Funciones

Ejemplo 1

Pedro y Ana han escrito varias cartas a algunos amigos que incluyen recortes de prensa. Al llegar a Correos para poner los sellos les han enseñado la tabla del margen por la que se rige el franqueo.

Observa que a cada carta le corresponde de modo único un franqueo. Por tanto, diremos que el franqueo depende del peso de la carta o que está en función del peso. Este es un ejemplo de ***función dada por una tabla.***

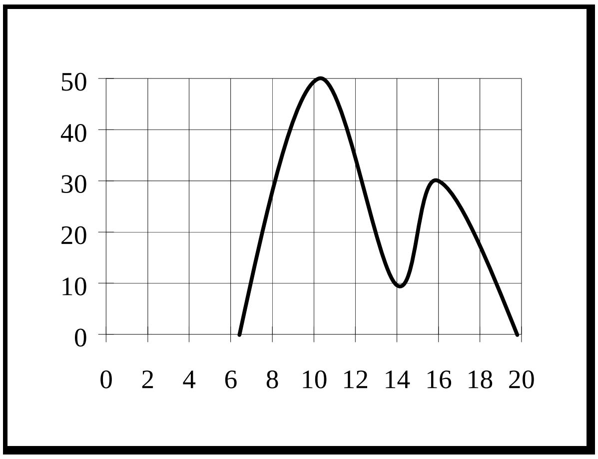
Cartas Servicio Nacional

Hasta 20 gr	0’12 €
De más de 20 hasta 50 gr	0’15 €
De más de 50 hasta 100 gr	0’23 €
De más de 100 hasta 250 gr	0’51 €
De más de 250 hasta 500 gr	1’02 €
De más de 500 hasta 1000 gr	1’41 €
De más de 1000 hasta 2000 gr	1’92 €

Ejemplo 2

La gráfica adjunta muestra el consumo de agua en un determinado instituto a lo largo de un día normal.

Observa que a cada hora del día le corresponde un número de litros de agua gastados. Por ello decimos que el número de litros de agua consumidos depende de la hora del día, o bien que está en función de la hora. Éste es un ejemplo de ***función dada por una gráfica.***



Ejemplo 3

Gema quiere construir círculos de papel de plata y no sabe cuánto papel necesitará para cada círculo. Busca en un libro y ve que la expresión $A = \pi r^2$ permite hallar el área del círculo para cada valor del radio. Por tanto, decimos que el área del círculo está en función del radio. Éste es un ejemplo de ***función dada por una fórmula***.

A la vista de los ejemplos anteriores se tiene:

Definición de Función

Es una relación (correspondencia) entre dos magnitudes, de tal manera que a cada valor de la primera le corresponde un único valor de la segunda.

A la variable que se deduce de la anterior se le llama ***variable dependiente***, ya que esta última depende de los valores de la otra variable previamente fijados.

Para la determinación completa de una función, es necesario conocer:

1. **El conjunto inicial**, donde toma valores la variable independiente.

2. **El conjunto final**, donde toma valores la variable dependiente.

3. **La regla** que permite asociar a cada elemento del conjunto inicial su correspondiente en el conjunto final. A este elemento le llamamos **imagen**. La regla puede venir dada por medio de una tabla de valores, una gráfica o un fórmula matemática.

Dominio o campo de existencia de una función

Es el conjunto de valores de la variable independiente, y se suele representar con la letra D.

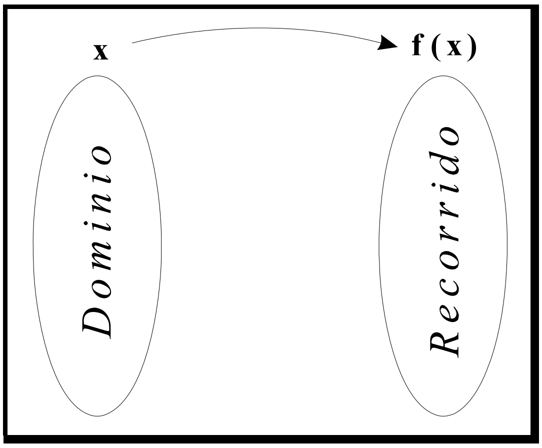
La variable independiente se representa siempre sobre el eje horizontal (abscisas).

Recorrido o imagen de una función

Es el conjunto de valores de la variable dependiente.

La variable dependiente se representa siempre sobre el eje vertical (ordenadas).

En matemáticas es frecuente utilizar la letra **x** como *variable independiente* y la letra **y** ó la expresión **f(x)** como *variable dependiente*. Sin embargo, no siempre se utilizan estas letras para designar las variables y la función. En realidad, la notación que empleemos es indiferente, porque lo importante es la regla que define la función. Cuando las variables representan magnitudes geométricas o científicas concretas, es frecuente denotarlas mediante la inicial del nombre. Así, en Física, el espacio se designa por **e**, el tiempo por **t**, la aceleración por **a**, etc.



Si el conjunto inicial y final de una función es el de los números reales R, la función se llama ***real de variable real****.*

Interpretación geométrica de la imagen de un número

Para hallar sobre una gráfica la imagen de un número **x**, se sitúa este valor sobre el eje horizontal y se dibuja la vertical que pasa por él. Pueden darse dos posibilidades:

a) La vertical de x no corta a la gráfica. Entonces x no tiene imagen, es decir, x no está en el dominio de f.

b) La vertical de x corta a la gráfica en un punto P. Entonces la imagen de x es la ordenada de P (Figura 1).

Si alguna vertical cortara a la gráfica en más de un punto, entonces dicha gráfica no sería de una función real (Figura 2).

Figura 1

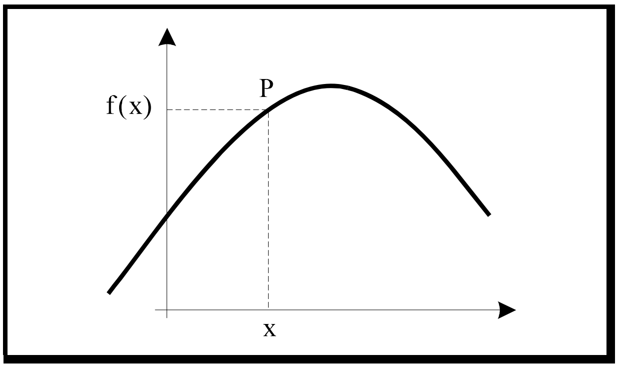
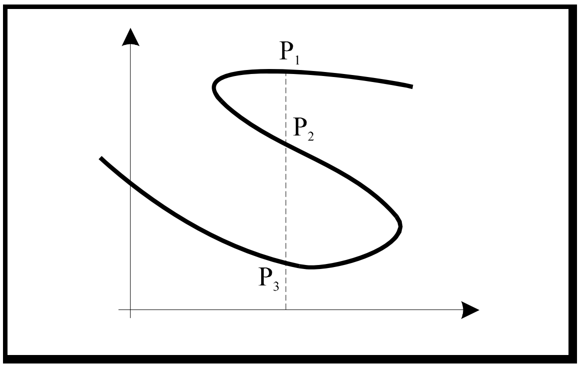


Figura 2



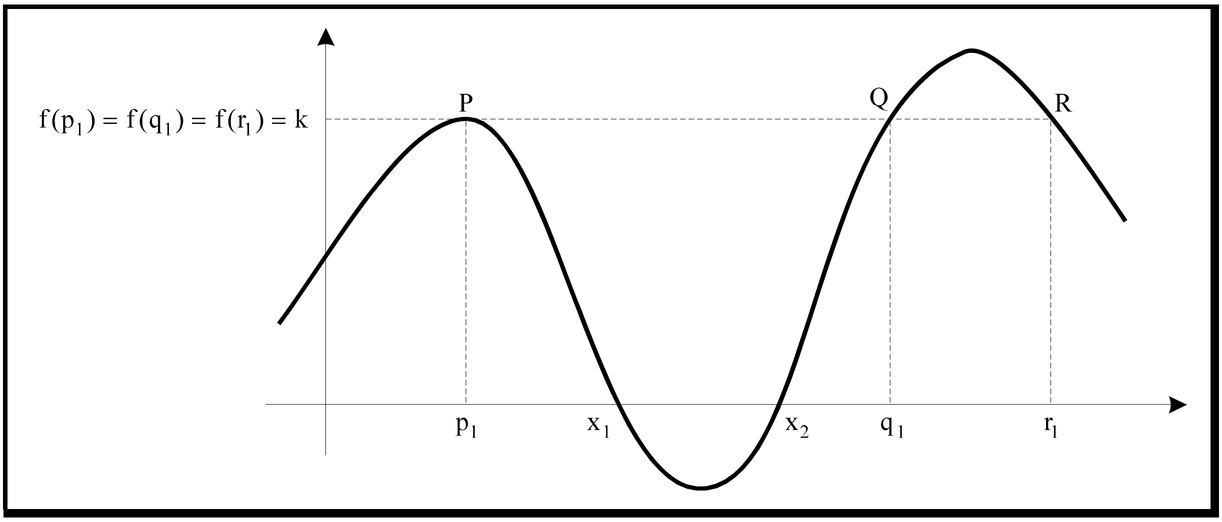
Interpretación gráfica de las antiimágenes de un número

Para hallar gráficamente las soluciones de la ecuación $f(x)=k$, se dibuja la gráfica de la función $f(x)$, se traza la horizontal del punto $(0,k)$ y se tiene en cuenta lo siguiente.

a) Si dicha horizontal no corta a la gráfica, la ecuación dada no tiene solución, es decir, el número k no tiene antiimágenes.

b) Si dicha horizontal corta a la gráfica en puntos P, Q, R, etc. entonces las abscisas de dichos puntos son las soluciones de la ecuación $f(x)=k$, o sea, las antiimágenes de k.

Las antiimágenes del número 0 se llaman raíces de $f(x)$ y coinciden con los puntos en que la gráfica de $f(x)$ corta al eje de abscisas.



Ejemplo: **Dada la función** $f(x)=\dfrac{20}{x^2+4}$**, calcular:**

a) $f(2)$ **y** $f\left(-\dfrac{4}{3}\right)$

b) Hallar la imagen de 0 y de $-2'5$**.**

c) Hallar las antiimágenes de 4 y de 6.

d) Dominio de $f(x)$**.**

e) Gráfica de $f(x)$ **en el intervalo** $[-5,5]$**.**

f) Basándonos en la gráfica, estimar el valor aproximado de la antiimagen o antiimágenes del nº 3.

g) ¿Pertenece al recorrido el número 1? ¿y el 7?

h) A partir de la gráfica ¿cuál crees que será el recorrido de la función?

a) $f(2)=2'5$ $\qquad f\left(-\dfrac{4}{3}\right)=3'46$

b) $f(0)=5$ $\qquad f(-2'5)=1'95$

c) Halla las antiimágenes de 4 y de 6

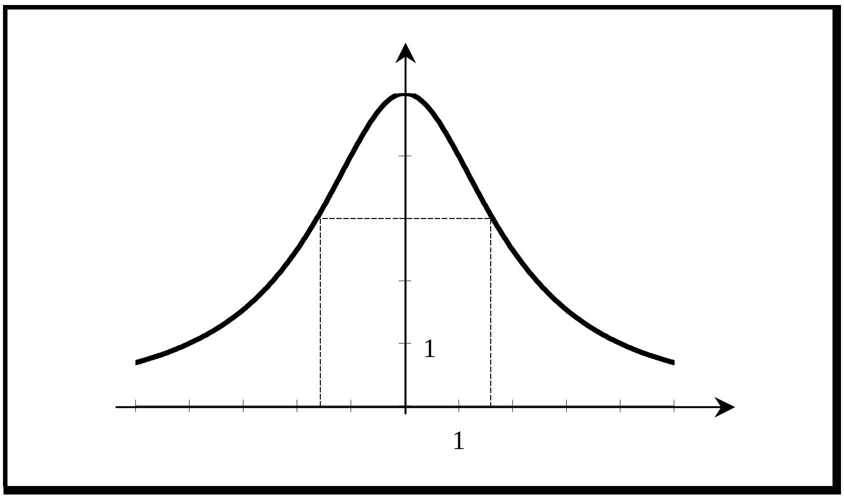
$$\frac{20}{x^2+4}=4 \;\Rightarrow\; x=\pm 1 \qquad\qquad \frac{20}{x^2+4}=6 \;\Rightarrow\; x=\sqrt{-\frac{4}{6}}$$

Para el número 6 no tiene solución, por tanto el número 6 no es imagen de ningún otro número en la función $f(x)$.

d) $D=\forall x\in R$

e)

x	$f(x)$
-5	0'68
-3	1'53
-2	2'5
-1	4
0	5
1	4
2	2'5
3	1'53
5	0'68



f) $x\cong 1'4$ y $x\cong -1'4$

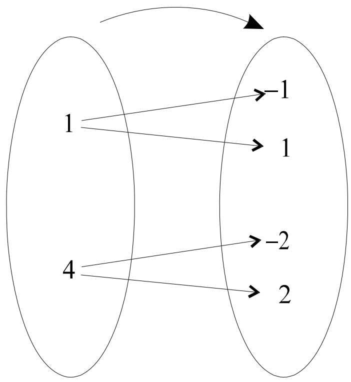
g) $\dfrac{20}{x^2+4}=1 \quad \Rightarrow \quad x=\pm 4$. Por tanto, el número 1 sí pertenece al recorrido.

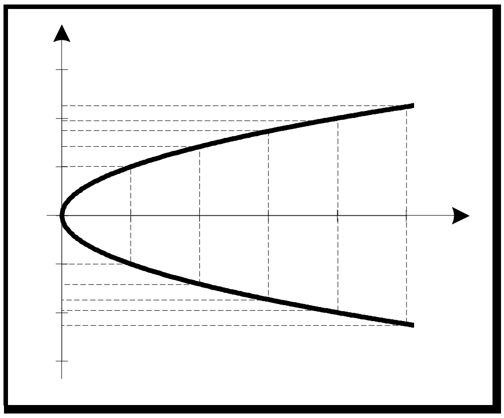
$\dfrac{20}{x^2+4}=7 \quad \Rightarrow \quad x=\pm\sqrt{-\dfrac{8}{7}}$. Por tanto, el número 7 no pertenece al recorrido.

h) El intervalo $]0,5]$.

Ejemplo: Las expresiones $y=\sqrt{x}$ e $y=x^2$ ¿son funciones?

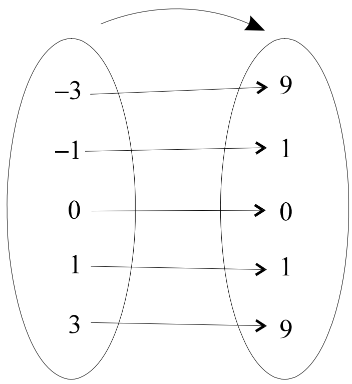
x	$f(x)=\sqrt{x}$
0	0
1	± 1
2	$\pm\sqrt{2}$
3	$\pm\sqrt{3}$
4	± 2
5	$\pm\sqrt{5}$

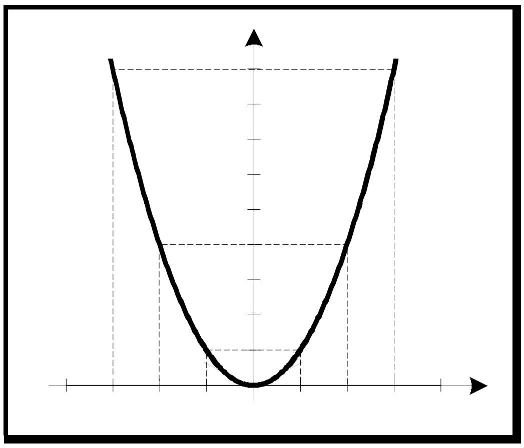




La expresión $f(x)=\sqrt{x}$ no es una función ya que *a cada valor de la primera magnitud (variable independiente) le corresponden dos en la segunda (variable dependiente)*, o lo que es lo mismo, *cada elemento del conjunto inicial posee dos imágenes*. Para que la expresión $f(x)=\sqrt{x}$ sea una función es preciso especificar delante de la raíz cuadrada uno de los dos signos, + 0 − para que de esta manera cada elemento del conjunto inicial posea una sola imagen. Así, son funciones $f(x)=+\sqrt{x}$ y $f(x)=-\sqrt{x}$.

x	$f(x)=x^2$
−3	9
−2	4
−1	1
0	0
1	1
2	4
3	9





La expresión $f(x)=x^2$ sí es una función, ya que *a cada valor de la primera magnitud (variable independiente) le corresponde un único valor en la segunda (variable dependiente)* o lo que es lo mismo, *cada elemento del conjunto inicial posee una sola imagen.*

Clasificación de las funciones

En la práctica suele conocerse algún procedimiento que permita deducir de cada valor de x el correspondiente de y. Según la naturaleza de esta ley, las funciones se clasifican en: ***Empíricas*** y ***Analíticas*** o ***Matemáticas***.

