

# Trigonometría

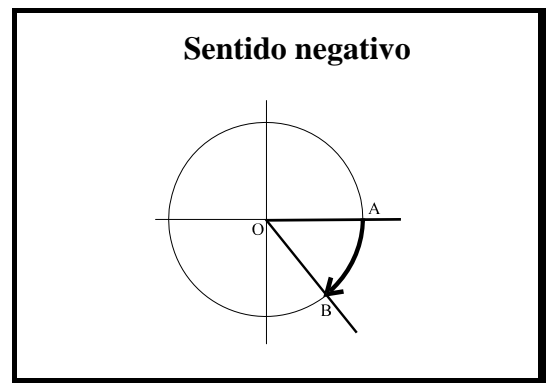
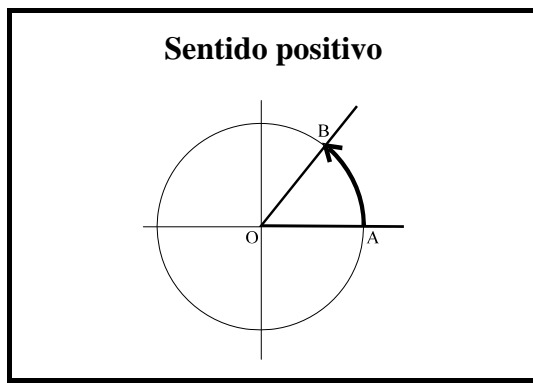
Es la parte de las matemáticas que estudia las relaciones métricas entre los elementos de un triángulo, siendo éstos los lados y los ángulos.

Trazada una circunferencia, a cada ángulo central corresponde un arco, y a cada arco un ángulo central de tal forma que a arcos iguales corresponden ángulos iguales y viceversa. Para medir un arco es necesario precisar su origen, su sentido y su unidad de medida.

**Origen** Convenimos en tomar el punto A como origen de arcos. A es el punto en el que la dirección positiva del eje de abscisas corta a la circunferencia de centro O, que es el origen de coordenadas.

**Extremo** El arco AB tiene por extremo B.

**Sentido** Se considera sentido positivo el que recorre la circunferencia en sentido contrario a las agujas del reloj y negativo el que la recorre en el mismo sentido.



Escribiremos  $\widehat{AOB}$  si la orientación del arco es  $\widehat{AB}$ , y escribiremos  $\widehat{BOA}$  si la orientación del arco es  $\widehat{BA}$ .

## Medidas angulares

### Medidas sexagesimales

Para medir un ángulo se utilizan habitualmente los grados sexagesimales y sus divisores, los minutos y los segundos.

Un grado sexagesimal es la noventa parte de un ángulo recto, por consiguiente, un ángulo recto mide 90 grados sexagesimales.

Un minuto es la sesentava parte de un grado sexagesimal.

Un segundo es la sesentava parte de un minuto.

Los grados minutos y segundos se expresan respectivamente por  $^{\circ}$ ,  $'$ ,  $''$

## Medidas Centesimales

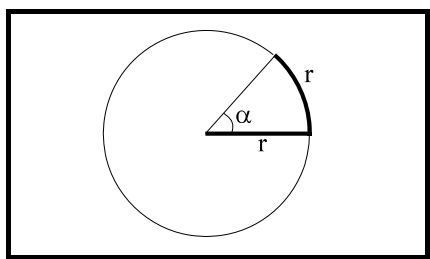
Un grado centesimal es la centésima parte de un ángulo recto.

Un minuto centesimal es la centésima parte de un grado centesimal.

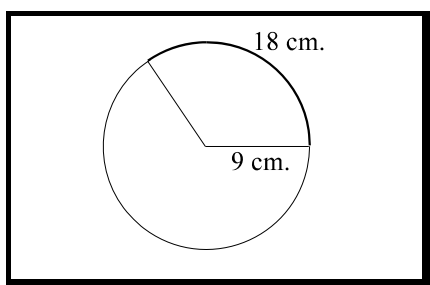
Un segundo centesimal es la centésima parte de un minuto centesimal.

Se expresan respectivamente por **g**, **m** y **s**.

## Medidas en Radianes



El Radián es un ángulo al que le corresponde un arco cuya longitud es igual a la del radio con el que se ha trazado el arco. Su símbolo es rad.



Para medir un ángulo en radianes tendremos que averiguar cuántos radios mide uno de sus arcos correspondientes. Para ello mediremos uno de ellos y dividiremos por la longitud de su radio.

$$\frac{18}{9} = 2 \text{ radianes}$$

En cualquier circunferencia, si dividimos su longitud entre el diámetro de la misma siempre nos da la misma cantidad constante

$$\frac{l}{2R} = \pi = 3'1415927.....$$

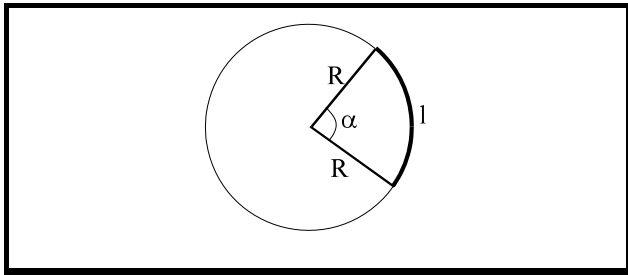
Por tanto, la longitud de la circunferencia es siempre  $l = 2\pi R$ . De esta expresión obtenemos:

$$\frac{l}{R} = 2\pi$$

lo que significa que el radio de la circunferencia está contenido en la misma  $2\pi$  veces, por tanto la circunferencia completa equivale a  $2\pi$  radianes y la semicircunferencia a  $\pi$  radianes

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad} \quad \Rightarrow \quad 180^\circ = \pi \text{ radianes}$$

## Longitud de un arco de circunferencia



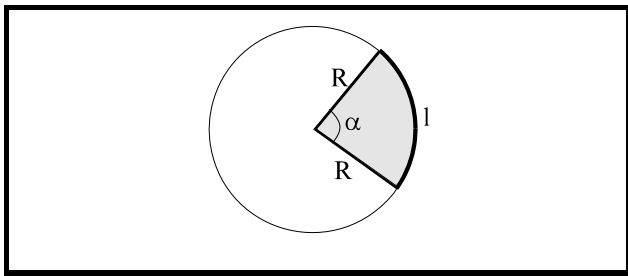
$$\left. \begin{array}{l} 2\pi R \longrightarrow 360^\circ \\ l \longrightarrow \alpha^\circ \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2\pi R \longrightarrow 2\pi \\ l \longrightarrow \alpha \end{array} \right\}$$

Si  $\alpha$  se mide en grados  $l = \frac{2\pi R \cdot \alpha^\circ}{360^\circ}$

Si  $\alpha$  se mide en radianes  $l = \frac{2\pi R \cdot \alpha}{2\pi} = R \cdot \alpha$

## Área de un sector circular de $\alpha^\circ$



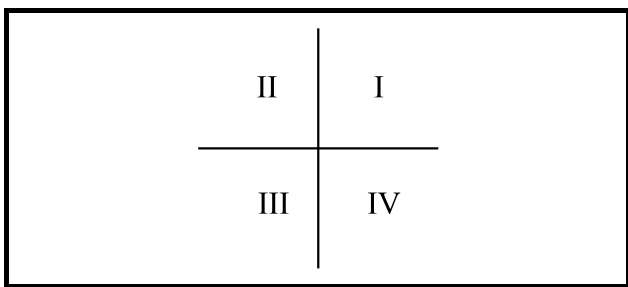
$$\left. \begin{array}{l} \pi R^2 \longrightarrow 360^\circ \\ A \longrightarrow \alpha^\circ \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi R^2 \longrightarrow 2\pi \\ A \longrightarrow \alpha \end{array} \right\}$$

Si  $\alpha$  se mide en grados  $A = \frac{\pi R^2 \cdot \alpha^\circ}{360^\circ}$

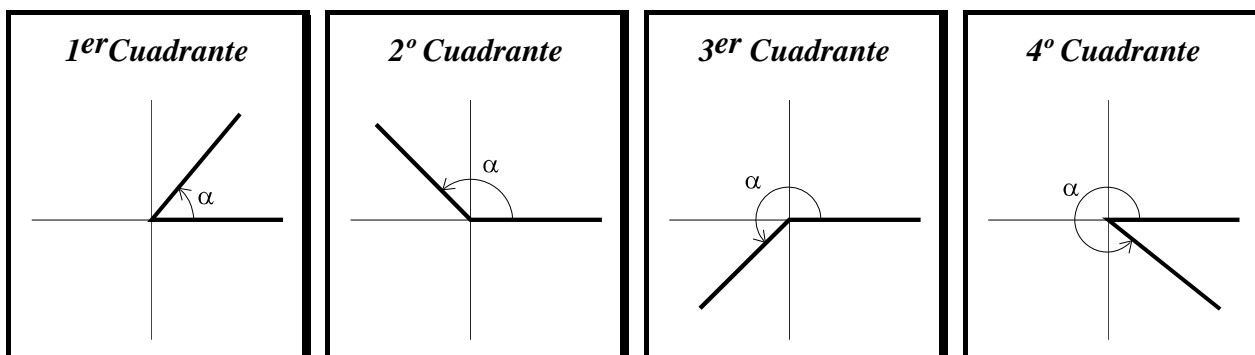
Si  $\alpha$  se mide en radianes  $A = \frac{\pi R^2 \cdot \alpha}{2\pi} = \frac{R^2 \cdot \alpha}{2}$

## Cuadrantes angulares

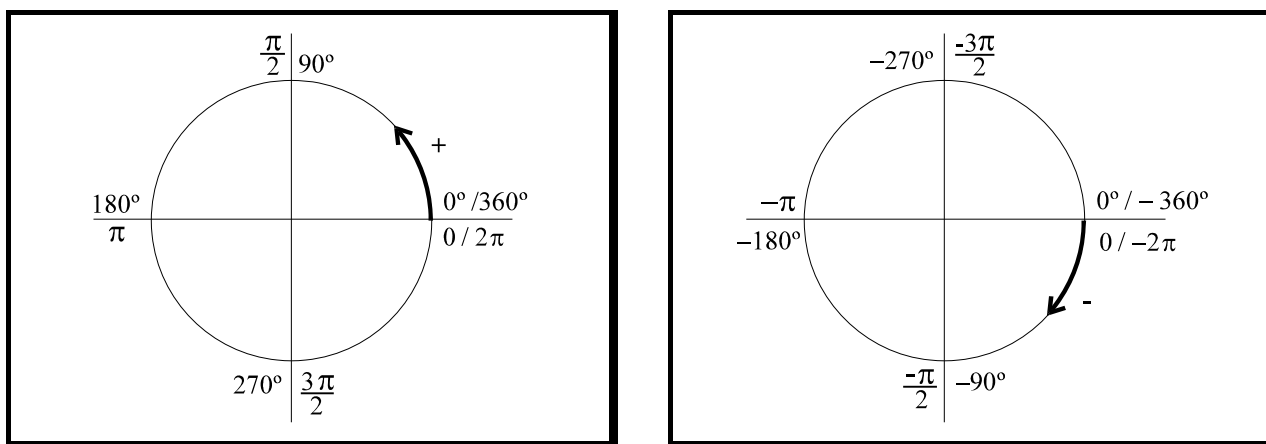


Al trazar dos ejes de coordenadas rectangulares, dividimos el plano en 4 regiones, llamadas cuadrantes. Estos cuadrantes se ordenan y numeran tal como se indica en la figura.

Para dibujar un ángulo orientado, colocaremos siempre el primer lado en el semieje positivo del eje de abscisas y el vértice en el origen de coordenadas. El cuadrante en el que queda situado el segundo lado se utiliza para decir a qué cuadrante pertenece el ángulo.

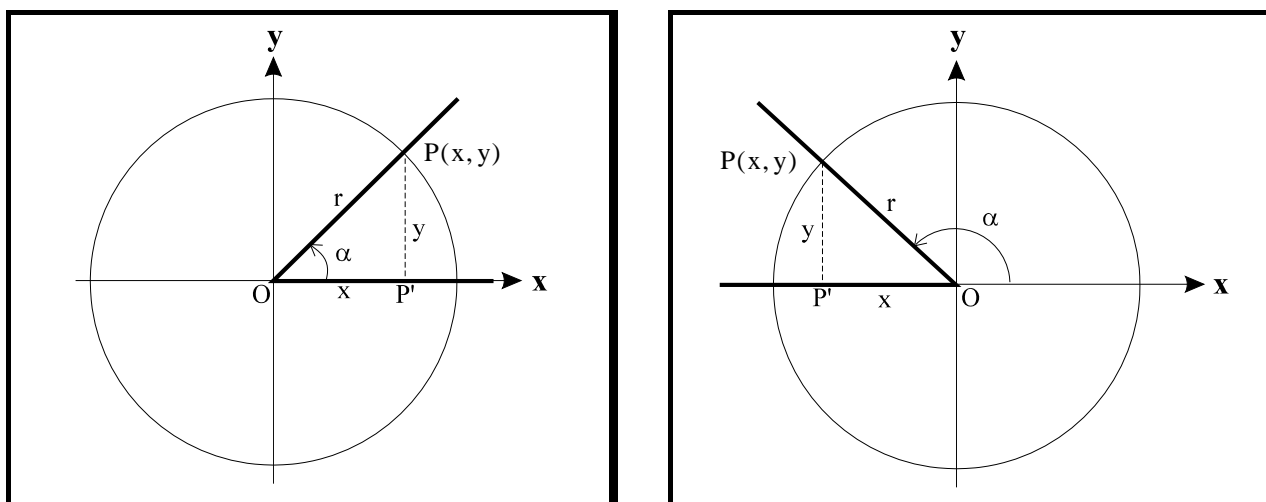


Los únicos ángulos que no pertenecen a ningún cuadrante determinado son:



## Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera

Consideremos un ángulo  $\alpha$  tal que el vértice coincida con el origen de coordenadas y un lado con el semieje positivo del eje de abscisas. Con centro en el origen de coordenadas trazamos una circunferencia que corta al otro lado del ángulo  $\alpha$  en el punto  $P(x, y)$ .



En la primera figura el ángulo  $\alpha$  es agudo mientras que en la segunda figura el ángulo  $\alpha$  es obtuso. En las dos figuras se cumple que:

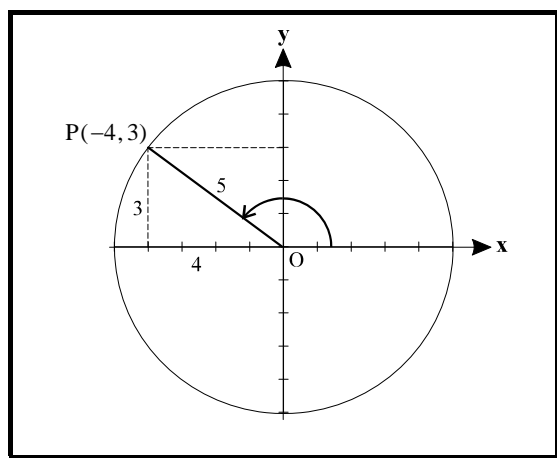
- El cateto P'P es la ordenada del punto P.
- El cateto OP' es la abscisa del punto P.
- La hipotenusa es el radio

Para un ángulo  $\alpha$  cualquiera, las razones trigonométricas directas e inversas son las siguientes:

Razones directas	Razones inversas
$\text{sen } \alpha = \frac{y}{r} = \frac{\text{ordenada}}{\text{radio}}$	$\text{cosec } \alpha = \frac{r}{y} = \frac{\text{radio}}{\text{ordenada}} \quad y \neq 0$
$\text{cos } \alpha = \frac{x}{r} = \frac{\text{abscisa}}{\text{radio}}$	$\text{sec } \alpha = \frac{r}{x} = \frac{\text{radio}}{\text{abscisa}} \quad x \neq 0$
$\text{tg } \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\text{ordenada}}{\text{abscisa}} \quad x \neq 0$	$\text{cotg } \alpha = \frac{x}{y} = \frac{\text{abscisa}}{\text{ordenada}} \quad y \neq 0$

Sin embargo, las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera son independientes del radio de la circunferencia elegida para definir las.

