Los límites y la calculadora científica

Ejemplo 1

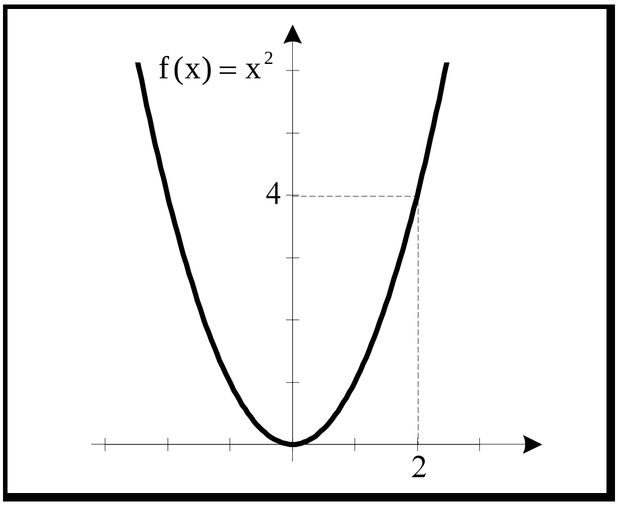
Consideremos la función $\mathbf{f(x) = x^2}$ cuyo dominio es R. Su gráfica es una parábola. Se trata de responder a la siguiente pregunta: ***"Si x se aproximan a 2, ¿a qué valor se aproximan los valores correspondientes de $\mathbf{f(x)}$?"***

Para tener una idea de la respuesta basta evaluar la función en puntos cada vez más próximos a 2, tomando:

- *valores inferiores a 2, es decir, por la izquierda* (2^-)
- *valores superiores a 2, es decir, por la derecha* (2^+)

$x \to 2^-$	$f(x)$
1'9	3'6
1'99	3'96
1'999	3'996
$\vdots$	$\vdots$

$x \to 2^+$	$f(x)$
2'1	4'4
2'01	4'04
2'001	4'004
$\vdots$	$\vdots$



Observa que al aproximarse x a 2, tanto por la izquierda (2^-) como por la derecha (2^+), los valores correspondientes de la función se aproximan a 4.

En general, si tomamos una sucesión cualquiera de números que se aproxime a 2, la sucesión de los valores correspondientes de la función $f(x) = x^2$ se aproximará a 4. ***El número 4 se llama límite de la función $\mathbf{f(x)}$ en $\mathbf{x = 2}$.***

Lo expresaremos de la siguiente manera:

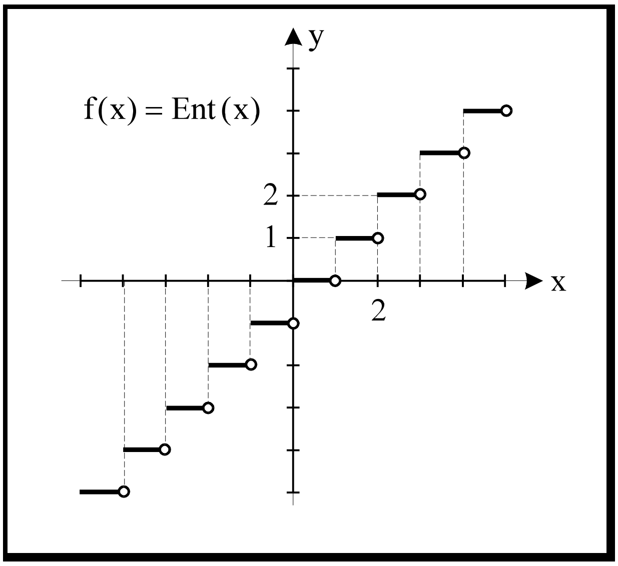
$$\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to 2^-} x^2 = 4 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} x^2 = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = 4$$

Ejemplo 2

Consideremos la función escalonada $\mathbf{f(x) = Ent\,(x)}$, donde **Ent** designa ***al mayor número entero que sea menor o igual a x***. Por ejemplo, $\text{Ent}\,(4'5) = 4$, $\text{Ent}\,(-5'3) = -6$, $\text{Ent}\,(0) = 0$. ***"Si x se aproxima a 2, ¿a qué valor se aproximan los valores correspondientes de $\mathbf{f(x)}$?"***.

$x \to 2^-$	$f(x)$
1'9	1
1'99	1
1'999	1
$\vdots$	$\vdots$

$x \to 2^+$	$f(x)$
2'1	2
2'01	2
2'001	2
$\vdots$	$\vdots$



Observando las tablas de valores y la gráfica de la función podemos deducir que los valores de $f(x)$ no se aproximan a ningún valor fijo.

- Por la izquierda (2^-) son iguales a 1.
- Por la derecha (2^+) son iguales a 2.

Esto se expresa de la siguiente manera: $\lim\limits_{x \to 2^-} \text{Ent}(x) = 1$ y $\lim\limits_{x \to 2^+} \text{Ent}(x) = 2$

En este caso decimos que la función no tiene límite en $\mathbf{x = 2}$.

Si nos restringimos a evaluar la función en puntos situados a la izquierda de $x = 2$ obtendremos que se aproxima a 1, mientras que si consideramos únicamente los puntos a la derecha el resultado sería 2. Estos valores obtenidos, considerando separadamente el comportamiento de la función a la izquierda y a la derecha de un punto dado, reciben el nombre de ***límites laterales***

Límites laterales:

El límite lateral por la *izquierda* de una función $y = f(x)$ en el punto $x = a$ es el valor al que se aproxima $f(x)$ cuando *x* se aproxima al valor de *a* por valores *menores que a*. Lo representamos por:

$$\lim_{x \to a^-} f(x)$$

El límite lateral por la *derecha* de una función $y = f(x)$ en el punto $x = a$ es el valor al que se aproxima $f(x)$ cuando *x* se aproxima al valor de *a* por valores *mayores que a*. Lo representamos por:

$$\lim_{x \to a^+} f(x)$$

Límite de una función en un punto

Diremos que $\lim\limits_{x \to a} \mathbf{f(x)} = \mathbf{b}$ si podemos lograr que los valores de $f(x)$ sean tan próximos a "b" como queramos, con tal de tomar valores de x tan próximos a "a" como sea preciso.

El límite de una función en un punto existe si existen los límites laterales y estos son iguales, es decir:

$$\text{Si } \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) \Rightarrow \exists \lim_{x \to a} f(x)$$

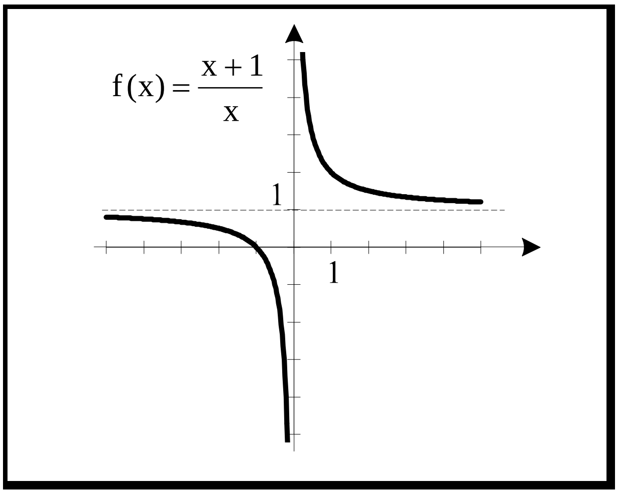
Ejemplo 3

Utilizando sucesiones numéricas es posible estudiar también a qué valor se aproxima una determinada función si la variable **x tiende a** $+\infty$ **y** $-\infty$. Consideremos por ejemplo la función: $\mathbf{f(x)=\frac{x+1}{x}}$.

$x \to -\infty$	$f(x)$
-1	0
-10	0'9
-10^2	0'99
-10^3	0'999
$\vdots$	$\vdots$

$x \to +\infty$	$f(x)$
1	2
10	1'1
10^2	1'01
10^3	1'001
$\vdots$	$\vdots$

Las sucesiones de los valores que toma la función se aproximan en ambos caso a 1.



