Probabilidad condicionada

Ejemplo: **En una empresa con 200 empleados, 100 hombres y 100 mujeres, hay que seleccionar a varios de ellos, por sorteo, para formar un comité que supervise las decisiones de la directora. Ésta tiene cierto temor de que en el comité haya mayoría de hombres, por lo que, conociendo las características de sus empleados, propone que los miembros del comité sean no fumadores (van a pasar muchas horas deliberando en un despacho, argumenta). Teniendo en cuenta que los empleados se distribuyen según la tabla adjunta, ¿han mejorado las expectativas de la directora ante la posible composición del comité?**

	Hombres	**Mujeres**
Fuman	**70**	**10**
No Fuman	**30**	**90**

Para estudiar una tabla de este tipo, conviene añadirle algunos casilleros para sumas parciales, como hacemos a continuación.

	H	**M**	
F	70	10	**80**
No F	30	90	**120**
	100	**100**	**200**

Si la elección se hace sin condiciones, las probabilidades de hombre y mujer son:

$$p(H) = \frac{100}{200} = \frac{1}{2} \qquad p(M) = \frac{100}{200} = \frac{1}{2}$$

Sin embargo, si el sorteo se hace entre los no fumadores, las probabilidades son:

$$p(H) = \frac{30}{120} = \frac{1}{4} \qquad p(M) = \frac{90}{120} = \frac{3}{4}$$

Para no tener que aclarar, expresamente, que son probabilidades calculadas sobre el conjunto de no fumadores, se pone $p(H / \text{no } F)$ que se lee "probabilidad de H condicionada a no F" o bien "probabilidad de ser H supuesto que es no F". Las probabilidades de H y M condicionadas a no F son, pues

$$p(H / \text{no } F) = \frac{1}{4} \qquad\qquad p(M / \text{no } F) = \frac{3}{4}$$

Podemos comprobar que en este colectivo se dan estas otras probabilidades condicionadas:

$$p(H / F) = \frac{70}{80} = \frac{7}{8} \qquad p(M / F) = \frac{10}{80} = \frac{1}{8} \qquad p(F / H) = \frac{70}{100} = \frac{7}{10}$$

$$p(\text{no } F / H) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10} \qquad p(F / M) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} \qquad p(\text{no } F / M) = \frac{90}{100} = \frac{9}{10}$$

A partir de estos resultados se verifica la siguiente igualdad:

$$p(H / F) = \frac{70}{80} = \frac{p(H \cap F)}{p(F)} = \frac{\frac{70}{200}}{\frac{80}{200}} = \frac{7}{8}$$

Definición

A través de un proceso de abstracción, y teniendo en cuenta que , la frecuencia relativa de un suceso, tras una larga serie de pruebas, tiende a la probabilidad (ley de los grandes números), definimos el concepto de probabilidad condicionada del siguiente modo:

Sean A y B dos sucesos de un mismo experimento aleatorio, y $p(A) \neq 0$. Llamamos probabilidad del suceso B condicionado por A, y la denotamos por $p(B / A)$ al número definido por la fórmula:

$$\boxed{\mathbf{p(B / A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}}}$$

Sean A y B dos sucesos de un mismo experimento aleatorio, y $p(B) \neq 0$. Llamamos probabilidad del suceso A condicionado por B, y la denotamos por $p(A/B)$ al número definido por la fórmula:

$$\boxed{\mathbf{p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}}}$$

<u>Demostración</u>

Probaremos que se cumplen los axiomas de Kolmogoroff.

1. Puesto que $A\cap B\subset A$ se tiene:

$$0\le p(A\cap B)\le p(A) \qquad \text{y} \qquad 0\le p(B)\le 1$$

2. $p(E/A)=\dfrac{p(A\cap E)}{p(A)}=\dfrac{p(A)}{p(A)}=1$

3. Sean B y C dos sucesos incompatibles. También lo son $B\cap A$ y $C\cap A$

$$p(B\cup C/A)=\frac{p[(B\cup C)\cap A]}{p(A)}=\frac{p[(B\cap A)\cup(C\cap A)]}{p(A)}=\frac{p(B\cap A)+p(C\cap A)}{p(A)}=$$

$$\frac{p(B\cap A)}{p(A)}+\frac{p(C\cap A)}{p(A)}=p(B/A)+p(C/A)$$

La interpretación de $p(B/A)$ es la siguiente:

$$\boxed{\mathbf{p(B/A)=\frac{n^o\text{ de casos favorables a B entre los que son también a A}}{n^o\text{ de casos favorables a A}}}}$$

La probabilidad de B condicionada a A también se dice probabilidad de que ocurra el suceso B supuesto que haya ocurrido A.