**Ejemplo:** Un móvil se para en el punto P(-4, 3) de una circunferencia de radio 5. ¿Cuáles son las razones trigonométricas del ángulo de giro?

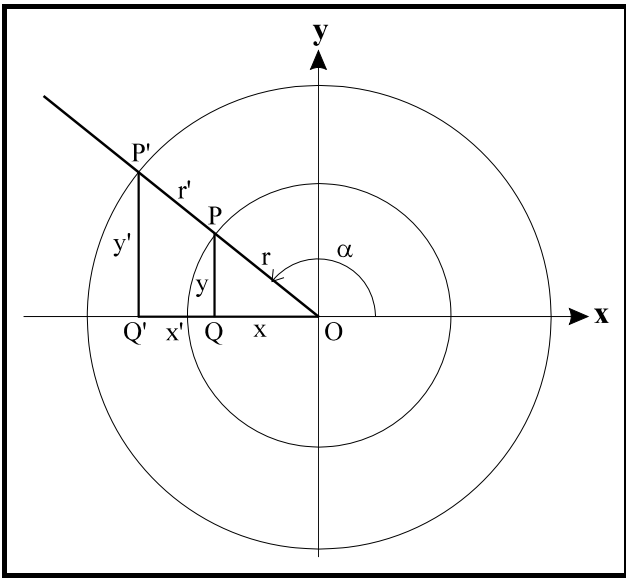


$$\text{sen } \alpha = \frac{3}{5} \quad \text{cos } \alpha = -\frac{4}{5} \quad \text{tg } \alpha = -\frac{3}{4}$$

$$\text{cosec } \alpha = \frac{5}{3} \quad \text{sec } \alpha = -\frac{5}{4} \quad \text{cotg } \alpha = -\frac{4}{3}$$

## Circunferencia unidad o circunferencia goniométrica

Las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera son independientes del radio de la circunferencia. Si consideramos otra circunferencia de radio  $r' \neq r$  obtendremos otro punto de corte  $P'(x', y') \neq P(x, y)$ .



De la semejanza de triángulos  $OPQ$  y  $OP'Q'$  se obtiene:

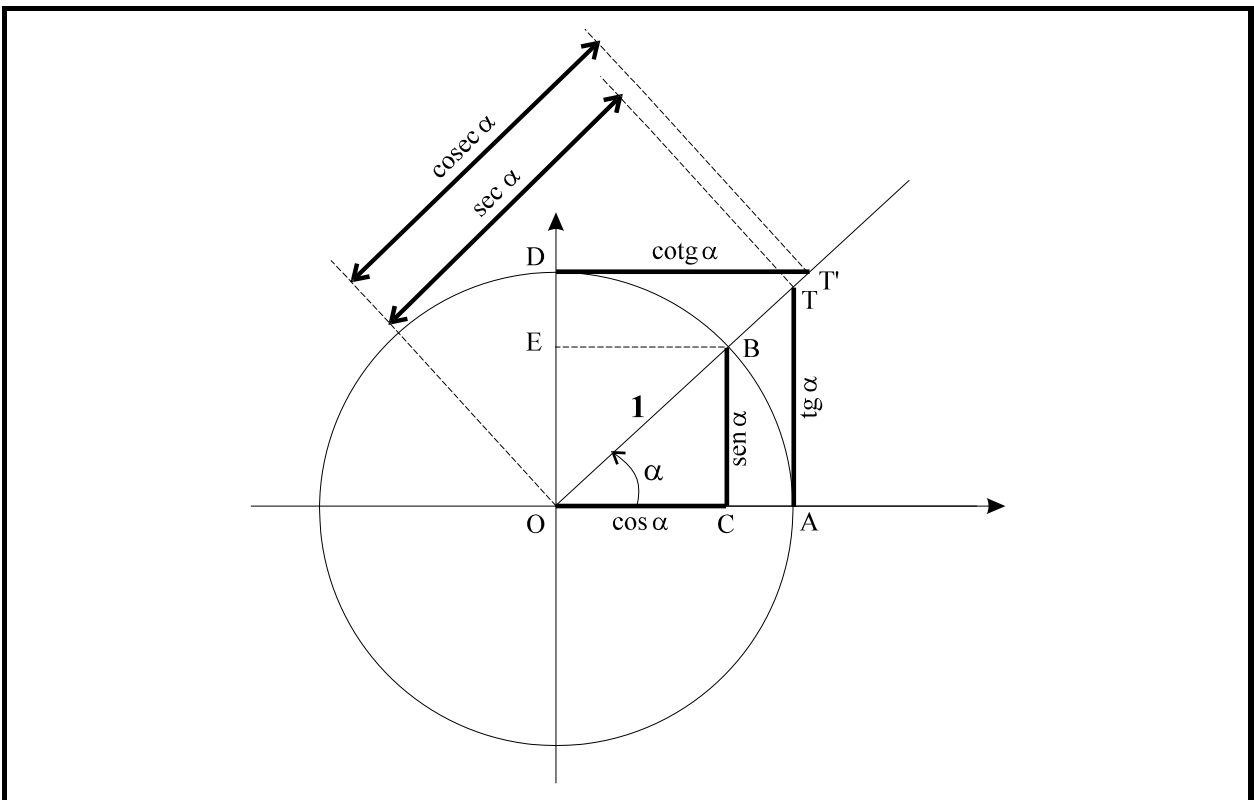
$$\frac{y}{r} = \frac{y'}{r'} \quad \frac{x}{r} = \frac{x'}{r'} \quad \frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}$$

Las razones trigonométricas son iguales cualquiera que sea la circunferencia, es decir no dependen del radio de ésta. Por ello en adelante elegiremos el radio como la unidad.

A la circunferencia de radio unidad se la denomina circunferencia goniométrica.

## Líneas trigonométricas

Tracemos una circunferencia de radio unitario  $OA = OB = OD = 1$ . Calculemos las razones trigonométricas del ángulo  $\alpha$ .



Teniendo en cuenta que los triángulos OBC y OTA son semejantes tenemos:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{BC}{OB} = \frac{BC}{1} = BC \quad \operatorname{cos} \alpha = \frac{OC}{OB} = \frac{OC}{1} = OC \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{OC} = \frac{TA}{OA} = \frac{TA}{1} = TA$$

*El  $\operatorname{sen} \alpha$  coincide con la ordenada del punto B, y el  $\operatorname{cos} \alpha$  coincide con la abscisa de dicho punto.*

*La  $\operatorname{tg} \alpha$  coincide con el segmento que va desde el origen de ángulos hasta el punto de corte de la recta tangente a la circunferencia, trazada por el origen de ángulos, con el lado variable del ángulo  $\alpha$ .*

Teniendo en cuenta que los triángulos OBC y OTA son semejantes así como los triángulos OEB y ODT' tenemos:

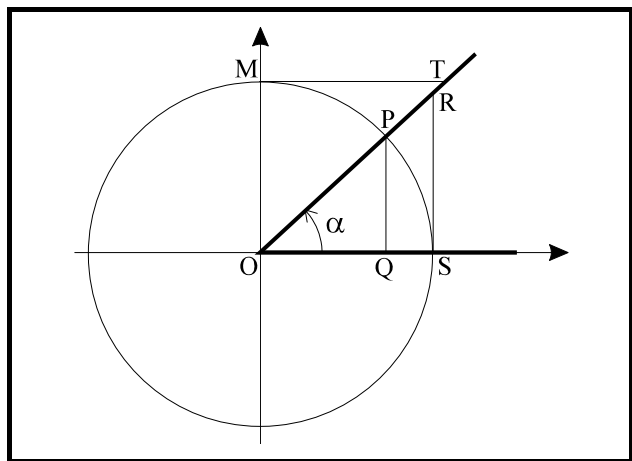
$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{OB}{BC} = \frac{OB}{EO} = \frac{OT'}{DO} = \frac{OT'}{1} = OT' \quad \operatorname{sec} \alpha = \frac{OB}{OC} = \frac{OT}{OA} = \frac{OT}{1} = OT$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{OC}{BC} = \frac{EB}{EO} = \frac{DT'}{DO} = \frac{DT'}{1} = DT'$$

Observamos que las razones trigonométricas del ángulo  $\alpha$ , cuyo arco está trazado con un radio unitario, coinciden con la medida de los segmentos orientados BC, OC, TA, OT, OT' y DT', denominados **líneas trigonométricas**.

## Signo de las razones trigonométricas

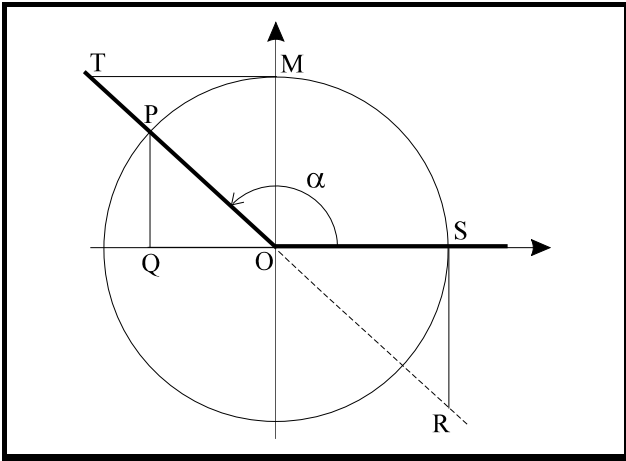
El signo de las razones trigonométricas se calcula fácilmente conociendo el cuadrante en que se encuentra el ángulo, ya que entonces conocemos el signo de la ordenada y de la abscisa.



$$\operatorname{sen} \alpha = PQ > 0 \quad \operatorname{cos} \alpha = OQ > 0$$

$$\operatorname{tg} \alpha = RS > 0 \quad \operatorname{cosec} \alpha = OT > 0$$

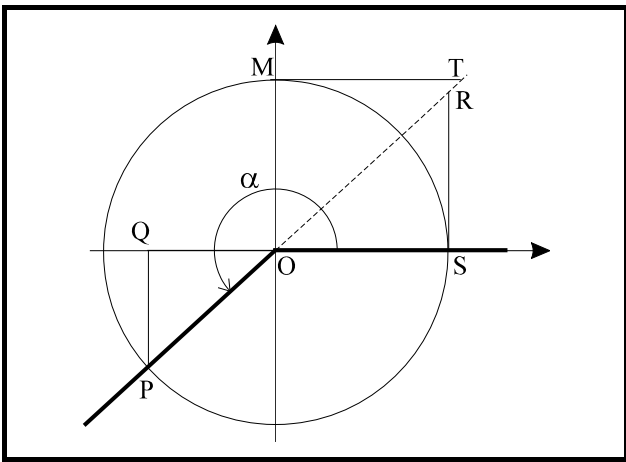
$$\operatorname{sec} \alpha = OR > 0 \quad \operatorname{cotg} \alpha = MT > 0$$



$$\text{sen } \alpha = PQ > 0 \qquad \text{cos } \alpha = OQ < 0$$

$$\text{tg } \alpha = RS < 0 \qquad \text{cosec } \alpha = OT > 0$$

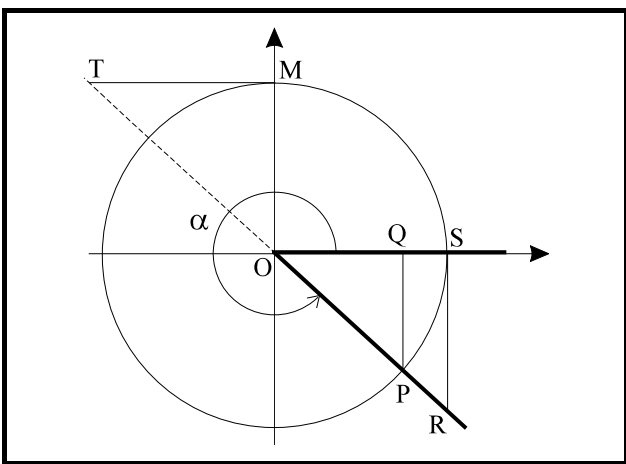
$$\text{sec } \alpha = OR < 0 \qquad \text{cotg } \alpha = MT > 0$$



$$\text{sen } \alpha = PQ < 0 \qquad \text{cos } \alpha = OQ < 0$$

$$\text{tg } \alpha = RS > 0 \qquad \text{cosec } \alpha = OT < 0$$

$$\text{sec } \alpha = OR < 0 \qquad \text{cotg } \alpha = MT > 0$$

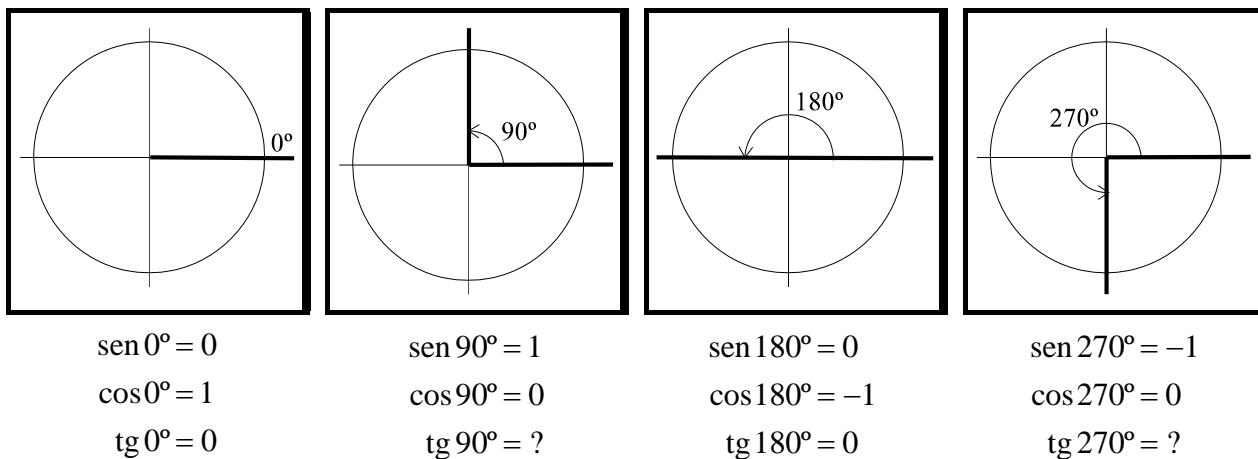


$$\text{sen } \alpha = PQ < 0 \qquad \text{cos } \alpha = OQ > 0$$

$$\text{tg } \alpha = RS < 0 \qquad \text{cosec } \alpha = OT < 0$$

$$\text{sec } \alpha = OR > 0 \qquad \text{cotg } \alpha = MT < 0$$

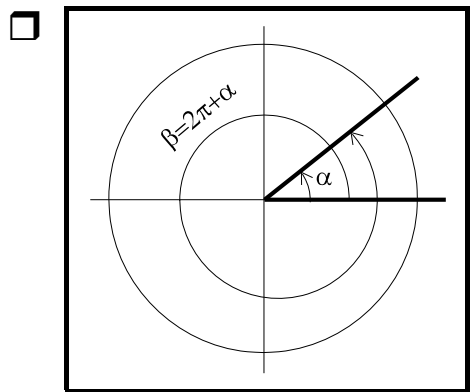
Así como el seno y el coseno pueden calcularse siempre para todos los ángulos, no ocurre lo mismo para la tangente. Si el punto P tiene su abscisa igual a cero, no existe la tangente del ángulo porque el lado variable del mismo y la recta tangente a la circunferencia trazada por el origen de ángulos son paralelos.