Esto se expresa de la siguiente manera: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x}=1$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}=1$

Como se ve en la figura, para esta misma función, la tendencia en el punto 0 sería:

$$\lim_{x\to0^-}\frac{x+1}{x}=-\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to0^+}\frac{x+1}{x}=+\infty$$

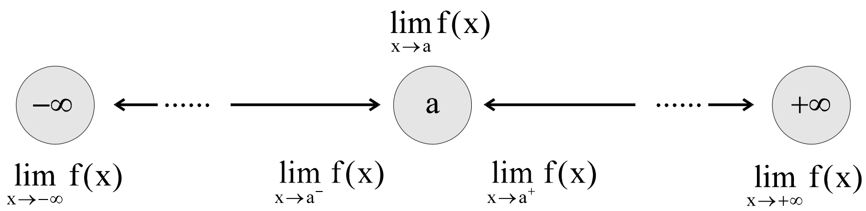
Aquí la tendencia de la función por la derecha y por la izquierda es distinta y los límites laterales no coinciden.

Límite de una función en el infinito

- Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$ diremos que "a" es el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a menos infinito o a más infinito, respectivamente. Diremos además que la recta $y=a$ es una asíntota horizontal de la función $f(x)$.
- Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$ diremos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a menos infinito o a más infinito respectivamente es más infinito.
- Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ diremos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a menos infinito o a más infinito respectivamente es menos infinito.
- Cuando los valores de la función f(x) ni se acercan a ningún valor concreto ni crecen ni decrecen indefinidamente cuando la variable independiente tiende a más infinito (o a menos infinito) expresaremos este hecho diciendo que la función f(x) no tiene límite ni en más infinito ni en menos infinito.

En general *La determinación del límite mediante sucesiones es realmente práctico, si existe, pues da una primera aproximación de su valor. Para ello basta tomar una sucesión de valores del dominio, que tienda hacia* $x = a$ *y observar a qué tienden los valores correspondientes de* $f(x)$.

Con una calculadora se puede hacer una tabla de valores. La notación para estos límites es:



Limitaciones de la calculadora para la obtención de límites.

¡OJO!

x	$\mathbf{f(x)} = \left(\dfrac{\mathbf{x+3}}{\mathbf{x}}\right)^{\mathbf{x^2}}$	Valor del límite conjeturado
50	$1'839 \cdot 10^{63}$	$+\infty$
10^2	Error	?
10^3	Error	?

Ahora parece fácil conjeturar que el límite es $+\infty$. La calculadora daba mensaje de error para $x = 10^2$ y para $x = 10^3$, porque los correspondientes términos superaban la capacidad de ésta, que es, $9'999999 \cdot 10^{99}$ ¡nada menos!

¡OJO!

x	$\mathbf{f(x)} = \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 10}$	Valor del límite conjeturado
50	$0'3976$	$0'4$
10^2	$0'4487$	0'45
10^6	$0'5$	0'5
10^{12}	0	???

¿Qué ha ocurrido? Sencillamente que el número de cifras significativas con las que trabaja la calculadora es 10 u 11, y la diferencia, $0'5$, entre $\sqrt{10^{24} + 10^{12}}$ y $\sqrt{10^{24} + 10}$ está en la cifra 13ª, es decir:

$$\text{Para } x = 10^{12} \quad \to \quad \sqrt{10^{24} + 10^{12}} - \sqrt{10^{24} + 10} = 1'0000000000005 \cdot 10^{12} - 10^{12} = 0'5$$

Por tanto, la calculadora no la tiene en cuenta y los dos radicandos coinciden.

Conclusión *La calculadora es muy útil para conjeturar el valor de los límites, pero a veces falla porque el resultado desborda la capacidad de la máquina, bien sea por su magnitud total, bien por el número de cifras significativas que debería tener en cuenta. Esto se puede solucionar dando a x una gama variada de valores. En cualquier caso, y una vez más, la calculadora hay que utilizarla inteligentemente.*

Expresiones indeterminadas

Las expresiones donde no tiene sentido la operación se llaman expresiones indeterminadas. Se llaman así porque su resultado no es el mismo en todos los casos, es decir, su valor no depende sólo del límite de las funciones $f(x)$ y $g(x)$, sino de las funciones mismas. En el proceso de calcular el límite de una función en un punto, o en el infinito, puede aparecer alguna de las siguientes indeterminaciones:

Racionales				Exponenciales		
$\infty - \infty$	$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$	$\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$	$0 \cdot \infty$	1^{∞}	∞^{0}	$\mathbf{0^0}$

Ejemplo de que $\infty \cdot 0$ es una indeterminación

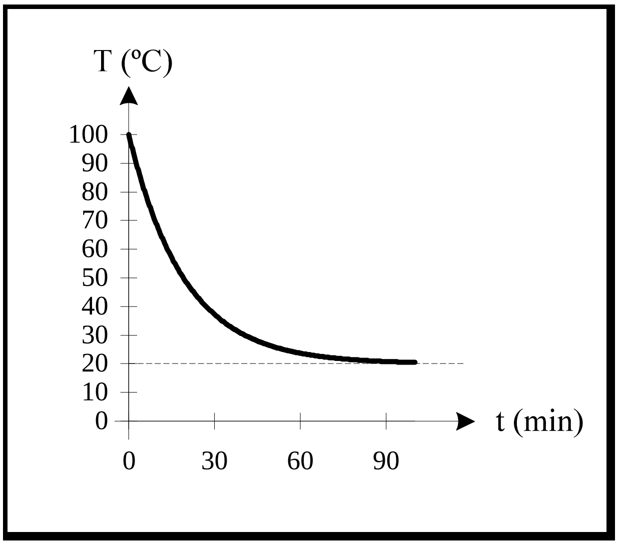
$f(x)$	$g(x)$	$f(x) \cdot g(x)$	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$	$\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$	$\lim\limits_{x\to\infty} [f(x)\cdot g(x)]$
x	$\frac{1}{x}$	1	∞	0	**1**
x^2	$\frac{1}{x}$	x	∞	0	∞
x	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	∞	0	**0**
x	$\frac{(-1)^x}{x}$	$(-1)^x$	∞	0	**no existe (oscilante)**

Ejemplos de límites en situaciones cotidianas

Ejemplo 1

Si ponemos un cazo de agua a hervir y lo retiramos del fuego el agua se va enfriando conforme va pasando el tiempo. Si la temperatura ambiente es de 20º, la temperatura del agua se aproximará paulatinamente, a los 20ºC, de modo que si queremos que no supere los 21º lo conseguiremos sin más que esperar un tiempo prudencial.

A medida que transcurre el tiempo, la temperatura se aproxima a 20º. Podemos conseguir que la temperatura baje, por ejemplo, de 21 sin más que esperar el tiempo que sea necesario.



Esta función responde a la ecuación: $T = 20 + 80 \cdot 0'95^{t}$

Cuando $t \to +\infty$ entonces $T \to 20^{\circ}$. Lo expresamos como $\lim\limits_{t \to +\infty} T(t) = 20^{\circ}$

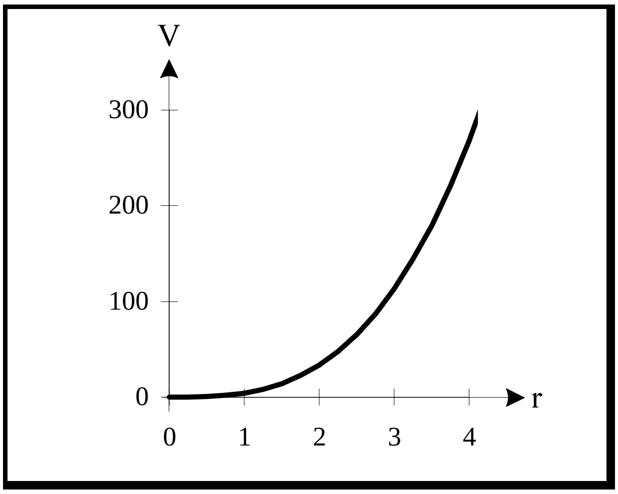
Ejemplo 2

El volumen de una esfera depende de su radio.