Las ***Empíricas***, son aquellas en las que su dependencia con la variable independiente resulta de la observación o experimentación de algún fenómeno (la temperatura del medio ambiente es función de la hora en que se realiza la observación). Las ***Analíticas*** son aquellas en las que la dependencia entre ambas variables está definida mediante relaciones matemáticas, generalmente una ecuación.

Las funciones ***Analíticas*** (son la mayoría) se dividen a su vez en ***Algebraicas*** y ***Trascendentes***.

Las funciones ***Algebraicas*** son aquellas en las que las operaciones que hay que hacer con la variable independiente son las de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación. Las ***Algebraicas*** pueden ser ***Explícitas*** o ***Implícitas***. En las ***Explícitas*** se puede hallar la imagen de x por simple sustitución, mientras que en las ***Implícitas*** es preciso hacer operaciones. Las ***Explícitas*** se dividen a su vez en ***Racionales*** e ***Irracionales***. En las ***Racionales*** la variable independiente no figura debajo del signo radical, ni lleva exponente fraccionario. Pueden ser ***Enteras*** o ***Fraccionarias*** según que la expresión del segundo miembro sea entera o fraccionaria con relación a la variable independiente. En las ***Irracionales*** la variable independiente aparece bajo el signo radical o está con exponente fraccionario.

Las ***Trascendentes*** son aquellas en las que la variable independiente figura como exponente o índice de una raíz o se halla afectada del signo logaritmo o de cualquiera de los signos que emplea la trigonometría.

Funciones
- *Analíticas*
  - *Algebraicas*
    - **Polinómicas**: $f(x) = x^2 - 2x + 1$
    - **Racionales**: $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$
    - **Irracionales**: $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$
  - *Trascendentes*
    - **Exponenciales**: $f(x) = 3^x$
    - **Logarítmicas**: $f(x) = \log(3x - 1)$
    - **Trigonométricas**: $f(x) = \cos x$
- *Empíricas*

Cálculo del dominio de una función

Funciones polinómicas

Son de la forma $\mathbf{f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_1 x + a_0}$.

El dominio es: $D = \forall x \in R$

Funciones racionales

Están formadas por el cociente de dos funciones polinómicas.

Son de la forma $$\mathbf{f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots\cdots\cdots\cdots + b_1 x + b_0}}$$

Las funciones racionales existen para cualquier de la variable independiente excepto para aquellos valores que anulan el denominador, en los cuales no están definidas.

Ejemplo: Calcular el dominio de las funciones:

$$\mathbf{a)\ f(x) = \frac{2x-1}{x+1} \quad b)\ y = 1 + \frac{1}{x} \quad c)\ g(x) = \frac{1}{x^2-5x+6} \quad d)\ h(x) = \frac{7x-1}{x^3-3x^2+x}}$$

$$\mathbf{e)\ j(x) = \frac{-2x+7}{x^3+3x^2-4x-12} \qquad j)\ F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}}$$ **(G, M y m son constantes)**

Funciones con radicales

Son aquellas en las que intervienen expresiones de la forma $\mathbf{f(x) = \sqrt[n]{f(x)}}$. Se pueden presentar dos casos:

a) <u>Si n es impar</u>

Siempre existe la raíz, por tanto el dominio es: $\mathbf{D = \forall x \in R}$

b) <u>Si n es par</u>

Se debe de verificar que $\mathbf{f(x) \geq 0}$

Ejemplo: Calcular el dominio de las siguientes funciones:

$$\mathbf{a)\ f(x) = \sqrt[5]{x^2-1} \quad b)\ g(x) = \sqrt[4]{x^2-1} \quad c)\ h(x) = \sqrt{x^3-x} \quad d)\ j(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}}$$

$$\mathbf{e)\ y = \frac{1}{\sqrt{x^4-1}} \quad f)\ f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{3x+1}} \quad g)\ y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{3x+1}} \quad h)\ y = \frac{\sqrt{-2x+7}}{x^3+3x^2-4x-12}}$$

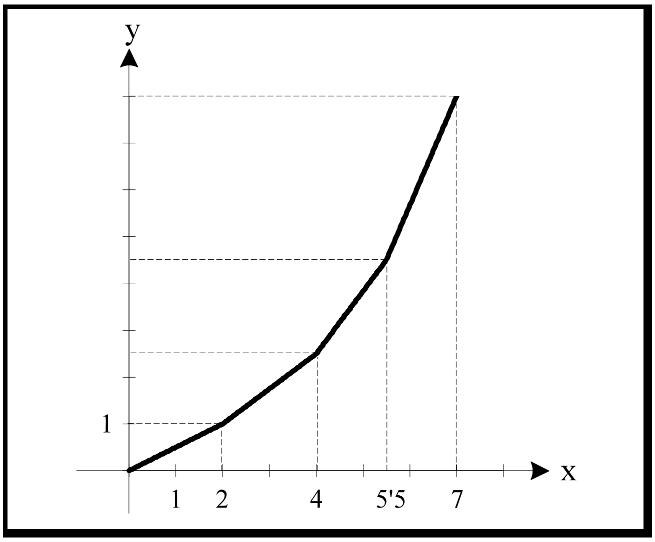
Funciones formadas por trozos de rectas

En general, la ecuación de una recta viene dada por la expresión $\mathbf{y} = \mathbf{a}\,\mathbf{x} + \mathbf{b}$, donde **a** es la pendiente de la recta y **b** es la ordenada en el origen o punto donde la recta corta al eje de ordenadas. En esta ecuación, **x** es la variable independiente (que se representa siempre en el eje horizontal o eje de abscisas) e **y** es la variable dependiente (que se representa siempre en el eje vertical o eje de ordenadas), pero las variables varían según el problema que se trate, como se observará más adelante.

Toda recta queda determinada por dos puntos. ***Los puntos más cómodos para su representación gráfica (salvo para las rectas paralelas a los ejes) son aquellos en los cuales la recta corta a los ejes de coordenadas, es decir, uno cuya abscisa vale 0 y otro cuya ordenada vale 0.***

Si tenemos la representación gráfica de una recta y queremos plantear su ecuación, debemos buscar dos puntos de la recta (cuyas coordenadas conozcamos) y hacer que verifiquen lu ecuación $y = a\,x + b$***, para obtener las constantes*** a ***y*** b***.***

Ejemplo 1



Calcular la ecuación correspondiente a cada uno de los tramos de recta representados en la gráfica adjunta.

Esta función formada por cuatro trozos de rectas verifica las siguientes condiciones para cada tramo.

En el primero tramo $x \in [0,2[$. En el segundo tramo $x \in [2,4[$. En el tercero tramo $x \in [4,5'5[$. En el cuarto tramo $x \in [5'5,7]$.

Primer tramo

La recta pasa por los puntos $(0,0)$ y $(2,1)$. Como tienen que verificar la ecuación $y = a\,x + b$ se tiene:

$$(0,0) \;\rightarrow\; 0 = a \cdot 0 + b \qquad\qquad (2,1) \;\rightarrow\; 1 = a \cdot 2 + b$$

Resolvemos el sistema formado por estas dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} b = 0 \\ 2a + b = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}$$

Por tanto la ecuación del primer tramo es $\quad y = \frac{1}{2}x$

Segundo tramo

La recta pasa por los puntos $(2,1)$ y $(4,2'5)$. Como tienen que verificar la ecuación $y = ax + b$ se tiene:

$$(2,1) \quad \rightarrow \quad 1 = a \cdot 2 + b \qquad\qquad (4,2'5) \quad \rightarrow \quad 2'5 = a \cdot 4 + b$$

Resolvemos el sistema formado por estas dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 2a + b = 1 \\ 4a + b = 2'5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \frac{3}{4} \\ b = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Por tanto la ecuación del segundo tramo es $\quad y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$

Tercer tramo

La recta pasa por los puntos $(4,2'5)$ y $(5'5,4'5)$. Como tienen que verificar la ecuación $y = ax + b$ se tiene:

$$(4,2'5) \quad \rightarrow \quad 2'5 = a \cdot 4 + b \qquad\qquad (5'5,4'5) \quad \rightarrow \quad 4'5 = a \cdot 5'5 + b$$

Resolvemos el sistema formado por estas dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 4a + b = 2'5 \\ 5'5a + b = 4'5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \frac{4}{3} \\ b = -\frac{17}{6} \end{array}\right.$$

Por tanto la ecuación del segundo tramo es $\quad y = \frac{4}{3}x - \frac{17}{6}$

Cuarto tramo

La recta pasa por los puntos $(5'5,4'5)$ y $(7,8)$. Como tienen que verificar la ecuación $y = ax + b$ se tiene:

$$(5'5,4'5) \quad \rightarrow \quad 4'5 = a \cdot 5'5 + b \qquad\qquad (7,8) \quad \rightarrow \quad 8 = a \cdot 7 + b$$

Resolvemos el sistema formado por estas dos ecuaciones:

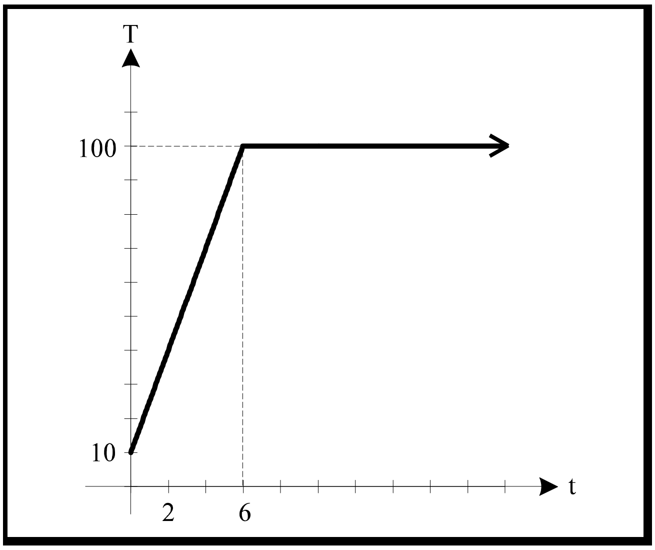
$$\left.\begin{array}{r} 5'5a + b = 4'5 \\ 7a + b = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{7}{3} \\ b = -\dfrac{25}{3} \end{array}\right.$$

Por tanto la ecuación del segundo tramo es $y = \dfrac{7}{3}x - \dfrac{25}{3}$

Los cuatro tramos se expresan conjuntamente mediante la expresión:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x & \text{si } x \in [0,2[\\ \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{2} & \text{si } x \in [2,4[\\ \dfrac{4}{3}x - \dfrac{17}{6} & \text{si } x \in [4,5'5[\\ \dfrac{7}{3}x - \dfrac{25}{3} & \text{si } x \in [5'5,7] \end{cases}$$

Ejemplo 2



Esta función representa el fenómeno de un cazo con agua puesto al fuego. Al cabo de 6 minutos el agua hierve y a partir de aquí la temperatura del agua seguirá siendo de 100 ºC hasta que el agua se evapore totalmente.

Deducir las ecuaciones correspondientes a cada tramo.

En este problema, las variables independiente y dependiente son respectivamente **t** y **T**, por tanto la ecuación de la recta viene dada por la expresión $T = a\,t + b$.

Primer tramo

La recta pasa por los puntos $(0,10)$ y $(6,100)$. Como tienen que verificar la ecuación $T = a\,t + b$ se tiene:

$$(0,10) \rightarrow 10 = a \cdot 0 + b \qquad\qquad (6,100) \rightarrow 100 = a \cdot 6 + b$$

Resolvemos el sistema formado por estas dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} b = 10 \\ 6a + b = 100 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 15$$

Por tanto la ecuación del primer tramo es $T = 15t + 10$

<u>Segundo tramo</u>

Por ser una recta paralela al eje de abscisas, cuya prolongación cortaría al eje de ordenadas en el punto $(0,100)$, la ecuación es $T = 100$.

Los dos tramos se expresan conjuntamente mediante la expresión: $T = \begin{cases} 15t + 10 & \text{si } t \in \left]0,6\right[\\ 100 & \text{si } t \in \left[6,\infty\right[\end{cases}$

<u>Ejemplo 3</u>

El pago por consumo de agua en una zona de veraneo es de 6 € por los primeros $10\ m^3$. A partir de esta cantidad el precio aumenta a razón de 30 céntimos por cada m^3.

Deduce las ecuaciones correspondientes a cada tramo y haz una representación gráfica.

En este problema, las variables independiente y dependiente son respectivamente **C** y **P**, por tanto la ecuación de la recta viene dada por la expresión $P = aC + b$.

<u>Primer tramo</u>

Durante los primeros 10 m^3 el precio es constante por tanto la gráfica correspondiente a este tramos es una recta paralela al eje de abscisas que corta al eje de ordenadas en el punto $(0,6)$. La ecuación es $P = 6$.

Segundo tramo

Un punto es el $(10,6)$. Como nos dicen que el precio aumenta a razón de 30 céntimos cada m^3, el segundo punto es por ejemplo $(11,6'3)$. Estos dos puntos tienen que verificar la ecuación de la recta $P = a\,C + b$.

$$(10,6) \;\rightarrow\; 6 = a\cdot 10 + b \qquad\qquad (11,6'3)\;\; 0 \;\rightarrow\; 6'3 = a\cdot 11 + b$$

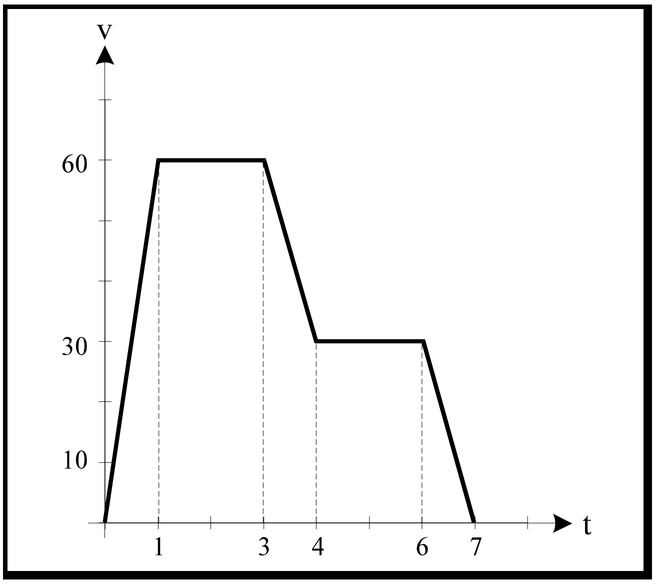
Resolvemos el sistema formado por estas dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 10\,a + b = 6 \\ 11\,a + b = 6'3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a = 0'3 \\ b = 3 \end{cases}$$

Los dos tramos se expresan conjuntamente mediante la expresión:

$$P = \begin{cases} 6 & \text{si } \; C \in [0,10] \\ 0'3C + 3 & \text{si } \; C > 10 \end{cases}$$

Ejemplo 4



La gráfica adjunta correspondiente al movimiento de una moto. Describe dicho movimiento y calcula las ecuaciones correspondientes a cada tramo.

$v \rightarrow$ km/h $\quad t \rightarrow$ h

En este problema, las variables independiente y dependiente son respectivamente **t** y **v**, por tanto la ecuación de la recta viene dada por la expresión $v = a\,t + b$.

Primer tramo

La moto parte del reposo y acelera durante 1 minuto hasta alcanzar una velocidad de 60 km/h. La recta pasa por los puntos $(0,0)$ y $(1,60)$. Como tienen que verificar la ecuación $v = a\,t + b$ se tiene:

$$(0,0) \;\rightarrow\; 0 = a\cdot 0 + b \qquad\qquad (1,60) \;\rightarrow\; 60 = a\cdot 1 + b$$

Resolvemos el sistema formado por estas dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} b = 0 \\ a + b = 60 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a = 60$$

Por tanto la ecuación del primer tramo es $\quad v = 60\,t$

<u>Segundo tramo</u>

Durante dos minutos (del 1 al 3) mantiene la velocidad constante e igual a 60 km/h.