La representación gráfica de las razones trigonométricas de un ángulo ponen de manifiesto las desigualdades siguientes:

$$-1 \leq \text{sen } \alpha \leq 1 \quad -1 \leq \text{cos } \alpha \leq 1 \quad -\infty < \text{tg } \alpha < \infty$$

## Relaciones entre las razones trigonométricas



En general, dados dos ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ , si se verifica que su diferencia es un múltiplo de  $2\pi$  radianes (o  $360^\circ$ ) tienen las mismas razones trigonométricas.

$$\beta - \alpha = 2\pi \cdot k \Rightarrow \begin{cases} \text{sen } \alpha = \text{sen } \beta = \text{sen } (\alpha + 2\pi \cdot k) \\ \text{cos } \alpha = \text{cos } \beta = \text{cos } (\alpha + 2\pi \cdot k) \\ \text{tg } \alpha = \text{tg } \beta = \text{tg } (\alpha + 2\pi \cdot k) \end{cases}$$

Las razones recíprocas de éstas tienen el mismo comportamiento. Estas relaciones podemos enunciarlas mediante la siguiente propiedad:

*El valor de las razones trigonométricas de un ángulo depende únicamente del extremo del arco (para una misma circunferencia).*

$\alpha \approx \beta \Leftrightarrow \beta - \alpha = 2\pi \cdot k$ ; o bien, los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  son equivalentes si al dividirlos por  $2\pi$  dan el mismo resto.

*En general, para calcular las razones trigonométricas de ángulos mayores que  $360^\circ$  dividiremos el ángulo dado entre  $360^\circ$ . El cociente nos da las vueltas enteras que da a la circunferencia y el resto es un ángulo cuyas razones trigonométricas son iguales a las del ángulo dado.*

**Ejemplo:** Calcular las razones trigonométricas correspondientes a  $7210^\circ$

$$\text{sen } 7210^\circ = \text{sen}(10^\circ + 360^\circ \cdot 20) = \text{sen } 10^\circ = 0'1736$$

$$\text{cos } 7210^\circ = \text{cos}(10^\circ + 360^\circ \cdot 20) = \text{cos } 10^\circ = 0'9848$$

$$\text{tg } 7210^\circ = \text{tg}(10^\circ + 360^\circ \cdot 20) = \text{tg } 10^\circ = 0'1763$$

Al hacer el cálculo no conviene simplificar el dividendo y el divisor, pues aunque el cociente es el mismo, no ocurre lo mismo con el resto.

$$\begin{array}{r} 7210 \quad | \quad 360 \\ 0010 \quad | \quad 2 \end{array}$$

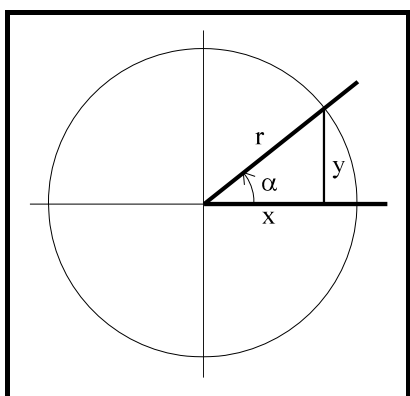
→ BIEN

Resto = 10

$$\begin{array}{r} 721\cancel{0} \quad | \quad 36\cancel{0} \\ 001 \quad | \quad 2 \end{array}$$

→ MAL

Resto = 1



De la figura adjunta se deduce:

$$\text{sen } \alpha = \frac{y}{r} \quad \text{cos } \alpha = \frac{x}{r}$$

Elevando al cuadrado ambas igualdades y sumando se obtiene:

$$(\text{sen } \alpha)^2 + (\text{cos } \alpha)^2 = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{y^2 + x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

En la práctica el cuadrado de  $\text{sen } \alpha$  y  $\text{cos } \alpha$  suelen escribirse así:  $(\text{sen } \alpha)^2 = \text{sen}^2 \alpha$  y  $(\text{cos } \alpha)^2 = \text{cos}^2 \alpha$ . Con esta notación la relación anterior es:

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$$

que se denomina **relación fundamental**.

□ Por otro lado:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} \quad \text{si } \operatorname{cos} \alpha \neq 0$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}$$

□ Dividiendo la relación fundamental por  $\operatorname{sen}^2 \alpha \neq 0$ , se tiene:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} + \frac{\operatorname{cos}^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha} \Rightarrow$$

$$1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha}$$

□ Dividiendo la relación fundamental por  $\operatorname{cos}^2 \alpha \neq 0$ , se tiene:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{cos}^2 \alpha} + \frac{\operatorname{cos}^2 \alpha}{\operatorname{cos}^2 \alpha} = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \alpha} \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \alpha}$$

Utilizando estas relaciones y las obtenidas a partir de las definiciones pueden calcularse las razones trigonométricas de un ángulo conocidas una razón trigonométrica cualquiera y el cuadrante en el que se encuentra dicho ángulo.

**Ejemplo:** La tangente de un ángulo del tercer cuadrante es 1. Calcula su seno y su coseno.

$$\operatorname{tg} \alpha = 1 = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{cos} \alpha$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 \rightarrow 2 \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

En el tercer cuadrante el seno es negativo, luego la solución es:  $\operatorname{sen} \alpha = -\sqrt{\frac{1}{2}}$

$$\operatorname{cos} \alpha = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

En el tercer cuadrante el coseno es negativo, luego:  $\operatorname{cos} \alpha = -\sqrt{\frac{1}{2}}$

**Ejemplo:** Si  $\cos \alpha = -0'47$  y  $\alpha \in \left[ \pi, \frac{3\pi}{2} \right]$  calcula las demás razones trigonométricas.

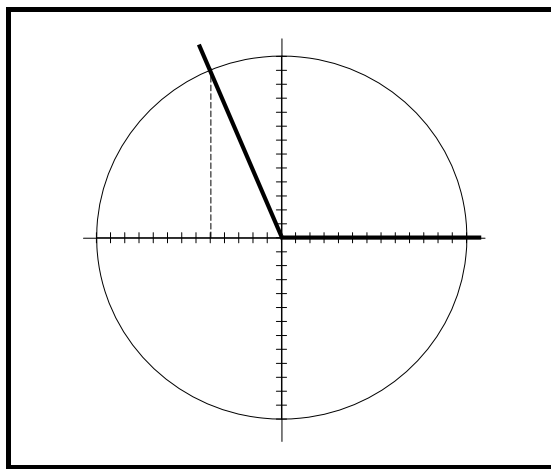
$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - (-0'47)^2} = \pm 0'88$$

Como  $\alpha$  está en tercer cuadrante, y allí el seno es negativo  $\Rightarrow \sin \alpha = -0'88$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-0'88}{-0'47} = 1'87$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{-0'88} = -1'13 \quad \operatorname{sec} \alpha = \frac{1}{-0'47} = -2'12 \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{1'87} = 0'53$$

**Ejemplo:** Dibuja un ángulo del segundo cuadrante cuyo coseno valga  $-\frac{5}{13}$  utilizando la circunferencia goniométrica. Calcula las demás razones trigonométricas.



Las divisiones se hacen a través de un segmento auxiliar que dividiremos en 13 partes utilizando el compás.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - (-0'38)^2} = \pm 0'92 \Rightarrow \sin \alpha = 0'92$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0'92}{-0'38} = -2'42$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{0'92} = 1'08 \quad \operatorname{sec} \alpha = \frac{1}{-0'38} = -2'63 \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{-2'42} = -0'41$$

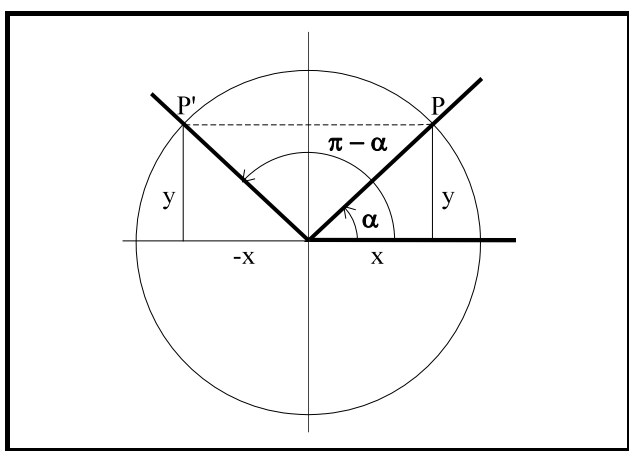
Estos problemas se pueden resolver utilizando solamente la calculadora, viendo el cuadrante en el que se encuentra el ángulo.

## Reducción al primer cuadrante

Si queremos conocer los ángulos menores que  $360^\circ$  con un valor conocido de una razón trigonométrica deberemos utilizar la reducción al primer cuadrante ya que la calculadora sólo nos da un ángulo, y en cambio veremos que *siempre existen dos ángulos menores que  $360^\circ$  con el mismo valor para una determinada razón trigonométrica.*

### Reducción del segundo cuadrante al primero (ángulos suplementarios)

Ángulos suplementarios son aquellos que suman  $\pi$  radianes.



En la figura aparecen dos ángulos suplementarios. Observa que los puntos P y P' son simétricos respecto del eje de ordenadas.

Las ordenadas (valores de los senos) son iguales mientras que las abscisas (valores de los cosenos) son opuestas.

Las otras razones las obtenemos a partir del seno y del coseno.

$$\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = y = \operatorname{sen} \alpha \quad \cos(\pi - \alpha) = -x = -\cos \alpha \quad \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \frac{y}{-x} = -\frac{y}{x} = -\operatorname{tg} \alpha$$

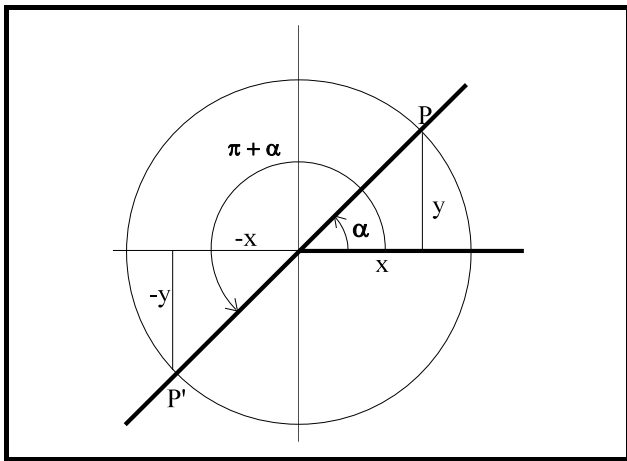
Observando la figura se deduce que la suma de ambos ángulos es un ángulo llano; son ángulos suplementarios.

$$\alpha + \pi - \alpha = \pi$$

Por consiguiente se deduce que, dos ángulos suplementarios tienen sus senos y cosecantes iguales y opuestas las demás razones.

$$\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \quad \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

### Reducción del tercer cuadrante al primero (ángulos que difieren en $\pi$ rad.)



En la figura aparecen dos ángulos que difieren en  $\pi$  radianes. Observa que los puntos P y P' son simétricos respecto del origen.

Las ordenadas (valores de los senos) son opuestas, lo mismo que las abscisas (valores de los cosenos).

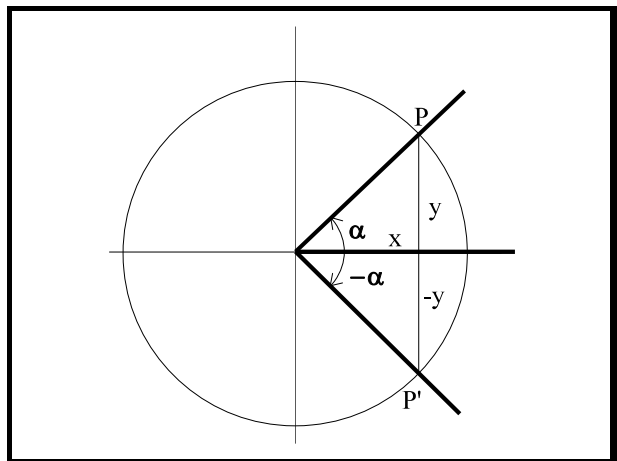
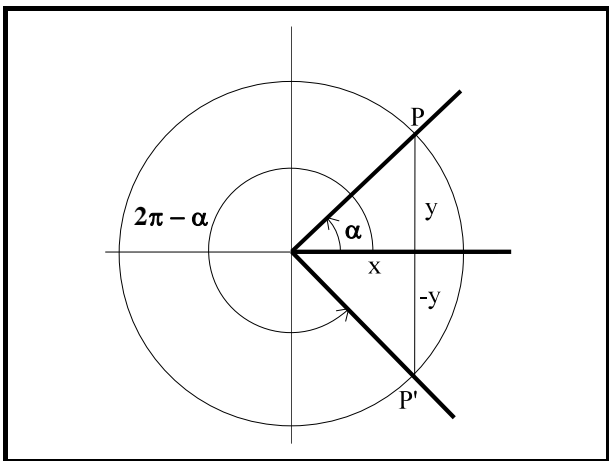
Las otras razones las obtenemos a partir del seno y del coseno.

$$\text{sen}(\pi + \alpha) = -y = -\text{sen} \alpha \quad \text{cos}(\pi + \alpha) = -x = -\text{cos} \alpha \quad \text{tg}(\pi + \alpha) = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x} = \text{tg} \alpha$$

Por consiguiente se deduce que, dos ángulos que difieren en  $\pi$  radianes tienen sus tangentes y cotangentes iguales y opuestas las demás razones.

$$\text{sen}(\pi + \alpha) = -\text{sen} \alpha \quad \text{cos}(\pi + \alpha) = -\text{cos} \alpha \quad \text{tg}(\pi + \alpha) = \text{tg} \alpha$$

### Reducción del cuarto cuadrante al primero (ángulos opuestos)



En la 1ª figura aparecen dos ángulos opuestos (suman  $2\pi$  radianes). Observa que los puntos P y P' son simétricos respecto del eje de abscisas. En la 2ª figura tenemos un ángulo negativo  $-\alpha$  que pertenece al cuarto cuadrante. Al reducirlo al primer cuadrante se obtendría el ángulo opuesto  $\alpha$ .

Las ordenadas (valores de los senos) son opuestas, mientras que las abscisas (valores de los cosenos) son iguales.

Las otras razones las obtenemos a partir del seno y del coseno.

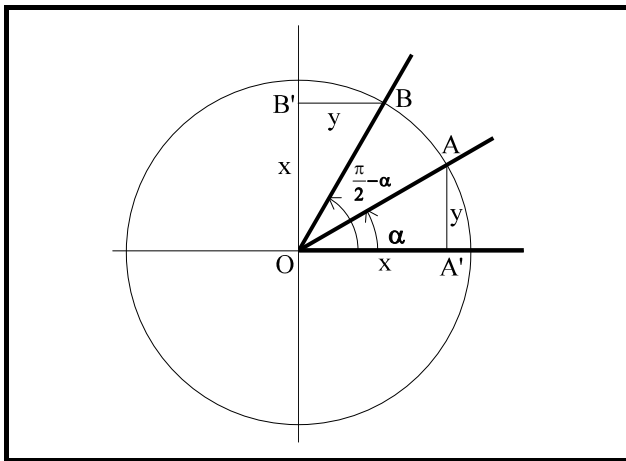
$$\operatorname{sen}(2\pi - \alpha) = \operatorname{sen}(-\alpha) = -y = -\operatorname{sen} \alpha \quad \operatorname{cos}(2\pi - \alpha) = \operatorname{cos}(-\alpha) = x = \operatorname{cos} \alpha$$

$$\operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = \operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\operatorname{tg} \alpha$$

Por consiguiente se deduce que, dos ángulos opuestos tienen cosenos y secantes iguales y opuestas las demás razones.

