Introducción. Experimentos deterministas.

De una manera genérica puede decirse que la Ciencia trata de encontrar las leyes que rigen los fenómenos que observamos. Con frecuencia, son leyes de carácter necesario, que predicen sin ambigüedad aquellas consecuencias que se presentan con necesidad cada vez que se repite la operación del fenómeno. Ejemplos de este tipo de situaciones son las siguientes:

1. Una piedra cae, si nada la soporta.
2. Si un líquido se calienta suficientemente, se evapora.
3. Si se suman los ángulos de un triángulo, el resultado es de 180º.
4. Si un número entero, n, es divisible por 2, n^2 es divisible por 4.
5. Si p, q y r son proposiciones lógicas, $p \rightarrow q$ y $q \rightarrow r$, entonces $p \rightarrow r$.

En los ejemplos anteriores, se pueden distinguir casos de ***necesidad física***, por ejemplo 1 y 2, que se denominan **leyes empíricas**. Las leyes empíricas son fruto de la experiencia: se aceptan como universalmente válidas porque nunca se ha conocido una ocasión en que no se cumplieran.

Otros casos, por ejemplo 4 y 5, obedecen a una ***necesidad lógica***. La necesidad lógica es producto del razonamiento y su carácter más absoluto hace inconcebible que pudiera ser de otro modo.

Por último, hay casos de carácter intermedio, como el ejemplo 3 anterior, ya que la frontera entre ambos tipos no es muy nítida, debido a que cualquier razonamiento lógico ha de ser realizado dentro de un determinado modelo de realidad. Si el modelo se impone por su evidencia, se tiende a considerar sus resultados como fruto de la pura lógica. Si se conciben otros modelos alternativos, igualmente posibles, las conclusiones serán válidas en la medida en que el modelo sea avalado por la experiencia.

Pero lo relevante, en este momento, es que *todas ellas son situaciones gobernadas por la necesidad, en las que un efecto está determinado por ciertas causas*. Así, calentar un líquido es la causa que produce su evaporación, y que un número sea múltiplo de 2 es la causa de que su cuadrado sea múltiplo de 4.

Los experimentos deterministas son aquellos que se caracterizan porque al repetirlos bajo análogas condiciones se obtiene siempre el mismo resultado. *En dichos experimentos podemos estar seguros del resultado de una experiencia aún antes de realizarla*. Además de los anteriormente citados tenemos los siguientes:

- Arrojar una piedra al vacío y medir su aceleración.
- Hacer reaccionar ácido sulfúrico con Cinc.
- Medir la longitud de una circunferencia de radio 5 m.
- Quitar el freno de mano de un coche en una cuesta muy pronunciada.

- Abrir las compuertas de un estanque lleno de agua.

- La incidencia de un rayo de luz en un espejo (ángulo de incidencia igual al ángulo de reflexión).

El Azar. Experimentos Aleatorios

Frente a esta clase de fenómenos, son frecuentes otros en los que la concurrencia de unas circunstancias fijas no permite prever cuál será el efecto producido. Por ejemplo:

1. Si se colocan 49 bolas numeradas, iguales en peso, tamaño, textura, etc., en una bolsa y se extrae una bola a ciegas, la bola extraída llevará, necesariamente, uno de los 49 números, pero es imposible predecir cuál será.

2. Si, todos los días, a la misma hora, se hace un trayecto entre dos puntos alejados de una ciudad, nunca se tardará el mismo tiempo y, lo que es peor, éste no puede predecirse de antemano. La duración del trayecto está gobernada por demasiados “imponderables" para que su valor esté determinado por un conjunto cuantificado de causas.

3. Si una moneda cae al suelo de una habitación, no se puede prever el punto al que irá a parar. Aunque se lanzaran diversas monedas idénticas, poniendo cuidado en hacerlo de igual manera en todas las ocasiones, no acabarían todas en el mismo punto.

En estos casos, se dice que el resultado del fenómeno es consecuencia del **azar.**

<u>El azar es la supuesta causa de los hechos o sucesos cuya causa real se desconoce, que produce un resultado imprevisible</u>, es decir, es la causa a la que se hace responsable del resultado de una infinidad de experiencias.

Los experimentos o fenómenos cuyo resultado se atribuye el azar, se denominan **aleatorios**. ***<u>Los experimentos aleatorios son aquellos que se caracterizan porque al repetirlos bajo análogas condiciones es imposible predecir el resultado</u>*****.** En dichos experimentos nunca podemos estar seguros del resultado de una experiencia antes de realizarla. Son ejemplos de experimentos aleatorios, además de los anteriores, los siguientes:

- Extraer una carta de una baraja.

- Lanzar un dado y anotar el símbolo que aparece en la cara superior.

- Lanzar una moneda y anotar el símbolo que aparece en la cara superior.

- Extraer una bola de la lotería.

- Abrir un libro al azar y anotar el último número de la página de la derecha.

La palabra azaroso es sinónimo de imprevisible, y este carácter de imprevisibilidad de las consecuencias del azar hace inútil cualquier intento de hallar reglas determinísticas que rijan la aparición de los resultados individuales. Esto es, a menudo, una propiedad deseable (en este principio se basan, por ejemplo, todas las loterías del mundo), pero dificulta en gran medida la comprensión de las leyes que gobiernan la conducta del azar: las monedas caídas de nuestro bolsillo acaban esparcidas por el suelo "sin orden ni concierto" y parece imposible hallar una pauta de regularidad en sus posiciones.

Pero, es falso que el azar no esté sometido a leyes. Lo que ocurre es que no son leyes necesarias, que determinen unívocamente los resultados de cada experiencia, sino que afectan sólo a la frecuencia de los resultados que se obtienen cuando el fenómeno se repite un gran número de veces. Por ejemplo, las moléculas de un gas se mueven al azar, y las leyes del azar no se van a referir a la dirección de una molécula concreta sino que lo hacen sobre una cantidad enorme de moléculas de gas. Los expertos de tráfico, sin conocer las intenciones personales de cada conductor, prevén con mucha precisión qué flujo de coches va a haber en la carretera y a cada hora de un fin de semana. Y lo que es más sorprendente, vaticinan con tino el número de accidentes que se van a producir. Las leyes del azar no se van a referir al itinerario de un viajero sino que lo hacen sobre una cantidad muy grande de viajeros.

En los últimos cien años se han desarrollado extraordinariamente las dos especialidades de la Matemática que abordan este tipo de leyes no necesarias: el ***Cálculo de Probabilidades*** y la ***Estadística***. Gracias a sus logros, ha surgido la posibilidad de lograr predicciones relativamente precisas, acerca de los efectos de los fenómenos aleatorios.

Un ejemplo concreto: si se lanza mil veces una moneda equilibrada, lo único que se puede afirmar con certeza es que se obtendrán entre 0 y 1000 caras, afirmación banal que carece de interés. Sin embargo, es posible establecer que, "en la mayoría de las ocasiones", el número de caras estará comprendido entre 468 y 532. Despreciar esta información, aduciendo que no siempre es correcta, no parece muy inteligente; lo procedente es aprender a hacer este tipo de valoraciones de situaciones ***no determinísticas***, precisar su sentido, y extraer de ellas normas de conducta para enfrentarse al azar. Éste es el propósito del Cálculo de probabilidades que se introduce en este capítulo.

