Ley de los grandes números. Idea intuitiva de probabilidad

Un **experimento aleatorio** se caracteriza porque ante la repetición del mismo, en condiciones análogas, los resultados pueden diferir; es el caso del lanzamiento de una moneda o de un dado para observar la cara o puntuación resultantes: idénticas condiciones en el lanzamiento no permiten aventurar el resultado de la prueba, aunque sí un gran número de repeticiones de la misma nos desvelarán a qué constante, llamada **probabilidad**, tienden a agruparse las **frecuencias relativas** de aparición de una cara determinada, cuestión que, por otro lado, caracteriza a los procesos aleatorios.

La probabilidad, entonces, es un intento de cuantificar el azar, de medir cuán fortuito puede ser considerado un resultado de, en definitiva, responder a la pregunta: en una serie de pruebas, ¿en cuántas de ellas podemos esperar que aparezca un suceso?. Por ello, una forma habitual de expresar la probabilidad, es en tantos por ciento, señalándose el número de veces que aconteció un resultado en cien intentos.

Ejemplo: **Supongamos que lanzamos un dado homogéneo y regular, en el que anotamos el número de veces que aparecen las caras impares, es decir, el 1, 3 y 5 y obtenemos los resultados contenidos en las siguientes tablas.**

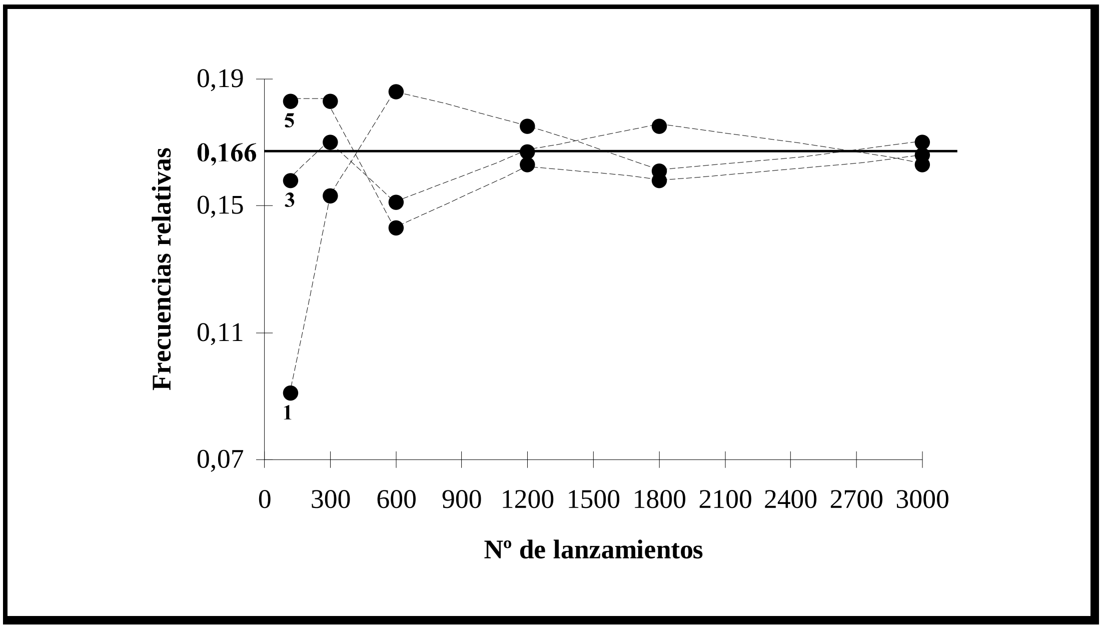
Nº de lanzamientos / Frecuencias absolutas

	120	**300**	**600**	**1.200**	**1.800**	**3.000**
1	11	46	112	210	290	510
3	19	51	91	201	304	461
5	22	55	86	196	284	517

Nº de lanzamientos / Frecuencias relativas

	120	**300**	**600**	**1.200**	**1.800**	**3.000**
1	0'091	0'153	0'186	0'175	0'161	0'170
3	0'158	0'170	0'151	0'167	0'175	0'163
5	0'183	0'183	0'143	0'163	0'158	0'166

La aproximación de las frecuencias relativas al valor $\frac{1}{6} = 0'1\widehat{6}$ se pone de manifiesto en la siguiente figura:



Si repitiéramos de nuevo este experimento, obtendríamos polígonos de frecuencias muy parecidos al representado. Ahora bien, en todos ellos se verifica el siguiente hecho experimental:

Las frecuencias relativas del suceso "salir impar" tienden a estabilizarse hacia el valor $0'1\widehat{6}$, lo que significa que la frecuencia del suceso *salir impar* toma valores aproximados por defecto o por exceso en torno a $0'1\widehat{6}$, de tal manera que las fluctuaciones u oscilaciones alrededor de este valor son cada vez más pequeñas; es decir, el polígono de frecuencias se va suavizando a medida que aumenta el número de lanzamientos.

Ejemplo: **En una clase de 40 alumnos cada uno de ellos lanzó un dado 120 veces. Se juntaron los resultados de cada dos alumnos; después de cada 10; después los de los 40**.

Vamos a analizar las gráficas con las frecuencias relativas en cada caso.

Distribución a)

x	f	f_i
1	14	0'117
2	16	0'133
3	18	0'150
4	29	0'242
5	20	0'167
6	23	0'192
	120	

Distribución b)

x	f	f_i
1	40	0'167
2	32	0'133
3	46	0'192
4	49	0'204
5	34	0'142
6	39	0'163
	240	

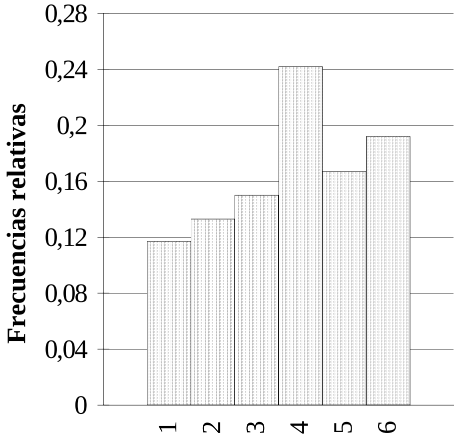
Distribución c)

x	f	f_i
1	173	0'144
2	201	0'168
3	221	0'184
4	177	0'148
5	202	0'168
6	226	0'188
	1200	