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen} \alpha \quad \operatorname{cos}(-\alpha) = \operatorname{cos} \alpha \quad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

### Razones de ángulos complementarios (ángulos que suman $\pi/2$ rad.)



En la figura aparecen dos ángulos complementarios. Observa que los triángulos  $OAA'$  y  $OBB'$  son iguales.

La ordenada  $AA'$  (valor del seno) es igual a la abscisa  $BB'$  (valor del coseno). La abscisa  $OA'$  (valor del coseno) es igual a la ordenada  $OB'$  (valor del seno)

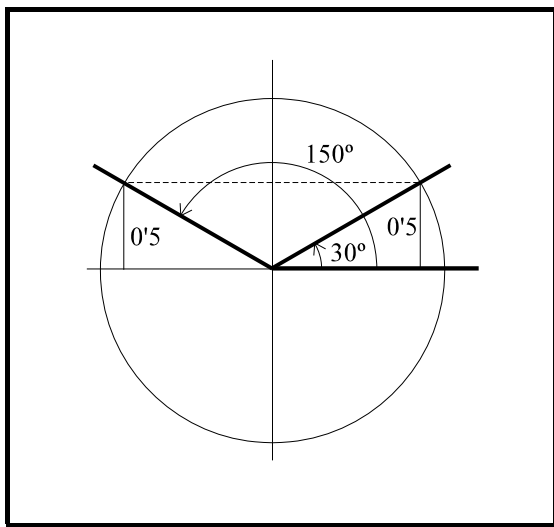
Las otras razones las obtenemos a partir del seno y del coseno.

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = x = \operatorname{cos} \alpha \quad \operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = y = \operatorname{sen} \alpha \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{x}{y} = \frac{1}{\frac{y}{x}} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{cotg} \alpha$$

Por consiguiente se deduce que, dos ángulos complementarios tienen el seno de uno igual al coseno del otro y viceversa, y la tangente de uno es igual a la cotangente del otro..

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{cos} \alpha \quad \operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen} \alpha \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{cotg} \alpha$$

**Ejemplo:** Si  $\text{sen } \alpha = 0'5$  ¿Cuánto vale  $\alpha$  si  $\alpha \in [0, 2\pi]$ ?



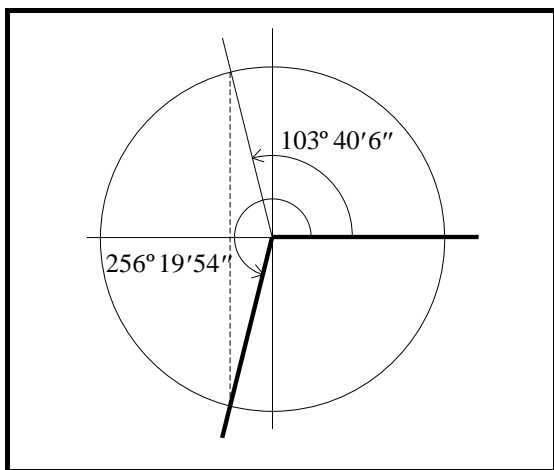
Tenemos  $\alpha = \arcsen 0'5$

La calculadora nos da para ese valor del seno un ángulo de  $30^\circ$ . Una vez dibujado este ángulo, el otro se obtiene trazando una paralela al eje de abscisas por el punto donde el segundo lado corta a la circunferencia.

$$\text{sen } \alpha = 0'5 \rightarrow \alpha = \arcsen 0'5$$

$$\begin{cases} \alpha = 30^\circ \\ \alpha = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ \end{cases}$$

**Ejemplo:** Si  $\text{cos } \alpha = -0'2363$  y  $\alpha$  pertenece al tercer cuadrante ¿Cuánto vale  $\alpha$ ?



Tenemos  $\alpha = \arccos(-0'2363)$

La calculadora nos da para ese valor del coseno un ángulo de  $103^\circ 40' 6''$ , que no pertenece al tercer cuadrante. Una vez dibujado este ángulo, el otro se obtiene trazando una paralela al eje de ordenadas por el punto donde el segundo lado corta a la circunferencia.

Nuestro ángulo como se ve en la figura será:  $360^\circ - 103^\circ 40' 6'' = 256^\circ 19' 54''$  que pertenece al tercer cuadrante.

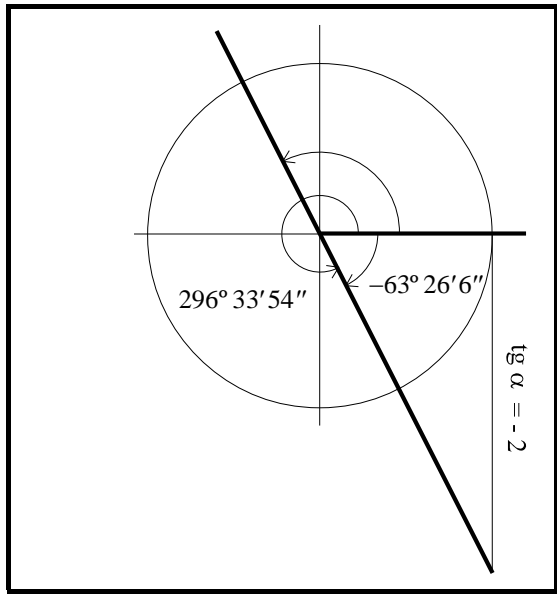
$$\text{cos } \alpha = -0'2363 \rightarrow \alpha = \arccos(-0'2363) = 256^\circ 19' 54''$$

**Ejemplo:** Si  $\text{cos}(\pi - \alpha) = 0'7$ . Calcular  $\alpha$ .

$$180^\circ - \alpha = \arccos 0'7 = \begin{cases} 45^\circ 34' 23'' + 360^\circ \cdot k & k \in \mathbb{Z} \\ 314^\circ 25' 37'' + 360^\circ \cdot k & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 180^\circ - 45^\circ 34' 23'' - 360^\circ \cdot k = 134^\circ 25' 37'' - 360^\circ \cdot k \\ \alpha = 180^\circ - 314^\circ 25' 37'' - 360^\circ \cdot k = -134^\circ 25' 37'' - 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

**Ejemplo:** Si  $\operatorname{tg}\alpha = -2$ . Calcular  $\alpha$ .



Tenemos:  $\alpha = \operatorname{arctg}(-2)$

La calculadora nos da para ese valor de la tangente un ángulo de  $-63^{\circ} 26' 6''$ , que equivale a  $296^{\circ} 33' 54''$ .

Todos los ángulos cuya tangente vale lo mismo se van obteniendo al sumar o restar  $180^{\circ}$  al anterior como se observa en la figura.

**En el caso de la tangente, el período es  $180^{\circ}$ .**

$$\alpha = \operatorname{arctg}(-2) = 296^{\circ} 33' 54'' + 180^{\circ} \cdot k \quad k \in \mathbb{Z}$$

**Ejemplo:** Resuelve la ecuación  $\cos 3x = \frac{1}{2}$

$$3x = \arccos \frac{1}{2} = \begin{cases} 60^{\circ} + 360^{\circ} \cdot k \\ 300^{\circ} + 360^{\circ} \cdot k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 20^{\circ} + 120^{\circ} \cdot k \\ x = 100^{\circ} + 120^{\circ} \cdot k \end{cases}$$

Observa la necesidad de añadir el período desde el principio. Si hubiéramos puesto  $3x = 60^{\circ}$  y  $3x = 300^{\circ}$  habríamos obtenido  $x = 20^{\circ}$  y  $x = 100^{\circ}$ , o en el mejor de los casos  $x = 20^{\circ} + 360^{\circ} \cdot k$  y  $x = 100^{\circ} + 360^{\circ} \cdot k$ , omitiendo con ello gran número de soluciones.

**Ejemplo:** Resuelve la ecuación  $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$

$$2x - \frac{180^{\circ}}{6} = \operatorname{arctg} 1 = 45^{\circ} + 180^{\circ} \cdot k \rightarrow 2x - 30^{\circ} = 45^{\circ} + 180^{\circ} \cdot k \rightarrow x = 37'50'' + 90^{\circ} \cdot k$$

**Ejemplo:** Calcular  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arccotg} 2\right)$

$$\text{Hacemos } y = \operatorname{arccotg} 2 \rightarrow \operatorname{cotg} y = 2 \rightarrow \frac{1}{\operatorname{tg} y} = 2 \rightarrow \operatorname{tg} y = \frac{1}{2}$$

$$y = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \Rightarrow y = 26^{\circ} 33' 54'' + 180^{\circ} \cdot k$$

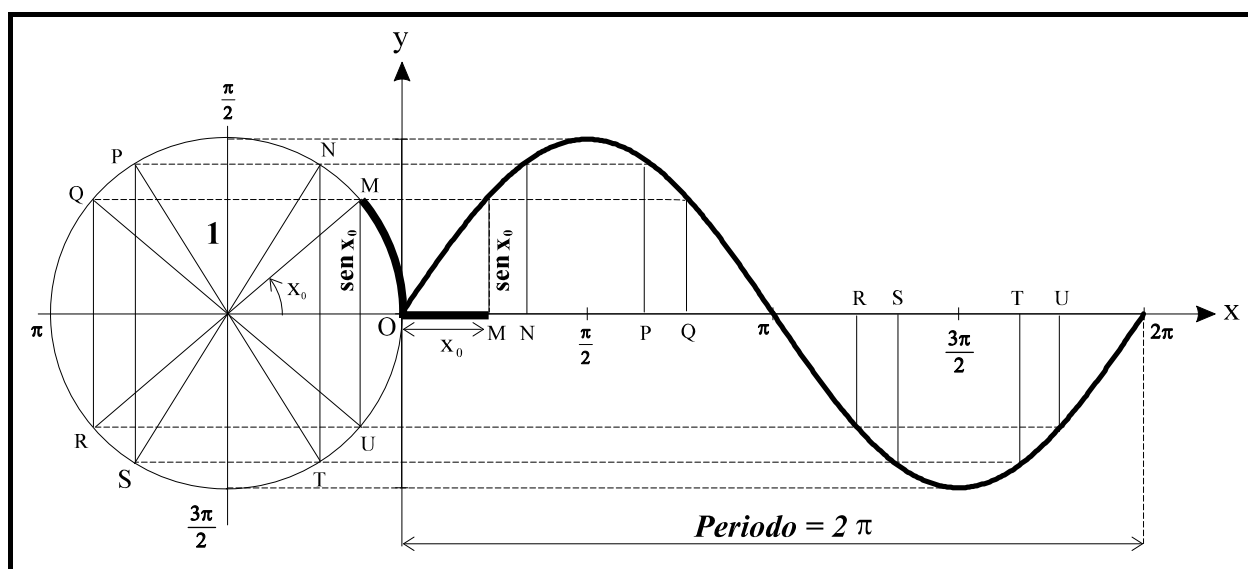
$$\operatorname{tg}(45^{\circ} - 26^{\circ} 33' 54'' - 180^{\circ} \cdot k) = \operatorname{tg}(18^{\circ} 26' 6'' - 180^{\circ} \cdot k) = 0' 333334325$$

# Funciones Trigonómicas

## Función Seno

Se define la función seno como la función que a cada número real  $x$  asocia el valor  $\text{sen } x$ . Se representa por  $y = \text{sen } x$ .

Para construir la representación gráfica de la función, colocamos en el eje  $X$  las medidas de los ángulos en radianes y en el eje  $Y$  sus correspondientes senos. Su gráfica, que se denomina **sinusoide**, se obtiene punto a punto mediante ordenador o como clásicamente se hacía, que era trazando una circunferencia trigonométrica con centro en un punto cualquiera del eje de abscisas y trasladando para cada ángulo el segmento representativo de su seno correspondiente, como se muestra en la siguiente figura. Así por ejemplo, para representar el punto  $(x_0, \text{sen } x_0)$  trasladamos horizontalmente el segmento de longitud  $\text{sen } x_0$  hasta la posición  $x_0$  del eje  $OX$ .

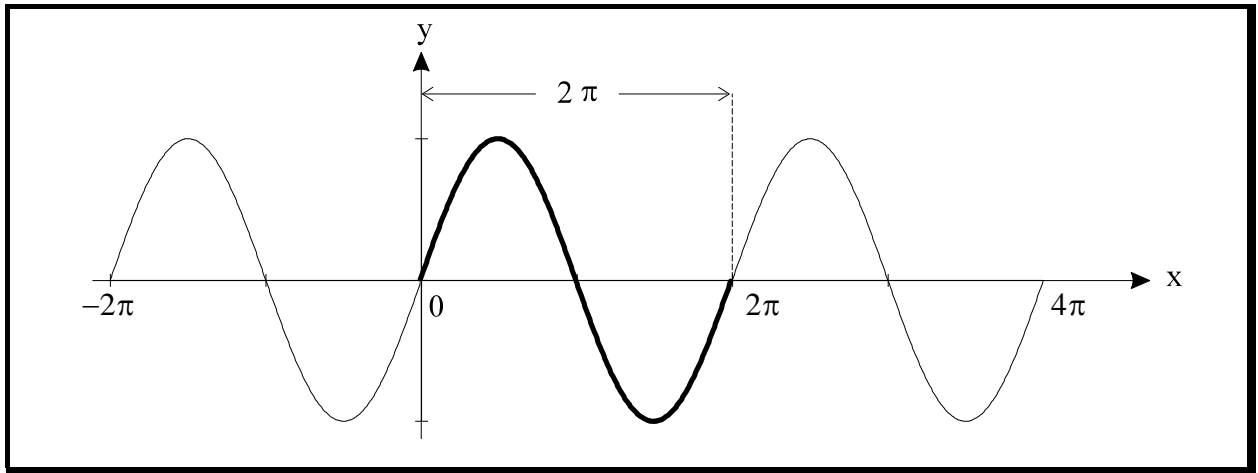


### Periodicidad de la función seno

Para ángulos mayores que  $2\pi$  y para ángulos negativos, el mismo procedimiento de construcción proporciona de nuevo la misma gráfica, con lo que la curva se extiende en infinitas ondas idénticas hacia la derecha y hacia la izquierda.