Por ser una recta paralela al eje de abscisas cuya prolongación cortaría al eje de ordenadas en el punto $(0,60)$, la ecuación es $\ v = 60$.

<u>Tercer tramo</u>

A partir del minuto 3 y durante 1 minuto (hasta el 4), la moto va frenando hasta que alcanza la velocidad de 30 km/h.

La recta pasa por los puntos $(3,60)$ y $(4,30)$. Como tienen que verificar la ecuación $v = a\,t + b$ se tiene:

$$(3,60) \quad \rightarrow \quad 60 = a \cdot 3 + b \qquad\qquad (4,30) \quad \rightarrow \quad 30 = a \cdot 4 + b$$

Resolvemos el sistema formado por estas dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 3a + b = 60 \\ 4a + b = 30 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -30 \\ b = 150 \end{array}\right.$$

Por tanto la ecuación del tercer tramo es $\quad v = -30\,t + 150$

<u>Cuarto tramo</u>

Durante dos minutos (del 4 al 6) la moto mantiene la velocidad constante e igual a 30 km/h.

Por ser una recta paralela al eje de abscisas cuya prolongación cortaría al eje de ordenadas en el punto $(0,30)$, la ecuación es $\ v = 30$.

<u>Quinto tramo</u>

Del minuto 6 al 7 la moto va freneando hasta que se para.

La recta pasa por los puntos $(6,30)$ y $(7,0)$. Como tienen que verificar la ecuación $v = a\,t + b$ se tiene:

$$(6,30) \quad \rightarrow \quad 30 = a \cdot 6 + b \qquad\qquad (7,0) \quad \rightarrow \quad 0 = a \cdot 7 + b$$

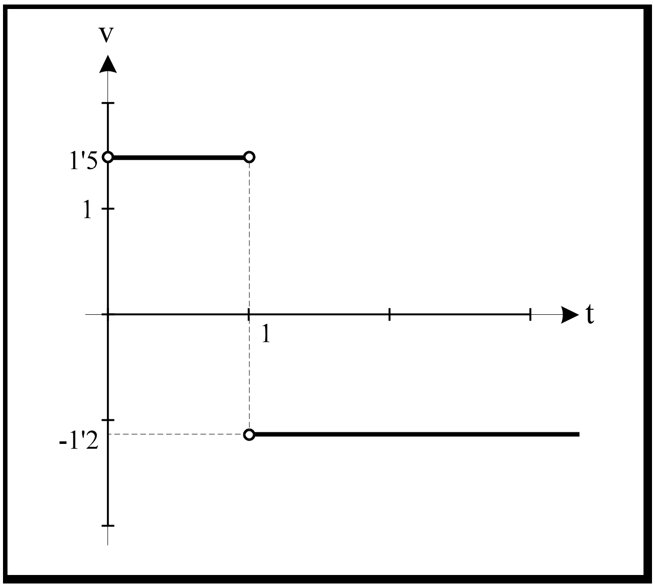
Resolvemos el sistema formado por estas dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 6a + b = 30 \\ 7a + b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -30 \\ b = 210 \end{array}\right.$$

Por tanto la ecuación del cuarto tramo es $v = -30t + 210$

Los cinco tramos se expresan mediante la expresión: $f(x) = \begin{cases} -60t & \text{si } t \in]0,1] \\ 60 & \text{si } t \in]1,3] \\ -30t + 150 & \text{si } t \in]3,4] \\ 30 & \text{si } t \in]4,6] \\ -30t + 210 & \text{si } t \in]6,7] \end{cases}$

Ejemplo 5

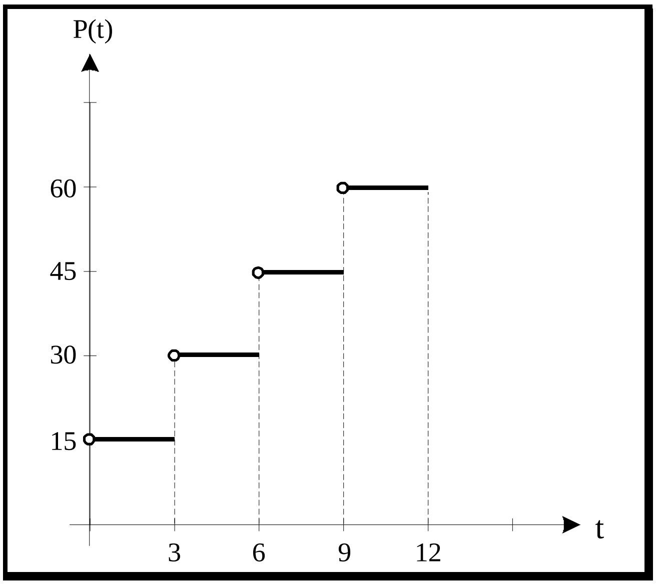


Esta gráfica representa el movimiento de una bola de billar que se dirige frontalmente hacia la banda a una velocidad de 1'5 m/seg. Al cabo de 1 seg. choca y de forma instantánea retrocede habiendo perdido un 20 % de su velocidad en el choque

Deduce las ecuaciones correspondientes a cada tramo.

$$v(t) = \begin{cases} 1'5 & \text{si } t < 1 \\ -1'2 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

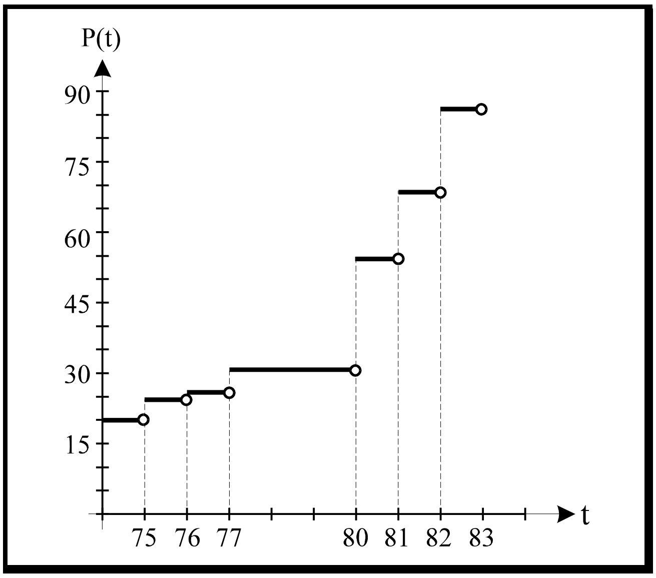
Funciones escalonadas



Llamada desde una cabina telefónica

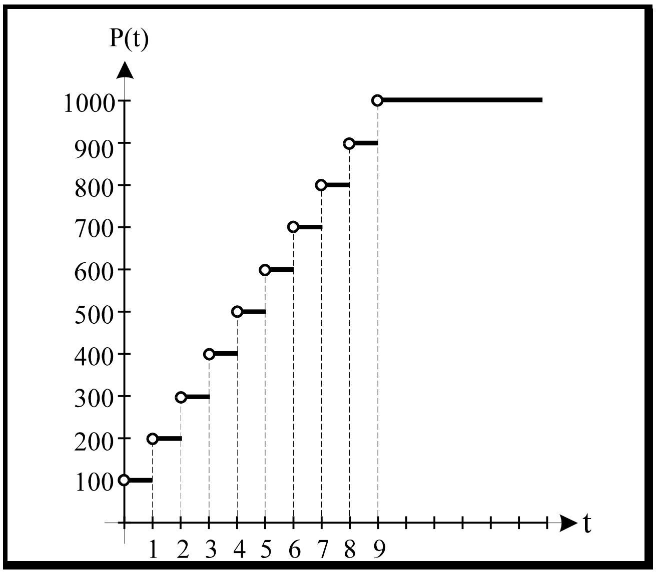
$$P(t)=\begin{cases}15 & \text{si } 0<t\le 3\\ 30 & \text{si } 3<t\le 6\\ 45 & \text{si } 6<t\le 9\\ 60 & \text{si } 9<t\le 12\\ \vdots & \qquad \vdots\end{cases}$$

Función que asocia a la duración de una llamada el importe de la misma en céntimos.



Variación del precio del litro de gasolina en céntimos durante los años 1974 a 1983.

$$P(t)=\begin{cases}20 & \text{si } 74\le t<75\\ 24 & \text{si } 75\le t<76\\ 26 & \text{si } 76\le t<77\\ 31 & \text{si } 77\le t<80\\ 54 & \text{si } 80\le t<81\\ 68 & \text{si } 81\le t<82\\ 86 & \text{si } 82\le t<83\end{cases}$$

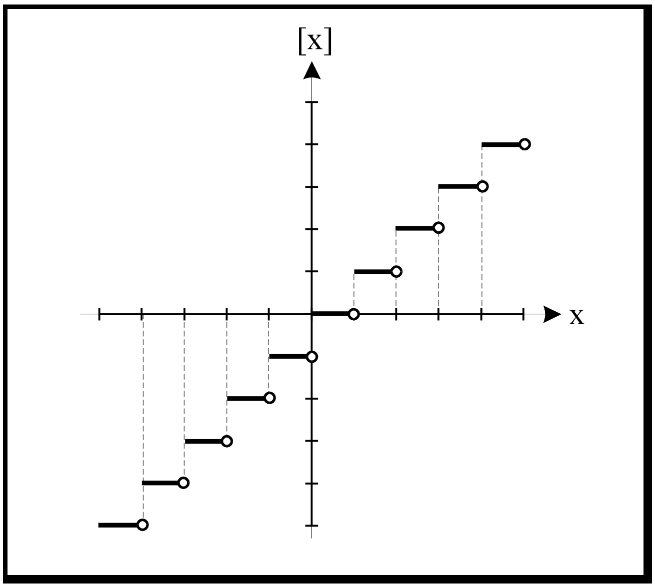


Tasa de un aparcamiento de coches.

$$P(t)=\begin{cases}100 & \text{si } 0<t\le 1\\ 200 & \text{si } 1<t\le 2\\ 300 & \text{si } 2<t\le 3\\ 400 & \text{si } 3<t\le 4\\ \vdots & \qquad \vdots\end{cases}$$

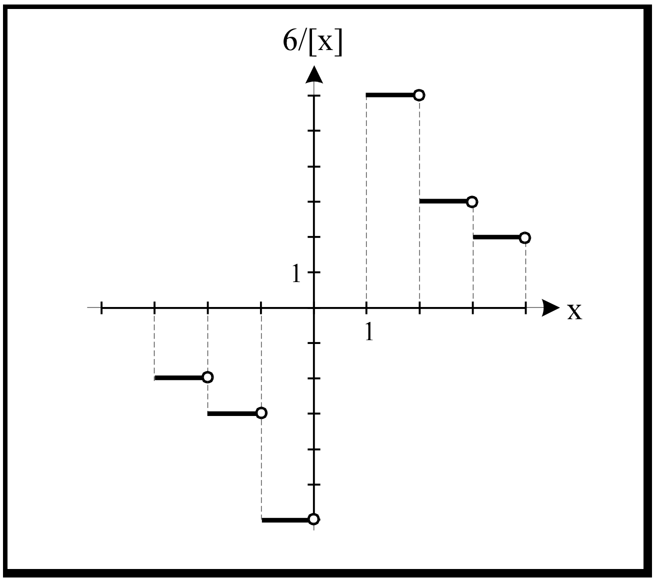
En un aparcamiento cobran 100 céntimos de euro la hora o fracción con un máximo de 1000 céntimos por día.

Parte entera de x



Se representa con el símbolo [x] y se define como el mayor número entero que sea menor o igual a x.

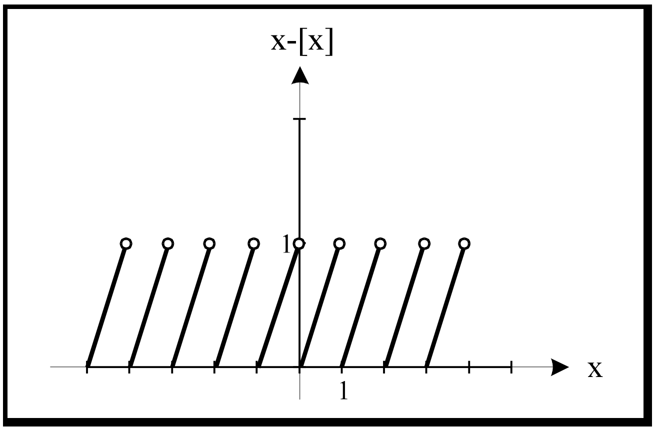
$$\mathbf{f(x) = Ent(x) = [x]}$$



$$\mathbf{f(x) = \frac{6}{[x]}}$$

Se observa que en el intervalo $[0,1]$ la función no existe, ya que el denominador es siempre cero

Parte decimal de x



Su expresión es:

$$\mathbf{f(x) = x - [x]}$$

Funciones formadas por trozos de rectas y parábolas

Cualquier función cuadrática se representa mediante una parábola. Una función cuadrática, en su forma completa viene dada por la expresión: $\mathbf{f(x) = a\,x^2 + b\,x + c}$. Si $a > 0$ la parábola está abierta hacia arriba y si $a < 0$ la parábola está abierta hacia abajo.

Cálculo del vértice

La abscisa del vértice es $\mathbf{x_v} = -\dfrac{\mathbf{b}}{\mathbf{2a}}$ y la ordenada es $\mathbf{y_v} = \mathbf{f}\left(-\dfrac{\mathbf{b}}{\mathbf{2a}}\right)$

Puntos de corte con los ejes

Con el eje de abscisas (eje x)

Se obtienen resolviendo la ecuación $a\,x^2 + b\,x + c = 0$, donde $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$.

- Si $b^2 - 4\,a\,c > 0$, la parábola corta en dos puntos al eje de abscisas (eje x).
- Si $b^2 - 4\,a\,c = 0$, la parábola corta en un punto al eje de abscisas (eje x). La parábola sería tangente al eje x.
- Si $b^2 - 4\,a\,c < 0$, la parábola no corta en ningún punto al eje de abscisas (eje x). Estaría toda ella por encima del eje x, si $a > 0$, o por debajo, si $a < 0$.

Con el eje de ordenadas

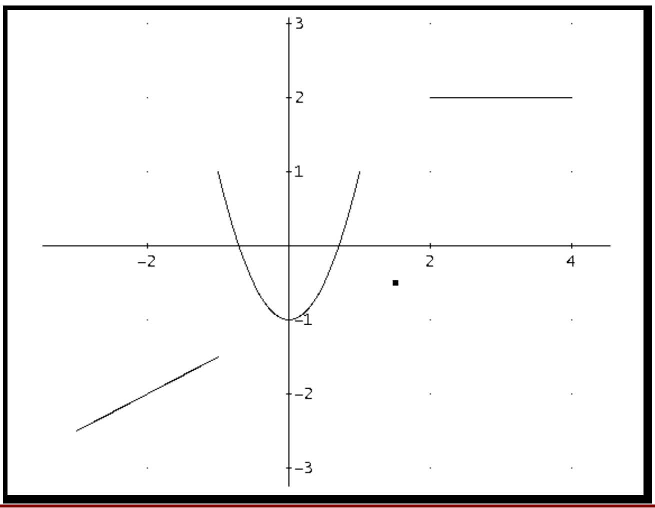
Se obtiene haciendo $x = 0$, por tanto es el punto $(0, c)$.

Obtención de algunos puntos próximos al vértice

Calcularemos el valor de la función en el propio vértice y en abscisas enteras próximas a él, a su derecha y a su izquierda.

Representación gráfica

Es importante escoger bien la escala.