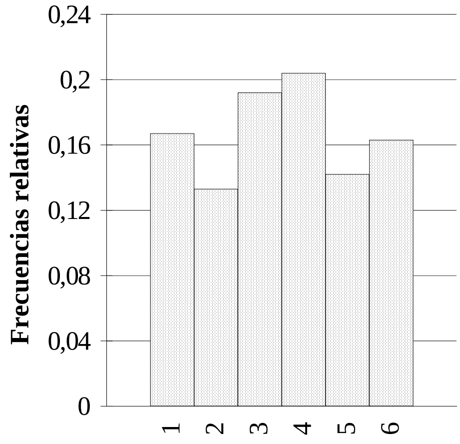
Distribución d)

x	f	f_i
1	736	0'153
2	806	0'168
3	835	0'174
4	766	0'160
5	825	0'172
6	832	0'173
	4800	

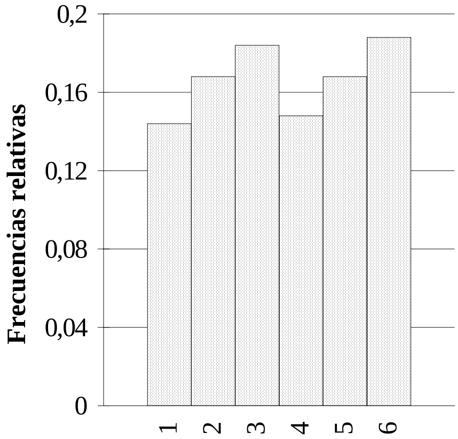
a) 120 lanzamien-tos



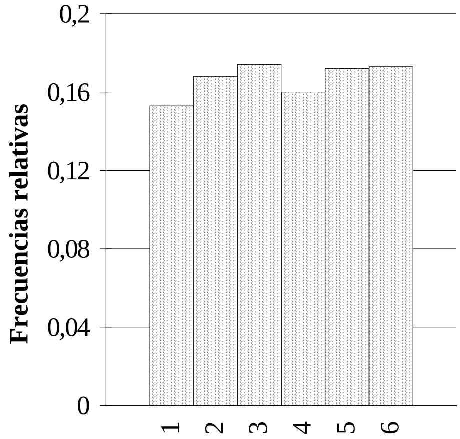
b) 240 lanzamientos



c) 1200 lanzamientos

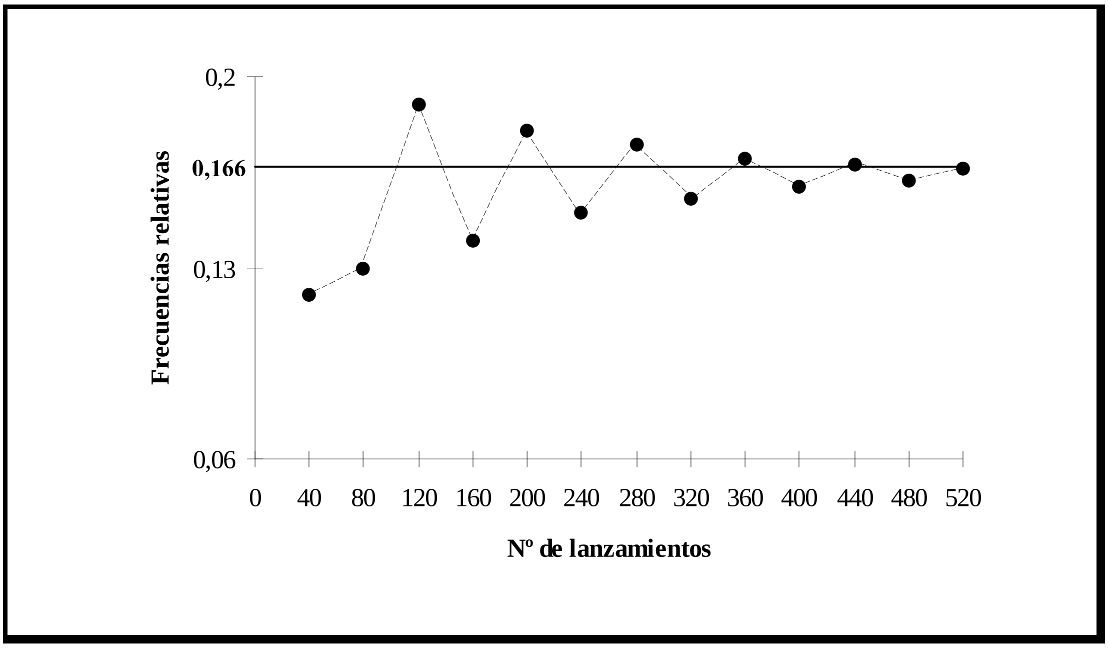


d) 4800 lanzamientos



En las gráficas anteriores se observa claramente que al aumentar el número de pruebas ***las frecuencias relativas de todas las caras tienden a estabilizarse hacia el valor*** $\boldsymbol{0'1\widehat{6}}$.

También resulta elocuente la siguiente gráfica que da la frecuencia relativa del suceso "salir el nº 3" al lanzar un dado reiteradamente. Cada nuevo valor es el resultado de acumular otros 40 lanzamientos.



Observa cómo la frecuencia relativa del "3" tiene unas fluctuaciones cada vez menores y se acaba aproximando mucho a un valor que, por ser el dado correcto, es 0'166.

Que la frecuencia se va estabilizando cuando aumenta el número de experiencias es una verdad empírica, no demostrable pero sí reiteradamente comprobable. Su enunciado es el principio básico del azar, la **ley de los grandes números**.

Jakob Bernouilli (1654-1705) demostró la llamada **Ley de los grandes números** que enunciada de una forma sencilla dice así: ***<u>La frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse en torno a un número, a medida que el número de pruebas del experimento crece indefinidamente</u>*, o dicha de otra manera: Al realizar repetidamente una experiencia aleatoria en condiciones estables, y cualquiera que sea el suceso S, existe el límite siguiente:**

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{f(S)}{n}} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} f(S) = \text{nº de veces que ha ocurrido el suceso S} \\ n = \text{nº de veces que se ha realizado la experiencia} \end{cases}$$

***<u>Al valor de ese límite se le llama probabilidad del suceso S</u>*.**

¿Qué probabilidad tiene un cierto tipo de chinchetas de caer con la punta hacia arriba o hacia abajo? No lo sabremos a menos que nos decidamos a experimentar con ellas o preguntemos a alguien que lo haya hecho.