Una función cuyos valores se repiten a intervalos iguales se llama periódica. La función seno es periódica, y el período es  $2\pi$ . Consecuencia de ello es que cualquier propiedad de la función seno reaparece al menos cada  $2\pi$  radianes.

$$\text{sen } x = \text{sen}(x + 2\pi \cdot k) \quad k \in \mathbb{Z}$$



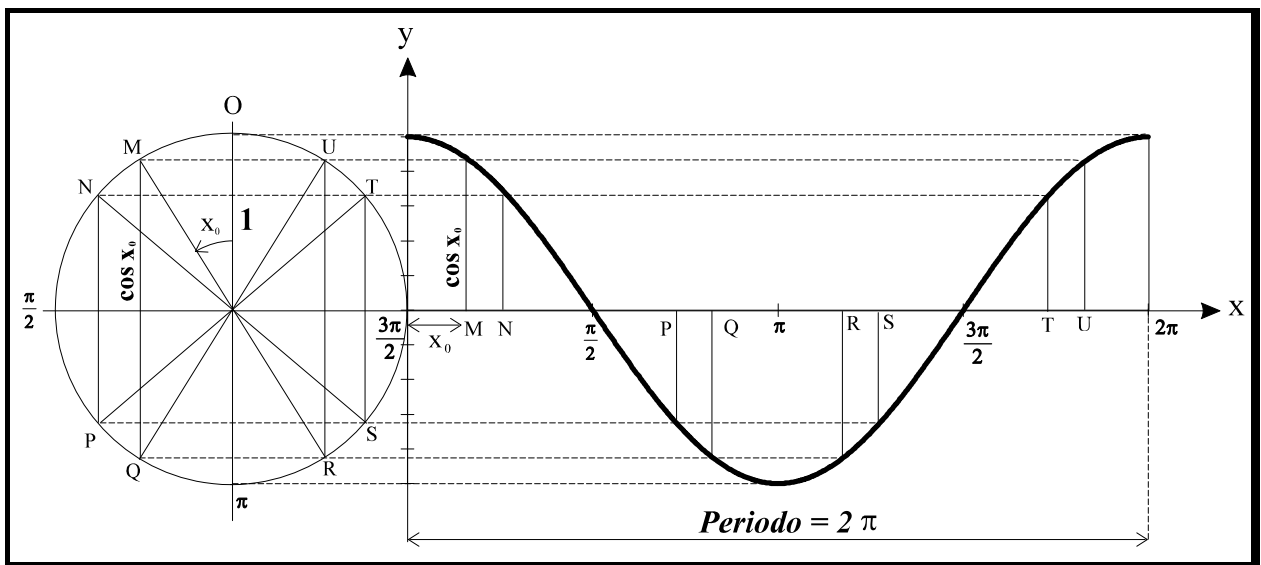
### Propiedades

- El dominio de la función seno es el conjunto de los números reales, pues el seno de cualquier ángulo siempre está definido.
- El recorrido es  $[-1, 1]$ , y por tanto la función seno está acotada  $-1 \leq \sin x \leq 1$
- La función seno es impar ya que  $\sin(-x) = -\sin x$
- La función seno es continua en  $\mathbb{R}$ .

### **Función Coseno**

**Se define la función coseno como la función que a cada número real  $x$  asocia el valor  $\cos x$ .  
Se representa por  $y = \cos x$ .**

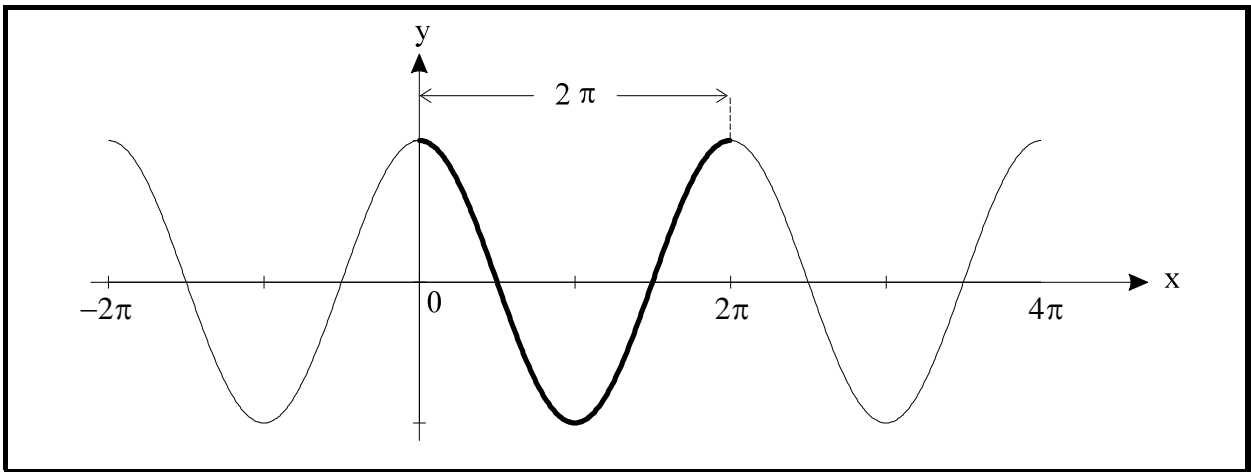
Su gráfica, que se denomina **cosinusoide**, se obtiene de forma análoga a la de la función seno, pero con la circunferencia trigonométrica girada  $90^\circ$  en sentido contrario a las agujas del reloj.



## Periodicidad de la función coseno

La función coseno es periódica, y el período es  $2\pi$ . Consecuencia de ello es que cualquier propiedad de la función coseno reaparece al menos cada  $2\pi$  radianes.

$$\cos x = \cos (x + 2\pi \cdot k) \quad k \in \mathbf{Z}$$

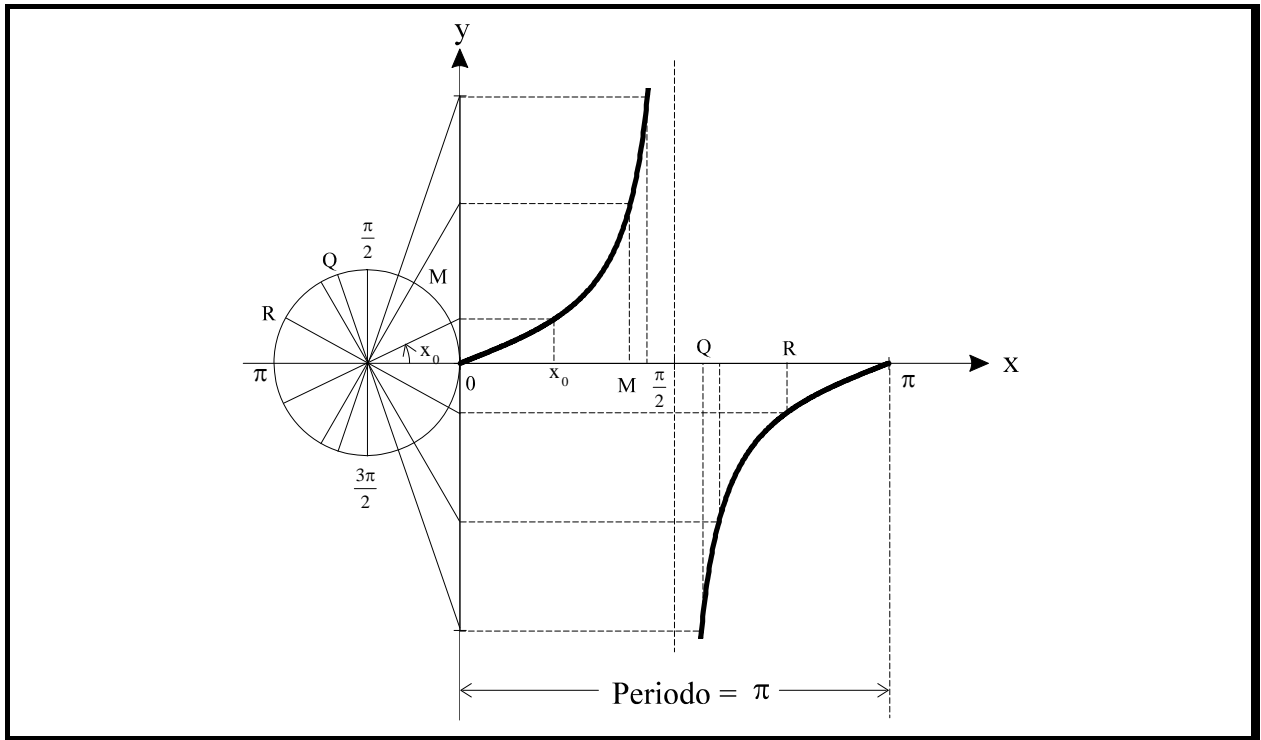


## Propiedades

- El dominio de la función coseno es el conjunto de los números reales, pues el coseno de cualquier ángulo siempre está definido.
- El recorrido es  $[-1, 1]$ , y por tanto la función coseno está acotada  $-1 \leq \cos x \leq 1$
- La función coseno es par ya que  $\cos(-x) = \cos x$
- La función coseno es continua en  $\mathbf{R}$ .

## **Función Tangente**

**Se define la función tangente como la función que a cada número real  $x$  asocia el valor  $\operatorname{tg} x$ . Se representa por  $y = \operatorname{tg} x$ . Su gráfica, que se denomina **tangenteoide**, se obtiene de forma análoga a la de la función seno.**



### Propiedades

- Recuerda que  $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}$ , por tanto el dominio de la función tangente es  $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$  con  $k \in \mathbb{Z}$ , ya que para  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$  no está definida la función.

Para  $x = \frac{\pi}{2}$  la tangente no existe, pero cuando  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$  su valor se hace infinito. Debido al cambio de signo en el 1º y 2º cuadrantes se tiene que:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty$$

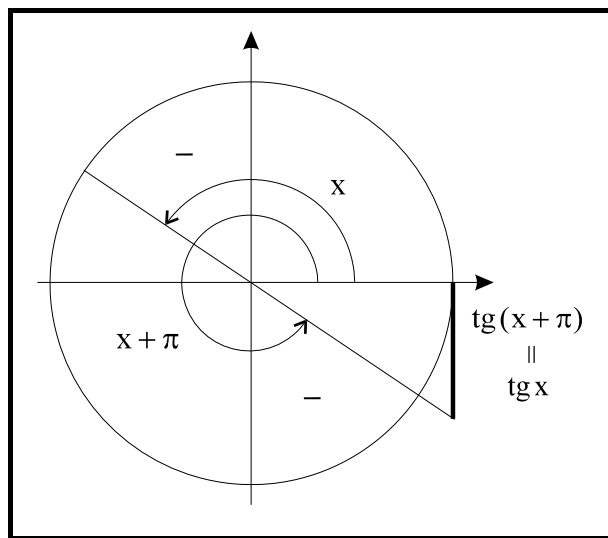
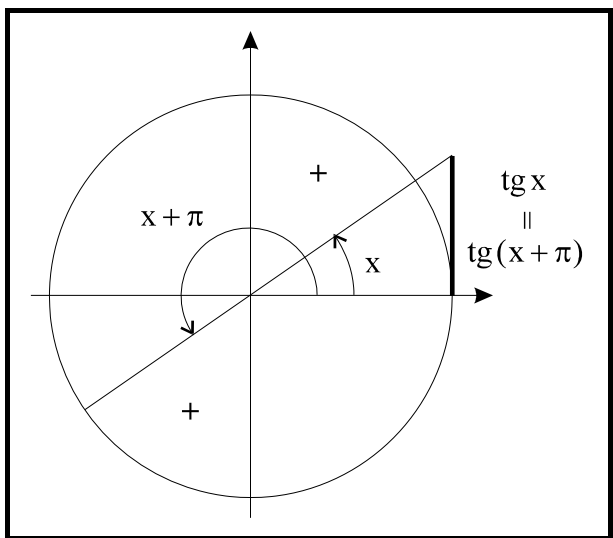
Aparece pues una asíntota vertical en  $x = \frac{\pi}{2}$ . La tangente no existe en  $\frac{\pi}{2}$  ni en cualquier otro punto que diste de él un múltiplo de  $\pi$ , por tanto el dominio es  $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k \right\}$  con  $k \in \mathbb{Z}$ .

- El recorrido es para todo número real, luego no está acotada.
- La función tangente es impar ya que  $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$

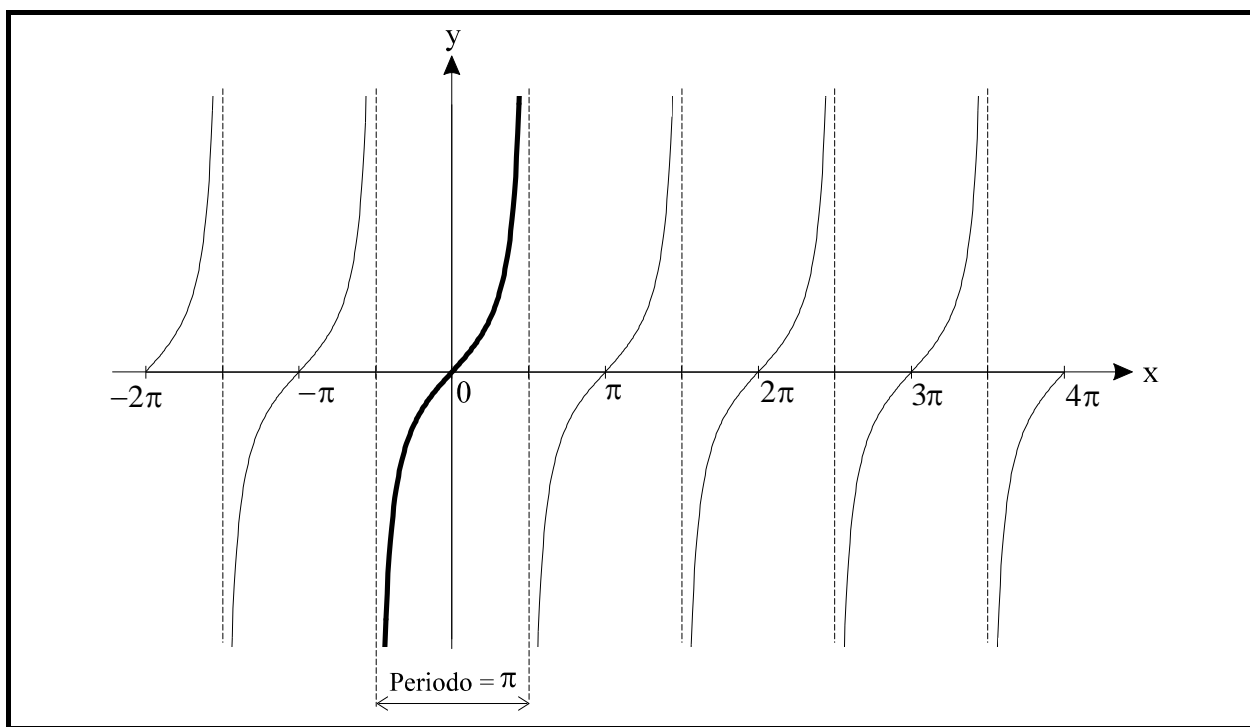
## Periodicidad de la función tangente

La función tangente es periódica, y el período es  $\pi$ . Consecuencia de ello es que cualquier propiedad de la función tangente reaparece al menos cada  $\pi$  radianes.

$$\text{tg } x = \text{tg}(x + \pi \cdot k) \quad k \in \mathbb{Z}$$

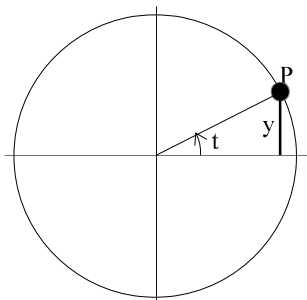


Para ángulos mayores que  $\pi$  y para ángulos negativos, el mismo procedimiento de construcción proporciona de nuevo la misma gráfica, con lo que la curva se extiende indefinidamente hacia la izquierda y hacia la derecha como se muestra a continuación.



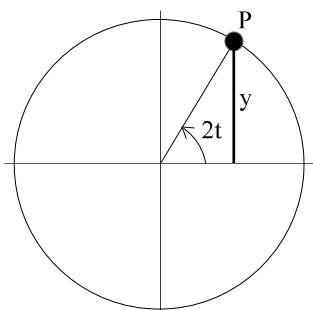
## Gráficas de funciones del tipo: $y = \text{sen } kt$ , $y = \text{cos } kt$ , $y = \text{tg } kt$

Imagina un punto P que se mueve sobre la circunferencia de radio unidad de modo que avance 1 radián cada segundo. Supón además que estamos interesados únicamente en determinar la altura "y" del punto P en función del tiempo.