Calcular la ecuación correspondiente a cada uno de los intervalos representados en la gráfica adjunta

Primer tramo

En el primer tramo hay un trozo de recta que pasa por los puntos $(-3,-2'5)$ y $(-1,-1'5)$. Como tienen que verificar la ecuación $y = ax + b$ se tiene:

$$(-3,-2'5) \;\rightarrow\; -2'5 = a\cdot(-3) + b \qquad\qquad (-1,-1'5) \;\rightarrow\; -1'5 = a\cdot(-1) + b$$

Resolvemos el sistema formado por estas dos ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} -3a + b &= -2'5 \\ -a + b &= -1'5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a = 0'5 \\ b = -1 \end{cases}$$

La ecuación del primer tramo es $y = 0'5x - 1$

Segundo tramo

El segundo tramo es una parábola que pasa por los puntos $(-1,1),(0,-1)$ y $(1,1)$. Como tienen que verificar la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ tenemos:

$$(-1,1) \;\rightarrow\; 1 = a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c \qquad\qquad (0,-1) \;\rightarrow\; -1 = a\cdot(0)^2 + b\cdot(0) + c$$

$$(1,1) \rightarrow 1 = a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c$$

$$\left.\begin{aligned} a - b + c &= 1 \\ c &= -1 \\ a + b + c &= 1 \end{aligned}\right\} \;\rightarrow\; \left.\begin{aligned} a - b &= 2 \\ a + b &= 2 \end{aligned}\right\} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{cases}$$

La ecuación del segundo tramo es: $y = 2x^2 - 1$

Tercer tramo

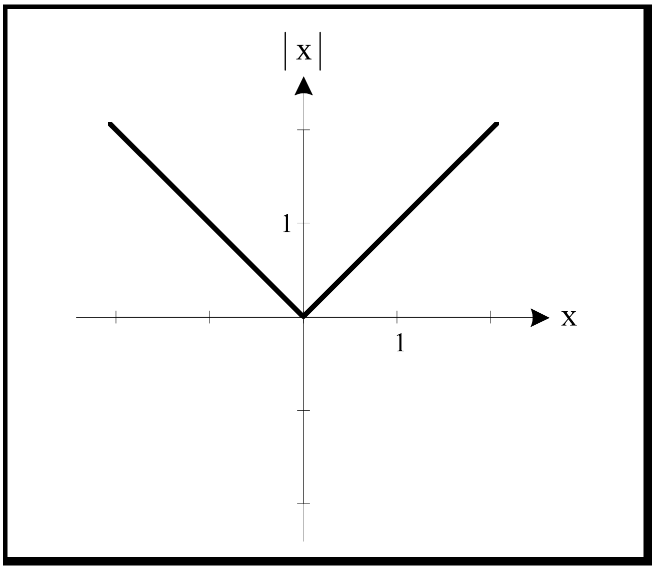
Es el punto $(1'5,-0'5)$.

Cuarto tramo

Es una recta paralela al eje de abscisas (eje x) cuya prolongación corta al eje de ordenadas en el punto $(0,2)$, por tanto su ecuación es $y = 2$.

Los cuatro tramos se expresan mediante la expresión: $f(x) = \begin{cases} 0'5x - 1 & \text{si} & -3 \le x < -1 \\ 2x^2 - 1 & \text{si} & -1 \le x < 1 \\ -0'5 & \text{si} & x = 1'5 \\ 2 & \text{si} & 2 \le x \le 4 \end{cases}$

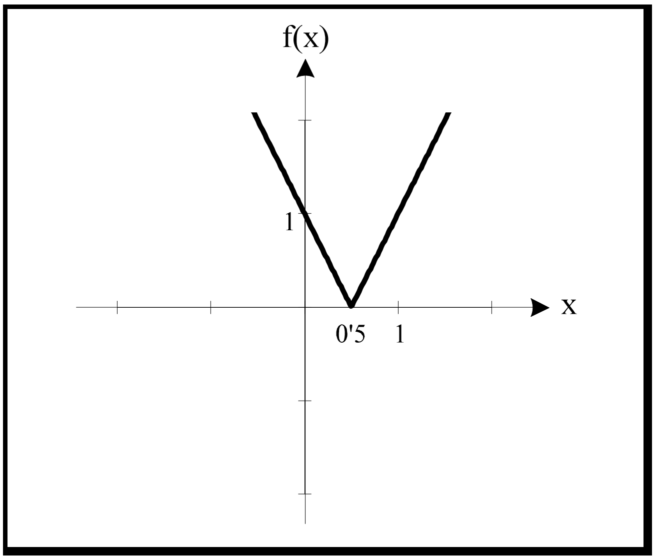
Valor absoluto de x



$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

La gráfica de la función $y = |f(x)|$ es muy fácil de representar si conocemos la de $y = f(x)$, pues basta pasar "hacia arriba" toda la porción de curva que está bajo el eje x. Esto significa que, cuando $f(x)$ es positivo hay que dejarlo como está, y cuando $f(x)$ es negativo hay que hacerlo positivo cambiándole el signo.

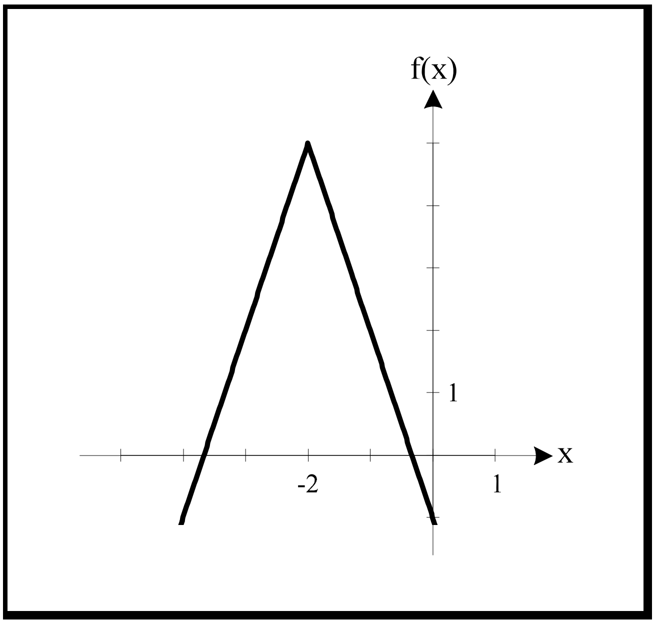
Para conocer la expresión analítica de $|f(x)|$ hay que conocer las abscisas en que $f(x)$ cambia de signo, es decir, donde $f(x) = 0$.



$$\mathbf{f(x) = |2x - 1|}$$

$$f(x) = \begin{cases} -(2x-1) & \text{si} \quad 2x - 1 < 0 \\ 0 & \text{si} \quad 2x - 1 = 0 \\ 2x - 1 & \text{si} \quad 2x - 1 > 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si} \quad x < \dfrac{1}{2} \\ 0 & \text{si} \quad x = \dfrac{1}{2} \\ 2x - 1 & \text{si} \quad x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

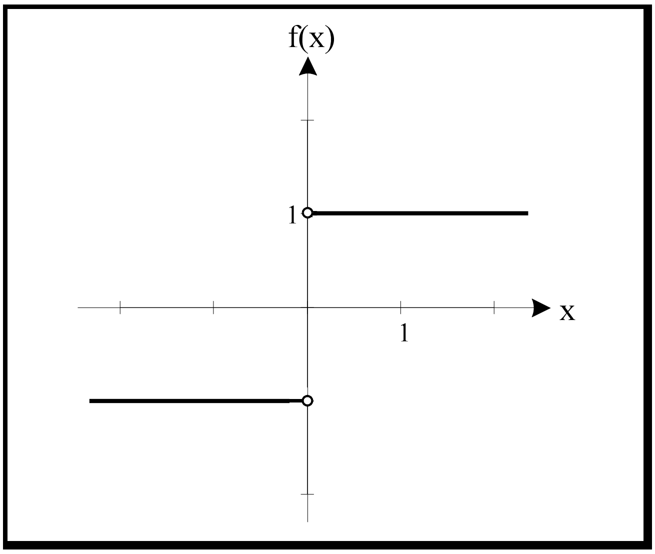


$$\mathbf{f(x) = 5 - 3 \cdot |x+2|}$$

$$|x+2| = \begin{cases} -(x+2) & \text{si} \quad x+2<0 \\ 0 & \text{si} \quad x+2=0 \\ x+2 & \text{si} \quad x+2>0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 5-3\cdot[-(x+2)] & \text{si} \quad x<-2 \\ 5-3\cdot 0 & \text{si} \quad x=-2 \\ 5-3\cdot(x+2) & \text{si} \quad x>-2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 11+3x & \text{si} \quad x<-2 \\ 5 & \text{si} \quad x=-2 \\ -1-3x & \text{si} \quad x>-2 \end{cases}$$

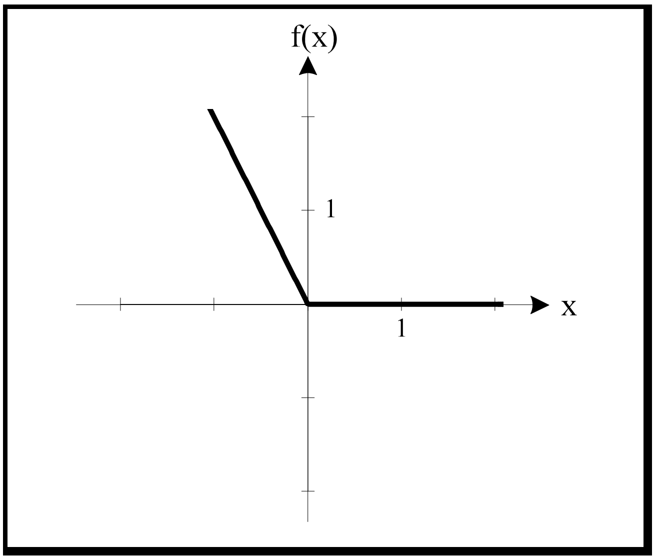


$$\mathbf{f(x) = \frac{|x|}{x}}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{x} & \text{si} \quad x<0 \\ \dfrac{x}{x} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x<0 \\ 1 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

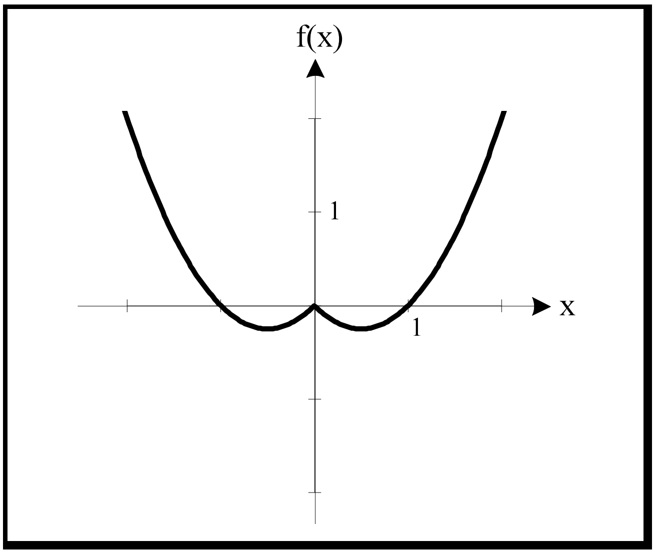
En $x = 0$ la función no está definida.



$$\mathbf{f(x) = |x| - x}$$

$$f(x) = \begin{cases} -x-x & \text{si} \quad x<0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \\ x-x & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

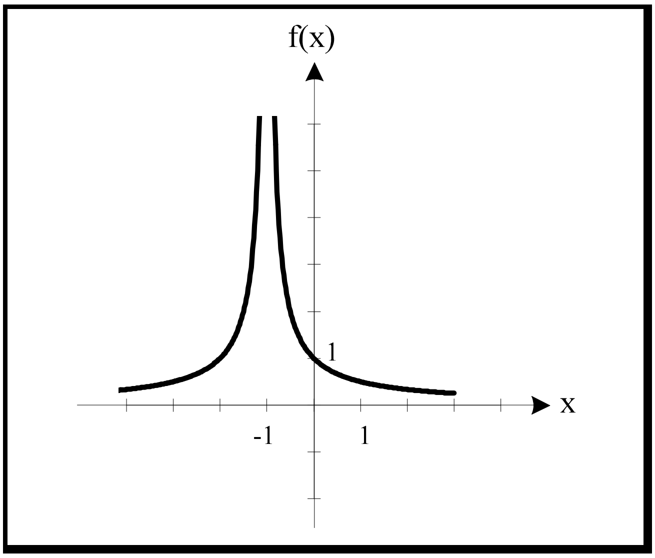
$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si} \quad x<0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \\ 0 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$



$$\mathbf{f(x) = x^2 - |x|}$$

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ x^2 - x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

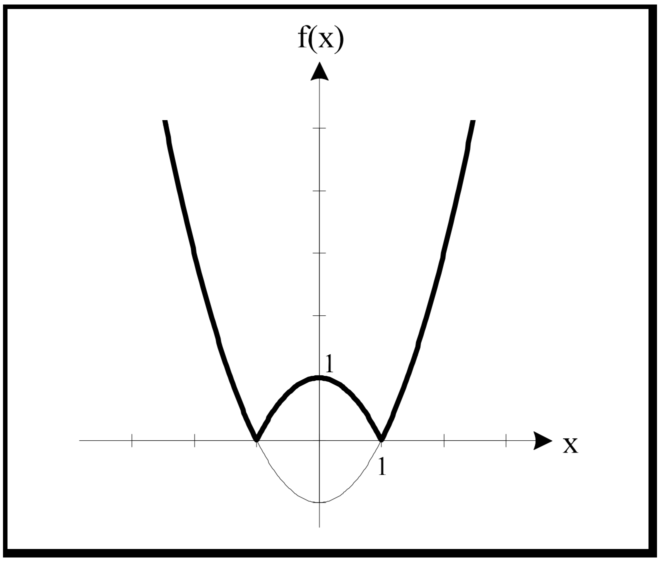


$$\mathbf{f(x) = \frac{1}{|x+1|}}$$

$$|x+1| = \begin{cases} -x-1 & \text{si} \quad x+1 < 0 \\ x+1 & \text{si} \quad x+1 < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{-x-1} & \text{si} \quad x < -1 \\ \dfrac{1}{x+1} & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$$

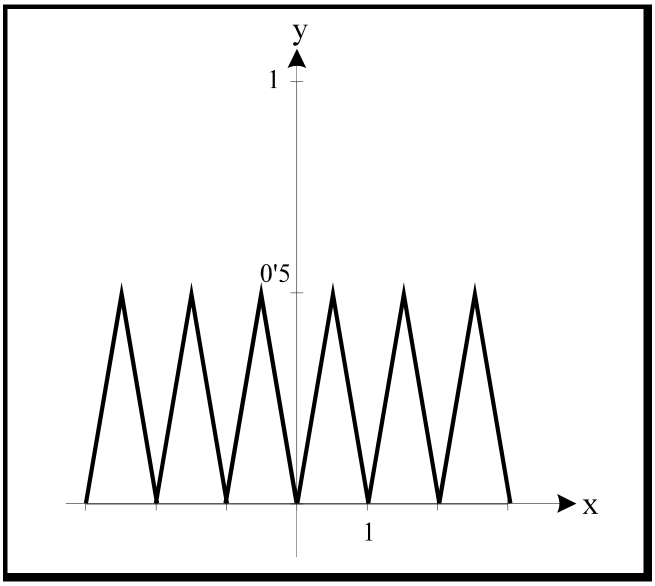
La función no está definida para $x = -1$



$$\mathbf{f(x) = |x^2 - 1|}$$

Representamos gráficamente la función $f(x) = x^2 - 1$ y posteriormente pasamos hacia arriba, simétricamente respecto al eje de abscisas, la porción de gráfica que esta situada debajo de dicho eje.