Si dejemos caer 100 chinchetas, y 37 de ellas caen con la punta hacia arriba, estimaremos la probabilidad de este suceso en 0'37. Si dejamos caer 10.000 y obtenemos 4.078 hacia arriba estimaremos su probabilidad en 0'4078 y esta estimación es más segura que la anterior. Y, así sucesivamente, podremos ir mejorando nuestra convicción sobre el valor que asignamos a la probabilidad de ese suceso. Análogamente deberíamos proceder si tuviéramos que jugarnos algo importante con un dado del que tuviéramos la evidencia o la sospecha de que era incorrecto.

Por lo demás, hay sucesos para los cuales la única forma de asignarles probabilidad es experimentar y darle a la probabilidad el valor de la frecuencia relativa obtenida: qué probabilidad tiene una persona de ciertas características de tener un accidente, qué probabilidad tiene una lámpara de durar encendida más de 500 horas,...

Esta definición de probabilidad tiene un inconveniente de tipo práctico: para calcular la probabilidad de un suceso sería necesario realizar un gran número de pruebas con el fin de obtener experimentalmente el valor al que se aproximan las frecuencias relativas del suceso en estudio. Por otra parte, de esta forma siempre obtenemos un valor aproximado, en lugar del valor exacto de la probabilidad.

Definición clásica de probabilidad. Regla de Laplace

La primera definición que se conoce del concepto de probabilidad fue enunciada por **Pierre Simon Laplace** (1749-1827), y dice así:

La probabilidad de un suceso S, que representaremos por p(S), es el cociente entre el número de casos favorables a dicho suceso y el número de casos posibles.

$$\mathbf{p(S)} = \frac{\textbf{Número de casos favorables al suceso S}}{\textbf{Número de casos posibles}}$$

A la hora de aplicar esta definición hay que tener en cuenta que ***<u>los sucesos elementales tienen que ser igualmente probables (equiprobables)</u>***.

Los casos favorables son los elementos que componen el suceso S, y los casos posibles son todos los resultados del experimento, es decir, todos los elementos del espacio muestral.

De esta manera, si una experiencia aleatoria consta de n sucesos elementales y es razonable suponer que ninguno de ellos tiene más probabilidad de salir que los demás, la probabilidad de cada uno de ellos es $\frac{1}{n}$. Y si un suceso consta de k sucesos elementales, su probabilidad será $\frac{k}{n}$.

Para aplicar la regla de Laplace sólo hace falta saber contar el número de elementos que tiene el suceso en cuestión (casos favorables) y el número de elementos que tiene el conjunto total E (casos posibles). Pero esta contabilidad, muchas veces trivial, en ocasiones es muy complicada.

Ejemplo: **Se considera un experimento consistente en lanzar un dado. Se pide la probabilidad de obtener:**

a) Número impar.

b) Número primo.

c) Múltiplo de 3.

d) Múltiplo de 5.

El espacio muestral del experimento es $E=\{1,2,3,4,5,6\}$, luego el número de casos posibles es 6.

a) $A =$ "Obtener impar" $=\{1,3,5\} \quad \Rightarrow \quad p(A)=\dfrac{3}{6}=0'5$

b) $B =$ "Número primo" $=\{2,3,5\} \quad \Rightarrow \quad p(B)=\dfrac{3}{6}=0'5$

c) $C =$ "Múltiplo de tres" $=\{3,6\} \quad \Rightarrow \quad p(C)=\dfrac{2}{6}=0'\widehat{3}$

d) $D =$ "Múltiplo de 5" $=\{5\} \quad \Rightarrow \quad p(D)=\dfrac{1}{6}=0'1\widehat{6}$

Ejemplo: **Se realiza un experimento consistente en lanzar dos monedas. Hallar las siguientes probabilidades:**

a) Obtener dos caras.

b) Obtener dos cruces.

c) Obtener una cara y una cruz.

d) Obtener al menos una cruz.

El espacio muestral es $E=\{CC,CX,XC,XX\}$, por tanto el número de casos posibles es 4.

a) $A =$ "Obtener dos caras" $=\{CC\} \quad \Rightarrow \quad p(A)=\dfrac{1}{4}=0'25$

b) $B =$ "Obtener dos cruces" $=\{XX\}= \quad \Rightarrow \quad p(B)=\dfrac{1}{4}=0'25$

c) $C =$ "Obtener una cara y una cruz" $=\{CX,XC\} \quad \Rightarrow \quad p(C)=\dfrac{2}{4}=0'5$

d) $D =$ "Obtener al menos una cruz" $=\{CX,XC,XX\} \quad \Rightarrow \quad p(D)=\dfrac{3}{4}=0'75$

Ejemplo: Se realiza el experimento consistente en la extracción de una carta de una baraja española. Se pide hallar las siguientes probabilidades:

a) Obtener un oro.

b) Obtener un as.

c) Obtener la sota de espadas.

El espacio muestral del experimento está formado por los 40 resultados posibles correspondientes a cada una de las cartas de la baraja.

a) $O = \text{"Obtener un oro"} = \{1,2,3,4,5,6,7,S,C,R\} \quad \Rightarrow \quad p(O) = \frac{10}{40} = 0'25$

b) $A = \text{"Obtener un as"} = \{1_E, 1_C, 1_B, 1_O\} \quad \Rightarrow \quad p(A) = \frac{4}{40} = 0'1$

c) $B = \text{"Obtener la sota de espadas"} = \{S_E\} \quad \Rightarrow \quad p(B) = \frac{1}{40} = 0'025$

Ejemplo: Consideremos el experimento consistente en lanzar dos dados y anotar la suma de los puntos de las caras superiores. Hallar la probabilidad de los siguientes sucesos:

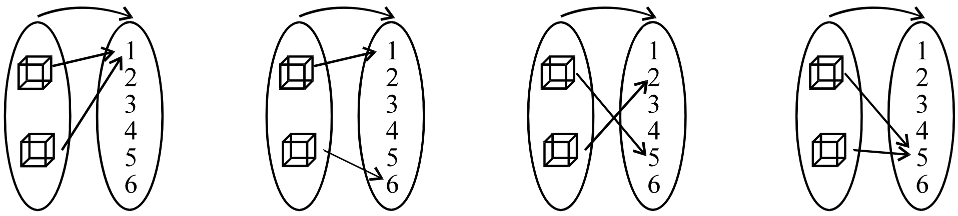
a) Obtener suma igual a 11. b) Obtener suma igual a 8. c) Obtener suma menor o igual a 4.