Hoy en día es posible, mediante sencillos programas de ordenador, realizar simulaciones de experimentos aleatorios con ayuda de la función RANDOM, que permite generar números aleatorios. Por ejemplo, se pueden obtener simulaciones de lanzamientos de moneda, dados, extracciones de cartas de una baraja, etc. con la misma exactitud que si realizamos las pruebas y con la ventaja de obtener el resultado en un intervalo de tiempo muy corto.

Espacio Muestral

Llamaremos espacio muestral de un experimento aleatorio al conjunto de todos los resultados posibles del experimento. También se llama espacio de resultados o universo de resultados. Al espacio muestral de un experimento aleatorio lo designaremos por **E**.

Cada uno de los elementos que forman el espacio muestral se llama punto muestral.

Ejemplos:

- Para el caso del lanzamiento de un dado tenemos $E=\{1,2,3,4,5,6\}$.

- Para el lanzamiento de una moneda $E=\{C,X\}$.

- Para el lanzamiento de dos monedas podemos suponer que las monedas son distinguibles, bien porque son distintas, bien porque se lanzan por separado, etc.

$$E=\{CC,CX,XC,XX\}.$$

- Para el lanzamiento de dos dados, al igual que para las monedas, no hay inconveniente en suponer que los distinguimos.

$$E=\{(1,1),(1,2),.....,(2,1),(2,2),.....,(3,1),(3,2),.....,(6,6)\}$$

- Al sacar una bola de una bolsa que contiene 5 bolas blancas y tres bolas negras, todas ellas iguales en tamaño y textura, supondremos que son distinguibles, pero no al tacto. Da igual que estén numeradas o no.

$$E=\{B_1,B_2,B_3,B_4,B_5,N_1,N_2,N_3\}.$$

- Para el lanzamiento de dos dados y anotar la suma de los números que aparecen en las caras superiores:

$$E=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

Suceso aleatorio

Se llama suceso de un experimento aleatorio, **a cada uno de los subconjuntos del espacio muestral E.** El conjunto de todos los sucesos de un experimento aleatorio se denomina **espacio de sucesos** y se designa por **S**.

Ejemplos:

- Un suceso puede tener nombres peculiares. Así, en el experimento aleatorio consistente en el lanzamiento de un dado tenemos como posibles sucesos:

$$\text{Impar}=\{1,3,5\}\quad \text{Primo}=\{2,3,5\}\quad \text{Menor que } 4=\{1,2,3\}\quad \text{Múltiplo de } 3=\{3,6\}$$

- En el experimento aleatorio consistente en lanzar una moneda y anotar el resultado tenemos:

$$\text{Espacio muestral} \longrightarrow E=\{C,X\}$$

$$\text{Espacio de sucesos} \longrightarrow S=\{\phi,\{C\},\{X\},\{C,X\}\}$$

- En el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado de quinielas y anotar el símbolo que aparece en la cara superior tenemos:

$$\text{Espacio muestral} \longrightarrow \ E=\{1, X, 2\}$$

$$\text{Espacio de sucesos} \longrightarrow \ S=\{\phi,\{1\},\{X\},\{2\},\{1, X\},\{1,2\},\{X,2\},\{1, X,2\}\}$$

Obsérvese la estrecha relación entre el número de elementos del espacio muestral y el número de elementos del espacio de sucesos.

En el primer ejemplo E tiene 2 elementos y S tiene $2^2=4$ elementos. En el segundo ejemplo, E tiene 3 elementos y S tiene $2^3=8$ elementos.

Si E es un conjunto finito con n-elementos, hay 2^n sucesos posibles.

Diremos que ***un suceso* A *se verifica, se realiza o se presenta*, *si al efectuar una prueba del experimento aleatorio obtenemos como resultado uno de los puntos muestrales que componen el suceso A.***

En el ejemplo del dado, si el resultado es 3, ocurren los sucesos Impar, Primo, Menor que 4 y Múltiplo de 3, es decir, todos los sucesos a los que pertenece el número 3.

Distintos tipos de sucesos

Sucesos elementales o simples

Son los sucesos formados por un sólo punto muestral; es decir, por un sólo resultado del experimento aleatorio.

Ejemplo: En el espacio muestral $E=\{1,2,3,4,5,6\}$ los sucesos elementales son:

$$\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}$$

Sucesos compuestos

Son los sucesos formados por dos o más puntos muestrales; es decir, por más de un resultado del experimento.

Ejemplo: Al lanzar dos monedas los sucesos: obtener *una sola cara* $\{CX, XC\}$ y obtener *al menos una cara* $\{CC, CX, XC\}$.

Suceso seguro

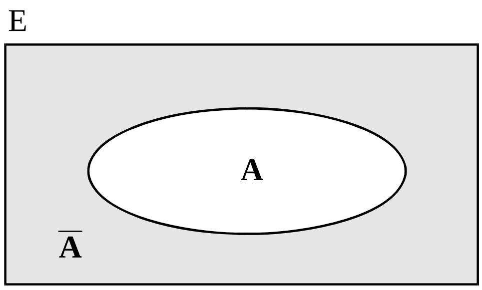
Suceso seguro o cierto es el que siempre se realiza. Coincide con el espacio muestral y lo representaremos por E.

Suceso imposible

Es el suceso que nunca se realiza. Lo representaremos por ϕ. Cuando se forma el espacio de sucesos de un experimento aleatorio siempre aparece el suceso imposible.

Ejemplo: Cuando tiramos dos dados, el suceso "suman 15" es claramente el suceso imposible, ya que ningún resultado lo verifica.

Sucesos Contrarios



Sea A un suceso. El subconjunto formado por los elementos de E que no están en A es el conjunto complementario de A y se denota por $\overline{A}$, A' o incluso A^c. Este conjunto se denomina contrario de A.

El contrario del suceso imposible ϕ es el suceso seguro E y el contrario de E es ϕ.

Se observa que los sucesos contrarios son siempre incompatibles, pero el recíproco no es cierto. De la definición se deduce que:

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$A \cup \overline{A} = E \quad \text{(suceso seguro)}$$

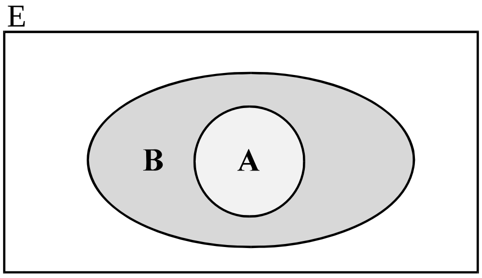
$$A \cap \overline{A} = \phi \quad \text{(suceso imposible)}$$

Ejemplo: En el experimento consistente en el lanzamiento de un dado, el espacio muestral es $E = \{1,2,3,4,5,6\}$. Tenemos los siguientes sucesos contrarios:

$$A = \{1,2,5\} \longrightarrow \overline{A} = \{3,4,6\} \qquad E = \{1,2,3,4,5,6\} \longrightarrow \overline{E} = \phi$$

$$B = \{\phi\} \longrightarrow \overline{B} = \{1,2,3,4,5,6\} \qquad C = \{1\} \longrightarrow \overline{C} = \{2,3,4,5,6\}$$

Inclusión de Sucesos



Un suceso A está incluido en otro B, si siempre que se realiza A también se realiza B.