Funciones periódicas

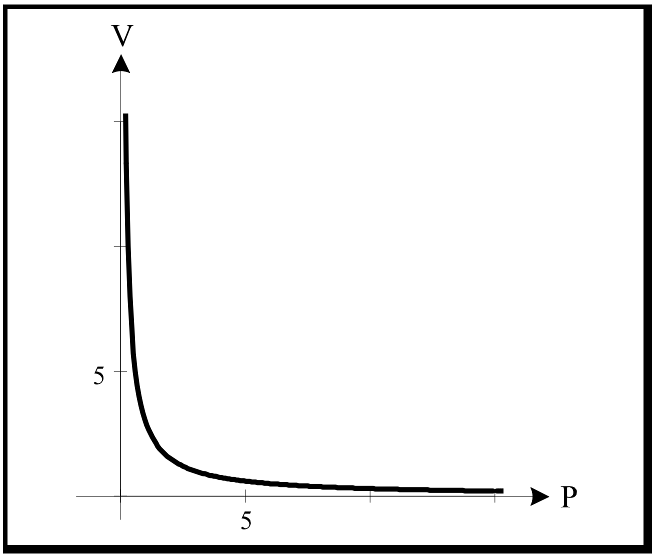


Función que relaciona la distancia positiva entre x y el entero más próximo.

x	y
-2	$-2+2=0$
$-1'7$	$-1'7-(-2)=0'3$
$-1'5$	$-1'5-(-1)=0'5$
$-1'3$	$-1'3-(-1)=0'3$
$-0'8$	$-0'8-(-1)=0'2$
$-0'5$	$-0'5-(-1)=0'5$
$-0'4$	$-0'4-(-0)=0'4$

Período = 1

Funciones de proporcionalidad inversa



$\mathbf{V=\frac{22'4}{P}}$ (V en litros y P en atmósferas)

En la gráfica se observa que a medida que aumenta la presión el volumen disminuye y viceversa, a medida que disminuye la presión el volumen aumenta, lo que expresamos de la siguiente manera:

$$\lim_{P\to\infty}\frac{22'4}{P}=0 \qquad \lim_{P\to 0}\frac{22'4}{P}=\infty$$

La función no está definida ni para presiones negativas ni para $P=0$

Composición de funciones

Consideremos las funciones f y g aplicadas una a continuación de la otra, de la siguiente forma:

$$\begin{array}{lllll} R & \xrightarrow{f(x)=x^2} & R & \xrightarrow{g(x)=3x-1} & R \\ 2 & \longrightarrow & f(2)=4 & \longrightarrow & g(4)=g[f(2)]=11 \\ 3 & \longrightarrow & f(3)=9 & \longrightarrow & g(9)=g[f(3)]=26 \\ \dots & & & & \end{array}$$

Vemos que aparece una nueva función, que llamamos composición de f con g y que simbolizamos con $\mathbf{g \circ f}$. Su acción sobre x es:

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g[f(x)]$$

$$\uparrow \qquad\qquad \uparrow \qquad\qquad \uparrow$$

Dada una cantidad cualquiera	Obtenemos su imagen por la función f	Y a continuación la imagen de f(x) por la función g

Es decir, en el ejemplo concreto que estamos siguiendo:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(x^2) = 3x^2 - 1$$

Con esta fórmula compacta podemos calcular directamente, sin seguir los pasos de la cadena:

$$(g \circ f)(2) = g[f(2)] = g(2^2) = 3 \cdot 2^2 - 1 = 11 \qquad (g \circ f)(3) = g[f(3)] = g(3^2) = 3 \cdot 3^2 - 1 = 26$$

Observa que el orden de aparición de f y g en el símbolo $g \circ f$ y en el diagrama en cadena están invertidos.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "(g\circ f)(x) = g[f(x)]"'] & R \arrow[r, "g"] & R \end{tikzcd}$$

pero de ambas formas queda claro que primero se aplica la función f y luego g.

$$\boxed{\mathbf{(g \circ f)(x) = g[f(x)]}}$$

Ejemplo: Muchas veces una función dada puede considerarse como compuesta de dos funciones más sencillas. Así se facilita su estudio.

La función $y = \sqrt{x^5 + 2}$ se calcula claramente en dos etapas, haciendo $f(x) = x^5 + 2$ y $g(x) = \sqrt{x}$, es decir:

$$x \xrightarrow{\quad f \quad} f(x) \xrightarrow{\quad g \quad} g[f(x)]$$

En consecuencia, se puede expresar dicha función como la composición de las funciones $f(x) = x^5 + 2$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Tenemos por tanto:

$$y = (g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(x^5 + 2) = \sqrt{x^5 + 2}$$

Ejemplo: La función $y = (x^3 - 2)^7$ es composición de $f(x) = x^3 - 2$ y $g(x) = x^7$

$$y = (g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(x^3 - 2) = (x^3 - 2)^7$$

La composición de funciones no es conmutativa

Se verifica $\mathbf{(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)}$

Ejemplo: Dadas las funciones $\mathbf{f(x) = 2x - 3}$ y $\mathbf{g(x) = 3x^2 + 4}$, hallar $\mathbf{g \circ f}$ y $\mathbf{f \circ g}$

$$\left.\begin{array}{l} (g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(2x-3) = 3(2x-3)^2 + 4 = 12x^2 - 36x + 31 \\ (f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(3x^2+4) = 2(3x^2+4) - 3 = 6x^2 + 5 \end{array}\right\} \Rightarrow (g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$$

Se pueden componer tres funciones o más

Si tenemos tres funciones $f(x), g(x)$ y $h(x)$ y queremos hallar la función compuesta $(h \circ g \circ f)(x)$ obtenemos

$$x \xrightarrow{\quad f \quad} f(x) \xrightarrow{\quad g \quad} g[f(x)] \xrightarrow{\quad h \quad} h[g[f(x)]]$$

es decir:

$$\mathbf{(h \circ g \circ f)(x) = h[(g \circ f)(x)] = h[g[f(x)]]}$$

Ejemplo: Sean las funciones $\mathbf{f(x) = x^2}$ $\mathbf{g(x) = x + 3}$ y $\mathbf{h(x) = 2x}$. Hallar $\mathbf{(h \circ g \circ f)(x)}$.

$$(h \circ g \circ f)(x) = h[(g \circ f)(x)] = h[g[f(x)]] = h[g[x^2]] = h[x^2 + 3] = 2(x^2 + 3) = 2x^2 + 6$$

Ejemplo: Construye $\mathbf{f \circ g}$ y $\mathbf{g \circ f}$, siendo:

a) $\mathbf{f(x) = 3x + 2}$ **y** $\mathbf{g(x) = \dfrac{5}{x}}$ **b)** $\mathbf{f(x) = \sqrt{x}}$ **y** $\mathbf{g(x) = x^2 - 2x}$

a) $(f\circ g)(x)=f\left[g(x)\right]=f\left(\dfrac{5}{x}\right)=3\cdot\dfrac{5}{x}+2=\dfrac{15+2x}{x}$

$(g\circ f)(x)=g\left[f(x)\right]=g(3x+2)=\dfrac{5}{3x+2}$

b) $(f\circ g)(x)=f\left[g(x)\right]=f\,(x^2-2x)=\sqrt{x^2-2x}$

$(g\circ f)(x)=g\left[f(x)\right]=g\left(\sqrt{x}\right)=\left(\sqrt{x}\right)^2-2\sqrt{x}=x-2\sqrt{x}$

Ejemplo: **Dadas las funciones:**

$\mathbf{f(x)=x^2+3x-5}$ $\quad\mathbf{g(x)=\sqrt{x}}$ $\quad$ **y** $\quad\mathbf{h(x)=x+a}$ **con** $\mathbf{h\in R}$**, calcular:**

$\mathbf{f\circ g}$ **;** $\mathbf{g\circ f}$ **;** $\mathbf{h\circ g}$ **;** $\mathbf{g\circ h}$ **;** $\mathbf{h\circ g\circ f}$ **;** $\mathbf{f\circ g\circ h}$ **;** $\mathbf{f(x+h)-f(x)}$ **y** $\mathbf{\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}}$

- $(f\circ g)(x)=f\left[g(x)\right]=f\left(\sqrt{x}\right)=\left(\sqrt{x}\right)^2+3\sqrt{x}-5=x+3\sqrt{x}-5$
- $(g\circ f)(x)=g\left[f(x)\right]=g\,(x^2+3x-5)=\sqrt{x^2+3x-5}$
- $(h\circ g)(x)=h[g(x)]=h\left(\sqrt{x}\right)=\sqrt{x}+a$
- $(g\circ h)(x)=g[h(x)]=g(x+a)=\sqrt{x+a}$
- $(h\circ g\circ f)(x)=h[(g\circ f)(x)]=h[g[f(x)]]=h[g[x^2+3x-5]]=$

  $$h\left[\sqrt{x^2+3x-5}\right]=\sqrt{x^2+3x-5}+a$$
- $(f\circ g\circ h)(x)=f[(g\circ h)(x)]=f[g[h(x)]]=f[g[x+a]]=f\left[\sqrt{x+a}\right]=$

  $$\left(\sqrt{x+a}\right)^2+3\sqrt{x+a}-5=x+a+3\sqrt{x+a}-5$$
- $f(x+h)-f(x)=(x+h)^2+3(x+h)-5-(x^2+3x-5)=2xh+h^2+3h$
- $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}=\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

Ejemplo: **Expresar las siguientes funciones como composición de dos funciones:**

a) $\mathbf{y=\dfrac{7}{2x^2+5}}$ $\qquad$ **b)** $\mathbf{y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}$ $\qquad$ **c)** $\mathbf{y=(7x^2-3)^3}$

a) $\left.\begin{array}{l} f(x)=2x^2+5 \\ g(x)=\dfrac{7}{x} \end{array}\right\} \rightarrow \quad y=(g\circ f)(x)=g[f(x)]=g\left[2x^2+5\right]=\dfrac{7}{2x^2+5}$

b) $\left.\begin{array}{l} f(x)=\sqrt{x} \\ g(x)=\dfrac{1+x}{1-x} \end{array}\right\} \rightarrow \quad y=(g\circ f)(x)=g[f(x)]=g\left[\sqrt{x}\right]=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

c) $\left.\begin{array}{l} f(x)=7x^2-3 \\ g(x)=x^3 \end{array}\right\} \rightarrow \quad y=(g\circ f)(x)=g[f(x)]=g\left[7x^2-3\right]=\left(7x^2-3\right)^3$

Ejemplo: Expresar $\mathbf{y=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+3}}}$ **como composición de tres funciones.**

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2+3 \\ g(x)=\sqrt{x} \\ h(x)=\dfrac{2}{x} \end{array}\right\} \rightarrow \quad \begin{array}{c} y=(h\circ g\circ f)(x)=h[(g\circ f)(x)]=h[g[f(x)]]= \\ h[g[x^2+3]]=h\left[\sqrt{x^2+3}\right]=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+3}} \end{array}$$

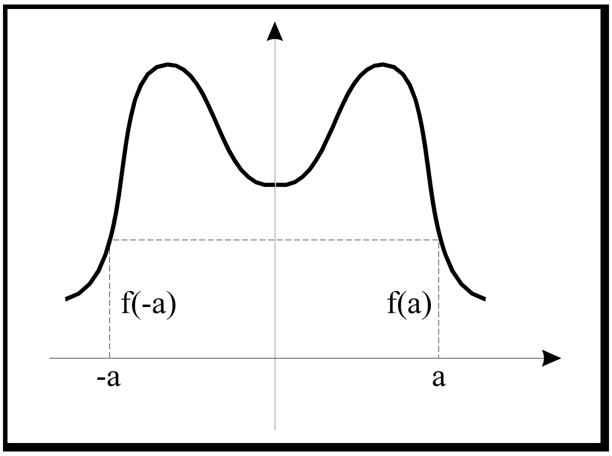
Simetrías de una función

Simetría respecto al eje de ordenadas

Si una función $f(x)$ verifica que $\mathbf{f(x)=f(-x)}$ cualquiera que sea x, es decir, toma los mismos valores a los dos lados del eje de ordenadas, entonces es simétrica respecto a este eje.

A esta funciones se les llama ***pares*** *porque las funciones polinómicas que cumplen esta condición sólo tienen términos con exponente par*.

Para construir la gráfica de una función simétrica respecto al eje de ordenadas, será suficiente representar gráficamente los valores positivos, $x>0$; el resto de la gráfica se obtendrá por simetría respecto al eje vertical



Ejemplo: La función $y=x^2+3$ es par, pues:

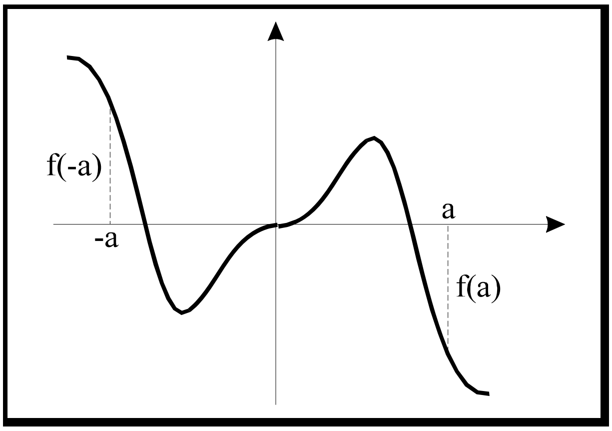
$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2+3 \\ f(-x)=(-x)^2+3=x^2+3 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(x)=f(-x)$$

Simetría respecto al origen de coordenadas

Si una función $f(x)$ verifica que $\mathbf{f(-x) = -f(x)}$, cualquiera que sea x, entonces es simétrica respecto al origen de coordenadas.

A esta funciones se les llama ***impares*** *porque las funciones polinómicas que cumplen esta condición sólo tienen términos con exponente impar*.

Para construir la gráfica de una función simétrica respecto al origen de coordenadas será suficiente conocer la gráfica correspondiente a los valores positivos de x; $x > 0$. El resto se obtendrá por simetría respecto al origen.



Ejemplo: La función $y = x^3 + 3x$ es impar, pues:

$$\left.\begin{array}{l} f(-x) = (-x)^3 + 3(-x) = -x^3 - 3x \\ -f(x) = -\left(x^3 + 3x\right) = -x^3 - 3x \end{array}\right\} \Rightarrow f(-x) = -f(x)$$

Simetría respecto al eje de abscisas

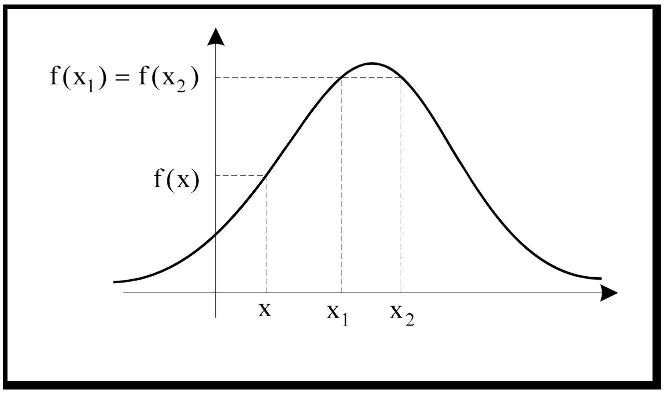
No tiene demasiado interés, porque las correspondencias que presentan estas simetrías no son funciones.

Para que la curva representativa de una función $f(x)$ sea simétrica respecto al eje de abscisas, es condición necesaria y suficiente que la ecuación no se modifique al sustituir y por $-y$.

La ecuación tiene la forma $y = \pm f(x)$, es decir, para cada valor de x obtenemos dos valores de y de signos opuestos, pero ojo, esto no es una función salvo si la consideramos como dos funciones diferentes $y = +f(x)$ e $y = -f(x)$.

Ejemplo: $y = \sqrt{x}$ es simétrica respecto al eje de abscisas, pues a cada valor de x le corresponden dos valores opuestos en y:

Funciones inyectivas

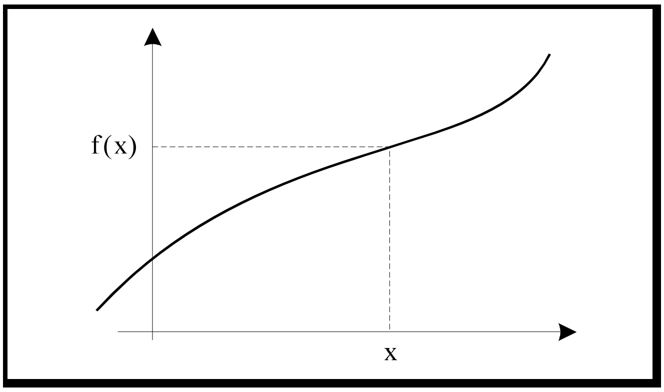


En una función, cada elemento del dominio tiene una imagen y sólo una. Esto implica que la recta vertical trazada por cualquier valor de x perteneciente al dominio corta a la gráfica de la función en un sólo punto. Por el contrario, un número del recorrido puede tener dos o más antiimágenes. Dicho de otra manera, es posible que dos o más valores distintos de x tengan la misma imagen.

Sin embargo, existen algunas funciones en las que no se da esta posibilidad y tienen suficiente importancia como para merecer un nombre especial: **funciones inyectivas**.

Una función es inyectiva cuando cada elemento de su recorrido tiene solamente una antiimagen.

Esto equivale a que dos números de su dominio no pueden tener la misma imagen, es decir, que en el caso de las funciones inyectivas $\mathbf{f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2}$



En las funciones inyectivas, la recta horizontal trazada por cualquier valor del recorrido corta a la gráfica en un único punto.

Todas las funciones estrictamente crecientes o estrictamente decrecientes son inyectivas.