Podemos conseguir que el volumen de una esfera sea tan grande como queramos sin más que tomar un radio tan grande como se necesite.

Esta función responde a la ecuación:

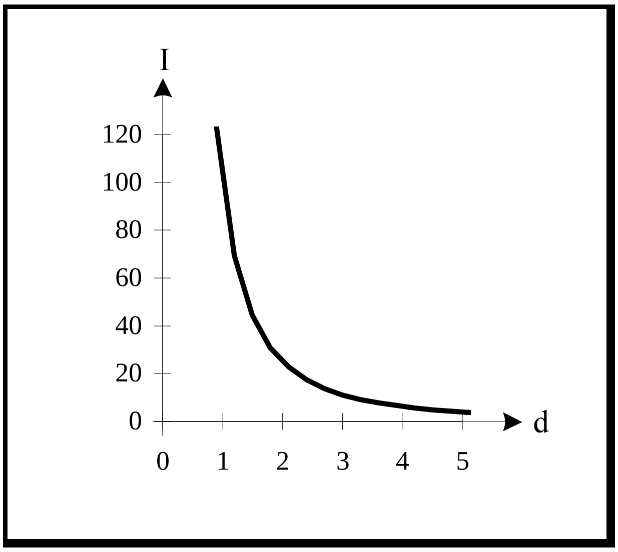
$$V = \frac{4}{3}\pi r^{3}$$



Cuando $r \to +\infty$ entonces $V \to +\infty$. Lo expresamos como $\lim\limits_{r \to +\infty} V(r) = +\infty$

Ejemplo 3

La intensidad del sonido que nos llega de un foco sonoro es tanto mayor cuanto más cerca estamos de él.



Si un megáfono portátil necesita recibir una cierta intensidad de sonido para grabar un concierto callejero, podemos conseguir que grabe sin más que acercarlo tanto como se necesite.

Esta función responde a la ecuación:

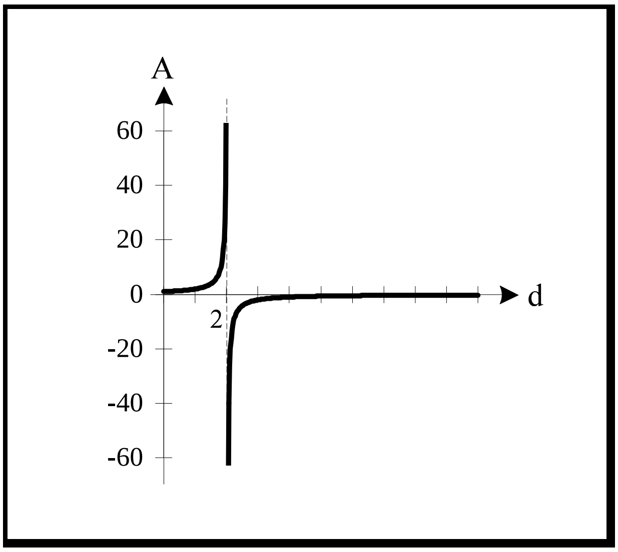
$$I = \frac{100}{d^2}$$

Cuando $d \to 0$ entonces $I \to +\infty$. Lo expresamos como $\lim_{d \to 0} I(d) = +\infty$

Si, por el contrario, deseamos no oír el concierto, nos alejaremos de él $\lim_{d \to +\infty} I(d) = 0$

Ejemplo 4

Si observamos un objeto pequeño con una lupa, podemos conseguir que el aumento se haga tan grande como queramos sin más que hacer que la distancia sea próxima a 2 dm.



Esta función responde a la ecuación:

$$A = \frac{2}{2 - d}$$

El objeto que se mira se verá derecho o invertido según que la distancia sea "algo menor que 2" o "algo mayor que 2".

Cuando $d \to 2^-$ entonces $A(d) \to +\infty$. Lo expresamos como $\lim_{d \to 2^-} A(d) = +\infty$

Cuando $d \to 2^+$ entonces $A(d) \to -\infty$. Lo expresamos como $\lim_{d \to 2^+} A(d) = -\infty$

También ocurre que cuando d se hace grande, A se hace pequeño e invertido $\lim_{d \to +\infty} A(d) = 0^-$

Operaciones con límites

Teniendo en cuenta que $+\infty$ y $-\infty$ son símbolos que nos indican números cada vez mayores $(+\infty)$ o números cada vez menores $(-\infty)$, y conociendo los límites de cada una de las funciones $f(x)$ y $g(x)$

$$\lim_{x\to k} f(x)=a \quad \lim_{x\to k} f(x)=+\infty \quad \lim_{x\to k} f(x)=-\infty \quad \lim_{x\to +\infty} f(x)=a \quad \lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty \quad \lim_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=a \quad \lim_{x\to -\infty} f(x)=+\infty \quad \lim_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to k} g(x)=b \quad \lim_{x\to k} g(x)=+\infty \quad \lim_{x\to k} g(x)=-\infty \quad \lim_{x\to +\infty} g(x)=b \quad \lim_{x\to +\infty} g(x)=+\infty \quad \lim_{x\to +\infty} g(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} g(x)=b \quad \lim_{x\to -\infty} g(x)=+\infty \quad \lim_{x\to -\infty} g(x)=-\infty$$

donde $a, b, k \in R$, vamos a calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x\to}\left[f(x)\pm g(x)\right] \qquad \lim_{x\to}\left[f(x)\cdot g(x)\right] \qquad \lim_{x\to}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] \qquad \lim_{x\to}\left[f(x)\right]^{g(x)} \qquad \lim_{x\to}\sqrt[n]{f(x)}$$

mediante una serie de reglas que se exponen en los siguientes cuadros, donde la x puede tender o bien a un número real, a $+\infty$ o a $-\infty$.

En algunos cuadros aparecen los símbolos 0^+ y 0^-. Pues bien, la expresión $\lim_{x\to k} f(x)=0^+$ significa que $\lim_{x\to k} f(x)=0$, pero siendo la función $f(x)$ positiva en un entorno reducido de k. La igualdad $\lim_{x\to k} f(x)=0^-$ tiene un significado análogo.

Suma	**a**	$+\infty$	$-\infty$
b	$a+b$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	
$-\infty$	$-\infty$		$-\infty$

Diferencia	**a**	$+\infty$	$-\infty$
b	$a-b$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$		$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	

Producto	**a**	**0**	$+\infty$	$-\infty$
b	$a \cdot b$	0	$+\infty$ si $b>0$ $-\infty$ si $b<0$	$-\infty$ si $b>0$ $+\infty$ si $b<0$
0	0	0		
$+\infty$	$+\infty$		$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$		$-\infty$	$+\infty$

Cociente	**a**	**0**	$+\infty$	$-\infty$
b	$\frac{a}{b}$	0	$+\infty$ si $b>0$ $-\infty$ si $b<0$	$-\infty$ si $b>0$ $+\infty$ si $b<0$
0^+	$+\infty$ si $a>0$ $-\infty$ si $a<0$		$+\infty$	$-\infty$
0^-	$+\infty$ si $a>0$ $-\infty$ si $a<0$		$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	0	0		
$-\infty$	0	0		

Potencia	**a**	0^+	$+\infty$	$-\infty$
b	a^b	0^+ si $b>0$ $+\infty$ si $b<0$	$+\infty$ si $b>0$ 0^+ si $b<0$	Si $b>0$ $\begin{cases} +\infty & \text{si b es par} \\ -\infty & \text{si b es impar} \end{cases}$ Si $b<0 \rightarrow 0$
0	1			
$+\infty$	$+\infty$ si $a>1$ 0^+ si $-1<a<1$ No existe si $a<-1$	0^+	$+\infty$	
$-\infty$	0^+ si $a>1$ ó $a<-1$ $+\infty$ si $-1<a<1$	$+\infty$	0	