Ejemplo: **Se lanzan dos dados. Si la suma de los puntos es 7, hallar la probabilidad de que en alguno de los dados salga 3.**

Sea A el suceso "La sumas de los puntos es 7" y sea B el suceso "En alguno de los dados sale un 3".

$$A=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\} \qquad p(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

$$B=\{(1,3),(2,3),(3,3),(4,3),(5,3),(6,3),(3,1),(3,2),(3,4),(3,5),(3,6)\} \quad p(B)=\frac{11}{36}$$

Tenemos que calcular $p(B/A)$.

$$A\cap B=\{(3,4),(4,3)\} \qquad p(A\cap B)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$$

$$p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}=\frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{6}}=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$$

Ejemplo: **En un colegio hay 60 alumnos de COU. De ellos 40 estudian Inglés, 24 Francés y 12 los dos idiomas. Se elige al azar un alumno del curso, y si A y B son los sucesos:**

A = "el alumno elegido estudia inglés"
B = "el alumno elegido estudia francés"

Determinar la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) $\mathbf{p(A)}$ **b)** $\mathbf{p(B)}$ **c)** $\mathbf{p(A\cap B)}$ **d)** $\mathbf{p(A\cup B)}$ **e)** $\mathbf{p(B/A)}$

f) $\mathbf{p(A/B)}$ **g)** $\mathbf{p(B/A\cup B)}$

a) $p(A)=\frac{40}{60}=0'\widehat{6}$ b) $p(B)=\frac{24}{60}=0'4$ c) $p(A\cap B)=\frac{12}{60}=0'2$

d) $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=0'\widehat{6}+0'4-0'2=0'86$

e) $p(B/A)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}=\dfrac{0'2}{0'\widehat{6}}=0'3$ f) $p(A/B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}=\dfrac{0'2}{0'4}=0'5$

g) $p\left(B / A \cup B\right) = \dfrac{p\left(B \cap \left(A \cup B\right)\right)}{p\left(A \cup B\right)}$

Como $B \cap \left(A \cup B\right) = B$ tenemos $p\left(B / \left(A \cup B\right)\right) = \dfrac{p\left(B\right)}{p\left(A \cup B\right)} = \dfrac{0'4}{0'86} = 0'46$

Sucesos Independientes

Dos sucesos A y B de un experimento aleatorio y de probabilidad no nula, se dice que son independientes si se verifica cualquiera de las siguientes igualdades:

$$\mathbf{p\left(A / B\right) = p(A)} \qquad \textbf{o} \qquad \mathbf{p\left(B / A\right) = p(B)}$$

o también

$$\boxed{\mathbf{p\left(A \cap B\right) = p(A) \cdot p(B)}}$$

Tres sucesos A, B y C de un experimento aleatorio y de probabilidad no nula, se dice que son independientes si son independientes dos cualesquiera de ellos y, además, se cumple

$$\boxed{\mathbf{p\left(A \cap B \cap C\right) = P(A) \cdot p(B) \cdot p(C)}}$$

Se dice que dos o más pruebas (o sucesos) son independientes cuando el resultado de cada una de ellas no influye en las probabilidades de los distintos resultados de las otras.

Cuentan de un matemático Norteamericano que, estudiando los resultados sucesivos de la ruleta de un casino, vio que un resultado no era independiente del anterior. Y ello no ocurría porque hubiese trampa en la ruleta (es decir, que la idea de la igualdad de probabilidad se daba) sino porque, aunque jugando honradamente, al dar siempre el mismo impulso y tirar la bola en el mismo momento (cosa que por la rapidez de las jugadas era muy corriente), un resultado determinaba con bastante aproximación el siguiente. La independencia no se daba. Para verlo, el citado señor tuvo que examinar largas listas de resultados, pero le permitió ganar mucho dinero.