***Para indicar que* A *está incluido en* B *se utiliza la nomenclatura* $\mathbf{A \subset B}$**

Ejemplo: Consideremos el espacio muestral $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ asociado al experimento de lanzar un dado y los sucesos A y B siguientes:

A = "Sale al menos tres puntos" $A = \{3, 4, 5, 6\}$

B = "Sale un número de puntos múltiplo de 3" $B = \{3, 6\}$

C = "Sale un número impar" $C = \{1, 3, 5\}$

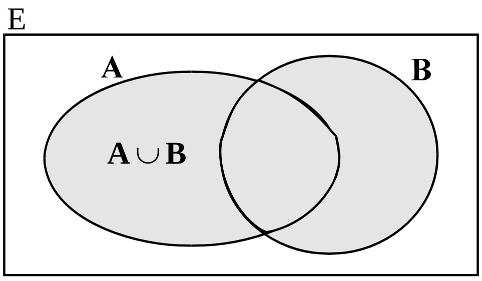
El suceso B está contenido en el suceso A; $B \subset A$, sin embargo, C no está contenido en A; $C \not\subset A$

Igualdad de Sucesos

Dos sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio son iguales si siempre que se realiza A se realiza B y recíprocamente.

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ y } B \subset A$$

Unión de Sucesos



Dados dos sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio, se llama suceso unión de A y B al suceso que se realiza cuando se verifica al menos uno de los sucesos A o B.

Se representa por $\mathbf{A \cup B}$ ***y está formado por los puntos muestrales de* A o B.**

Se observan, inmediatamente, las siguientes relaciones en la unión de sucesos:

$$A \cup E = E \qquad A \cup \phi = A \qquad A \cup \overline{A} = E$$

Ejemplo: Consideremos el experimento aleatorio del lanzamiento de un dado cuyo espacio muestral es $E = \{1,2,3,4,5,6\}$, y sean los siguientes sucesos:

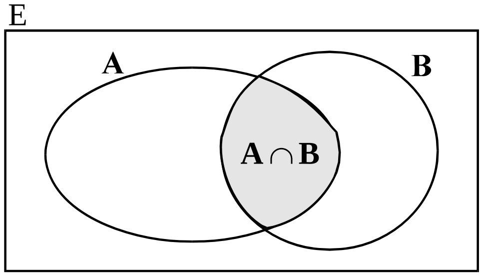
$A =$ "salir número par" $= \{2,4,6\}$ y $B =$ "salir número primo" $= \{2,3,5\}$

Formar el suceso C = "Salir número par o número primo"

$$C = \{2,3,4,5,6\}$$

Intersección de Sucesos

E



Dados dos sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio, se llama suceso intersección de A y B al suceso que se realiza cuando se verifican simultáneamente los sucesos A y B.

Se representa por $\mathbf{A \cap B}$ ***y está formado por los puntos muestrales de A y B.***

Se observan, inmediatamente, las siguientes relaciones en la intersección de sucesos:

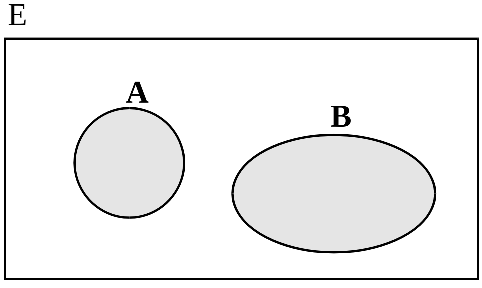
$$A \cap E = A \qquad A \cap \phi = \phi \qquad A \cap \overline{A} = \phi$$

Ejemplo: Considerando el ejemplo anterior, formar el suceso C = "Salir par y número primo".

$$C = \{2\}$$

Sucesos Incompatibles

E



Dos sucesos A y B se dicen incompatibles o disjuntos si su intersección es el suceso imposible, es decir si $\mathbf{A \cap B = \phi}$**. Si** $\mathbf{A \cap B \neq \phi}$ **entonces A y B son compatibles.**

Cuando es imposible que dos sucesos se realicen simultáneamente decimos que dichos sucesos son incompatibles.

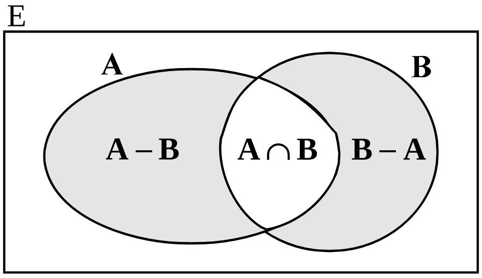
$$A \cap B = \phi \iff \text{A y B son incompatibles}$$

$$A \cap B \neq \phi \iff \text{A y B son compatibles}$$

Ejemplo: Al lanzar un dado, los sucesos $A = \{2,4,6\}$ y $B\{3,5\}$ son incompatibles, pues $A \cap B = \phi$.

Los sucesos $A = \{2,4,6\}$ y $B = \{3,6\}$ son compatibles ya que $A \cap B = 6$

Diferencia de Sucesos



Dados dos sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio, se llama suceso diferencia de A y B al suceso formado por todos los elementos de A que no están en B.

Se representa por $\mathbf{A - B = A \cap \overline{B}}$

Observa que siempre puede expresarse $A \cup B$ como unión de sucesos incompatibles:

$$\mathbf{A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)}$$

Ejemplo: Considerando los sucesos del ejemplo anterior: A = "salir par" y B = "salir número primo", calcular el suceso $A - B$**.**

Como $\overline{B} = \{1,4,6\}$ tenemos $A - B = A \cap \overline{B} = \{4,6\}$

Ejemplo: **Sea el experimento que consiste en la extracción de una carta de una baraja española. Consideremos los siguientes sucesos:**

A = "salir oro" **B = "salir as"** **C = "salir rey de copas o as de espadas"**

Interpretar los siguientes sucesos:

$\mathbf{A \cup B}$ $\mathbf{A \cup C}$ $\mathbf{B \cup C}$ $\mathbf{A \cap B}$ $\mathbf{A \cap C}$ $\mathbf{B \cap C}$

$A \cup B =$ "Salir oro o as". Son las 10 cartas de oros más el as de copas, el as de espadas y el as de bastos. En total 13 cartas.

$A \cup C =$ "Salir oro o rey de copas o as de espadas". Hay 12 cartas favorables.

$B \cup C =$ "Salir as o rey de copas o as de espadas". En este caso son favorables los 4 ases y el rey de copas, es decir, 5 cartas.

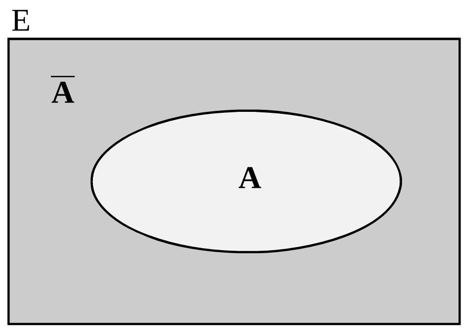
$A \cap B =$ "Salir oros y as". Hay 1 sola carta, es decir, el as de oros.