Radicales	**En los límites donde existen expresiones irracionales tendremos en cuenta que** $\sqrt[n]{+\infty} \rightarrow +\infty$ $\sqrt[n]{-\infty} \rightarrow -\infty$ **(n impar)**

Continuidad de una función en un punto

Una función f(x) es continua en un punto si existe límite en él y coincide con el valor que toma la función en ese punto.

$$\boxed{\mathbf{f(x)\ \ es\ \ continua\ \ en\ \ x = a \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a} f(x) = f(a)}}$$

La continuidad de $f(x)$ en $x = a$ implica que se cumplan estas tres condiciones:

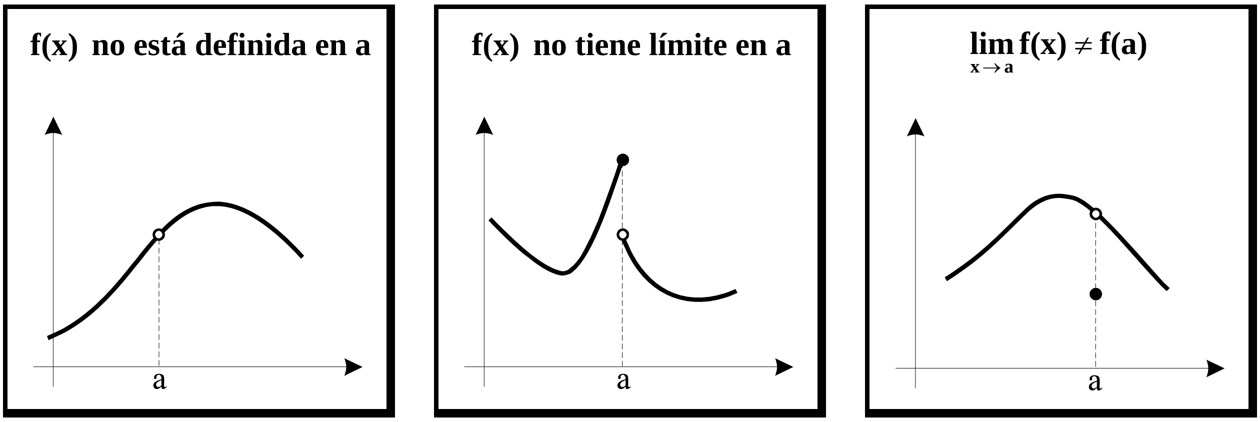
1) Existe el límite de la función $f(x)$ en $x = a$, es decir, existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

2) La función está definida en $x = a$; es decir, existe $f(a)$.

3) Los dos valores anteriores coinciden, es decir, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Una función tiene límite en un punto solamente si los dos límites laterales existen y son iguales. En tal caso, el límite coincide con los límites laterales.

Por tanto, una función puede dejar de ser continua en un punto por no cumplir alguna de estas condiciones:



Cuando una función $f(x)$ es continua en todos los puntos del intervalo abierto $\left]a, b\right[$ ***se dice que $f(x)$ es continua en el intervalo*** $\left]a, b\right[$. En los puntos donde no sea continua la función decimos que es ***discontinua***.

Continuidad de las funciones elementales

Recordando que el ***Dominio*** de una función $f(x)$, es el conjunto de números reales para los que $f(x)$ puede calcularse, tenemos:

- Las ***funciones constantes*** son continuas, lo mismo que la ***función identidad*** $y = x$.

- Las ***funciones polinómicas*** son siempre continuas, ya que se obtienen de la función $y = x$ mediante productos y sumas repetidos.

- Se llaman funciones racionales a las que se expresan como cocientes de dos funciones polinómicas:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + \cdots\cdots\cdots + a_o}{b_m x^m + \cdots\cdots\cdots + b_o}$$

  Las ***funciones racionales*** son continuas en todo punto de su dominio excepto en aquellos valores de **x** que anulen el denominador.

Discontinuidades de una función

Una función es discontinua en un punto cuando no existe límite en él o, existiendo, no coincide con el valor de la función en el mismo.

Para la clasificación de las discontinuidades en un punto tendremos en cuenta la existencia o no de los límites laterales en el mismo.

<u>Discontinuidad evitable</u>

Una función tiene una discontinuidad evitable en un punto cuando existe límite en él y no coincide con el valor de la función en el mismo.

El valor que deberíamos dar a la función en dicho punto para que fuera continua en él se llama ***verdadero valor de la función*** en el mismo.

Ejemplo: Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 3 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$

Esta función es continua en todos los puntos distintos de 1. Veamos qué sucede en $x = 1$.

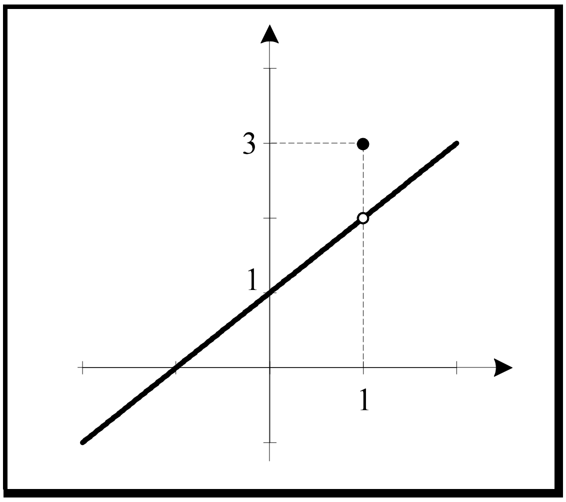
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} =$$

$$\lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$$

Como $f(1) = 3$, se verifica que

$$\lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$$

La función presenta una discontinuidad en $x = 1$.



Si en vez de $f(1)=3$ hubiéramos tomado $f(1)=2$, la función $f(x)$ sería continua en toda la recta real. En este sentido decimos que la discontinuidad es evitable.

Discontinuidad inevitable

Una función tiene una discontinuidad inevitable en un punto cuando existen los límites laterales en él y son distintos.

Si $f(x)$ es discontinua en el punto $x=a$, el valor:

$$\left| \lim_{x\to a^+} f(x) - \lim_{x\to a^-} f(x) \right|$$

se llama ***salto de la función*** en ese punto, y *dicho salto puede ser finito, si es un número real, o infinito.*

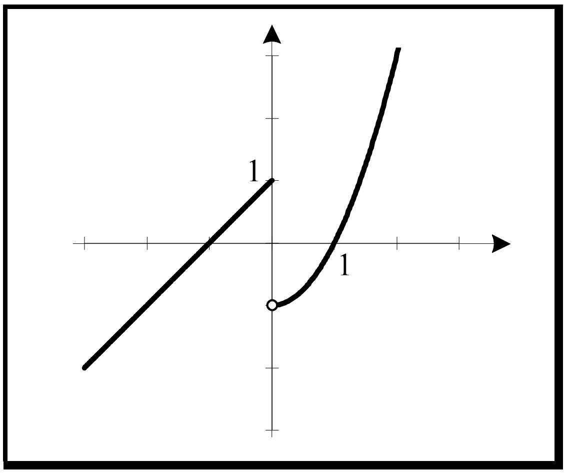
Ejemplo: Estudiar la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x\le 0 \\ x^2-1 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$

Esta función es continua en todos los puntos distintos de 0. Veamos qué sucede en $x=0$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x+1) = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^2-1) = -1$$

La función presenta en $x=0$ una discontinuidad inevitable de salto finito.



