / cm³; precio del oro = 7'2 €/gr.

27) Ejemplo general sobre rectas, parábolas y función exponencial

En el año 1980 se independizan las repúblicas de Lavonia, Levonia y Livinia. Las tres han solicitado ayuda económica al F.M.I. (fondo monetario internacional). Para ello, cada república presenta sus datos:

• Lavonia

Año en curso	1984	1986	1988	1990	1992	1994
Fondo en millones de dólares	0	4	8	12	16	20

- Levonia $y = x^2 - 2x - 8$ donde “x” es el n° de años transcurridos desde 1980 e “y” son los fondos en millones de dólares.
- Livinia $y = 5 \cdot 1'05^x$
 - Representa conjuntamente las gráficas correspondientes a Lavonia, Levonia y Livinia.
 - En el momento de la independencia ¿qué fondos tenía cada país? ¿y a los 3 años?
 - Si continúa la tendencia de estos años, ¿qué fondos es previsible que hayan tenido en el año 2000?
 - En algún momento ¿se han encontrado sin fondos? ¿y con deudas? ¿y en el futuro?
 - ¿En qué año tendrán o han tenido los mismos fondos?
 - Levonia, ¿en qué momento ha estado peor económicamente?
 - El fondo monetario internacional informa a Livinia que su informe es desfavorable. Sólo se le prestará dinero cuando sus fondos sean aproximadamente de 25 millones de dólares. ¿Cuántos años habrán de pasar?

Soluciones

- 1) a) $36265'64 \text{ m}^3$ b) 20 años, 1 mes y 23 días
- 2) $14'86 \%$
- 3) $446'69 \text{ €}$ y $517'10 \text{ €}$
- 4) a) De $11'32$ b) 600
- 5) 18 años, 8 meses y 16 días
- 6) Utilizando los logaritmos decimales tenemos $893^{55} < 120^{80} < 602^{60}$
- 7) Sol: 3011
- 8) a) $x = 1$ b) $x = 2$ y $x = -\frac{3}{2}$ c) $x = 2$ y $x = 3$ d) $x = 1$ y $x = -1$ e) $x = \frac{5}{3}$ f) $x = -3$
- 9) a) $53'86 \text{ mg}$ b) $20'34''$ c) $11'12'' \rightarrow 20'34'' + 11'12'' = 31'46'' \Rightarrow$ sí
- 10) c) $y = \frac{\ln x}{\ln 2} + 1$
- 11) a) $y = 2^{5^x}$ b) $y = \log_{0.5} x$ c) $y = \log_4 x$
- 12) a) Entre 0 y 3 el 1 y el 1000 y entre -2 y -1 el $0'01$ y el $0'1$ b) $a = 10b$
- 13) a) $x = 1'25$ b) $x = -0'26$ c) $x = -2'70$ d) $x = 0'93$
- 14) a) $\forall x \in]-\infty, 2[\cup]3, \infty[$ b) $\forall x \in]-\infty, -3[\cup]3, \infty[$ c) $\forall x \in]-\infty, -1[\cup]1, \infty[$
d) $\forall x \in]-\infty, -2[\cup]2, \infty[$
- 15) a) $\log \frac{x^4}{\sqrt{xy}}$ b) $\log \frac{x}{y^2}$ c) $\log [x^3 \cdot (1-x)]$ d) $\log (\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{y})$ e) $-\log (x \cdot y)$ f) $(\log x)^2$
- 16) a) $h - 3$ b) $-k$ c) Son inversos $A = \frac{1}{B}$ d) $a = \sqrt[3]{32}$ e) $\frac{\ln b}{\ln a} \cdot \frac{\ln a}{\ln b} = 1$
- 17) $a = 2$ y $k = 5$
- 18) a) $24 \text{ h } 49'$ b) $C_1(t)$
- 19) $k = 0'6324$
- 20) $\cong 76$ lunas

21) g) $x = \frac{15}{16}$ h) $x = 0$ y $x = -1$ i) $x = 1$ j) $x = \frac{1}{2}$ y $x = \frac{3}{2}$
 k) $x = 11$ l) $x = 2$ m) $x = 2'76353$ n) $x = -\frac{5}{3}$ o) $x = 2$ p) $x = 3$
 q) $x = 1$ y $x = -1$ r) $x = 1$ s) $x = -1$ y $x = -2$

22) a) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

23) a) $x = \frac{2}{5}$ b) $x = \pm\sqrt{5}$ c) x^4 d) $x = \sqrt{e}$ g) $\begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$ h) $\begin{cases} \text{Si } x < \frac{1}{3} \Rightarrow x = -0'5 \\ \text{Si } x > \frac{1}{3} \Rightarrow x = 1'17 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$ e) $\begin{cases} x = 2'0238 \\ x = -2'0238 \end{cases}$ f) $x = 10$

24) a) $\begin{cases} x = 100 \\ y = 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 100 \\ y = \frac{1}{100} \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = 5 \\ y = 16 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x = \frac{250}{9} \\ y = \frac{25}{9} \end{cases}$ h) $\begin{cases} x = 3'\bar{3} \\ y = 0'\bar{3} \end{cases}$

25) a) $\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-k \cdot 1}$ $k = 0'6931$ $N = e^{-0'6931t}$ b) $0'125 \text{ kg}$ y $0'80 \text{ kg}$ c) 5568 años

26) $V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 h = 2'4 \cdot 10^{39} \text{ cm}^3$; $m_{\text{cilindro}} = d \cdot V_{\text{cilindro}} = 4'63 \cdot 10^{40} \text{ gr}$
 $\text{Costo} = 7'2 \text{ €} \cdot 4'63 \cdot 10^{40} \text{ gr} = 3'33 \cdot 10^{41} \text{ €}$; $\text{Capital} = 2'3911 \cdot 10^{42} \text{ €}$.

27)