Los posibles resultados estarán formados por el conjunto producto como se indica en la siguiente tabla:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Otra forma de obtener todos los posibles resultados es utilizando la combinatoria.

Algunos de los posibles resultados los vemos en los siguientes diagramas de Venn:



(1, 1) (1, 6) (5, 2) (5, 5)

En total hay 36 que corresponden a $VR_{6,2} = 6^2 = 36$

El espacio muestral del experimento es:

$$E = \{(1,1),(1,2),(1,3),\ldots,(2,1),(2,2),\ldots,(3,1),(3,2),\ldots\ldots,(6,1),\ldots,(6,6)\}$$

a) A = "Suma igual a 11" = $\{(5,6),(6,5)\} \quad \Rightarrow \quad p(A) = \dfrac{2}{36} = 0'055$

b) B = "Suma igual a 8" = $\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\} \Rightarrow p(B) = \dfrac{5}{36} = 0'138$

c) C = "Obtener suma menor o igual a 4" = $\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1)\}$

$$\Rightarrow \quad p(C) = \frac{6}{36} = 0'1\widehat{6}$$

Ejemplo: En un sorteo ordinario de la LOTERÍA NACIONAL hay 12 series de 100.000 billetes y de cada billete se hacen 10 fracciones, los llamadas décimos. Se llama premio especial a un premio que se asigna a un sólo décimo del número que ha obtenido el primer premio. Una persona compra un décimo. Se desea saber:

a) Probabilidad de obtener el primer premio.
b) Probabilidad de obtener el premio especial.
c) Probabilidad de obtener reintegro (reintegros hay 3 y significa que tiene que coincidir la última cifra de nuestro boleto con uno de esos tres números).

a) $p = \dfrac{1}{100.000} = 0'00001$

b) $p = \dfrac{1}{100.000 \cdot 12 \cdot 10} = 8'\widehat{3} \cdot 10^{-8}$

c) $p = \dfrac{3}{10} = 0'3$, puesto que hay tres números favorables de entre 10 posibles.

Ejemplo: **Para hacer una apuesta en la LOTERÍA PRIMITIVA hay que marcar con cruces seis números del 1 al 49. Una persona realiza una apuesta; hallar:**

a) Probabilidad de acertar los seis números.

b) Probabilidad de acertar cinco números.

c) Probabilidad de acertar cuatro números.

d) Probabilidad de acertar tres números.

e) Probabilidad de que la combinación ganadora esté formada por tres números pares y tres impares.

f) Probabilidad de acertar cinco y el "complementario" (sin acertar los seis).

Son combinaciones porque no influye el orden en el que tachemos los números. Disponemos de 49 números que no se pueden repetir (del 1 al 49) y de ellos elegimos 6.

a) $$p = \frac{1}{C_{49,6}} = \frac{1}{\frac{49!}{6!\cdot 43!}} = 7'15\cdot 10^{-8}$$

b) $$p = \frac{C_{6,5}\cdot C_{43,1}}{C_{49,6}} = \frac{\frac{6!}{5!\cdot 1!}\cdot\frac{43!}{1!\cdot 42!}}{\frac{49!}{6!\cdot 43!}} = 1'844\cdot 10^{-5}$$

Es decir, de los 6 que tachamos acertaremos 5 y el otro será un número de entre los 43 que no hemos tachado.

c) $$p = \frac{C_{6,4}\cdot C_{43,2}}{C_{49,6}} = \frac{\frac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot\frac{43!}{2!\cdot 41!}}{\frac{49!}{6!\cdot 43!}} = 9'686\cdot 10^{-4}$$

El razonamiento es análogo al anterior.

d) $$p = \frac{C_{6,3}\cdot C_{43,3}}{C_{49,6}} = \frac{\frac{6!}{3!\cdot 3!}\cdot\frac{43!}{3!\cdot 40!}}{\frac{49!}{6!\cdot 43!}} = 0'0176$$

e) Tenemos 24 números pares y 25 impares, por lo tanto podemos formar $C_{24,3} = \frac{24!}{3!\cdot 21!} = 2024$ posibles ternas de números pares y $C_{25,3} = \frac{25!}{3!\cdot 22!} = 2300$ de números impares. Por tanto se pueden formar $C_{24,3}\cdot C_{25,3} = 4655200$ combinaciones de seis números que contienen tres números pares y tres impares. La probabilidad es por tanto:

$$P(3 \text{ pares y } 3 \text{ impares}) = \frac{C_{24,3}\cdot C_{25,3}}{C_{49,6}} = \frac{4655200}{13983816} = 0'3328$$

f) Al elegir el número complementario, el número de resultados posibles aumenta; ahora son $C_{49,6}\cdot 43$, puesto que después de elegir la combinación ganadora, se elige uno de los 43 números restantes. Entre ellos, favorables al suceso de que haya 5 y el complementario entre los 6 marcados en el boleto habrá $C_6^5 \cdot 1$ donde el 1 representa el complementario.

$$p(5 \text{ y el complementario}) = \frac{C_{6,5}}{C_{49,6}\cdot 43} = \frac{6}{13983816\cdot 43} = 9'978312338\cdot 10^{-9}$$

Ejemplo: En el sorteo de la ONCE cada serie consta de 100.000 números (desde el 00000 hasta el 99.999) que se venden a 100 pts cada uno, y cada número tiene 100 series. Una persona adquiere un cupón de la ONCE. Hallar:

a) Probabilidad de obtener el primer premio.

b) Probabilidad de obtener el cuponazo.

c) Probabilidad de que el número premiado en el sorteo sea capicúa.

d) Probabilidad de obtener el premio comprando diez capicúas.

e) Probabilidad de que el número premiado tenga o no cifras repetidas ¿Cómo influye eso en la probabilidad de conseguir el premio máximo comprando un sólo número?

f) Cuántos números existen formados por tres cifras pares y dos impares, dispuestas alternativamente?