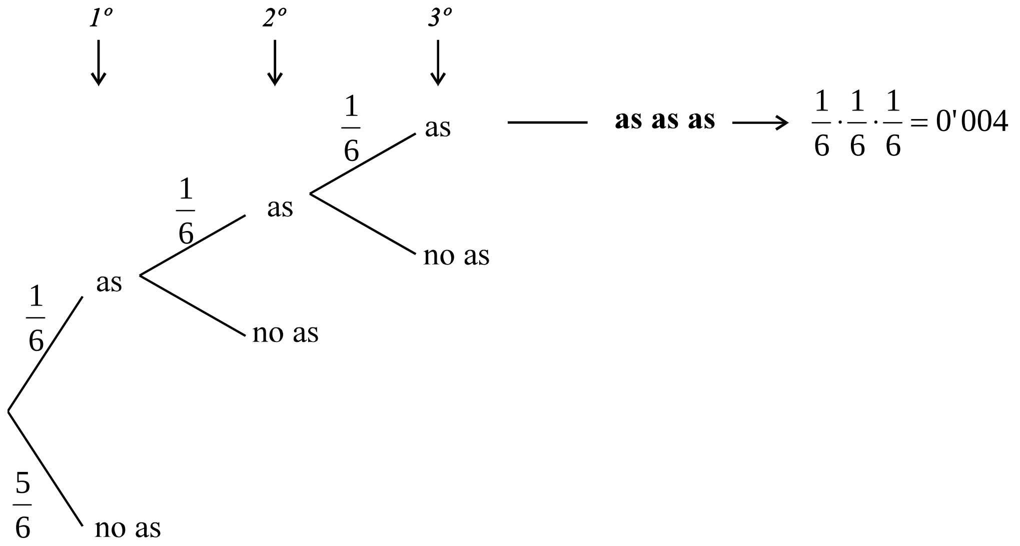
Con esto intentamos ver la importancia de la independencia como punto central de la teoría, superior incluso a la idea de equiprobabilidad.

En el caso de repetir varias veces una prueba, para que la independencia se dé, deberemos asegurarnos de que las circunstancias de azar en que realiza cada vez la prueba son las mismas. Si no, puede darse el caso de que "aparentemente" haya independencia pero tal vez un resultado determina el siguiente.

Ejemplo: Calcular la probabilidad de obtener tres ases al lanzar tres dados.

Si resolvemos directamente el problema, descomponiéndolo en los tres lanzamientos tenemos:

La tres pruebas son independientes, pues no influye el resultado de un dado en lo que pueda salir en los otros.



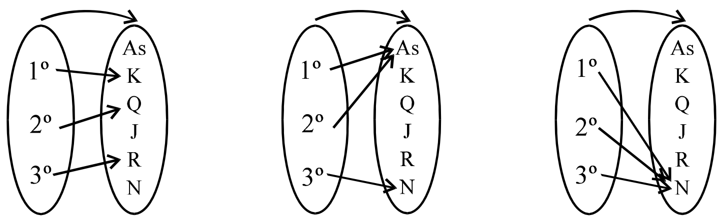
$$p(3\text{ ases}) = p(\text{As en el }1^o)\cdot p(\text{As en el }2^o)\cdot p(\text{As en el }3^o) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = 0'004$$

Si resolvemos directamente el problema, sin descomponerlo en los tres lanzamientos tenemos:

Casos favorables sólo 1, as en cada dado.

Casos posibles

$VR_{6,3} = 6^3 = 216$



K,Q,R As,As,N N,N,N

$$p = \frac{1}{VR_{6,3}} = 0'004$$

Ejemplo: Probabilidad de que al tirar un dado salga par y múltiplo de 3.

Los sucesos son independientes.

$$p(\text{par}) = \frac{3}{6} = 0'5 \qquad p(\dot{3}) = \frac{2}{6} = 0'\widehat{3}$$

$$p(\text{par y } \dot{3}) = 0'5 \cdot 0'\widehat{3} = 0'16$$

Sucesos Dependientes

Dos sucesos A y B de un experimento aleatorio y de probabilidad no nula, se dice que son dependientes si se verifica cualquiera de las siguientes igualdades:

$$\mathbf{p(A/B) \neq p(A)} \qquad \mathbf{o} \qquad \mathbf{p(B/A) \neq p(B)}$$

o también

$$\boxed{\mathbf{p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A)}}$$

Para el caso de tres sucesos A, B y C dependientes se tiene:

$$\boxed{\mathbf{p(A \cap B \cap C) = p(A) \cdot p(B/A) \cdot p(C/A \cap B)}}$$

ya que:

$$p(A \cap B \cap C) = p[(A \cap B) \cap C] = p(A \cap B) \cdot p(C/A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A) \cdot p(C/A \cap B)$$

En los sucesos dependientes, la realización del primer suceso condiciona la probabilidad en el segundo.

Para el caso de n-sucesos, esta proposición se conoce con el nombre de Teorema de la probabilidad compuesta.

Tablas de contingencia

En las tablas figuran todas las posibilidades o contingencias de los sucesos compuestos que pueden darse, esto es, A, B, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$ y $\overline{A} \cap \overline{B}$.