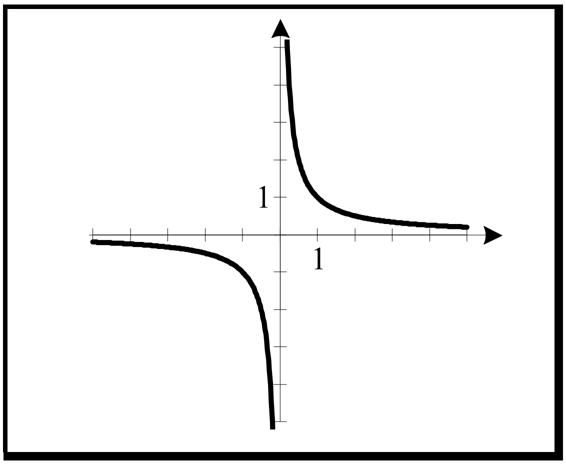
Ejemplo: Estudiar la continuidad de la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$

Esta función es continua en todos los puntos distintos de 0. Veamos qué sucede en $x=0$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

La función presenta en $x = 0$ una discontinuidad inevitable con salto infinito.



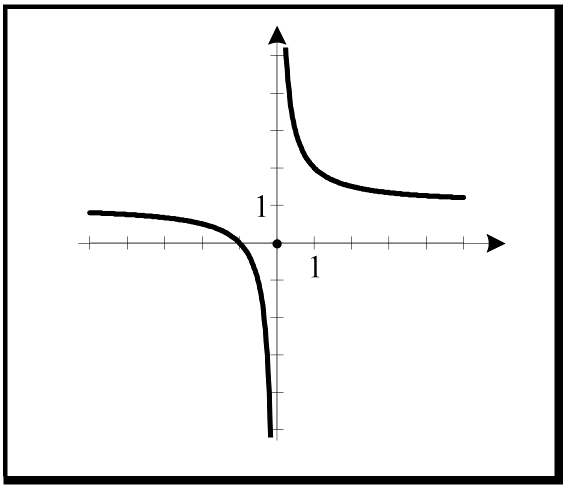
Ejemplo: Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

Esta función es continua en todos los puntos distintos de 0. Veamos qué sucede en $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x+1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x+1}{x} = +\infty$$

La función presenta en $x = 0$ una discontinuidad inevitable con salto infinito.



Ejemplo: Estudiar la continuidad de la función $f(x)$ en el intervalo $[-2,3]$

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{x+1} & \textbf{si} \quad \mathbf{-2 \leq x < 1} \\ \mathbf{x} & \textbf{si} \quad \mathbf{1 \leq x < 2} \\ \mathbf{-x+4} & \textbf{si} \quad \mathbf{2 \leq x \leq 3} \end{cases}$$

La función está definida para todos los puntos del intervalo $[-2,3]$. Por ser una función polinómica definida a trozos, es continua en cada subintervalo.

Habrá que estudiar la continuidad en los puntos de separación de los subintervalos, ya que en dichos puntos los límites laterales pueden ser distintos.

En $x=1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x+1) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} x = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 1} f(x)$$

Por tanto en el punto $x=1$ la función no tiene límite, luego es discontinua en $x=1$. La función presenta una *discontinuidad inevitable de salto finito*.

En $x=2$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} x = 2 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (-x+4) = 2\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2$$

$$f(2) = -2+4 = 2$$

Como $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) = 2$ la función es continua en $x=2$.

Conclusión

La función es continua en todos los puntos de su dominio excepto para $x=1$.

Ejemplo: Estudiar los puntos de discontinuidad de la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3-x}$

La función $f(x)$ es el cociente de dos funciones continuas puesto que son funciones polinómicas, luego es una función continua salvo en los puntos donde se anula el denominador.

$$x^3 - x = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x=-1 \\ x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

Veamos qué tipo de discontinuidad hay en cada punto.

En $x=-1$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x^3-x} = \lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{2}$$

En $x=-1$ la función $f(x)$ presenta una discontinuidad evitable.

En $x=0$

En este caso tenemos que estudiar los límites laterales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x+1}{x^3-x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+1}{x^3-x} = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$$

En $x = 0$ la función $f(x)$ presenta una discontinuidad inevitable con salto infinito.

<u>En $x = 1$</u>

En este caso tenemos que estudiar los límites laterales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x+1}{x^3-x} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+1}{x^3-x} = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 1} f(x)$$

En $x = 1$ la función $f(x)$ presenta una discontinuidad inevitable con salto infinito.

Ejemplo: Estudiar la continuidad de la función $\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{2x + a} & \mathbf{si} \quad \mathbf{x \le 1} \\ \mathbf{x^2 - a\,x + 2} & \mathbf{si} \quad \mathbf{x > 1} \end{cases}$ **según los valores de a.**

La función es evidentemente continua en $x \neq 1$ cualquiera que sea el valor de a.

Vamos a estudiarla en $x = 1$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (2x + a) = 2 + a \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x^2 - a\,x + 2) = 3 - a\end{array}\right\}$$

Para que tenga límite en $x = 1$ ha de ser:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \quad \to \quad 2 + a = 3 - a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}$$

Por tanto, si $a = \dfrac{1}{2}$ existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{5}{2} = f(1)$. La función es continua. Pero si $a \neq \dfrac{1}{2}$ los límites laterales no coinciden en $x = 1$. La función es discontinua en este punto. Es una discontinuidad finita.

Asíntotas

Consideremos la gráfica de una función $y = f(x)$. Una recta del plano es una **asíntota** de la representación gráfica de $y = f(x)$, cuando la distancia entre un punto de la curva y la recta dada tiende a cero, a medida que el punto de la curva recorre una rama infinita.

Vamos a estudiar dos tipos fundamentales y distintos de asíntotas.

<u>Asíntotas Verticales</u>

Si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ ó $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$, o se dan ambas circunstancias a la vez, diremos que la recta $x = a$ es una asíntota vertical de la función $f(x)$.

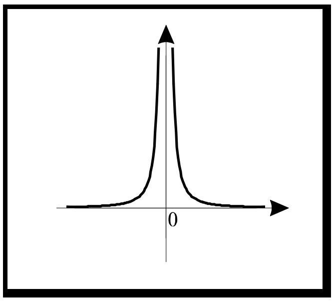
Esto significa, que en las cercanías de "a", la gráfica de la función $y = f(x)$ se prolonga indefinidamente en sentido vertical, acercándose a la recta $x = a$ hasta confundirse prácticamente con ella.

En los puntos donde hay asíntotas verticales, debemos llevar a cabo un análisis de los límites laterales de la función, ya que los valores que toman nos darán razón del comportamiento de la curva a ambos lados de la asíntota vertical $x = a$. Podemos esquematizar lo que ocurre en torno al punto "a" según los valores de los límites laterales, a través de algunos ejemplos.

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$$

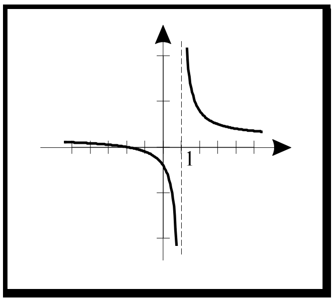
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$



$$f(x) = \frac{x+2}{x-1}$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$$

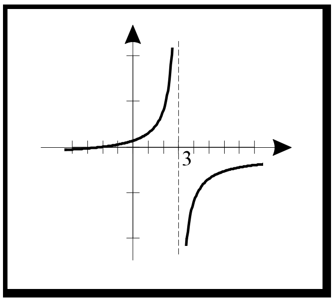
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$$



$$f(x) = \frac{2+x}{3-x}$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$$

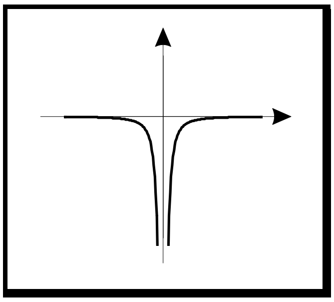
$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$$



$$f(x) = \frac{-1}{x^2}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$



No debemos olvidar el caso en que alguno de las límites laterales no existe, debido, por ejemplo, a que la función no está definida para $x > a$ o para $x < a$. En este caso, a la derecha o a la izquierda de la asíntota no habrá curva. Así, por ejemplo, $y = \ln x$ tiene una asíntota vertical en $x = 0$ y a la izquierda de esta recta la función no está definida.