En este problema hay que tener en cuenta que ***interviene el orden*** en el que estén colocados los números. Estos son 5 y se pueden repetir. Las cifras disponibles son diez, es decir del 0 al 9

a) $p(\text{primer premio}) = \frac{1}{100.000} = 10^{-5}$ b) $p(\text{cuponazo}) = \frac{1}{100.000\cdot 100} = 10^{-7}$

c) Un número de 5 cifras es capicúa si la última cifra coincide con la primera y la penúltima con la segunda. Por ejemplo, son capicúas 03430 y 51915.

La primera cifra puede elegirse entre cualquiera de las diez existentes, e igual sucede con la segunda y la tercera; la cuarta y la quinta sólo se pueden elegir iguales a la segunda y a la primera.

Existen pues 10·10·10·1·1=1000 capicúas entre los números de la ONCE. por tanto, la probabilidad de que el primer número recaiga en un capicúa es:

$$p(\text{capicúa}) = \frac{1000}{100.000} = 0'01$$

es decir, el 1%.

d) La probabilidad de conseguir el primer premio comprando diez capicúas es la misma que comprando cualquier otro número, es decir:

$$p(\text{diez capicúas}) = \frac{10}{100.000} = 10^{-4}$$

es decir, el 0'01%.

e) Imaginemos que utilizamos un diagrama en árbol para formar todos los números posibles de cinco cifras distintas: La primera cifra podrá elegirse de diez maneras, la segunda de nueve, la tercera de ocho, la cuarta de siete y la quinta de seis, es decir existen

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240 \quad \text{números con todas las cifras distintas}$$

$$100.000 - 30.240 = 69.760 \quad \text{números con al menos dos cifras repetidas}$$

El cálculo para las cifras distintas también lo podíamos haber hecho considerando que los números de cinco cifras distintas son variaciones ordinarias de diez cifras tomadas de cinco en cinco, es decir:

$$V_{10,5} = \frac{10!}{5!} = 10 \cdot 9 \cdot 83736 = 30240$$

La probabilidad de que el número premiado tenga todas las cifras distintas es:

$$p(\text{cifras distintas}) = \frac{30240}{100.000} = 0'3024$$

La probabilidad de que el número premiado tenga cifras repetidas es

$$p(\text{cifras repetidas}) = \frac{69760}{100.000} = 0'6976$$

No obstante, ello no significa que sea más probable conseguir el premio comprando un número de uno u otro tipo, pues en ambos casos la probabilidad de acertar sigue siendo 1/100.000.

f) El primer elemento puede elegirse de entre las cifras 0, 2, 4, 6 y 8, esto es, de 5 maneras posibles; el segundo elemento también puede elegirse de cinco maneras pues debe ser una de las cifras 1, 3, 5, 7 y 9; etc.

Siguiendo con el razonamiento anterior puede verse que cada una de las cinco cifras puede elegirse de cinco maneras, es decir, que existen 5·5·5·5·5=3125 números.

Ejemplo: Una persona rellena una columna de una QUINIELA asignando a cada partido de fútbol una victoria al equipo de casa, un empate o una derrota, mediante una cruz en cada uno de los catorce encuentros que contiene la quiniela. Una persona rellena una columna de un boleto; hallar:

a) Probabilidad de acertar 14 resultados.

b) Probabilidad de acertar 13 resultados.

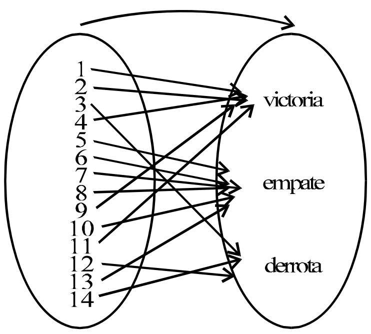
c) Probabilidad de acertar 12 resultados.

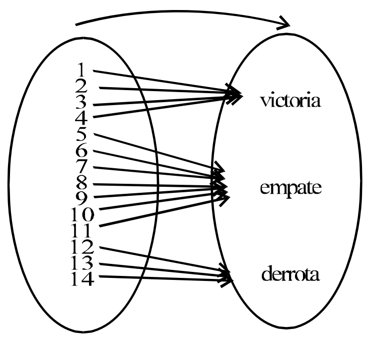
d) Probabilidad de acertar el quinielón (15 encuentros), teniendo presente que tenemos que haber acertado los catorce primeros para poder contabilizar el quinceavo.

e) Probabilidad de acertar 15 resultados

f) ¿Cuál es la probabilidad de que la quiniela ganadora esté formada exclusivamente por ocho unos, cuatro equis y tres doses?

Los casos posibles son variaciones con repetición porque influye el orden en el que se colocan en una columna las cruces y además éstas se pueden repetir. Cada quiniela de fútbol es una configuración de catorce signos. Algunas posibilidades para los apartados a) b) y c) las vemos reflejadas a través de los siguientes diagramas de Venn:





a) $p(14 \text{ aciertos}) = \dfrac{1}{VR_{3,14}} = \dfrac{1}{3^{14}} = 2'09 \cdot 10^{-7}$

b) $p(13 \text{ aciertos}) = \dfrac{2 \cdot C_{14,1}}{VR_{3,14}} = \dfrac{2 \cdot 14}{3^{14}} = 5'85 \cdot 10^{-6}$ porque acertar 13 partidos es lo mismo que fallar 1, y éste lo puedo fallar en cualquiera de los 14 partidos.

Los casos favorables son $2 \cdot C_{14,1}$ ya que el partido fallado tiene dos posibilidades. Esto quiere decir que, si el que hace los 14 aciertos es una equis, tenemos dos posibilidades para fallarlo, el 1 y el 2.