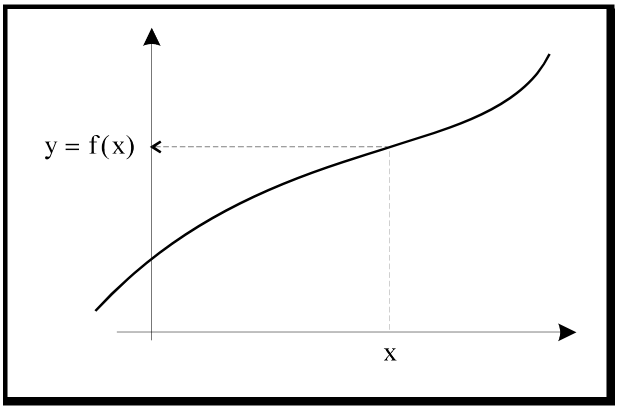
Funciones inversas o recíprocas

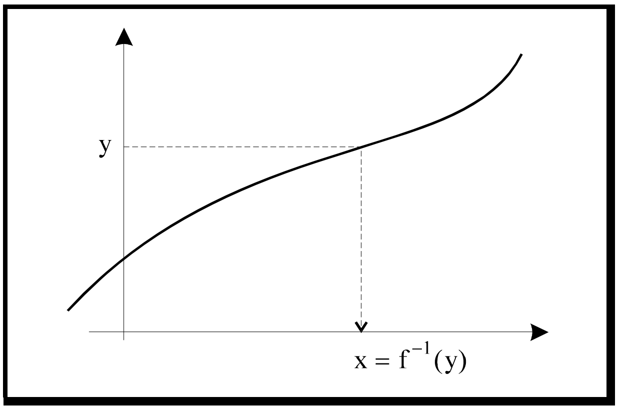
Una función es una correspondencia entre dos cantidades variables y, dentro de ciertos límites, somos libres de elegir cuál de ellas va a desempeñar el papel de variable independiente. Vamos a ilustrar esta idea con un ejemplo muy sencillo:

El área A de un cuadrado depende de la longitud del lado x, según se la función $A = x^2$. Pero, recíprocamente, podemos decir que el lado del cuadrado depende del área, según la función $x = \sqrt{A}$.

Decimos que estas dos funciones son ***inversas o recíprocas*** *entre sí. Representan la misma relación, pero en cada caso hemos tomado como variable independiente a una de las dos magnitudes relacionadas.*

La función inversa de la función f se representa por $\mathbf{f^{-1}}$.





Dada una función $\mathbf{y = f(x)}$***, su función inversa se genera intercambiando los papeles de variable independiente y dependiente, es decir, despejando, con lo que se obtiene*** $\mathbf{x = f^{-1}(y)}$.

Ejemplo: Calcular la inversa de la función $\mathbf{y = 2x - 4}$

Su inversa se obtiene despejando la variable x $x = \dfrac{y+4}{2}$

<u>*Podríamos dejar así las cosas, pero como lo más habitual es denominar x a la variable independiente e y a la dependiente, intercambiamos los nombres*</u>, con lo que la función inversa resulta:

$$y = \frac{x+4}{2}$$

Por tanto, la inversa de la función $y = 2x - 4$ es $f^{-1}(x) = \dfrac{x+4}{2}$

<u>***Observación importante***</u>

Cuando las variables representan magnitudes concretas, para invertir la función únicamente se despeja, y no se intercambia el nombre de las variables.

Ejemplo: En los países anglosajones la temperatura se mide en grados Fahrenheit. La escala Fahrenheit se expresa a partir de la centígrada, según la función:

$$t_F = \frac{9}{5} t_C + 32$$

(t_F: temperatura Fahrenheit, t_C: temperatura centígrada).

Invirtiendo la función anterior, obtenemos los grados centígrados a partir de los Fahrenheit:

$$t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32)$$

Si deseamos convertir una temperatura centígrada en su equivalente Fahrenheit, emplearemos la primera función; en caso contrario, la segunda.

	t_C	t_F
Tª congelación	0º	32º
Tª ebullición	100º	212º
Fiebre	37º	98'6º

Ejemplo: Para una determinada sensibilidad de una película de fotografía y unas condiciones dadas de iluminación, el tiempo de exposición y la abertura de diafragma de una cámara fotográfica deben estar mutuamente relacionados. Supongamos que en un caso concreto esta relación es:

tiempo de exposición	abertura de diafragma
1 / 8	22
1 / 15	16
1 / 30	11
1 / 60	8
1 / 125	5'6
1 / 250	4
1 / 500	2'8
1 / 1000	1'8

Si las circunstancias en las que hay que tomar la fotografía exigen un determinado tiempo de exposición (por ejemplo, un tiempo pequeño porque se trata de una fotografía en movimiento), habrá que leer la tabla de izquierda a derecha; en concreto, fijar el tiempo en 1/500 implica una abertura de diafragma de 2'8.

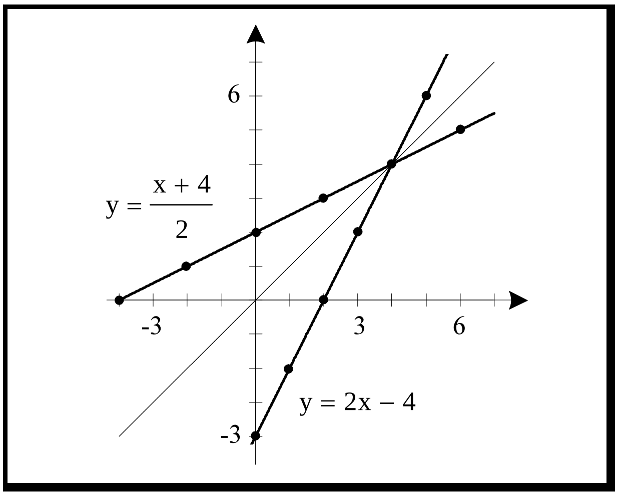
Por el contrario, si las condiciones impusieran un valor determinado de la abertura (ejemplo: un número alto de abertura para conseguir un enfoque más nítido), la tabla se leería de derecha a izquierda: a 16 le corresponde 1/15. Vemos así cómo en cada caso se ha considerado una de las dos funciones mutuamente inversas que define la tabla

Gráficas de las funciones inversas

Vamos a construir las tablas de valores y las gráficas de las funciones analizadas al principio, es decir, $f(x) = 2x - 4$ y $f^{-1}(x) = \dfrac{x+4}{2}$

x	$y = 2x - 4$
-1	-6
0	-4
1	-2
2	0
3	2
4	4
5	6

x	$y = \dfrac{x+4}{2}$
-6	-1
-4	0
-2	1
0	2
2	3
4	4
6	5



Como era de esperar, las tablas de las dos funciones mutuamente inversas son las mismas, salvo que las columnas están intercambiadas. Por consiguiente, los puntos representativos de ambas funciones tienen permutadas sus coordenadas, luego son simétricos respecto a la bisectriz del primer cuadrante como se aprecia en la gráfica. En consecuencia, como regla totalmente general, ***las gráficas de dos funciones inversas son simétricas entre sí, respecto a la bisectriz de los cuadrantes primero y tercero*****.**

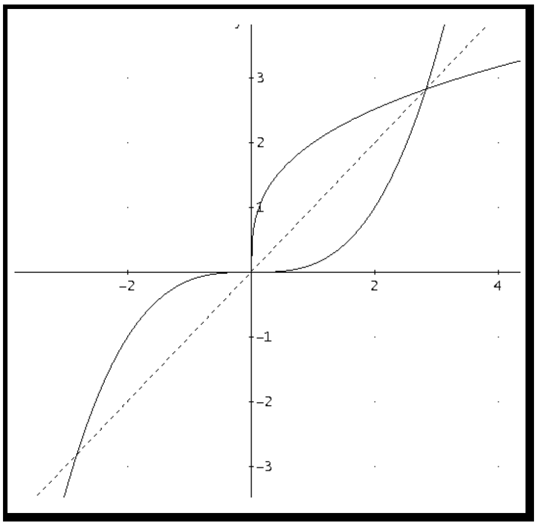
Ejemplo: Determinar la inversa de $\mathbf{f(x) = \dfrac{1}{8}x^3}$ y representa gráficamente f y $\mathbf{f^{-1}}$

Despejamos x: $x = \sqrt[3]{8\,f(x)}$

Permutamos los nombres de la variable y la función: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{8x}$

x	$f(x) = \dfrac{1}{8}x^3$
-3	$-3'375$
-2	-1
-1	$-0'125$
0	0
1	0'125
2	1
3	3'375

x	$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{8x}$
-3	$-2'88$
-2	$-2'52$
-1	-2
0	0
1	2
2	2'52
3	2'88



En la figura se puede observar que las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto a la bisectriz de los cuadrantes 1º y 3º.

Composición de una función y su inversa

Ejemplo: **Sea f una función inyectiva y f^{-1} su inversa. ¿Cuánto da $f^{-1}\left[f(5)\right]$? ¿Que función se obtiene al componer dos funciones inversas entre sí?**

$f^{-1}\left[f(5)\right]=5$, ya que al realizar el trayecto de ida y vuelta recuperamos el número inicial.

El resultado del apartado anterior es válido para cualquier valor de x, por lo tanto:

$$f^{-1}\left[f(x)\right]=x \quad \text{ó} \quad f\left[f^{-1}(x)\right]=x$$

Al componer una función con su inversa obtenemos la función identidad $\mathbf{I(x)=x}$.

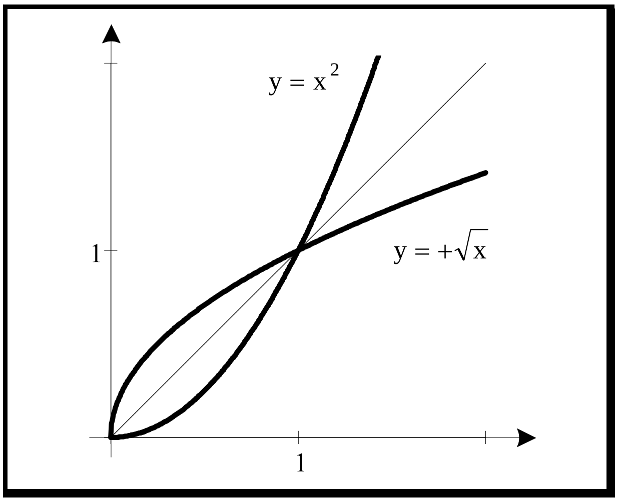
$$\boxed{\left(\mathbf{f}\circ\mathbf{f}^{-1}\right)(\mathbf{x})=\left(\mathbf{f}^{-1}\circ\mathbf{f}\right)(\mathbf{x})=\mathbf{x}}$$

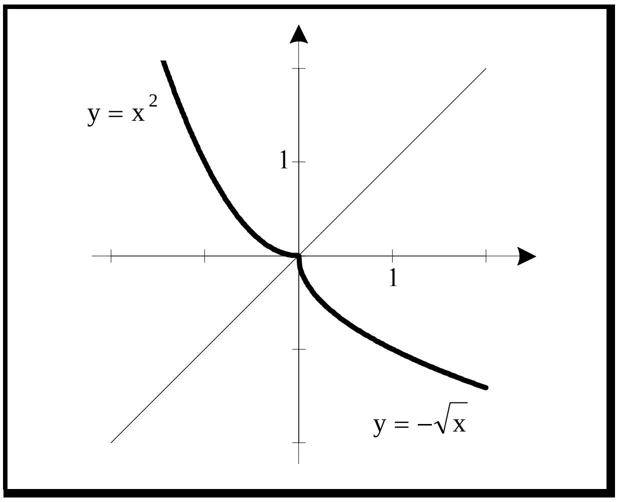
¿Cómo invertir funciones no inyectivas?

La función $y=x^2$ es una función no inyectiva, pero dividiendo su dominio en dos partes se obtienen sendas funciones inyectivas. Veamos la inversa de cada una de ellas:

La función $y=x^2$ para $x\geq 0$ es inyectiva, y su inversa es $y=+\sqrt{x}$. La función $y=x^2$ para $x\leq 0$ es inyectiva y su inversa es $y=-\sqrt{x}$.

En la primera función $y=x^2$, para $x=2 \Rightarrow y=4$ mientras que en la función inversa $y=+\sqrt{x}$ para $x=4 \Rightarrow y=2$. En la segunda función $y=x^2$, para $x=-2 \Rightarrow y=4$ mientras que en la función inversa $y=-\sqrt{x}$ para $x=4 \Rightarrow y=-2$.





En general, cuando una función no es inyectiva se divide su dominio, de forma que las dos nuevas funciones así obtenidas sean inyectivas. Posteriormente, para cada una de ellas se calcula su inversa en su dominio de definición.

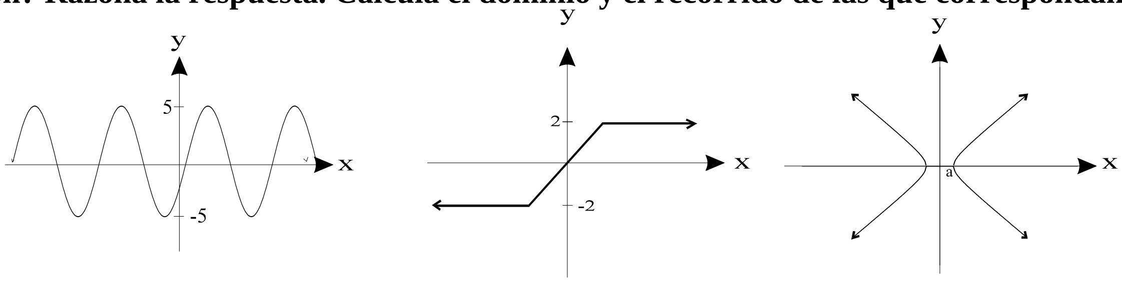
Problemas sobre Funciones

1) Calcula el dominio de las siguientes funciones:

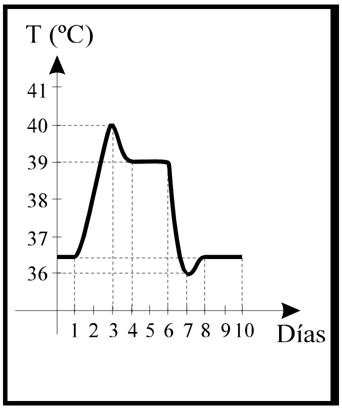
a) $y=+\sqrt{x-4}$ b) $h(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-4}$ c) $y=+\sqrt{x^3-x}$ d) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^7-1}}$

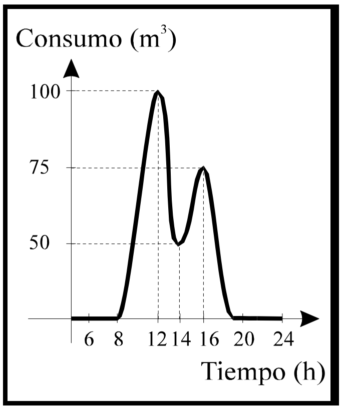
e) $f(x)=+\sqrt{\dfrac{x-4}{2x+3}}$ f) $g(x)=+\sqrt{x^2-6x+8}$ g) $h(x)=\dfrac{2x}{x^2+9}$

2) ¿Cuáles de las siguientes gráficas a), b) o c) respectivamente corresponden a una función? Razona la respuesta. Calcula el dominio y el recorrido de las que correspondan.



3)





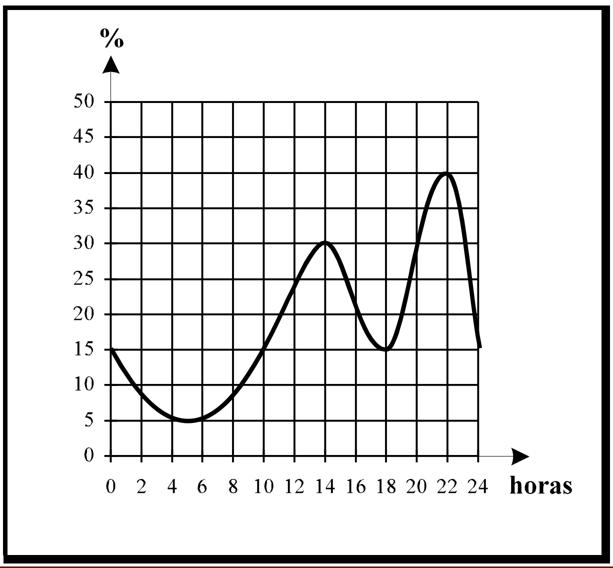
La primera gráfica representa la evolución de la temperatura de un enfermo y la segunda representa el consumo de agua en un colegio.

a) Estudia el dominio y recorrido de las dos funciones, dando los resultados a través de intervalos.
b) Elabora un pequeño informe interpretando tus resultados.