∗ ***Las funciones polinómicas no tienen asíntotas.***

∗ ***La gráfica de una función nunca corta a una asíntota vertical.***

En las funciones racionales, cuando alguna de las raíces del numerador coincide con alguna de las raíces del denominador, conviene simplificar la expresión, y en la gráfica de la expresión resultante, la raíz común puede representar un punto de discontinuidad evitable o una asíntota vertical, como queda reflejado en los siguientes ejemplos:

Ejemplo: Calcular las asíntotas verticales de la función $y = \dfrac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - x}$

Las raíces del denominador son $x = 0$ y $x = 1$, mientras que las del numerador son $x = 1$ y $x = -5$, por tanto la recta $x = 0$ es una asíntota vertical mientras que en $x = 1$ hay una discontinuidad evitable.

A la hora de hacer el estudio de la función podemos simplificarla, teniendo en cuenta, que cuando la representemos gráficamente, en $x = 1$ hay una discontinuidad evitable.

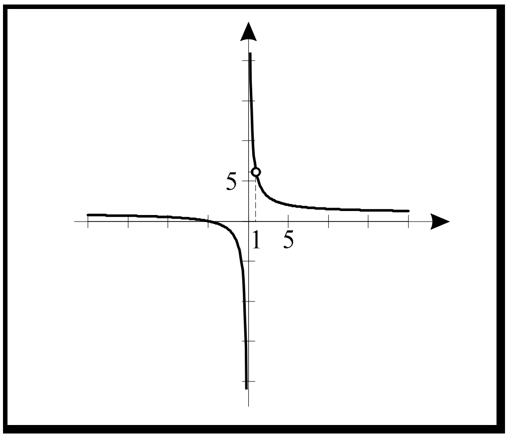
En el ejemplo, la función simplificada es:

$$y = \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - x} = \frac{(x-1)(x+5)}{x(x-1)} = \frac{x+5}{x}$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x+5}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x+5}{x} = +\infty$$

Por tanto, la recta $x = 0$ es una asíntota vertical.



Ejemplo: Calcular las asíntotas verticales de la función $y = \dfrac{x - 2}{x^2 - 4x + 4}$

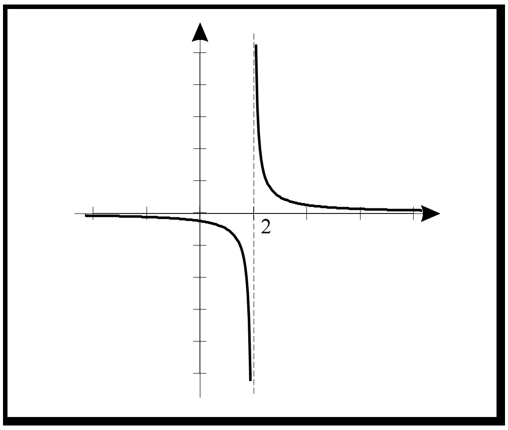
Tanto la raíz del numerador como la del denominador, que es doble, es 2. Simplificando la expresión, obtenemos:

$$y = \frac{x-2}{(x-2)^2} = \frac{1}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$$

Por tanto, la recta $x = 2$ es una asíntota vertical.



Asíntotas Horizontales

Si $\lim_{x\to +\infty} f(x) = a$ ó $\lim_{x\to -\infty} f(x) = a$, la recta $y = a$ es una asíntota horizontal de la función $f(x)$.

Esto significa que cuando $x \to \infty$ ó $x \to -\infty$ la gráfica de $y = f(x)$ se aproxima progresivamente a la recta $y = a$ hasta confundirse prácticamente con ella, lo que se traduce en que la distancia $f(x) - a$, de la curva a la asíntota, tiende a cero a medida que nos alejamos del origen. El signo de $f(x) - a$ nos dice si la curva está por encima o por debajo de la asíntota.

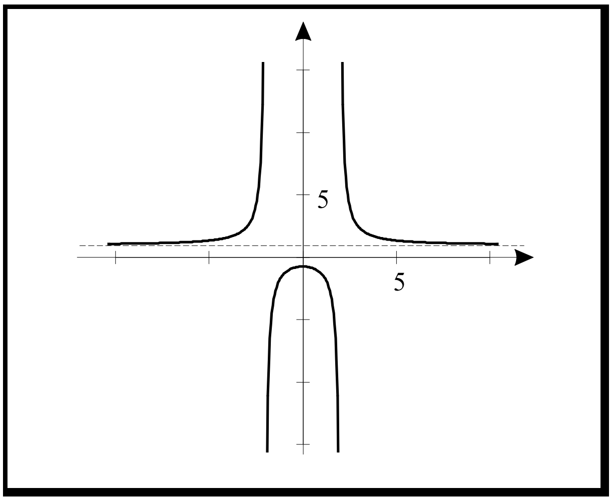
Aunque frecuentemente ocurre que $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} f(x)$ y por lo tanto, la misma recta es asíntota por la derecha y por la izquierda, es posible que sean distintas o que una de ellas no exista y la otra sí.

Una función tiene como máximo dos asíntotas horizontales correspondientes a cada uno de los límites en $+\infty$ y $-\infty$. En las funciones racionales (expresiones que son cocientes de polinomios), sólo hay una asíntota horizontal, y esta existe cuando el grado del numerador es menor o igual que el grado del denominador. En este caso, si hay asíntota horizontal por la derecha (para $x \to +\infty$), la misma recta es asíntota por la izquierda (para $x \to -\infty$), por tanto, bastará con calcular sólo uno de los límites.

Ejemplo: Sea la función $y = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x^2 - 4}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x^2 - 4} = 1 \\ \lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x^2 - 4} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Asíntota $y = 1$

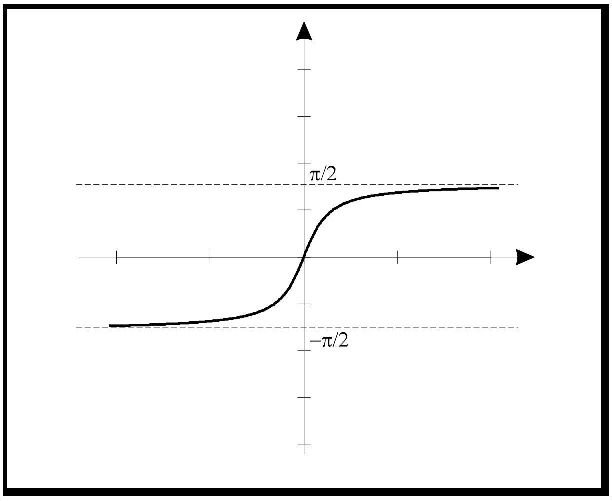


En la función arco tangente, la asíntota por la derecha es distinta de la asíntota por la izquierda.

Ejemplo: Sea la función $y = \text{arctg}\, x$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \text{arctg}\, x = \dfrac{\pi}{2} \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \text{arctg}\, x = -\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\text{Asíntotas} \quad \left\{\begin{array}{l} y = \dfrac{\pi}{2} \\ y = -\dfrac{-\pi}{2} \end{array}\right.$$

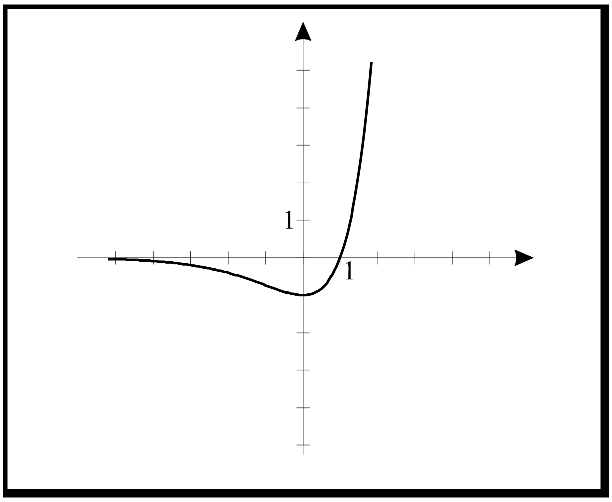


Hay funciones que tienen asíntota horizontal por la izquierda pero no por la derecha y viceversa.