$A \cap C =$ "Salir oros y rey de copas o as de espadas". No hay posibilidad. Por tanto $A \cap C = \phi$

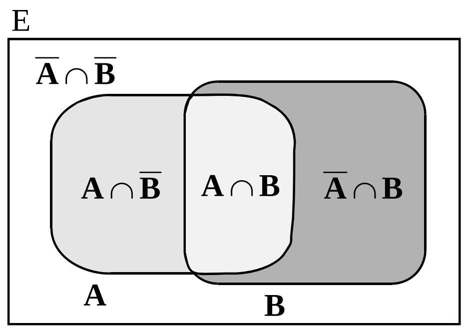
$B \cap C =$ "Salir as y rey de copas o as de espadas". La única carta posible es el as de espadas"

Diagramas de Venn

Un diagrama de Venn es un método particular de representar relaciones entre subconjuntos de un cierto **conjunto universal E**. El conjunto universal E se representa como el interior de un rectángulo (por ejemplo), y los subconjuntos de E se representan como regiones del rectángulo definidas por curvas simples, a menudo círculos.

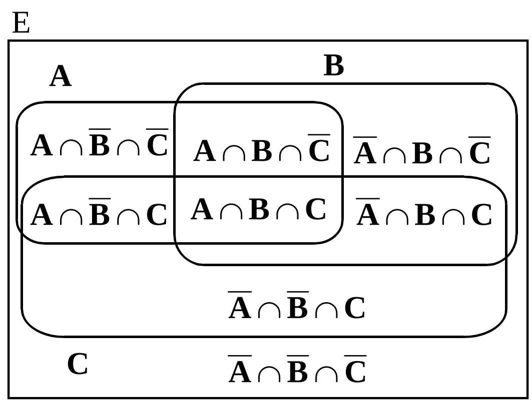


Dado un conjunto A, el conjunto universal E queda dividido en dos subconjuntos disjuntos, A y $\overline{A}$



Dados dos conjuntos A y B, el conjunto universal E queda dividido en cuatro subconjuntos disjuntos:

$A\cap\overline{B}$ $\quad \overline{A}\cap B$ $\quad A\cap B$ $\quad \overline{A}\cap\overline{B}$



Dados tres conjuntos A, B y C, el conjunto universal queda dividido en ocho subconjuntos disjuntos:

$A\cap B\cap C$ $\quad \overline{A}\cap B\cap C$ $\quad A\cap\overline{B}\cap C$ $\quad A\cap B\cap\overline{C}$

$A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$ $\quad \overline{A}\cap B\cap\overline{C}$ $\quad \overline{A}\cap\overline{B}\cap C$ $\quad \overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$

Los diagramas de Venn pueden emplearse, con suficiente cuidado, para demostrar propiedades tales como las **leyes de Morgan,** pero algunos autores prefieren otras demostraciones, pues algunos diagramas ilustran sólo casos particulares. Por ejemplo, cuatro conjuntos generales no deben representarse como cuatro círculos incidentes, pues de esa forma no se consigue que aparezcan los 16 subconjuntos disjuntos en que queda dividido E.

Álgebra de Boole de los sucesos

George Boole (1815-1864) fue un matemático autodidacta inglés al que se le considera hoy en día el padre de la lógica matemática.

En 1854 publicó su trabajo principal titulado **Investigación sobre las leyes del Pensamiento**. En él sistematiza sus ideas, construyendo la lógica formal como un nuevo tipo de Álgebra que actualmente conocemos como **Álgebra de Boole**. En su obra, Boole construye el álgebra de conjuntos y el álgebra de la lógica formal, incluyendo aplicaciones a la teoría de probabilidades.

El álgebra de Boole es frecuentemente utilizada hoy en día, no sólo por los matemáticos puros, sino por aquellas personas que la aplican al diseño de circuitos telefónicos, computadores electrónicos, cálculo de probabilidades y teoría del seguro.

De una forma esquemática, el álgebra de Boole de los sucesos consiste en lo siguiente:

Consideremos un experimento aleatorio cualquiera y sean E su espacio muestral y S el espacio de sucesos asociado. En S se definen las operaciones de unión, intersección y complementación (contrario), de modo que cumplan las siguientes propiedades:

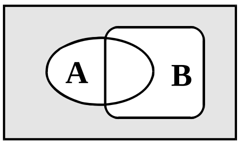
	Unión	**Intersección**
Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Asociativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Idempotente	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Simplificativa	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	
Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	
Elemento Neutro	$A \cup \phi = A$	$A \cap E = A$
Complementación	$A \cup \overline{A} = E$	$A \cap \overline{A} = \phi$

Leyes de Morgan

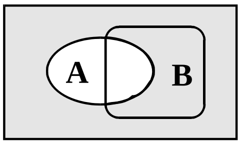
1ª Ley

$$\overline{\mathbf{A} \cup \mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{B}}$$

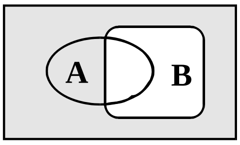
$\overline{A \cup B}$



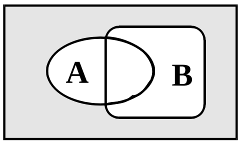
$\overline{A}$



$\overline{B}$

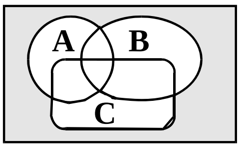


$\overline{A} \cap \overline{B}$

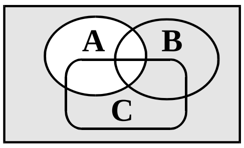


$$\overline{\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}} = \overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{B}} \cap \overline{\mathbf{C}}$$

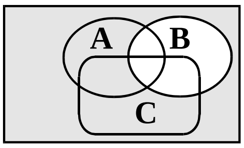
$\overline{A \cup B \cup C}$



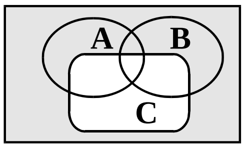
$\overline{A}$



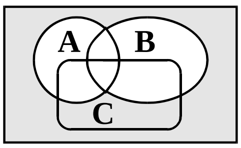
$\overline{B}$



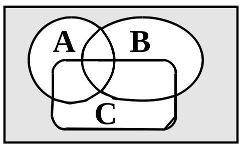
$\overline{C}$



$\overline{A} \cap \overline{B}$



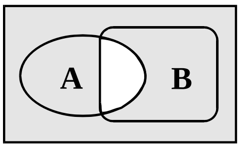
$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$



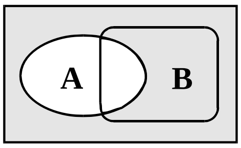
2ª Ley

$$\overline{\mathbf{A} \cap \mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} \cup \overline{\mathbf{B}}$$