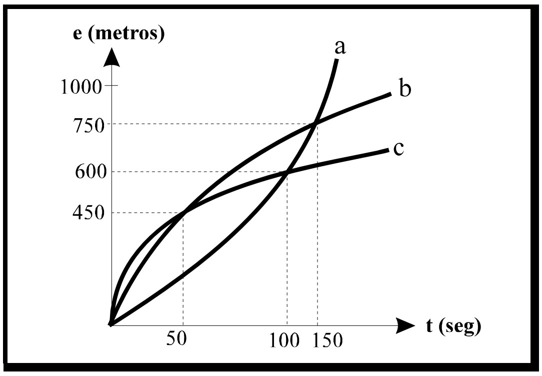
4)

Esta curva muestra la audiencia de una cadena de televisión en España en un día promedio del mes de Abril de 2007.

Estudia el dominio y el recorrido, dando los resultados a través de intervalos. Elabora un pequeño informe interpretando tus resultados.

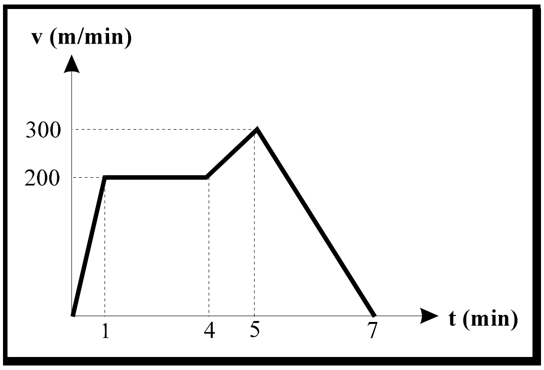


5)



Tres atletas participan en una carrera de 1000m. La gráfica describe de forma aproximada el comportamiento de los atletas en dicha prueba. Si tú fueras el locutor que estás transmitiendo la prueba, ¿cómo describirías lo más detalladamente posible lo que está sucediendo allí?

6)



1) **¿Qué clase de movimiento corresponde a cada uno de los tramos de la gráfica?**
2) **Calcula las ecuaciones de cada uno de los tramos.**
3) **¿Cuál es la aceleración en cada tramo?**
4) **¿Cuál es el espacio recorrido por la vespino en cada tramo así como el espacio total?**

7) **Representar gráficamente las funciones:**

a) $f(x)=\begin{cases} -x^2+9 & \text{si} \quad x<3 \\ 3 & \text{si} \quad x=3 \\ 3x-1 & \text{si} \quad x\in\left]5,\infty\right[\end{cases}$ b) $g(x)=\begin{cases} 0'5x-1 & \text{si} \quad -3\le x<-1 \\ 2x^2-1 & \text{si} \quad -1\le x<1 \\ -0'5 & \text{si} \quad x=1'5 \\ 2 & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases}$

c) $h(x)=|2x-1|$ d) $y=|x-3|+2$

8) **El sueldo mensual de un vendedor consta de una cantidad fija de 600 € más una comisión del 15% de sus ventas mensuales. Escribe la fórmula que expresa el sueldo en función de las ventas. Representa la función gráficamente.**

9) **Representa gráficamente la función:** $f(x)=\begin{cases} x^2-x-6 & \text{si} \quad x>-2 \\ -2 & \text{si} \quad x=-2 \\ |x| & \text{si} \quad x<-2 \end{cases}$

10) **Traza la gráfica de** $y=\dfrac{x^3-4}{2}$**. Determina su dominio y recorrido. ¿Es una función inyectiva?**

11) **Representar gráficamente la función** $f(x)=\begin{cases} -x^2+9 & \text{si} \quad x<1 \\ |2x-1| & \text{si} \quad x\in\left[1,5\right] \\ 3x-1 & \text{si} \quad x\in\left]5,\infty\right[\end{cases}$

12) Dadas las funciones $f(x) = +\sqrt{x}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}$ calcular:

a) $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$

b) Función inversa o recíproca de f(x) y función inversa de g(x)

c) Dominio de $(f \circ g)(x)$

13) Dadas las funciones:

$$f(x) = 2x - 1; \qquad g(x) = \sqrt{x^2 - 1}; \qquad h(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \qquad y \qquad i(x) = x^3 - 1$$

a) ¿Qué funciones son pares y cuáles impares? Compruébalo.

b) Calcular $f \circ h$ y $h \circ f$. ¿Es conmutativa la composición de funciones? ¿Por qué?

c) Calcular $g \circ i$ e $i \circ g$ y sus dominios respectivos.

d) Calcula el dominio de $g(x)$.

14) Escribe las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$, siendo:

a) $f(x) = \sqrt{x - 2}$ y $g(x) = (x + 2)^2$ b) $f(x) = \dfrac{x + 2}{x - 5}$ y $g(x) = \dfrac{x - 3}{x + 4}$

15) a) Calcula las inversas de las funciones $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ y $h(x) = \dfrac{1}{x - 1}$

b) ¿Qué resultado da la composición de una función con su inversa? Compruébalo para $f(x)$.

c) Calcula el dominio de $f \circ h$

16) Calcula la inversa de cada una de las siguientes funciones, trazando, en cada caso, la gráfica de la función y la de su inversa:

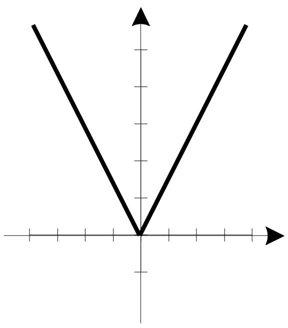
a) $y = 2x + 3$ b) $f(x) = \dfrac{3}{x + 2}$ c) $y = \dfrac{x^3 + 8}{4}$ d) $f(x) = \dfrac{2x + 5}{x - 3}$

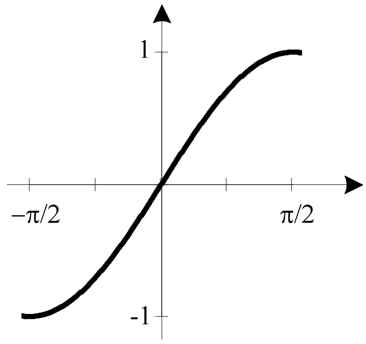
17) Dadas las funciones $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = \dfrac{5}{x}$, comprueba que: $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

18) Invierte la función $y = 2x^2 + 3$ y comprueba que se obtienen dos funciones inversas. Representa gráficamente la situación y determina el dominio y el recorrido de todas las funciones.

19) Determina una función polinómica de segundo grado $f(x) = ax^2 + bx + c$, sabiendo que $f(0) = 9$, $f(2) = 1$ y $f(5) = 4$.

20) En las siguientes gráficas estudiar las simetrías. ¿Cuáles admiten inversa? Represéntalas gráficamente de forma aproximada. Razonarlo todo.





Soluciones

1)

a) $D = \forall x \geq 4$ b) $D = \forall x \in R - \{-2,2\}$ c) $D = \forall x \in [-1,0] \cup [1,\infty]$ d) $D = \forall x \in R$

e) $D = \forall x \in [-\infty,-1'5[\cup [4,\infty]$ f) $D = \forall x \in [-\infty,2[\cup [4,\infty]$ g) $D = \forall x \in R$

2) Son funciones la a) y la b).

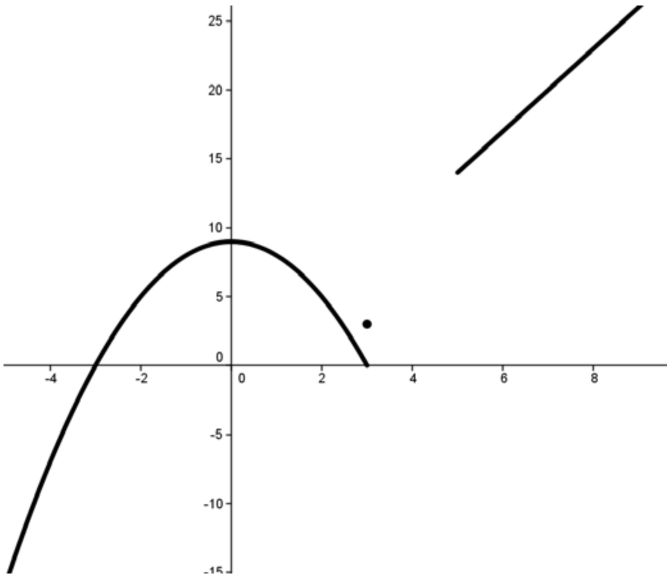
a) $D = \forall x \in R \quad R = \forall y \in [-5,5]$ b) $D = \forall x \in R \quad R = \forall y \in [-2,2]$

6) a) Uniformemente acelerado b) Uniforme c) Uniformemente acelerado d) Decelerado

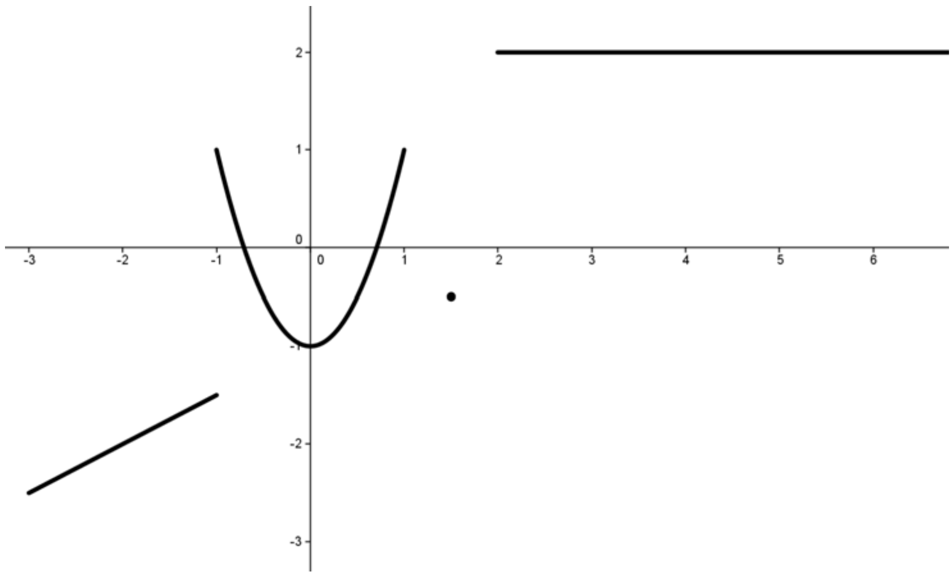
Tramo a) $v = 200t$ Tramo b) $v = 200$ Tramo c) $v = 100t - 200$ Tramo d) $v = -150t + 1050$

7)

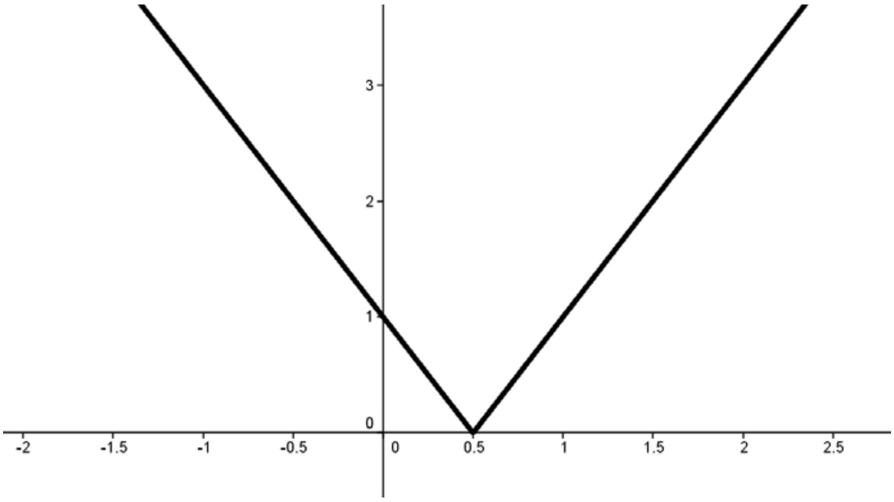
a)



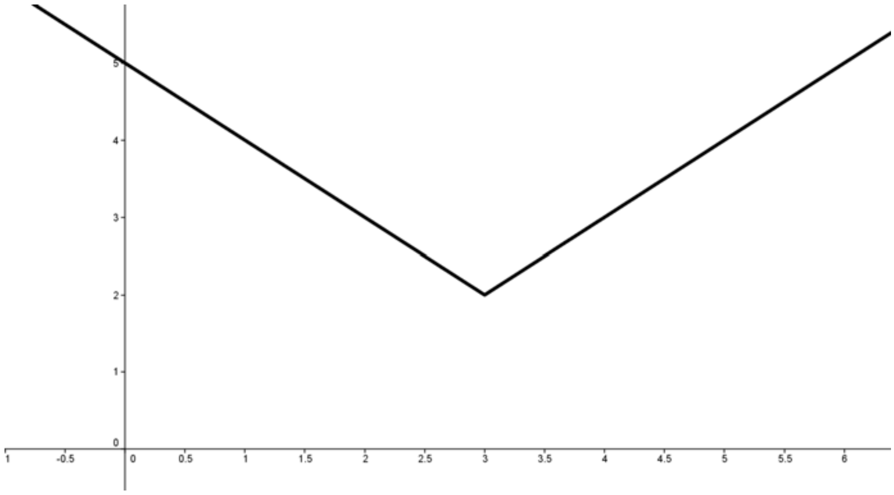
b)



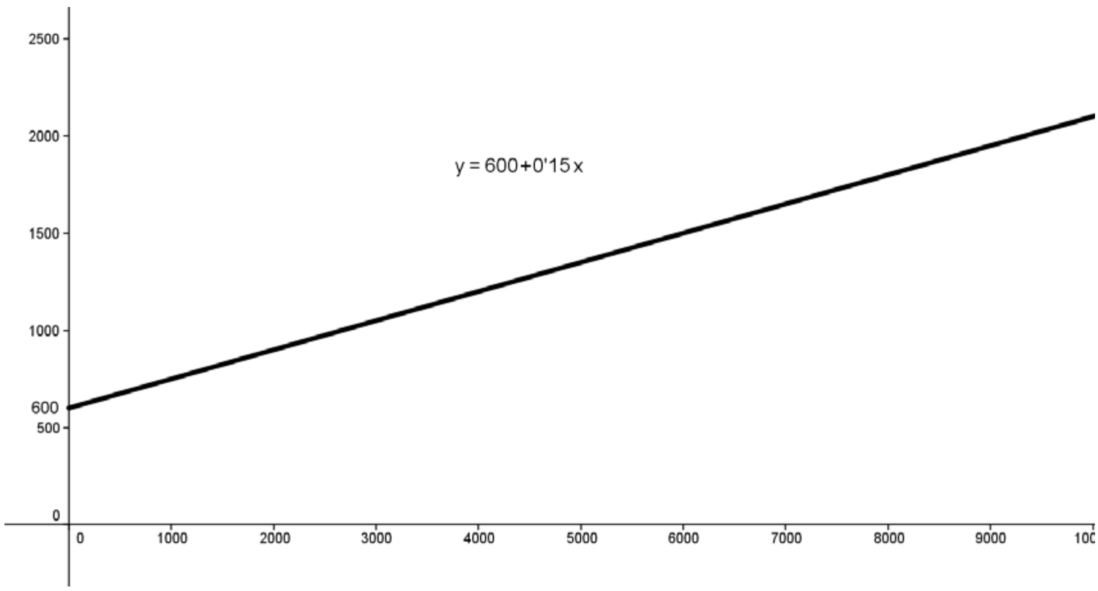
c)