En t segundos el punto P recorre t radianes y la función buscada es, naturalmente

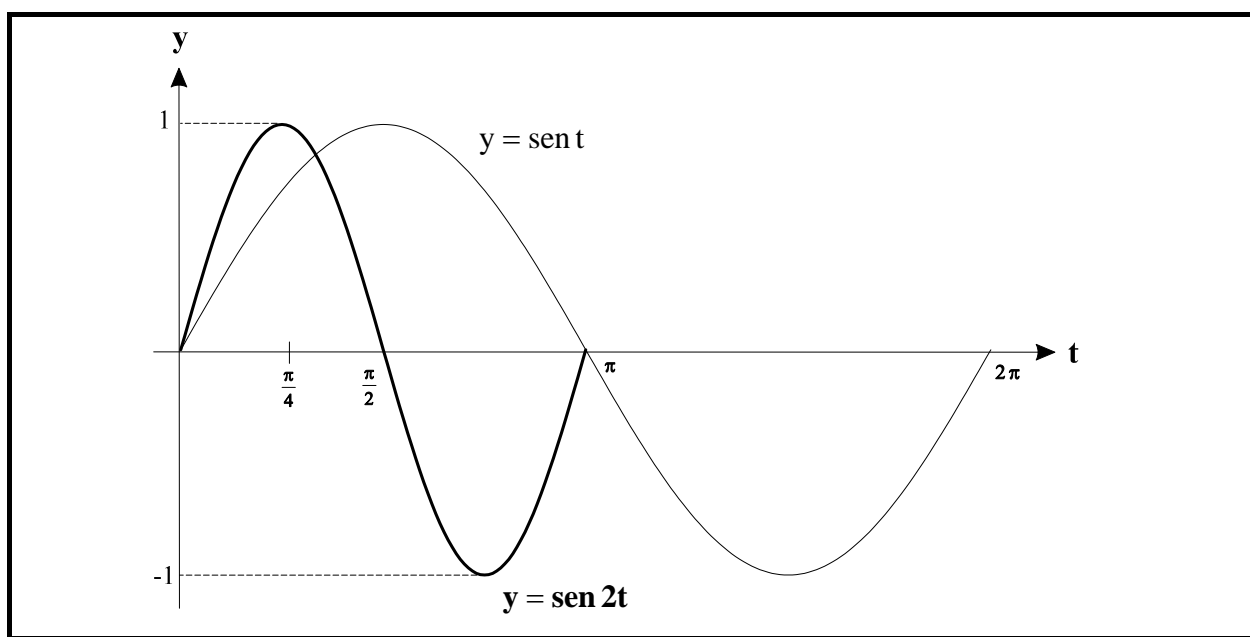
$$y = \text{sen } t$$



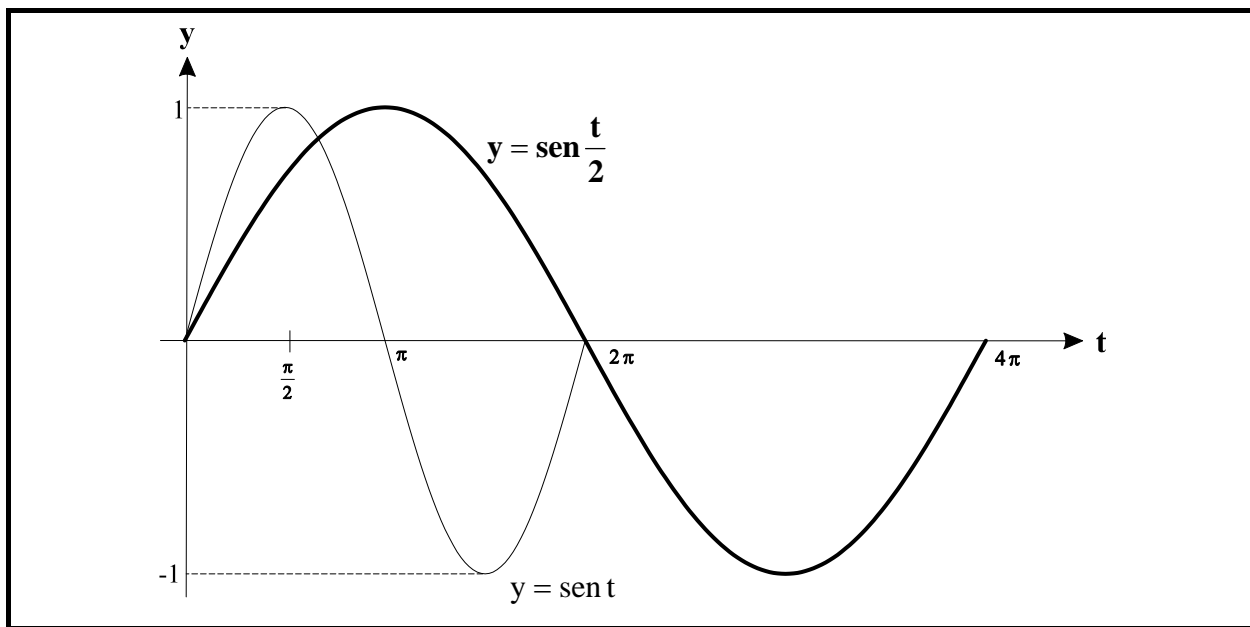
Siguiendo con el ejemplo anterior, imagina que P avanza dos radianes por segundo. Como en t segundos recorre 2t radianes la función será en este caso

$$y = \text{sen } 2t$$

La gráfica de  $y = \text{sen } 2t$  no puede diferir mucho de la de  $y = \text{sen } t$  pues finalmente la trayectoria es la misma. La diferencia estriba en que en el segundo caso P invierte la mitad de tiempo en un ciclo completo, hecho que se traduce en una contracción de la curva, acortándose el período en la mitad, es decir, el período de  $y = \text{sen } 2t$  es  $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ .



Si P avanza medio radián por segundo , la función correspondiente es  $y = \text{sen} \frac{t}{2}$ . El coeficiente  $1/2$ , (menor que la unidad) provoca ahora una dilatación de la gráfica, ya que se necesitaría un tiempo doble para completar un ciclo, es decir, el período de  $y = \text{sen} \frac{t}{2}$  es  $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$ .



Consideremos ahora con toda generalidad la función  $y = \text{sen} kt$ . Si partimos de 0, un período se completa cuando el arco  $kt$  llega a  $2\pi$  radianes. Es decir  $kt = 2\pi$  cuando  $t = \frac{2\pi}{k}$ , luego

$$T = \frac{2\pi}{k} \text{ es el período de } y = \text{sen} kt$$

De la misma forma:

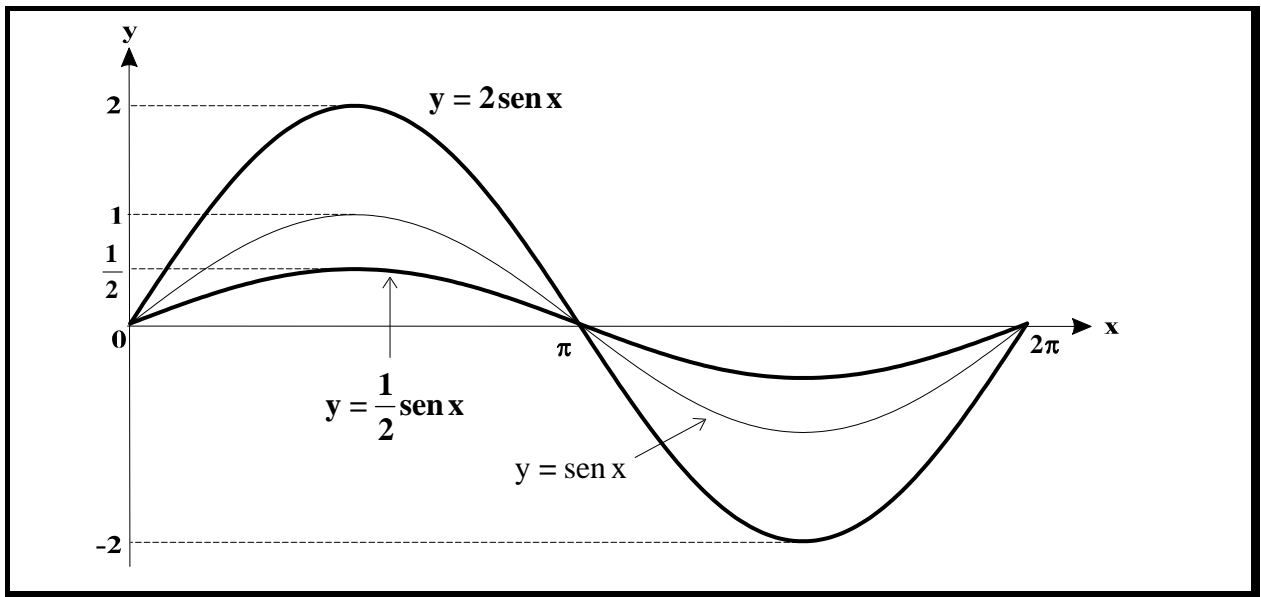
$$T = \frac{2\pi}{k} \text{ es el período de } y = \text{cos} kt$$

$$T = \frac{\pi}{k} \text{ es el período de } y = \text{tg} kt$$

## Dilataciones verticales: $y = k \cdot \text{sen} x$ , $y = k \cdot \text{cos} x$ , $y = k \cdot \text{tg} x$

Sea por ejemplo  $y = 2 \text{sen} x$ . El efecto que produce el factor 2 es una dilatación vertical de la gráfica del seno, y tanto el período como las abscisas características no sufren variación.

Análogamente la gráfica de  $y = \frac{1}{2} \text{sen} x$ , se obtiene mediante una contracción vertical de la función seno.

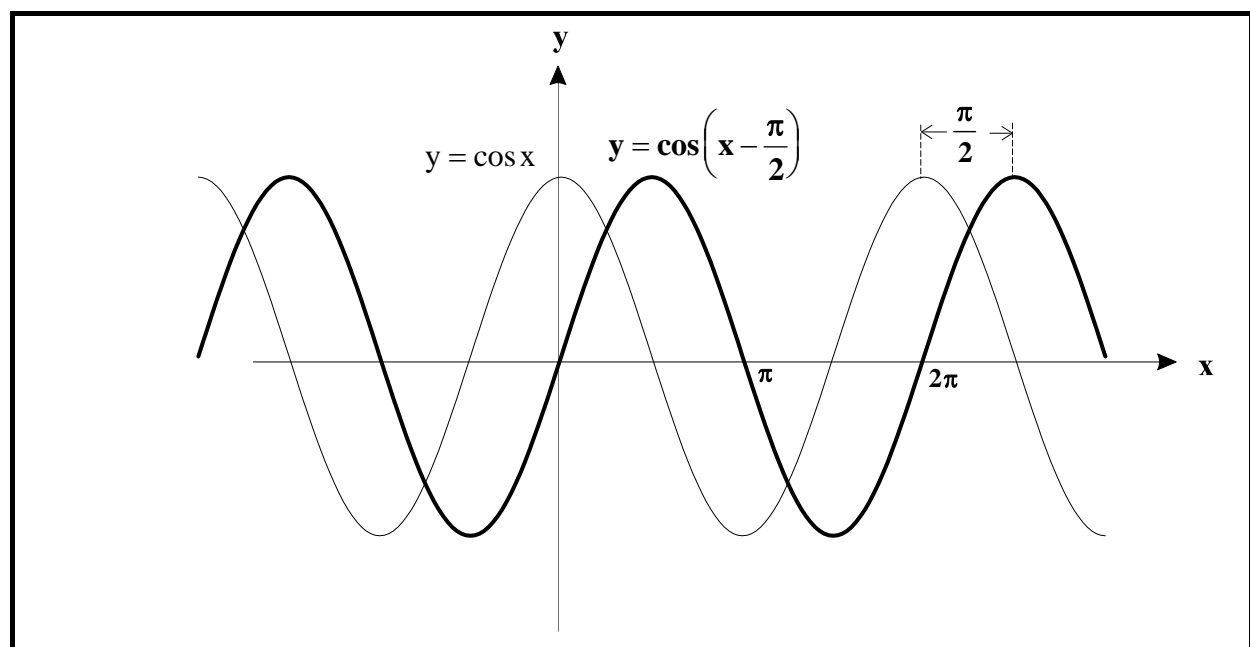
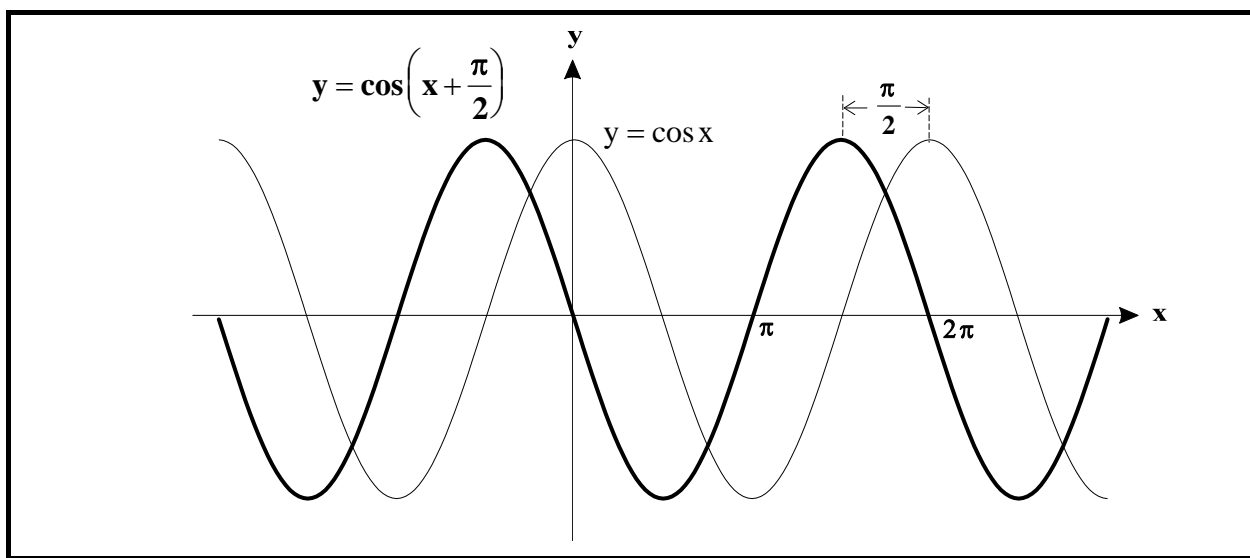


## Desplaz. horizontales: $y = \text{sen}(x+k)$ , $y = \text{cos}(x+k)$ , $y = \text{tg}(x+k)$

En general  $y = \text{sen}(x+k)$  es una función desfasada horizontalmente con respecto a  $y = \text{sen } x$ .

Si  $k > 0$  la gráfica de  $y = \text{sen}(x+k)$  va retardada  $k$  unidades respecto de la de  $y = \text{sen } x$ .