Ejemplo: Sea la función $y = e^x \cdot (x - 1)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} e^x (x-1) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^x (x-1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Asíntota $\quad y = 0$

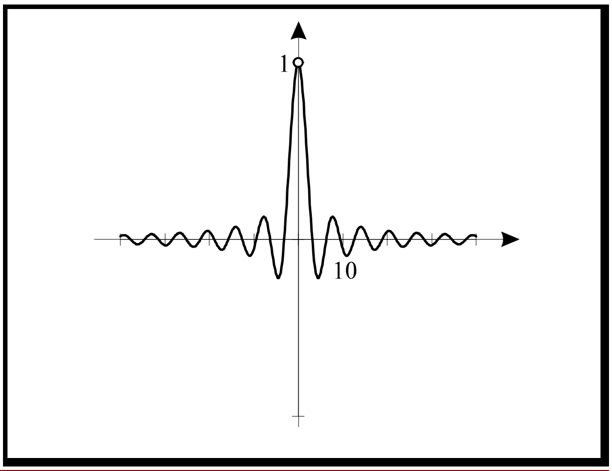


Una asíntota horizontal puede cortar a la curva en varios puntos, aunque en la mayoría de las funciones elementales la gráfica permanece por encima o por debajo de la asíntota considerada a partir de un punto. Su papel de asíntotas lo juegan para valores grandes de la x.

Ejemplo: Sea la función $y = \dfrac{\text{sen}\, x}{x}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\text{sen}\, x}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\text{sen}\, x}{x} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Asíntota $\quad y = 0$



Problemas sobre funciones y límites

1) Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+2}-n$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+1}{2}-n^2\right)$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+1}{\sqrt{3n^4+2}}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-2n^5+5n-35}{n^4-3n+10}$

2) Dada la función $f(x)=\dfrac{5x-15}{(x+2)\cdot(x-3)}$ **calcular: a)** $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ **c)** $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

La función $f(x)$ **¿Es siempre continua ? ¿Tiene asíntotas? Razona la respuesta.**

3) Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2-1}-\dfrac{3x^2}{x-3}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+3}{n^2+n+1}\right)^{3n}$ d) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{-1-x}{x+3}\right)^{\frac{3}{x+2}}$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$ f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x}\right)^{3x-2}$ g) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x}\right)^{3x-2}$ h) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\to -\infty}}\dfrac{2x^3-14x^2+12x}{x^3-10x^2+27x-18}$

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[4\cdot\left(\dfrac{2}{n}-3\right)\cdot\left(2-\dfrac{1}{n+1}\right)\right]$ j) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(6n^3+5n-20\right)$ k) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-2}{2n}\right)^{\frac{2n^2+1}{n^2-2}}$

4) Determinar k para que la función tenga límite cuando $x\to -2$

$$f(x)=\begin{cases} 2x+5 & \text{si} \quad x<-2 \\ x^2-kx-1 & \text{si} \quad x\geq -2 \end{cases}$$

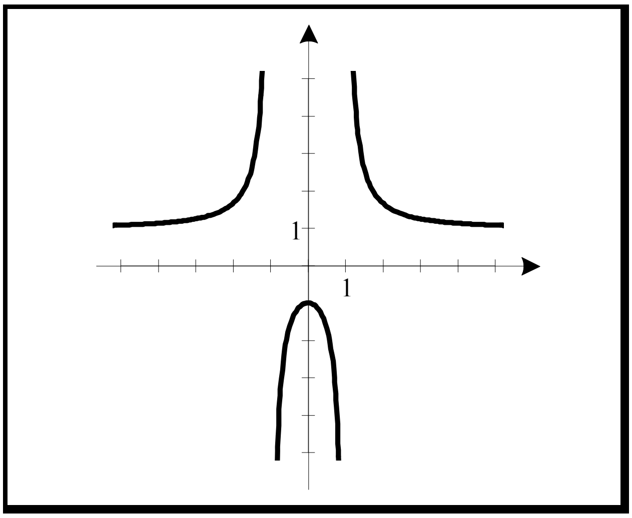
5) Consideremos la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3 & \text{si} \quad x<2 \\ x-1 & \text{si} \quad 2\leq x\leq 4 \\ 5 & \text{si} \quad 4<x \end{cases}$$

Determinar $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$

Estudia la continuidad de la función $f(x)$

6) Dada la siguiente gráfica de una función, calcular:



a) Dominio, recorrido, simetrías y asíntotas de la función.

b) Calcular $f(0)$ **y los siguientes límites:**

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +1^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to +1^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

7) Sea la función: $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+x+1}{-x^2+x+2}$

a) Calcula el dominio y los puntos de discontinuidad.
b) Calcula los límites de la función en los puntos de discontinuidad.
c) Indica las discontinuidades evitables y las asíntotas si las hay.

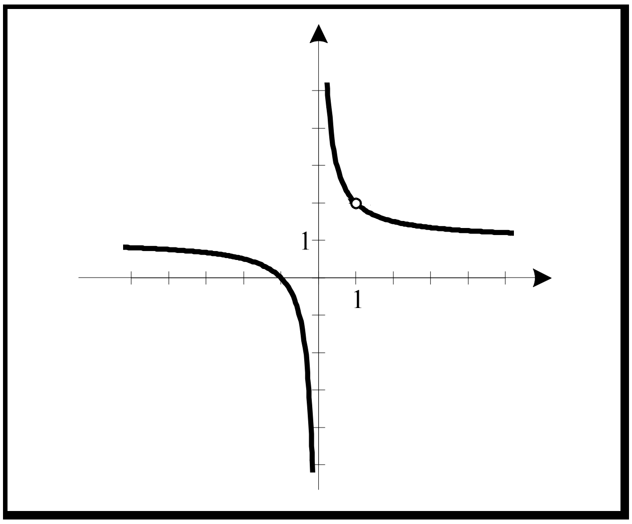
8) Estudiar la continuidad de la función: $f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x\le 1 \\ x^2-1 & \text{si} \quad 1<x\le 2 \\ x^2 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$

9) Estudia la discontinuidad de la función: $f(x)=\begin{cases} x^2-2x-1 & \text{si} \quad x<-1 \\ 3x+5 & \text{si} \quad -1\le x<2 \\ (4-x)(2+x) & \text{si} \quad 2\le x \end{cases}$

10) Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2+2x-1 & \text{si} \quad x<0 \\ ax+b & \text{si} \quad 0\le x<1 \\ 2 & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}$ halla "a" y "b" para que la función sea continua.