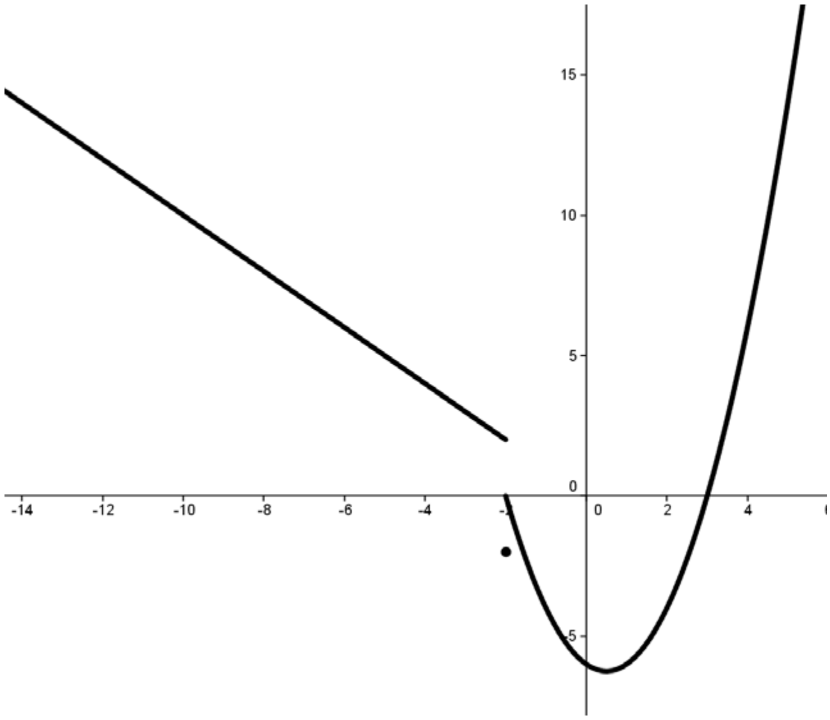
d)



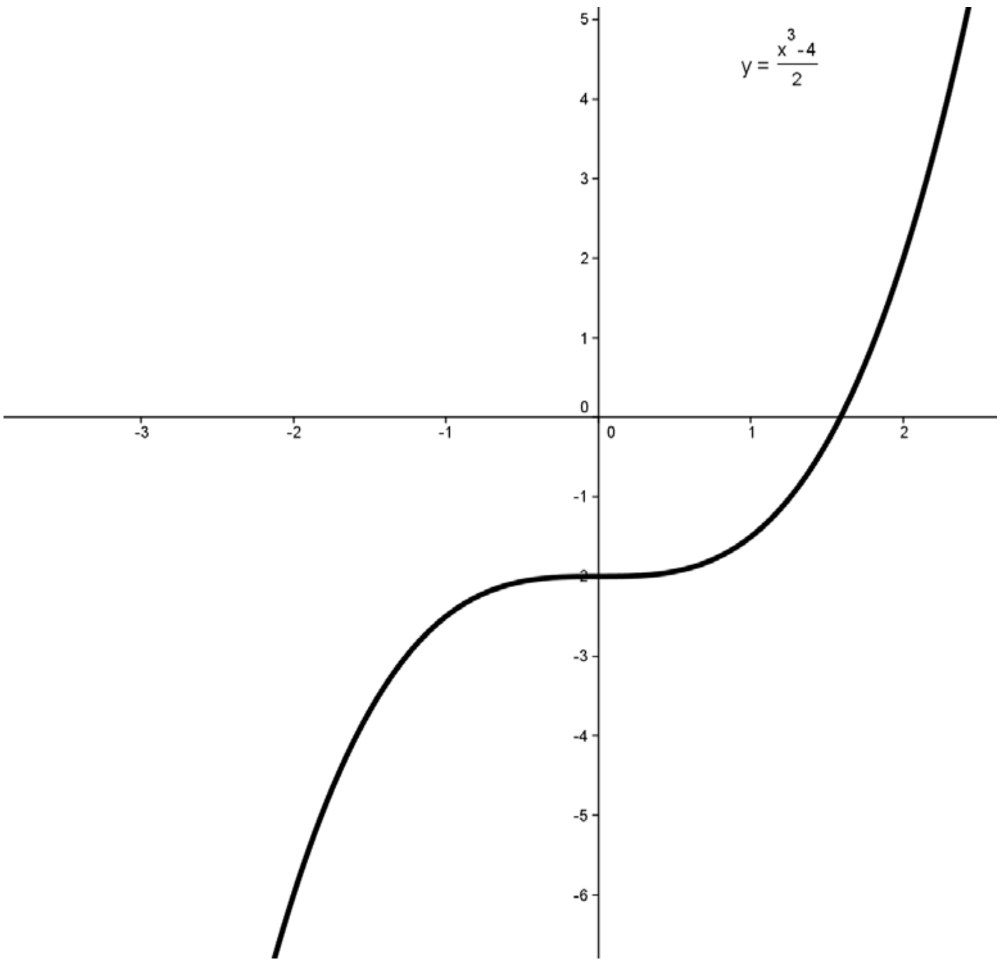
8)



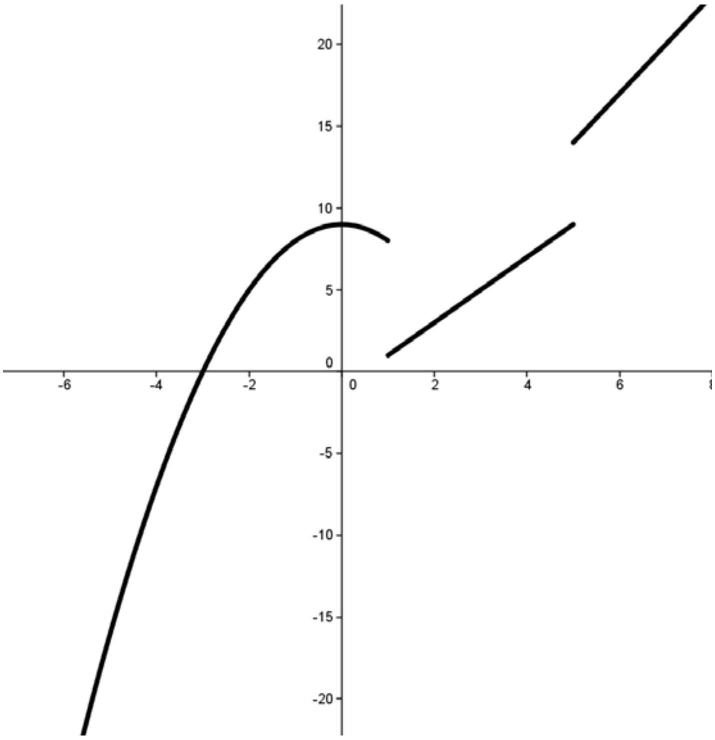
9)



10)

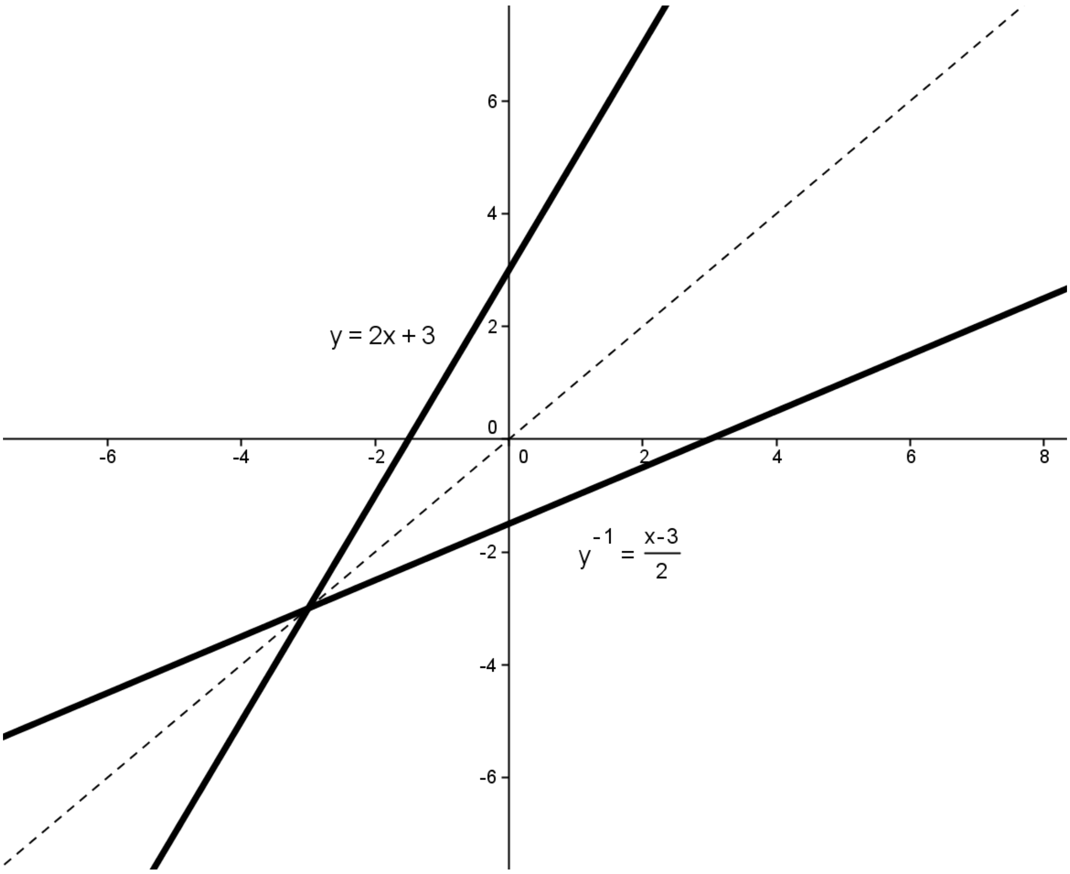


11)

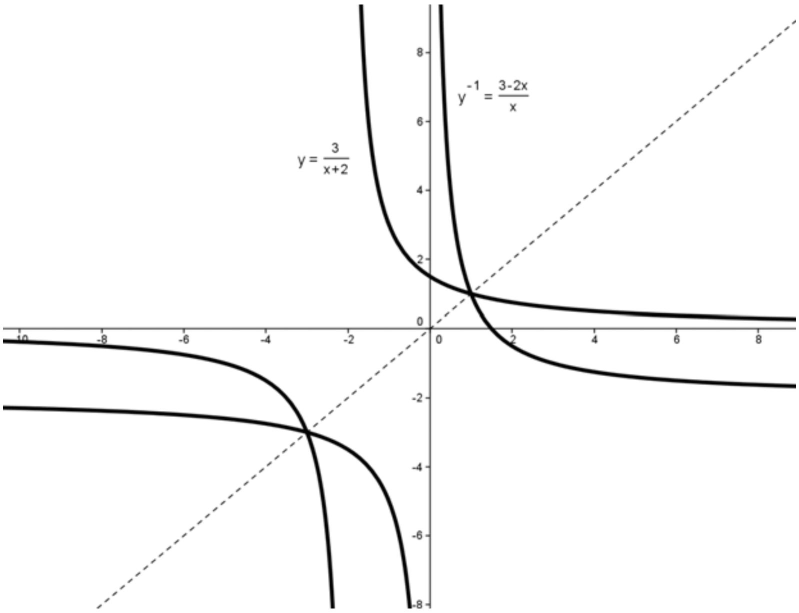

20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
-6
-4
-2
0
2
4
6

16)

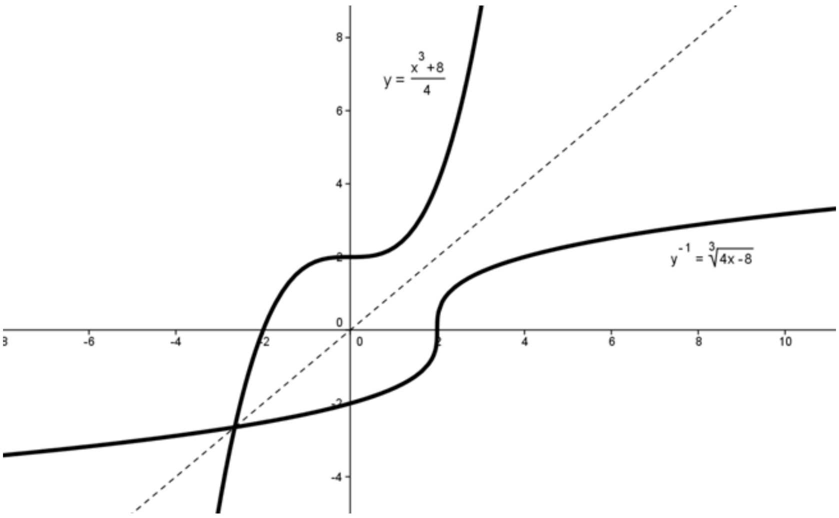
a)


6
4
2
0
-2
-4
-6
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
y = 2x + 3
$y^{-1} = \frac{x-3}{2}$

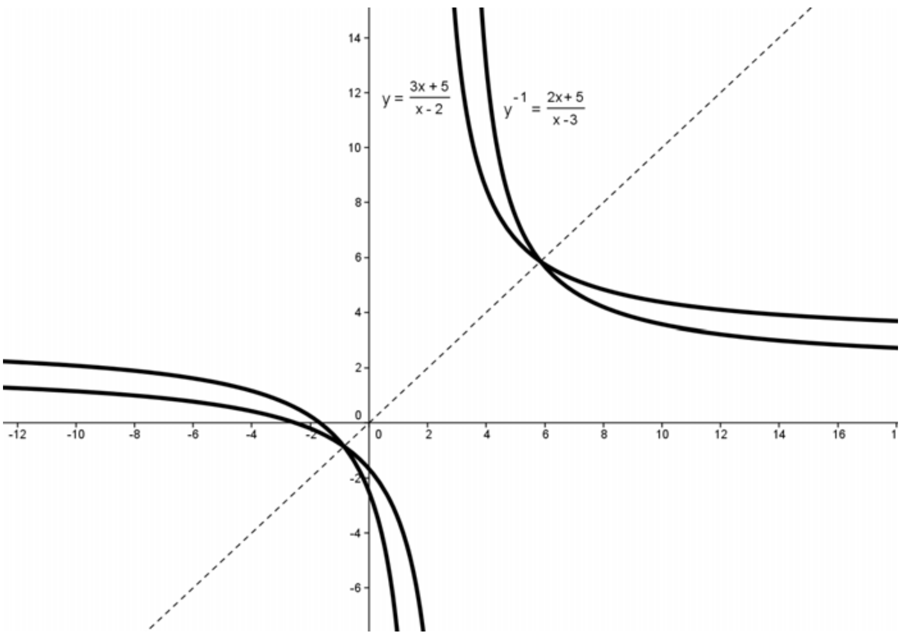
b)


$y = \frac{3}{x+2}$
$y^{-1} = \frac{3-2x}{x}$

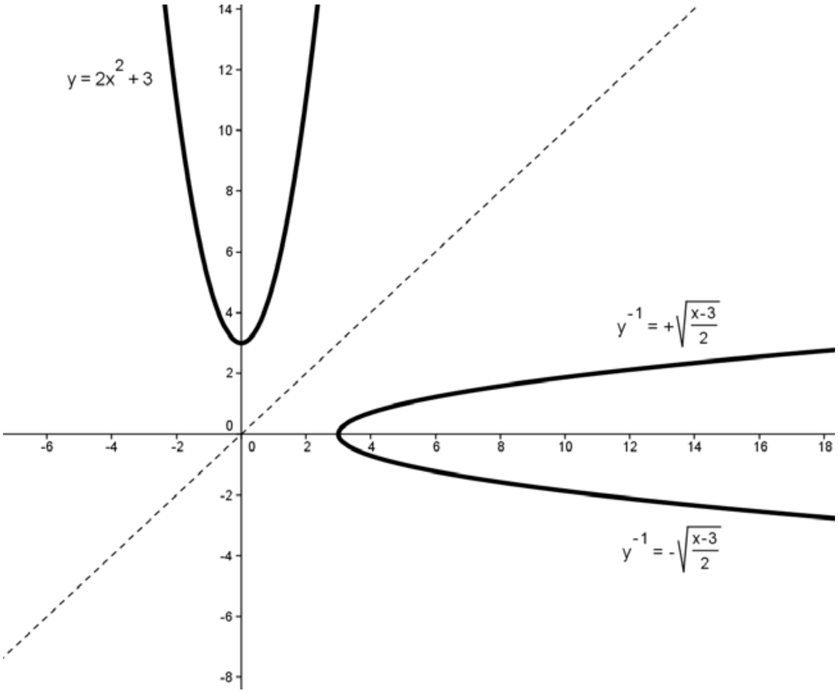
c)


$y = \frac{x^3+8}{4}$
$y^{-1} = \sqrt[3]{4x-8}$

d)


$y = \frac{3x+5}{x-2}$
$y^{-1} = \frac{2x+5}{x-3}$

18)



19) $y = x^2 - 6x + 9$