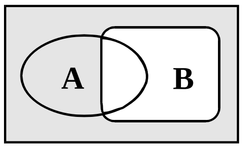
$\overline{A \cap B}$



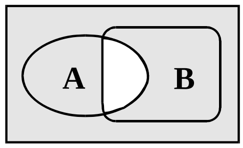
$\overline{A}$



$\overline{B}$

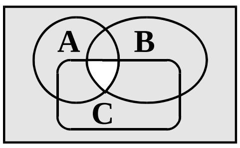


$\overline{A} \cup \overline{B}$

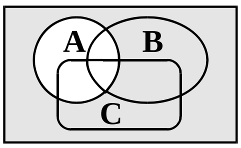


$$\overline{\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C}} = \overline{\mathbf{A}} \cup \overline{\mathbf{B}} \cup \overline{\mathbf{C}}$$

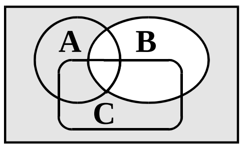
$\overline{A \cap B \cap C}$



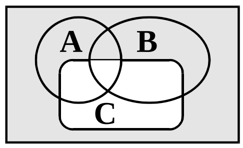
$\overline{A}$



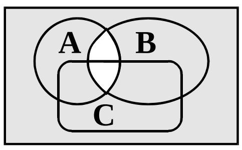
$\overline{B}$



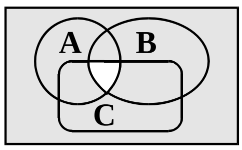
$\overline{C}$



$\overline{A} \cup \overline{B}$



$\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$



Combinatoria

La combinatoria se ocupa de contar los diferentes modos en que se pueden agrupar ciertos objetos siguiendo algunas reglas; o los diferentes caminos por los que se puede ir de un sitio a otro pasando, o no, por lugares intermedios; o las distintas formas de plegar una tira de sellos; o un mapa desplegable, etc.

De todos estos problemas y otros muchos en los cuales entra esta ciencia, algunos están resueltos, es decir, se conoce un procedimiento para realizar la contabilidad deseada, cualesquiera que sean las condiciones concretas. Otros como el de los sellos, no están resueltos. Es decir, no existe, no se conoce, no se ha sabido crear un procedimiento para obtener el número de posibles "plegamientos" a partir del número de sellos. En este sentido la combinatoria es una ciencia muy abierta.

Estrategias basadas en el producto

La estrategia del casillero

Ejemplo: Un botellero tiene 5 filas y 8 columnas. ¿Cuántas botellas caben en él?

$$5 \cdot 8 = 40 \text{ botellas}$$

Ejemplo: Irene tiene 4 pantalones y 6 camisetas. ¿Cuántas indumentarias puede elegir? ¿Y si tiene además 3 pares de zapatos?

$$4 \cdot 6 = 24 \text{ indumentarias posibles}$$

$$4 \cdot 6 \cdot 3 = 72 \text{ indumentarias posibles}$$

Ejemplo: Hay conversaciones bilaterales entre la C.E. y Japón. Los europeos acuden con 8 representantes, los japoneses con 11. Al encontrarse cada miembro de una delegación saluda, estrechando la mano, a cada miembro de la otra. ¿Cuántos apretones de mano se dan?

$$8 \cdot 11 = 88 \text{ apretones}$$

Ejemplo: Lanzamos un dado y extraemos una carta de una baraja. ¿Cuántos resultados distintos podemos obtener? ¿Cuántos resultados distintos podemos obtener al lanzar 3 dados?

$$6 \cdot 40 = 240 \text{ resultados distintos}$$

$$6 \cdot 6 \cdot 6 = 216 \text{ resultados distintos}$$

Podríamos considerar que Irene, además de blusas, pantalones y zapatos, tiene varias gorras y varios cinturones; que en lugar de lanzar tres dados, lanzamos n dados, etc. En todos estos casos, ***para obtener el número total de posibilidades, multiplicamos el número de opciones que se dan en cada uno de los componentes.***

El diagrama en árbol

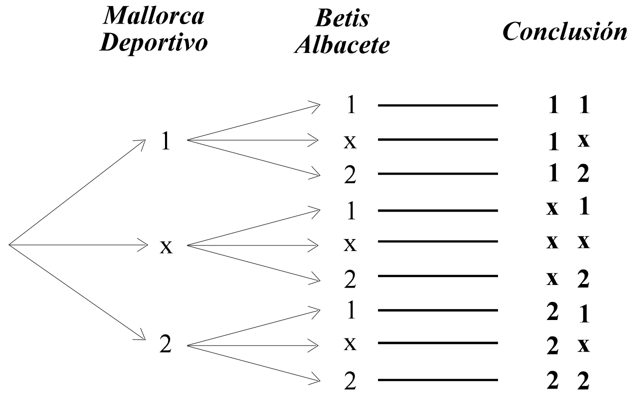
La “estrategia del casillero” nos ha resultado útil para pensar en determinados problemas. Veamos otros problemas para los que no resulta tan eficaz.

Ejemplo: **Se juegan los partidos de ida de las semifinales de la Copa del Rey de fútbol. Son Mallorca-Deportivo y Betis-Albacete. Los chicos y chicas de 1º H son muy dados a hacer apuestas. Confeccionan una quiniela con los dos partidos y, en cada uno de ellos, hay que poner 1, X o 2. Para ganar hay que acertar los dos resultados. Con el dinero recogido compran libros y se reparten entre todos los ganadores.**

a) ¿Cuántas quinielas tuvo que rellenar Mario, el forofo, que quería tener la seguridad de ganar?

b) ¿Cuántas quinielas tendría que haber hecho Mario la semana pasada para acertar los 4 partidos de vuelta de los cuartos de final de la Copa del Rey?

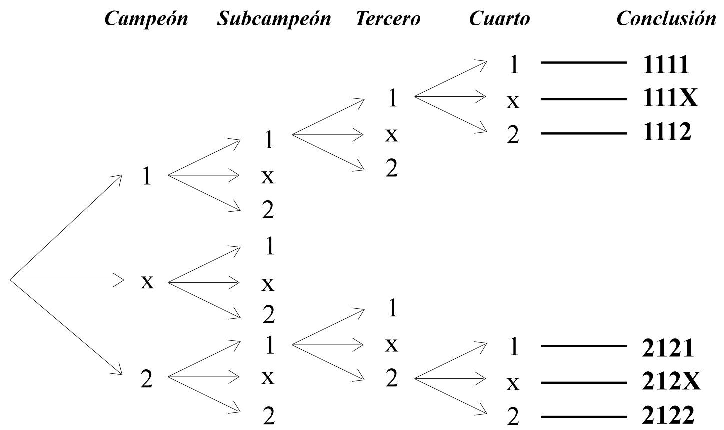
a) Lo podemos resolver mediante el siguiente *diagrama en árbol*:



3 posibilidades para acertar el primer partido. A cada una de esas tres posibilidades le corresponden las tres que se necesitan acertar el otro partido.

$$3 \cdot 3 = 9$$

b) Lo podemos resolver mediante el siguiente *diagrama en árbol*:



En cada paso, el número de posibilidades se multiplica por 3, pues el resultado de cada partido no depende de los anteriores. El número de quinielas posibles es:

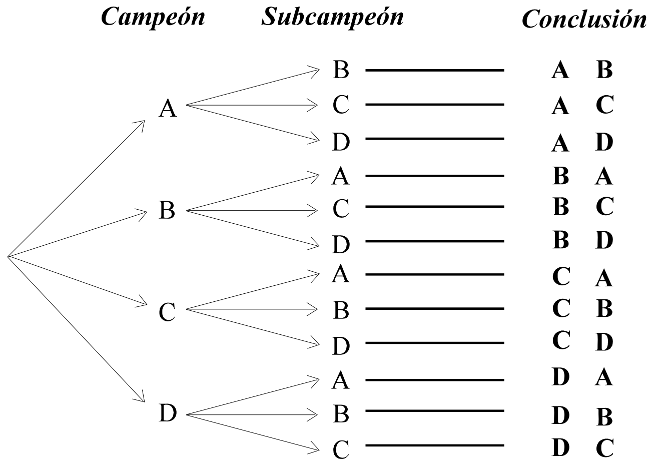
$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$$

Ejemplo: Antonio, Beatriz, Carmen y Darío juegan la fase final de un campeonato de pimpón. Hay una copa para el campeón y una placa para el subcampeón.

a) De cuántas formas pueden adjudicarse los trofeos?

b) ¿Cuántas posibles clasificaciones finales puede haber?

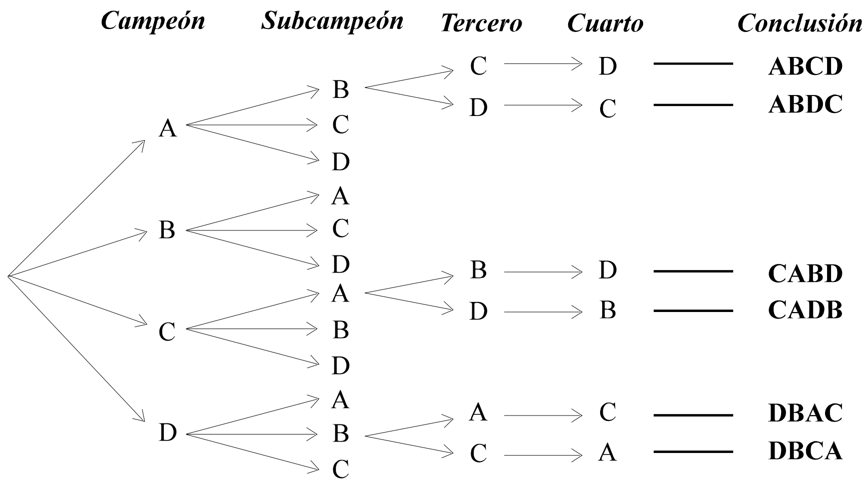
a) Lo podemos resolver mediante el siguiente *diagrama en árbol*:



Hay 4 posibilidades para el puesto de campeón. Cada una de ellas se puede completar con 3 opciones para el subcampeón

$4 \cdot 3 = 12$ posibilidades

b) Lo podemos resolver mediante el siguiente *diagrama en árbol*:



Hay 4 posibles campeones pero, una vez fijado el campeón, sólo puede haber 3 subcampeones. Y si fijamos al 1^0 y al 2^0, sólo quedan 2 aspirantes para el 3^{er} lugar. Conocidos los 1^0, 2^0 y 3^0, para el 4^0 lugar sólo queda un candidato. El número de posibilidades es:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ posibilidades}$$

<u>El diagrama en árbol no tiene por qué estar completo para poder proceder a la contabilidad. En realidad, ni siquiera tendríamos que representar nada</u>.

Ejemplo: **Hay 12 candidatos a ocupar los tres premios de un certamen literario. ¿Cuántas posibilidades hay?**

Para resolverlo *imaginamos* un diagrama en árbol con 12 ramas (12 posibilidades para el 1^0). Una vez fijado el 1^0, hay 11 posibilidades para el 2^0. Y fijados el 1^0 y el 2^0 hay 10 posibilidades para el 3^0.

En total hay:

$$12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320 \text{ posibilidades}$$

Variaciones

<u>Variaciones con repetición</u>

Vamos a recuperar un problema resuelto en el apartado anterior y que ahora nos va a servir de modelo.

Ejemplo: **Se juegan dos partidos. ¿Cuántas quinielas hemos de hacer para acertar los dos? ¿Y para acertar cuatro partidos?**

Disponemos de los tres signos 1, X y 2. Con ellos hemos de llenar dos lugares. Podemos poner el mismo signo en los dos lugares (es decir, pueden repetirse). El número de posibilidades es:

$$3 \cdot 3 = 3^2 .$$

Análogamente, con los tres signos 1, X y 2, hemos de llenar cuatro lugares, pudiendo repetirse una o más veces los signos utilizados. El número de posibilidades es:

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$$

Vamos a generalizar esta idea:

Variaciones con repetición de m elementos tomados n a n son los distintos grupos que se pueden formar con los m elementos, de manera que:

- ***En cada grupo entren n elementos repetidos o no.***
- ***Dos grupos son distintos si se diferencian en algún elemento o en el orden de colocación de los mismos.***

El número de variaciones con repetición de m elementos tomados n a n se representa con el símbolo $\mathbf{VR_{m,n}}$.

Si descomponemos el recuento del número de estos grupos en cada uno de sus elementos observamos el número de posibilidades siguiente, que resume el diagrama de árbol correspondiente:

$$\xrightarrow{m} \boxed{\begin{array}{c}1^{\circ}\\ \text{elemento}\end{array}} \xrightarrow{m} \boxed{\begin{array}{c}2^{\circ}\\ \text{elemento}\end{array}} \xrightarrow{m} \boxed{\begin{array}{c}3^{\circ}\\ \text{elemento}\end{array}} \;\cdots\cdots\cdots\cdots\; \xrightarrow{m} \boxed{\begin{array}{c}\text{último}\\ \text{elemento}\end{array}}$$

Así, según el principio fundamental que hemos expuesto, tenemos que:

$$\boxed{\mathbf{VR}_{\mathbf{m},\mathbf{n}} = \overbrace{\mathbf{m}\cdot\mathbf{m}\cdot\mathbf{m}\cdot\ldots\ldots\cdot\mathbf{m}}^{\mathbf{n}} = \mathbf{m}^{\mathbf{n}}}$$

Observaciones

- *La base de esta potencia es el número de elementos del conjunto con el que trabajamos, es decir, el tipo de signos o elementos que pueden formar parte de las listas.*
- *El exponente de la potencia es el tamaño o longitud de las listas.*
- *En el recuento de las variaciones con posible repetición se cuentan todas las listas de m elementos que se pueden formar: tanto las listas con elementos repetidos como, si las hay, aquellas cuyos elementos son todos distintos. No hay restricción alguna en este sentido. Cada lugar de la lista puede ser ocupado por cualquier elemento del conjunto.*

Variaciones sin repetición

Variaciones ordinarias o variaciones sin repetición de m elementos tomados n a n $(\mathbf{n}\le\mathbf{m})$ ***son los distintos grupos que se pueden formar con los m elementos, de manera que:***