11) Estudiar la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x<1 \\ x^2-1 & \text{si} \quad 1\le x<2 \\ 3x-3 & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases}$

12) Dada la gráfica de la función $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-x}$

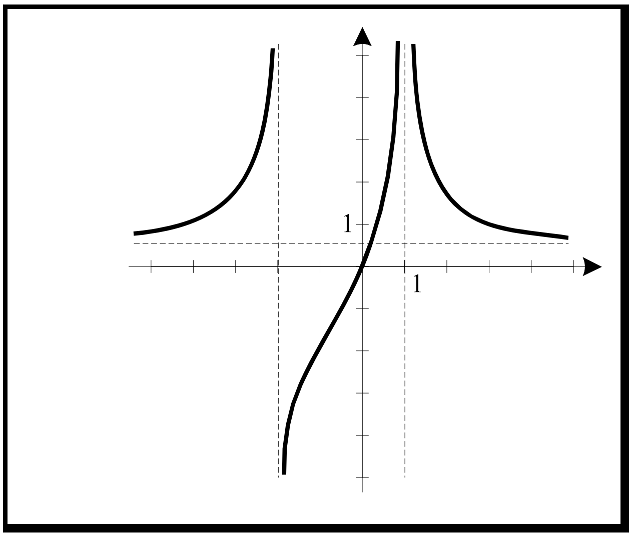


a) Halla su dominio

b) Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{x^2-x}$ y $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-x}$

c) ¿En qué puntos es discontinua? ¿Por qué)

13)



a) Calcula las ecuaciones de las asíntotas.

b) Calcular los siguientes límites:

$\lim_{x\to\infty} f(x)$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ $\lim_{x\to 1^+} f(x)$

$\lim_{x\to 1^-} f(x)$ $\lim_{x\to -2} f(x)$ $\lim_{x\to 0} f(x)$

c) Dominio y recorrido. Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

14)
a) Explica brevemente qué es una asíntota horizontal y una vertical.

b) Calcula las asíntotas (si las hay) de la función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

c) ¿Es continua la función del apartado b)? En caso contrario, cuáles son los puntos de discontinuidad? ¿Por qué?

15) De una función continua sabemos que: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$; $f(0) = 3$. Dibuja tres gráficas distintas, una para cada uno de los casos siguientes:
a) La gráfica no corta al eje de abscisas
b) Corta al eje de abscisas en un sólo punto situado a la derecha del origen
c) Corta al eje de abscisas en dos puntos simétricos respecto al origen.

16) Esboza la gráfica de una función de la que se conocen los siguientes límites:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$ $\lim_{x\to-1^-} f(x) = \infty$ $\lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to 0} f(x) = -3$ $\lim_{x\to 3} f(x) = 0$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$

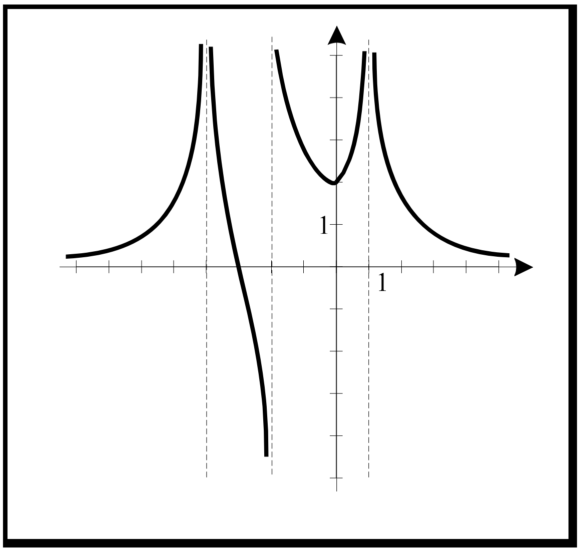
17) Representar gráficamente la función que cumple:

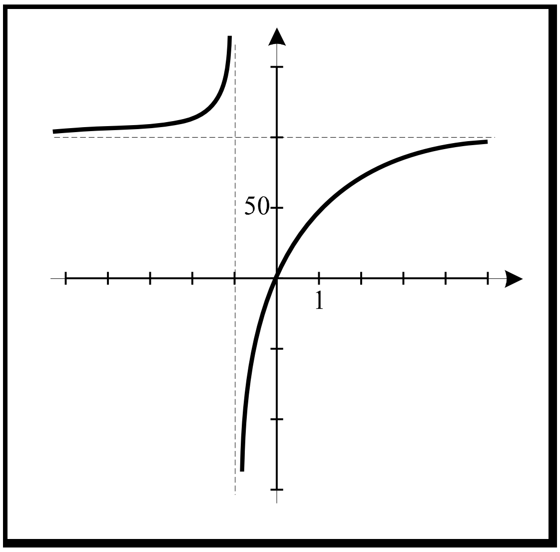
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$; $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$; $f(-1) = 0$; $f(0) = -1$

18) Dibuja la gráfica de una función de la que conocemos los siguientes datos:
a) Es creciente de $-\infty$ a 2 y decreciente de 2 en adelante.
b) Corta a los ejes en los puntos $(-1,0)$, $(0,1)$ y $(4,0)$
c) Cuando x tiende a infinito, la *y* tiende a menos infinito.

19) Dibuja la gráfica de una función que tiene dos asíntotas verticales en $x=-1$ y $x=2$; una asíntota horizontal en $y=1$; corta a los ejes en los puntos $(0,-2)$, $(1,0)$ y $(4, 0)$ y es siempre creciente.

20) Interpreta las gráficas correspondientes a las siguientes funciones:





21) Calcula el valor de k para que la siguiente función sea continua en $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{kx^4 - 3x^3}{7x^5 + 3x^3} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ -1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Soluciones

1) a) $-\infty$ b) $0'5$ c) 2’88675 d) $-\infty$

2) a) 5 b) 1 c) No existe

3) a) ∞ b) 1 c) $e^{-3}=0'0497870$ d) $e^{-6}=0'00247875$ e) 3 f) $e^{\frac{3}{2}}=4'48168$

g) $e^{\frac{3}{2}}=4'48168$ h) $x\to 1\to -1$ $x\to -\infty\to 2$ i) -24 j) ∞ k) 2’25

4) $k=-1$

5) $\lim_{x\to 3}(x-1)=2$ $\lim_{x\to 0}(x^2-3)=-3$ $\lim_{x\to 7}5=5$. La función $f(x)$ es continua $\forall x\in R-\{4\}$

6)

a) $D=\forall x\in R-\{-1,1\}$ $R=\forall y\in\left]-\infty,-1\right]\cup\left]1,\infty\right[$.
La función es Par.
Las rectas $x=-1$ y $x=1$ son asíntotas verticales y la recta $y=1$ es una asíntota horizontal.

b) $f(0)=-1$ $\lim_{x\to\infty}f(x)=1$ $\lim_{x\to-\infty}f(x)=1$ $\lim_{x\to-1^-}f(x)=\infty$ $\lim_{x\to+1^+}f(x)=\infty$ $\lim_{x\to+1^-}f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to-1^+}f(x)=-\infty$ $\lim_{x\to 0}f(x)=-1$

7)

a) $D=\forall x\in R-\{-1,2\}$. Discontinuidades en $x=-1$ y $x=2$.

b) $\lim_{x\to-1}f(x)=\frac{2}{3}$ $\lim_{x\to 2^-}f(x)=+\infty$ $\lim_{x\to 2^+}f(x)=-\infty$

c) Discontinuidad evitable en $x=-1$. Asíntota vertical en $x=2$.

8) Continua $\forall x\in R-\{2\}$. En $x=2$ hay una discontinuidad inevitable de salto finito.

9) Continua $\forall x\in R-\{-1,2\}$. En $x=-1$ y $x=2$ hay una discontinuidad inevitable de salto finito.

10) $a=3$ $b=-1$

11) Continua $\forall x\in R-\{0,1\}$. En $x=0$ hay una discontinuidad inevitable de salto infinito, y en $x=1$ hay una discontinuidad inevitable de salto finito.

12)

a) $D=\forall x\in R-\{0,1\}$.

b) $\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-1}{x^2-x}=-\infty$ $\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-1}{x^2-x}=+\infty$ $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-x}=2$

c) Continua $\forall x\in R-\{0,1\}$. En $x=0$ hay una discontinuidad inevitable de salto infinito, y en $x=1$ hay una discontinuidad evitable.

13)

a) Asíntotas verticales en $x=-2$ y $x=1$. Asíntota horizontal en $y=0'5$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0'5$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0'5$ $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$

c) $D=\forall x\in R-\{-2,1\}$ $R=\forall y\in R$

14)

b) Asíntotas verticales en $x=-1$ y $x=1$. Asíntota horizontal en $y=1$.

c) Discontinuidad inevitable de salto infinito en $x=-1$ y $x=1$.

21) Sol: $\forall k\in R$