Lo mismo resulta si consideramos el problema de acertar los 13 en vez de fallar 1.

$$p(13 \text{ aciertos}) = \frac{2 \cdot C_{14,13}}{VR_{3,14}} = 5'85 \cdot 10^{-6}$$

c) $p(12 \text{ aciertos}) = \dfrac{4 \cdot C_{14,2}}{VR_{3,14}} = \dfrac{4 \cdot \dfrac{14!}{2! \cdot 12!}}{3^{14}} = 7'61 \cdot 10^{-5}$ porque acertar 12 partidos es lo mismo que fallar 2, y éstos los puedo fallar de $C_{14,2}$ maneras.

Los casos favorables son $4 \cdot C_{14,2}$ ya que los dos partidos no acertados pueden fallarse de 4 formas distintas. Si por ejemplo, en esos dos lugares ha correspondido un 1, en cada uno los posibles fallos habrá XX, X2, 2X o 22.

d) $p(15 / \text{acertar los 14 primeros}) = \dfrac{1}{3}$ ya que para el quinceavo tenemos tres posibilidades, es decir, 1, X y 2.

e) $p(15 \text{ aciertos}) = \dfrac{1}{VR_{3,15}} = \dfrac{1}{3^{15}} = 6'96 \cdot 10^{-8}$

f) Son quinielas de este tipo las siguientes:

11111111XXXX222, 1XX112211X211X1, etc.

Cada una de esta quinielas es una de las posibles permutaciones con repetición de ocho unos, cuatro equis y tres doses, luego existen en total:

$$PR_{15}^{8,4,3} = \frac{15!}{8! \cdot 4! \cdot 3!} = 225225$$

La probabilidad de que la quiniela ganadora sea de este tipo se obtendrá dividiendo este número por el número total de quinielas existentes.

$$p = \frac{PR_{15}^{8,4,3}}{VR_{3,15}} = \frac{225225}{14348907} = 0'01569 \cong 1'57\%$$

Probabilidades a priori y a posteriori

Se llaman **probabilidades a priori** a aquellas probabilidades que se pueden determinar de antemano, sin realizar ningún tipo de comprobación experimental, ***en base a consideraciones teóricas***. Un ejemplo puede ser el de la probabilidad de obtener un cinco en el lanzamiento de un dado perfecto.

Se llaman **probabilidades a posteriori** a las establecidas con posterioridad a la ocurrencia del fenómeno aleatorio, ***a través de la experiencia***. Son aquellas, en las que no hay más remedio que estimar la probabilidad estudiando el valor límite al que se acercan las frecuencias relativas al realizar un gran número de pruebas en análogas condiciones.

Es importante tener en cuenta, que las frecuencias relativas que se obtienen de un número reducido de pruebas no puede servir para realizar una estimación fiable de la probabilidad de un determinado suceso. Precisamente la garantía de que la definición de probabilidad a posteriori es buena la da la **Ley de los grandes números** *que podemos enunciar con nuevo lenguaje:*

Las probabilidades a posteriori se aproximan a las probabilidades a priori a medida que crece el número de experimentos observados.

Esta obtención de probabilidades es la más usada en la práctica. Ocurre que en la mayoría de los casos no es posible hacer un análisis teórico del problema. Por ejemplo: ¿Cuál es la probabilidad de que una bombilla, escogida al azar, de la producción de una fábrica luzca durante más de 2.000 horas? ¿Cuáles son las posibilidades de triunfo de un candidato a presidente en unas elecciones? ¿Cuál es la expectativa de éxito de un nuevo producto comercial?, etc.

Definición Axiomática de probabilidad

La definición clásica de Laplace tiene el inconveniente que para su aplicación hay que suponer que todos los sucesos elementales de un experimento aleatorio son igualmente probables. Pero, además, el gran número de paradojas y de dificultades surgidas a comienzo del presente siglo aconsejaron una revisión profunda del concepto de probabilidad utilizando las herramientas matemáticas más precisas del momento; esto es: la *teoría de conjuntos*, desarrollada principalmente por Émile Borel (1871-1956), y la potente *teoría de la medida* debida a Henry Lebesgue (1875-1941).

"Un axioma es un principio o afirmación matemática que se acepta sin demostración. Para que un conjunto de axiomas sea válido, es necesario que a partir de ellos no se llegue a afirmaciones contradictorias"

La construcción de una axiomática para el cálculo de probabilidades se debe al matemático ruso **Andrei Nicolaievich Kolmogorov** (1903-1987) *cuya idea fundamental es considerar la íntima relación que existe entre el concepto de frecuencia relativa de un suceso y su probabilidad, cuando el número de pruebas es muy grande*, como quedó vista en la ley de los grandes números enunciada por J. Bernouilli. *Basándose en este hecho, construye un sistema de axiomas (reglas del juego) inspirados en las propiedades de las frecuencias relativas*.

Sea E el espacio muestral de un experimento aleatorio. Se llama Probabilidad a una ley que asocia a cada suceso S, del espacio de los sucesos, un número real que llamamos probabilidad de S y representamos por $p(S)$, que cumple los siguientes axiomas:

Axioma 1 **La probabilidad de un suceso cualquiera del espacio de sucesos es positiva o nula.**

$$\boxed{0 \leq p(S) \leq 1}$$

Axioma 2 **La probabilidad del suceso seguro es igual a la unidad.**

$$\boxed{p(E) = 1}$$

Axioma 3 **La probabilidad de la unión de dos sucesos incompatibles es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de ellos.**

$$\boxed{\text{Si } \; A \cap B = \phi \quad \Rightarrow \quad p(A \cup B) = p(A) + p(B)}$$

El primer y tercer axioma hacen que la probabilidad sea una medida (estas propiedades las tienen toda medida: piensa en la longitud, la masa, el volumen....).

El segundo axioma es necesario para fijar la cantidad total de probabilidad. Sin embargo esta cantidad podría ser cualquier número positivo. El tomar $P(E)=1$ es por similitud con las frecuencias relativas, y significa que la "cantidad de probabilidad" de cada suceso se dará en **tantos por uno**. Hay ocasiones, sin embargo, en que las probabilidades se dan en %, lo cual equivale a asignar a E la probabilidad 100.

La responsabilidad del científico que deba asignar probabilidades a los sucesos que intervengan en problemas de aplicación es muy grande. Si sus previsiones resultan equivocadas su trabajo será inútil. En nuestro caso, todos los sucesos, de los cuales se demanda probabilidad, la tienen bien determinada. Nuestra única libertad, en algunos casos, se reduce a la elección del espacio muestral y del camino más adecuado para la rápida consecución de la probabilidad.