- ***En cada grupo entren n elementos distintos.***
- ***Dos grupos son distintos si se diferencian en algún elemento o en el orden de colocación de los mismos.***

El número de variaciones sin repetición de m elementos tomados n a n se representa por $\mathbf{V}_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$**.**

Si, como se hizo anteriormente, para calcular el número posible de posibles grupos hacemos el recuento para cada uno de sus elementos por separado, obtenemos el número de posibilidades siguiente, que resume el diagrama en árbol correspondiente:

$$\xrightarrow{m} \boxed{\begin{array}{c}1^{\circ}\\ \text{elemento}\end{array}} \xrightarrow{m-1} \boxed{\begin{array}{c}2^{\circ}\\ \text{elemento}\end{array}} \xrightarrow{m-2} \boxed{\begin{array}{c}3^{\circ}\\ \text{elemento}\end{array}} \;\cdots\cdots\cdots\cdots\; \xrightarrow{m-(n-1)} \boxed{\begin{array}{c}\text{último}\\ \text{elemento}\end{array}}$$

de modo que:

$$\boxed{V_{m,n} = \overbrace{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots\ldots\ldots\ldots \cdot (m-n+1)}^{n \text{ factores decrecientes}}}$$

Observación

Se debe efectuar un producto de n factores (tantos como el número de elementos de cada lista), el primero de los cuales es m (número total de elementos con que se trabaja) y que van disminuyendo de unidad en unidad.

Permutaciones

Permutaciones sin repetición

Permutaciones ordinarias de n elementos son los distintos grupos que se pueden formar de manera que:

- ***En cada grupo estén los n elementos***
- ***Un grupo se diferencia de otro únicamente en el orden de colocación de los elementos***

El número de permutaciones ordinarias de n elementos se representa por $\mathbf{P_n}$***. En realidad, es un caso particular de las variaciones sin repetición cuando*** $\mathbf{m = n}$***.***

$$P_n = V_{n,n} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot (n-n+1)$$

$$\boxed{P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Factorial de un número

Sea n un número natural mayor que 1. Se llama factorial de n al producto de los n primeros números naturales. El factorial de n se representa por $\mathbf{n!}$***.***

$$\boxed{n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \qquad \begin{cases} \text{Si } n = 1 \text{ definimos } 1! = 1 \\ \text{Si } n = 0 \text{ definimos } 0! = 1 \end{cases}$$

Utilización del factorial para el cálculo de variaciones y permutaciones

$$V_{m,n} = m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\ldots\cdot(m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!}}}$$

$$P_n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ldots\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = n! \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{P_n = n!}}$$

Permutaciones con repetición

Permutaciones con repetición de n elementos donde el primer elemento se repite a veces, el segundo b veces,....., el último k veces $(a+b+c+\ldots\ldots\ldots+k=n)$***, son los distintos grupos que se pueden formar, de manera que:***

- ***En cada grupo de n elementos el primer elemento está a veces; el segundo elemento está b veces;.....***
- ***En grupo se diferencia de otro únicamente por el orden de colocación de sus elementos.***

El número de permutaciones con repetición de n elementos, donde el primer elemento se repite a veces, el segundo b veces,......., el último k veces, se representa por $\mathbf{P_n^{a,b,\ldots\ldots,k}}$

$$\boxed{\mathbf{P_n^{a,b,\ldots\ldots,k} = \frac{n!}{a!\cdot b!\cdot c!\cdot\ldots\ldots\cdot k!}}}$$

Combinaciones

Combinaciones sin repetición

Combinaciones ordinarias o sin repetición de m elementos tomados n a n $(n\leq m)$ ***son los distintos grupos que se pueden formar con los m elementos, de manera que:***

- ***En cada grupo entren n elementos distintos.***
- ***Dos grupos son diferentes si se diferencian en algún elemento, pero no en el orden de colocación.***

El número de combinaciones de m elementos tomados n a n se representa por $\mathbf{C_{m,n}}$.

$$C_{m,n}=\frac{V_{m,n}}{P_n}=\frac{\frac{m!}{(m-n)!}}{n!}=\frac{m!}{n!\cdot(m-n)!}$$

Observación *A este cociente se le conoce como paréntesis de Euler o número combinatorio, y se escribe* $\binom{m}{n}=\frac{m!}{n!\cdot(m-n)!}$. *Por tanto:*

$$C_{m,n}=\binom{m}{n}=\frac{m!}{n!\cdot(m-n)!}$$

Combinaciones con repetición

Combinaciones con repetición de m elementos tomados n a n $(n\leq m)$ *son los distintos grupos que se pueden formar con los m elementos, de manera que:*

- *En cada grupo entren n elementos repetidos o no.*
- *Dos grupos son diferentes si se diferencian en algún elemento, pero no en el orden de colocación.*

El número de combinaciones con repetición de m elementos tomados n a n se representa por $CR_{m,n}$.

$$CR_{m,n}=\binom{m+n-1}{n}=\frac{(m+n-1)!}{n!\cdot(m-1)!}$$

Problema general

En una empresa hay 5 plazas vacantes, de las que 3 corresponden a hombres y 2 a mujeres. Se han presentado 10 hombres y 8 mujeres.

a) ¿De cuántas formas distintas se pueden cubrir las vacantes?

b) ¿Cuántas posibilidades habrá si las plazas de los hombres tienen todas distinta remuneración?

c) ¿Cuántas posibilidades habrá si tanto las plazas de los hombres como las de las mujeres tienen distinta remuneración?

d) ¿De cuántas maneras se pueden ordenar en fila los 10 hombres y las 8 mujeres?

e) ¿De cuántas maneras se pueden ordenar en fila los 10 hombres y las 8 mujeres si los hombres deben estar juntos y las mujeres también?

a) El número de formas distintas de elegir a los hombres es: $C_{10,3} = \dfrac{V_{10,3}}{P_3} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 120$

El número de formas distintas de elegir a las mujeres: $C_{8,2} = \dfrac{V_{8,2}}{P_2} = \dfrac{8 \cdot 7}{2} = 28$

El número de formas distintas de cubrir las vacantes: $C_{10,3} \cdot C_{8,2} = 120 \cdot 28 = 3360$

b) El número de formas distintas de elegir a los hombres es: $V_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

El número de formas distintas de elegir a las mujeres: $C_{8,2} = \dfrac{V_{8,2}}{P_2} = \dfrac{8 \cdot 7}{2} = 28$

El número de formas distintas de cubrir las vacantes: $V_{10,3} \cdot C_{8,2} = 720 \cdot 28 = 20160$

c) El número de formas distintas de elegir a los hombres es: $V_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

El número de formas distintas de elegir a las mujeres: $V_{8,2} = 8 \cdot 7 = 56$

El número de formas distintas de cubrir las vacantes: $V_{10,3} \cdot V_{8,2} = 720 \cdot 28 = 40320$

d) Se pueden ordenar de: $P_{18} = 18! = 6.402.373.705.000.000$

e) Los hombres se pueden ordenar de: $P_{10} = 10! = 3.628.800$

Las mujeres se pueden ordenar de: $P_8 = 8! = 40.320$

El número de ordenaciones posibles, si los hombres deben estar juntos y las mujeres también es:

$$2 \cdot P_{10} \cdot P_8 = 292.626.432.000$$

El doble del producto, ya que los hombres pueden estar situados delante de las mujeres o detrás.