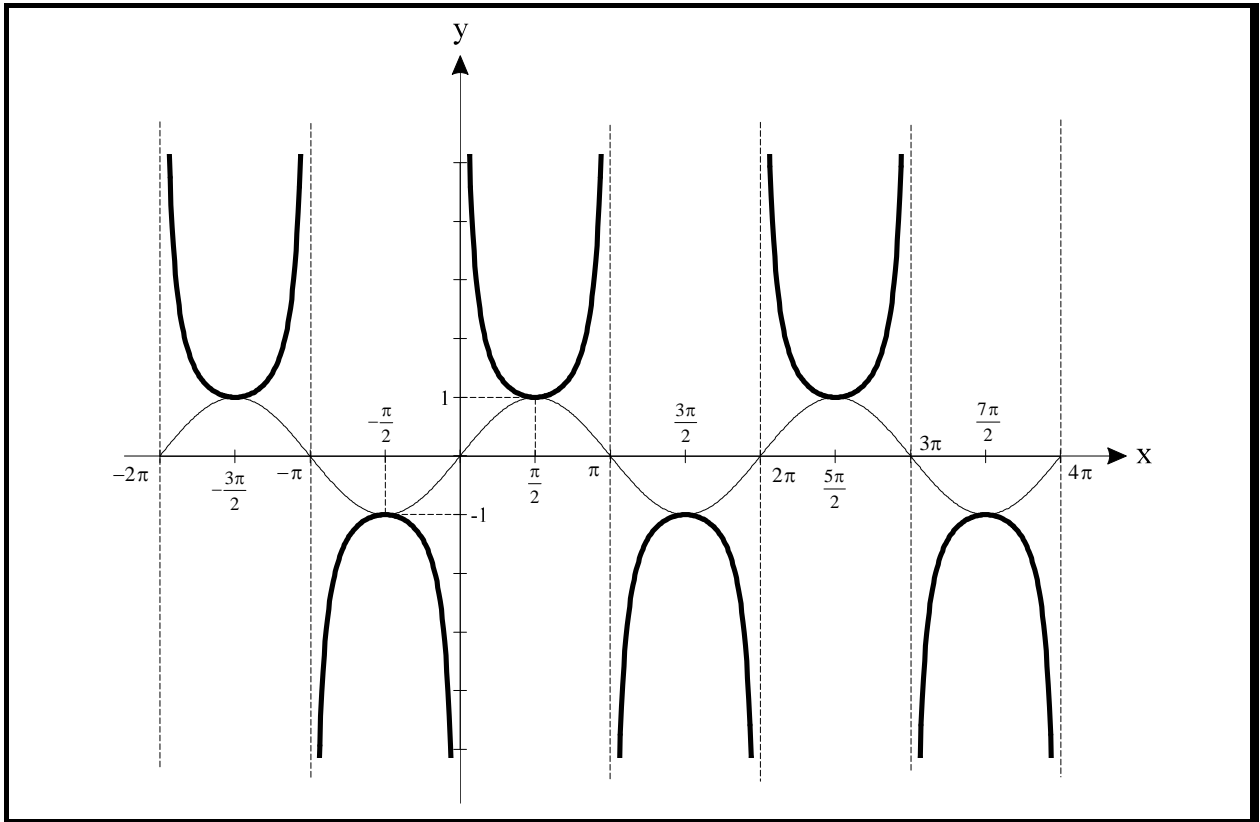
Si  $k < 0$  la gráfica de  $y = \text{sen}(x-k)$  va adelantada  $k$  unidades respecto de la de  $y = \text{sen } x$ .



# Inversas de las funciones trigonométricas

## Función cosecante

Se define la función cosecante como la función que a cada número real  $x$  asocia el valor  $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$ . Se representa por  $y = \operatorname{cosec} x$ .

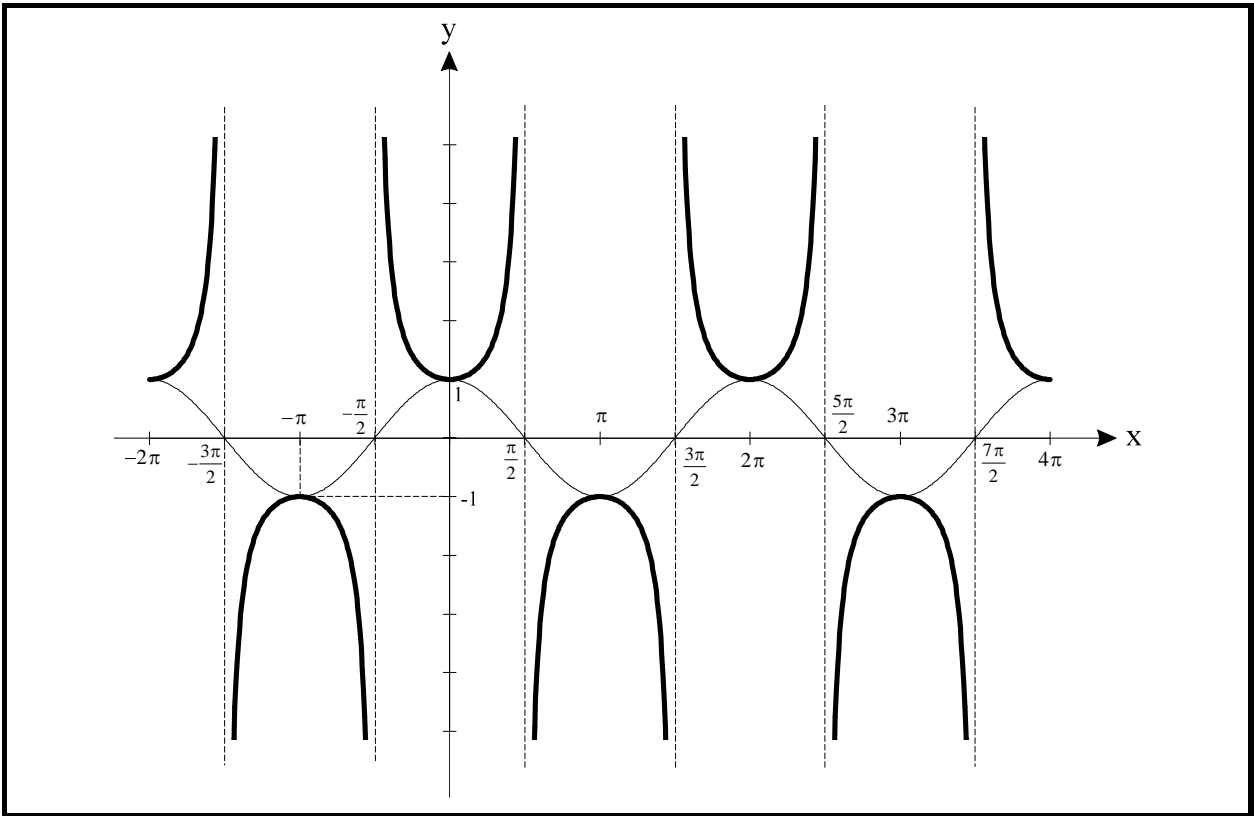


### Propiedades

- El período de la función cosecante es  $2\pi$  ya que  $\operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec}(x + 2\pi \cdot k)$  con  $k \in \mathbb{Z}$ .
- El dominio es  $\forall x \in \mathbb{R} - (k \cdot \pi)$  y el recorrido  $\forall y \in \mathbb{R} - ]-1, 1[$ .
- La gráfica de la función cosecante es continua  $\forall x \in \mathbb{R} - (k \cdot \pi)$ .
- Las rectas  $x = k \cdot \pi$  son asíntotas verticales.
- Se observa que, cuando el seno tiende a cero la cosecante tiende a  $+\infty$  o  $-\infty$  según el signo.

## Función secante

Se define la función secante como la función que a cada número real  $x$  asocia el valor  $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ . Se representa por  $y = \sec x$ .

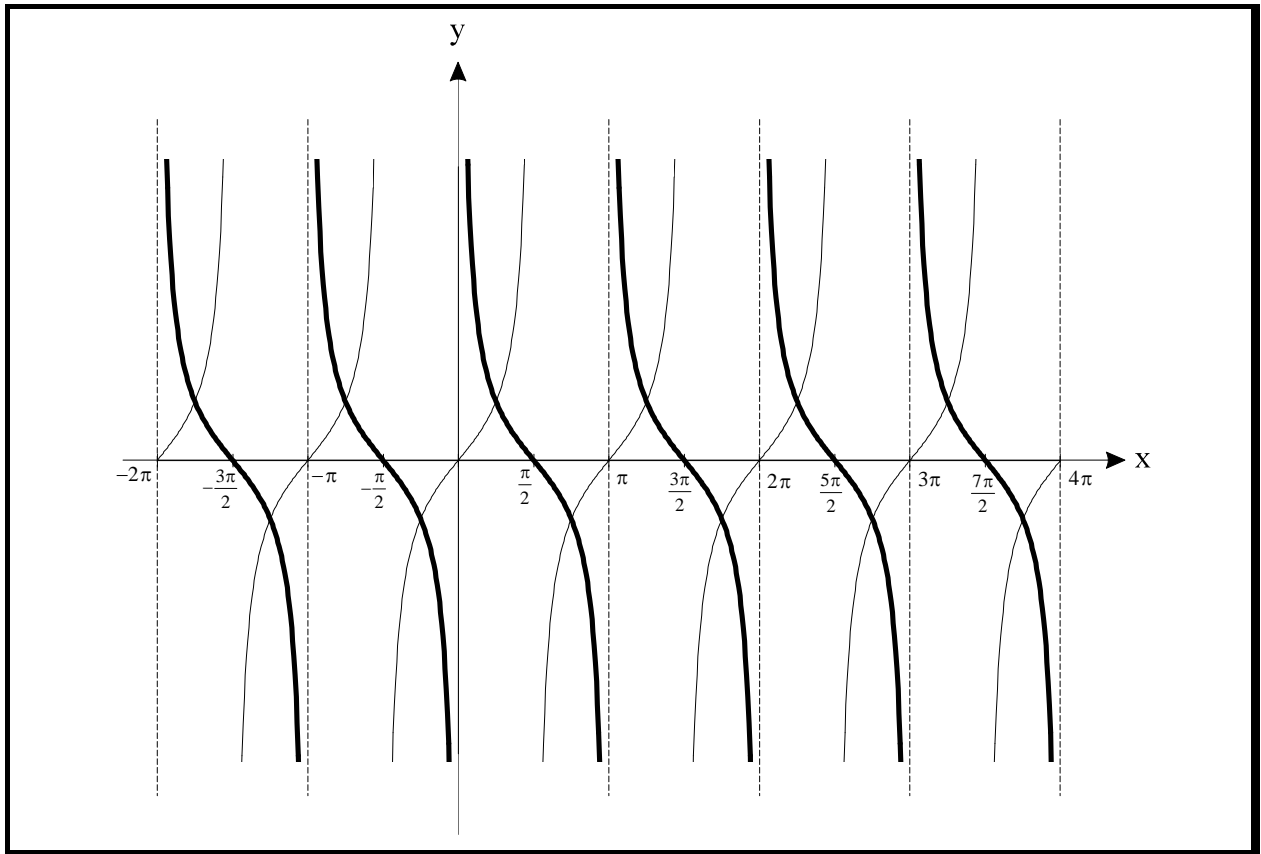


### Propiedades

- El período de la función secante es  $2\pi$  ya que  $\sec x = \sec(x + 2\pi \cdot k)$  con  $k \in \mathbb{Z}$ .
- El dominio es  $\forall x \in \mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right)$  y el recorrido  $\forall y \in \mathbb{R} - ]-1, 1[$ .
- La gráfica de la función secante es continua  $\forall x \in \mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right)$ .
- Las rectas  $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$  son asíntotas verticales.
- Se observa que, cuando el coseno tiende a cero la secante tiende a  $+\infty$  o  $-\infty$  según el signo.

## Función cotangente

Se define la función cotangente como la función que a cada número real  $x$  asocia el valor  $\cotg x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ . Se representa por  $y = \cotg x$ .

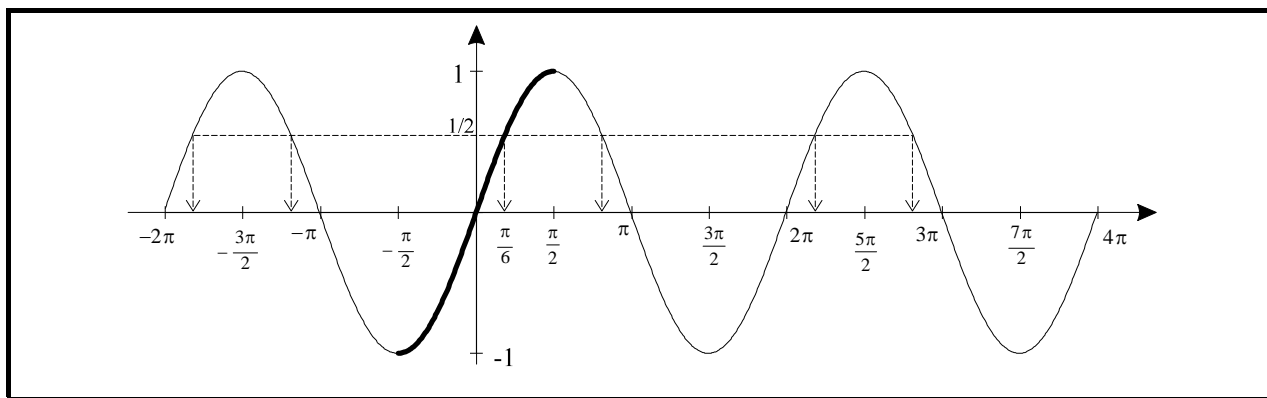


### Propiedades

- El período de la función cotangente es  $\pi$  ya que  $\cotg x = \cotg(x + \pi \cdot k)$  con  $k \in \mathbb{Z}$ .
- El dominio es  $\forall x \in \mathbb{R} - k \cdot \pi$  y el recorrido  $\forall y \in \mathbb{R}$ .
- La gráfica de la función cotangente es continua  $\forall x \in \mathbb{R} - k \cdot \pi$ .
- Las rectas  $x = k \cdot \pi$  son asíntotas verticales.
- Se observa que, cuando la tangente tiende a cero la cotangente tiende a  $+\infty$  o  $-\infty$  según el signo.

## Gráficas de las funciones inversas (funciones recíprocas)

Función arco seno  $y = \arcsen x$



La función seno, como cualquier otra función periódica, no es inyectiva. Ello conlleva que la antiimagen de cualquier número de  $[-1, 1]$  no será única, por lo que no cabe en principio hablar de función inversa. Por ejemplo:

$$\text{sen } x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \arcsen \frac{1}{2} = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot k \\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi \cdot k \end{cases}$$

Para que la función seno sea inyectiva y la inversa pueda definirse, bastaría elegir un intervalo de modo que en él los valores del seno no se repitiesen.

Ha de elegirse un intervalo donde el seno tome todos los valores posibles y no se repita ninguno.

Intervalos candidatos podrían ser  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ ,  $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$ ,  $\left[\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right]$ , etc.

**Por convenio**, tomamos  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , y referida a él se define la función inversa del seno.