Propiedades

Las siguientes propiedades se deducen de los axiomas. Son, por lo tanto, teoremas.

Teorema 1 **La probabilidad del suceso $\overline{A}$, contrario del suceso A, es igual a 1 menos la probabilidad del suceso A.**

$$\boxed{p\left(\overline{A}\right)=1-p(A)}$$

<u>**Demostración**</u>

Como $A\cup\overline{A}=E$ y además A y $\overline{A}$ son incompatibles, resulta:

$$1=p(E)=p\left(A\cup\overline{A}\right)=p(A)+p\left(\overline{A}\right) \quad \text{de donde} \quad p\left(\overline{A}\right)=1-p(A)$$

En muchas ocasiones, el cálculo de la probabilidad del suceso contrario $\overline{A}$ es más fácil que el de A. En estos casos es conveniente calcular primero la probabilidad $p\left(\overline{A}\right)$ y a continuación aplicar la fórmula $p(A)=1-p\left(\overline{A}\right)$

Teorema 2 **La probabilidad del suceso imposible es cero.**

$$\boxed{p(\phi)=0}$$

Demostración

Como el suceso imposible es contrario del suceso seguro y $p(E)=1$, se tiene:

$$p(\phi)=p\left(\overline{E}\right)=1-p(E)=1-1=0$$

Teorema 3 **Si $A \subset B$ entonces $p(B)=p(A)+p(B-A)$**

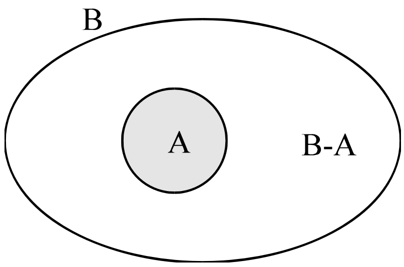
Demostración

En efecto, $B=A\cup(B-A)$ y $A\cap(B-A)=\varnothing$, y según el axioma 3:

$$p(B)=p[A\cup(B-A)]=p(A)+p(B-A)$$

Teorema 4 **Si $A \subset B$ entonces $p(A)\leq p(B)$**

Demostración



Si $A\subset B$, es claro que B puede expresarse como unión de los sucesos incompatibles A y $B-A$, luego:

$$p(B)=p\left(A\cup(B-A)\right)=p(A)+p(B-A)$$

De la expresión anterior tenemos $p(B-A)=p(B)-p(A)$, y como por el axioma 1, $p(B-A)\geq 0$ entonces $p(A)\leq p(B)$.

Teorema 5 **Si A_1, A_2, A_3............A_n son sucesos incompatibles dos a dos,**

$$\mathbf{p}(\mathbf{A_1}\cup\mathbf{A_2}\cup\mathbf{A_3}\cup\cdots\cdots\cdots\cup\mathbf{A_n})=\mathbf{p}(\mathbf{A_1})+\mathbf{p}(\mathbf{A_2})+\cdots\cdots\cdots\cdots+\mathbf{p}(\mathbf{A_n})$$

Demostración

$$p(A_1\cup A_2\cup\cdots\cdots\cdots\cdots\cup A_n)=p\left[A_1\cup\left(A_2\cup A_3\cup\cdots\cdots\cdots\cdots\cup A_n\right)\right]=$$

$$p(A_1)+p(A_2\cup A_3\cup\cdots\cdots\cdots\cdots\cup A_n)$$

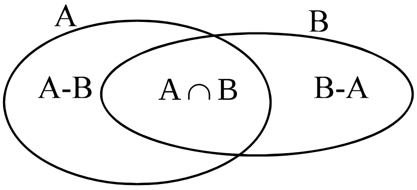
Repetimos el razonamiento con $A_2\cup A_3\cup\cdots\cdots\cup A_n$ para separar $p(A_2)$. Siguiendo con el razonamiento hasta el final resulta:

$$p(A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cdots\cdots\cdots\cup A_n)=p(A_1)+p(A_2)+\cdots\cdots\cdots\cdots+p(A_n)$$

Teorema 6 **Si A y B son dos sucesos compatibles de un mismo experimento aleatorio, se verifica:**

$$\mathbf{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$$

<u>Demostración</u>



Los sucesos $A - B$ y $A \cap B$, así como los sucesos $B - A$ y $A \cap B$ son incompatibles como se ve en el diagrama adjunto, por tanto se verifica:

$$\left.\begin{array}{l} A = (A - B) \cup (A \cap B) \\ (A - B) \cap (A \cap B) = \phi \end{array}\right\} \Rightarrow \quad p(A) = p(A - B) + p(A \cap B)$$

$$\left.\begin{array}{l} B = (B - A) \cup (A \cap B) \\ (B - A) \cap (A \cap B) = \phi \end{array}\right\} \Rightarrow \quad p(B) = p(B - A) + p(A \cap B)$$

Sumando miembro a miembro las dos igualdades tenemos:

$$p(A) + p(B) = p(A - B) + p(A \cap B) + p(B - A) + p(A \cap B)$$

Los tres primeros sumandos del segundo miembro dan $p(A \cup B)$. Así:

$p(A) + p(B) = p(A \cup B) + p(A \cap B)$ que es el teorema 6.

Esta igualdad puede extenderse a más de dos sucesos:

$$\mathbf{p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C)}$$

Para más de tres sucesos las fórmulas se complican excesivamente, y existen procedimientos alternativos de cálculo.

Teorema 7 **Si el espacio muestral E es finito y un suceso S es $S=\{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n\}$, entonces $p(S)=p(x_1)+p(x_2)+\cdots\cdots\cdots+p(x_n)$, es decir, la probabilidad de un suceso es igual a la suma de las probabilidades de los sucesos elementales que lo componen.**

Teorema 8 **Si $E=\{x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, x_n\}$ y $p(x_1)=p(x_2)=\cdots\cdots\cdots=p(x_n)$,**

entonces la probabilidad de un suceso S es

$$p(S)=\frac{\text{nº de elementos de S}}{n}$$

que es ley de Laplace.