Experimentos compuestos. Espacios compuestos

Lanzar un dado, lanzar una moneda, extraer una carta de una baraja, son experimentos simples. Lanzar dos o más dados, lanzar varias monedas, lanzar un dado y una moneda, extraer varias cartas de una baraja, son experimentos compuestos.

Puede decirse que un **experimento compuesto** *es aquel en el que cada prueba equivale a la realización conjunta de varias pruebas más simples, ya sea simultáneamente, o una tras otra*. Al espacio muestral asociado a un experimento compuesto se llama **espacio compuesto** o **espacio producto.**

Ejemplo: Sea el experimento compuesto correspondiente al lanzamiento de un dado y una moneda.

El espacio muestral del dado es $\{1,2,3,4,5,6\}$

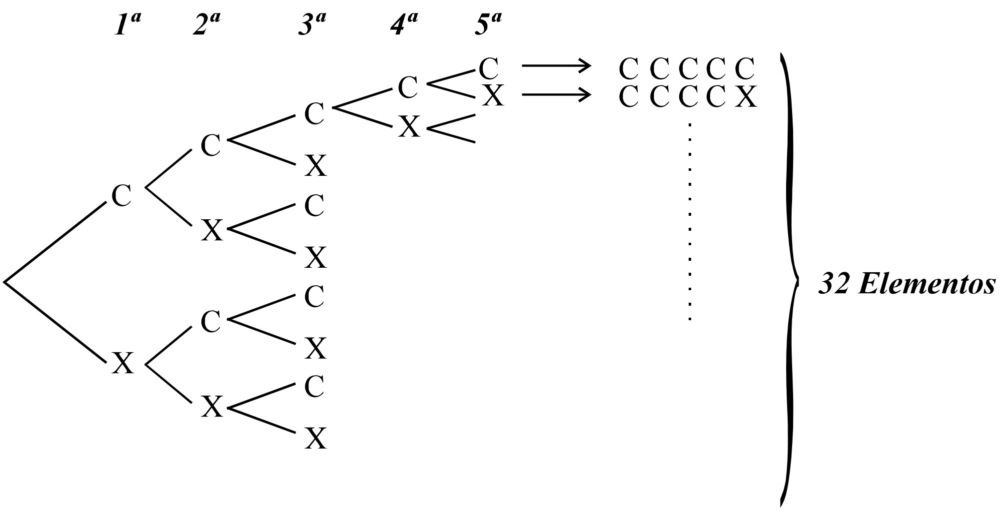
El espacio muestral de una moneda es $\{C,X\}$

El espacio muestral correspondiente al experimento compuesto es:

$$E=\{(1,C),(2,C),(3,C),(4,C),(5,C),(6,C),(1,X),(2,X),(3,X),(4,X),(5,X),(6,X)\}$$

Ejemplo: ¿Cuántos elementos tendrá el espacio muestral del experimento que consiste en lanzar 5 monedas y anotar su resultado?

Los posibles resultados los obtenemos haciendo uso de un diagrama en árbol de la siguiente manera:



Este experimento se puede considerar como un experimento producto de cinco experimentos simples consistentes en el lanzamiento de una sola moneda. Por tanto, el espacio muestral producto tendrá:

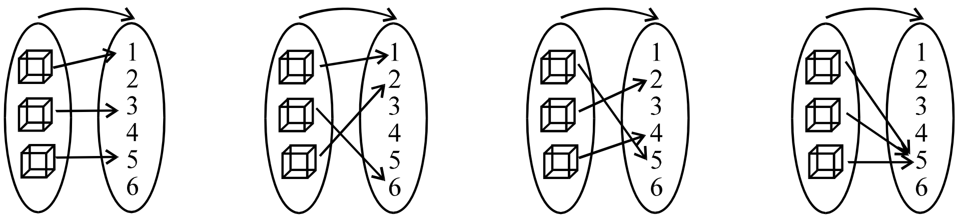
$$2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=2^5=32 \text{ elementos} \quad \rightarrow \quad VR_{2,5}=2^5=32$$

Si en lugar de cinco monedas se lanzaran n, el espacio muestral tendría:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 ....2 = 2^n \text{ elementos} \quad \rightarrow \quad VR_{2,n} = 2^n$$

Ejemplo: **Consideremos el experimento consistente en el lanzamiento de tres dados cuyas caras están numeradas del 1 al 6. ¿Cuántos elementos tendrá el espacio muestral del experimento descrito?**

Algunos de los posibles resultados los vemos en los siguientes diagramas de Venn:



(1, 3, 5) (1, 6, 2) (5, 2, 4) (5, 5, 5)

En total hay 216 que corresponden a $VR_{6,3} = 6^3 = 216$

Este experimento está compuesto por tres experimentos simples consistentes en el lanzamiento de un dado. Por tanto el espacio muestral tiene:

$$6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216 \text{ elementos} \quad \rightarrow \quad VR_{6,3} = 6^3 = 216$$

Si en lugar de tres dados se lanzaran n, el espacio muestral tendría:

$$6 \cdot 6 \cdot 6 ....6 = 6^n \text{ elementos} \quad \rightarrow \quad VR_{6,n} = 6^n$$

Ejemplo: **Calcular el número de resultados posibles de un experimento que consiste en la extracción de una carta de una baraja española y el lanzamiento de un dado.**

El espacio muestral de este experimento está formado por el producto de los espacios muestrales siguientes:

Espacio muestral de la baraja: 40 resultados posibles.

Espacio muestral del dado: 6 resultados posibles.

Espacio muestral del experimento: $40 \cdot 6 = 240$ resultados posibles.

Frecuencia absoluta y frecuencia relativa de un suceso

Se llama frecuencia absoluta de un suceso A, al número de veces que se verificó A al realizar el experimento un número determinado de veces. Se representa por la notación **f(A)** .

Si una persona nos asegura que lanzando una moneda, por ejemplo, obtuvo 57 veces el resultado "cara", no podemos afirmar que dicho suceso sea <<muy frecuente>> o <<poco frecuente>>, pues necesitamos comparar con la cantidad de veces que se lanzó la moneda. Por esto se introduce la noción de frecuencia relativa.

Se llama frecuencia relativa de un suceso al cociente entre la frecuencia absoluta del mismo y el número total de veces que se hace el experimento.

$$\boxed{\mathbf{f_r(A) = \frac{f(A)}{N}}}$$

Propiedades de la frecuencia relativa

1. $\mathbf{0 \leq f_r \leq 1}$ **cualquiera que sea el suceso A**.
2. $\mathbf{f_r(E) = 1}$ **(E suceso seguro)**
3. **Si A y B son sucesos incompatibles**: $\mathbf{f_r(A \cup B) = f_r(A) + f_r(B)}$

Álgebra de sucesos

Puesto que los sucesos pueden operarse unos con otros, obteniendo nuevos sucesos, se habla del **álgebra de sucesos**. Al conjunto de todos ellos se le llama **σ – álgebra** (sigma-álgebra).