### Propiedades

- Como todas las gráficas de las funciones inversas puede obtenerse por simetría respecto a la bisectriz del primer cuadrante, en este caso de la función seno.
- El dominio de la función arco seno es  $\forall x \in [-1, 1]$  y el recorrido  $\forall y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

## Definición

$$[-1, 1] \xrightarrow{\text{sen}^{-1}} \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

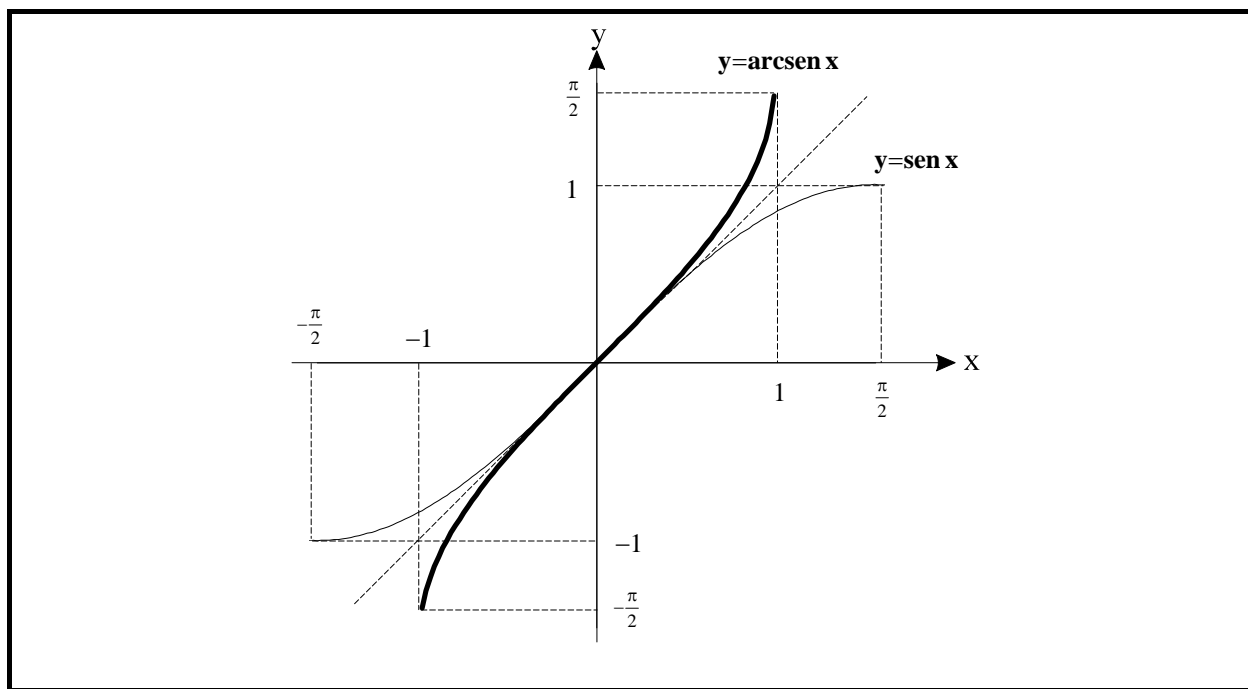
$$x \longrightarrow \text{sen}^{-1}(x) = y$$

$$\text{sen}^{-1}(x) = y \quad \text{solamente si} \quad \text{sen} y = x \quad \text{e} \quad y \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

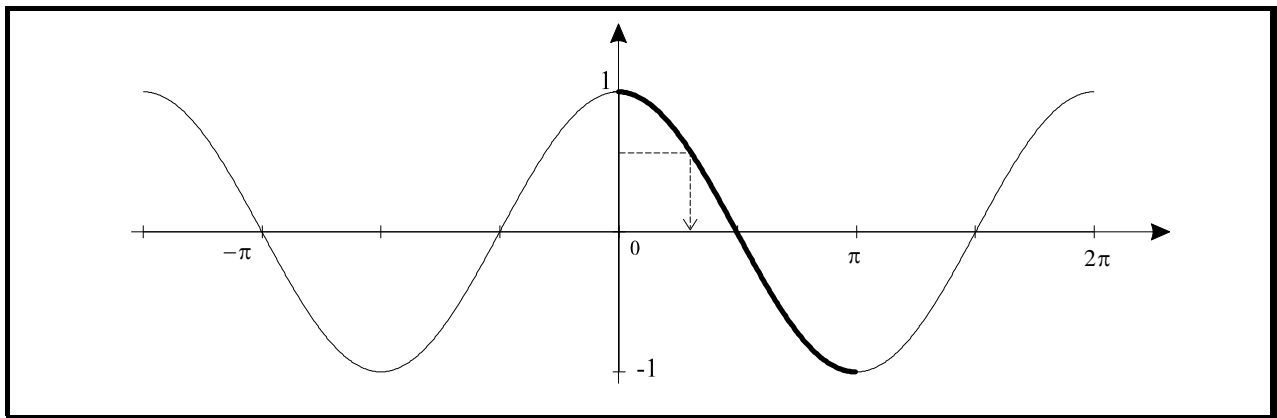
## Observación

Si  $\text{sen}^{-1}(x) = y$ ,  $y$  es el *arco cuyo seno* es  $x$ . De aquí que esta función inversa tenga un nombre propio sonoro y descriptivo:  $y = \mathbf{arcsen\ x}$

## Gráfica



## Función arco coseno $y = \arccos x$



En el intervalo  $[0, \pi]$  la función coseno toma todos los valores posibles y no se repite ninguno. Se trata pues de un intervalo máximo donde  $y = \cos x$  es inyectiva. Cabe pues definir la función inversa así:

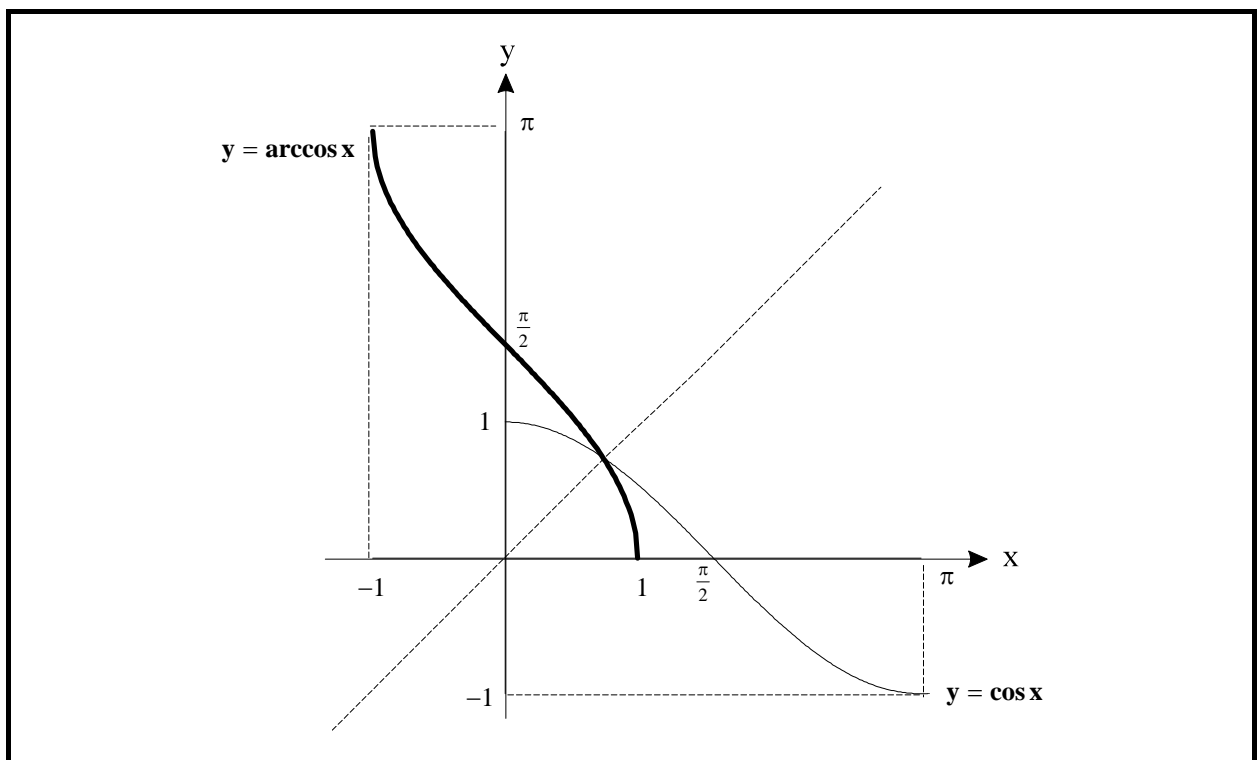
### Definición

$$[-1, 1] \xrightarrow{\cos^{-1}} [0, \pi]$$

$$x \longrightarrow \cos^{-1}(x) = y$$

$$\cos^{-1}(x) = y \text{ solamente si } \cos y = x \text{ e } y \in [0, \pi]$$

### Gráfica



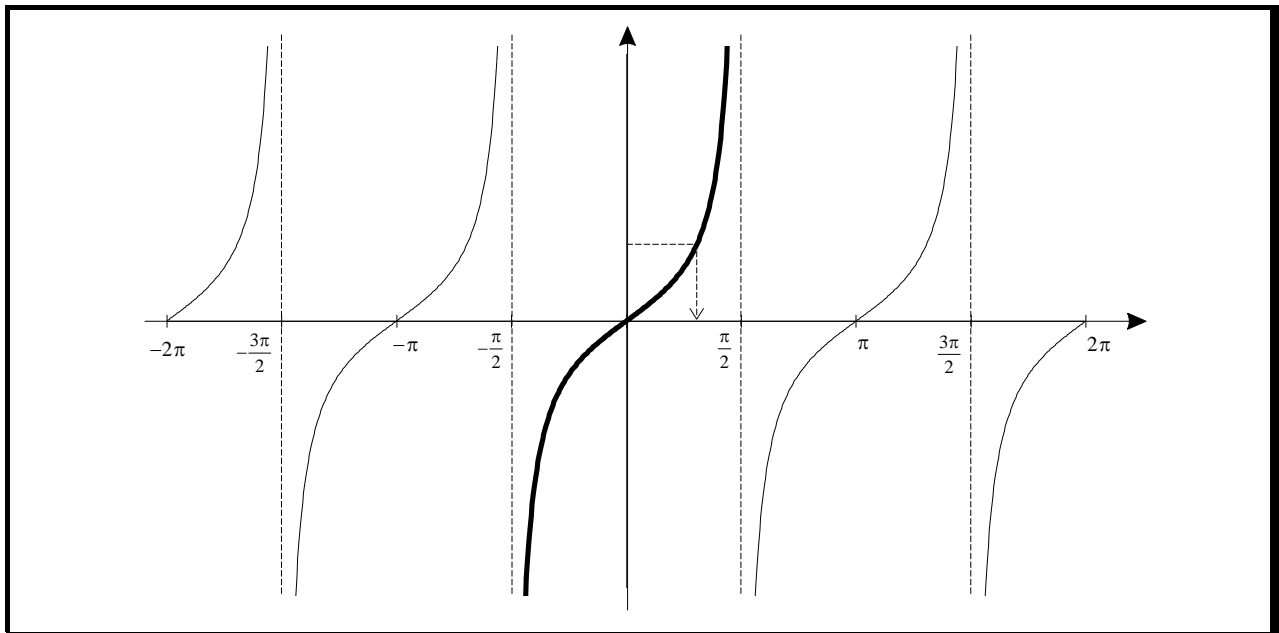
### Observación

$y = \cos^{-1}(x)$  significa que  $\cos y = x$ , luego  $y$  es el arco cuyo coseno es  $x$ . De aquí que la función inversa del coseno se escriba:  $y = \arccos x$

### Propiedades

- La gráfica de la función arco coseno se obtiene por simetría, respecto de la bisectriz del primer cuadrante, de la función coseno.
- El dominio de la función arco coseno es  $\forall x \in [-1, 1]$  y el recorrido  $\forall y \in [0, \pi]$ .

### **Función arco tangente $y = \arctg x$**



En el intervalo  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$  la función tangente toma todos los valores posibles y no se repite ninguno. Es, por tanto, un intervalo máximo donde  $y = \operatorname{tg} x$  es inyectiva. Por otra parte, el conjunto imagen de  $y = \operatorname{tg} x$  es  $\mathbb{R}$  con lo cual el dominio de  $\operatorname{tg}^{-1}$  es también  $\mathbb{R}$ .

### Definición

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\operatorname{tg}^{-1}} \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

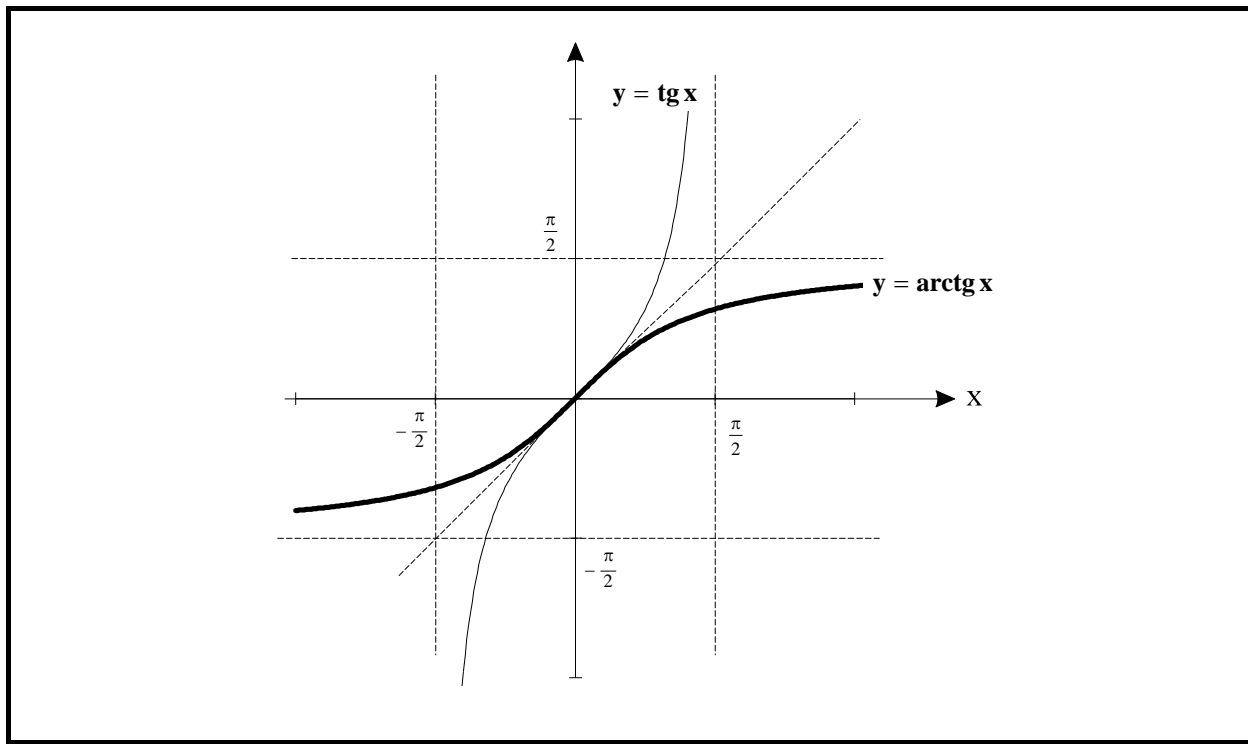
$$x \longrightarrow \operatorname{tg}^{-1}(x) = y$$

$$\operatorname{tg}^{-1}(x) = y \text{ solamente si } \operatorname{tgy} = x \text{ e } y \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

## Observación

$y = \text{tg}^{-1}(x)$  significa que  $\text{tg } y = x$ , luego  $y$  es el arco cuya tangente es  $x$ . De aquí que la función inversa de la tangente se escriba:  $y = \text{arctg } x$

## Gráfica



## Propiedades

- La gráfica se obtiene, al igual que las dos anteriores, por simetría respecto a la bisectriz del primer cuadrante.
- Observa que, las dos asíntotas verticales de  $y = \text{tg } x$  son heredadas, en versión horizontal, por  $y = \text{arctg } x$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{arctg } x = \frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{arctg } x = -\frac{\pi}{2}$$

- El dominio de la función arco tangente es  $\forall x \in ]-\infty, \infty[$  y el recorrido  $\forall y \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ .

# Gráficas de funciones circulares diversas

**T = Periodo**  
**A = Amplitud**