<u>**Demostración**</u>

$$p(x_1)+p(x_2)+\cdots\cdots\cdots+p(x_n)=1 \qquad y \qquad p(x_1)=p(x_2)=\cdots\cdots=p(x_n)=\frac{1}{n}$$

Supongamos ahora que un suceso B se puede obtener como unión de h sucesos de los anteriormente considerados, es decir

$$B=x_1\cup x_2\cup\ldots\ldots\ldots\cup x_n$$

$$p(B)=p(x_1)+p(x_2)+\cdots\cdots\cdots+p(x_n)=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{n}=\frac{h}{n}$$

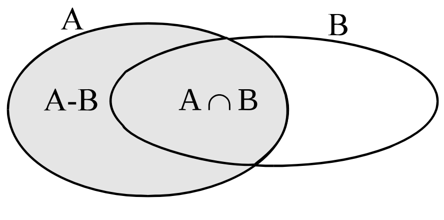
que es la regla de Laplace.

Teorema 9 **Si A y B son dos sucesos cualesquiera, se verifica:**

$$p(A-B)=p(A)-p(A\cap B)=p(A\cap\overline{B})$$

$$p(B-A)=p(B)-p(A\cap B)=p(B\cap\overline{A})$$

<u>**Demostración**</u>

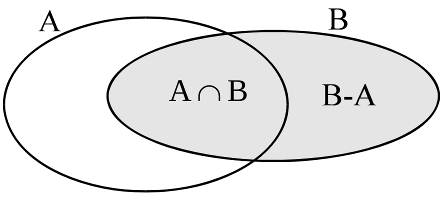


$$A=(A-B)\cup(A\cap B)$$

Como los sucesos $A-B$ y $A\cap B$ son incompatibles se verifica, por el axioma 3, la siguiente igualdad:

$$p(A)=p\left[(A-B)\cup(A\cap B)\right]=p(A-B)+p(A\cap B)\ \Rightarrow$$

$$p(A-B)=p(A)-p(A\cap B)=p\left(A\cap\overline{B}\right)$$



$$B=(B-A)\cup(A\cap B)$$

Como los sucesos $B-A$ y $A\cap B$ son incompatibles se verifica, por el axioma 3, la siguiente igualdad:

$$p(B)=p\left[(B-A)\cup(A\cap B)\right]=p(B-A)+p(A\cap B)\ \Rightarrow$$

$$p(B-A)=p(B)-p(A\cap B)=p\left(B\cap\overline{A}\right)$$

Teorema 10 **Si A y B son dos sucesos cualesquiera, se verifican las siguientes desigualdades:**

a) $\mathbf{p(A\cup B)\le p(A)+p(B)}$

b) $\mathbf{p(A\cap B)\le p(A)+p(B)}$

c) $\mathbf{p(A\cap B)\le p(A\cup B)}$

a) Sabemos que $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$, de lo que deducimos que $p(A\cup B)\le p(A)+p(B)$, ya que $p(A\cap B)\ge 0$ por el axioma 1.

b) De $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$ resulta

$p(A)+p(B)=p(A\cup B)-p(A\cap B)$, y como $p(A\cup B)\ge 0$, se deduce que

$p(A)+p(B)\ge p(A\cap B)$, o bien $p(A\cap B)\le p(A)+p(B)$.

c) Como $A\cap B\subset A$ se deduce del teorema 4 que $p(A\cap B)\le p(A)$. Como

$A\subset A\cup B$, se deduce del mismo teorema que $p(A)\le p(A\cup B)$ de donde

$p(A\cap B)\le p(A)\le p(A\cup B)$

Ejemplo: **Sean A y B dos sucesos tales que:** $\mathbf{p\left(A\cup B\right)=\frac{3}{4}}$**,** $\mathbf{p\left(\overline{B}\right)=\frac{2}{3}}$ **y** $\mathbf{p\left(A\cap B\right)=\frac{1}{4}}$**. Halla p(A), p(B) y** $\mathbf{p\left(\overline{A}\cap B\right)}$**.**

$$p(B)=1-p\left(\overline{B}\right)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

Sabemos que $p\left(A\cup B\right)=p(A)+p(B)+p(A\cap B)$, por tanto,

$$\frac{3}{4}=p(A)+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\quad\Rightarrow\quad p(A)=\frac{2}{3}=0'\widehat{6}$$

Como hemos demostrado antes tenemos:

$$p\left(\overline{A}\cap B\right)=p\left(B\right)-p\left(A\cap B\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}=0'08$$

Ejemplo: **Determina si son compatibles o incompatibles los sucesos A y B en los siguientes casos:**

a) $\mathbf{p(A)=\frac{1}{4}=0'25}$**,** $\mathbf{p(B)=\frac{1}{2}=0'5}$ **y** $\mathbf{p(A\cup B)=\frac{2}{3}}$

b) $\mathbf{p(A)=0}$ **y** $\mathbf{p(B)=\frac{1}{2}}$

a) $p(A\cap B)=p(A)+p(B)-p(A\cup B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=\frac{1}{12}\neq 0$, por tanto los sucesos son compatibles.

b) $p(A\cap B)=0$, por tanto los sucesos son incompatibles.

Ejemplo: **De los sucesos A y B se sabe que** $\mathbf{p(A)=\frac{2}{5}}$**,** $\mathbf{p(B)=\frac{1}{3}}$ **y** $\mathbf{p\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=\frac{1}{3}}$**. Halla** $\mathbf{p(A\cup B)}$ **y** $\mathbf{p(A\cap B)}$**.**

$$p(\overline{A}\cap\overline{B})=p\left(\overline{A\cup B}\right)=1-p(A\cup B)=\frac{1}{3}\quad\Rightarrow\quad p(A\cup B)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}=0'\widehat{6}$$

$$p(A\cap B)=p(A)+p(B)-p(A\cup B)=\frac{2}{5}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=\frac{1}{15}=0'06$$

Ejemplo: Hallar la probabilidad de que al lanzar tres monedas se obtenga al menos una cara.

En este caso es más fácil hallar la probabilidad del suceso contrario.

Sea A = "Obtener al menos una cara". Se tiene entonces que el suceso contrario será

$\overline{A}$ = "No obtener ninguna cara" = "Obtener tres cruces"

$p\left(\overline{A}\right)=\frac{1}{8}$; en consecuencia $p\left(A\right)=1-p\left(\overline{A}\right)=1-\frac{1}{8}=0'875$