	A	$\overline{\mathbf{A}}$	**Totales**
B	$p(A \cap B)$	$p(\overline{A} \cap B)$	$\mathbf{p(B)}$
$\overline{\mathbf{B}}$	$p(A \cap \overline{B})$	$p(\overline{A} \cap \overline{B})$	$\mathbf{p(\overline{B})}$
Totales	$\mathbf{p(A)}$	$\mathbf{p(\overline{A})}$	**1**

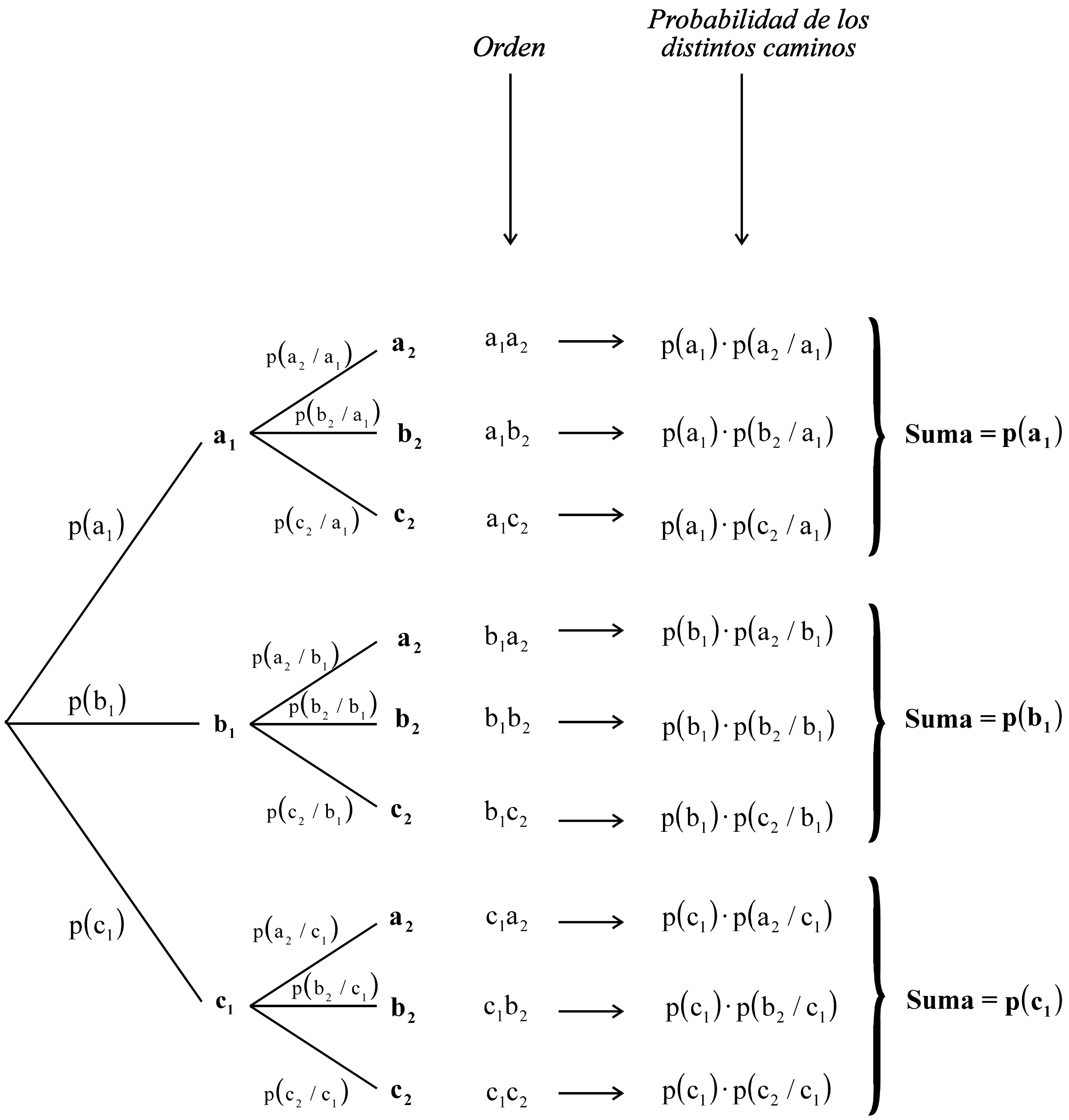
Diagramas en árbol

La mayoría de los experimentos aleatorios interesantes exigen la realización consecutiva de otros: Se lanzan una moneda y un dado, se saca una bola de una urna y a continuación otra, etc.. Frecuentemente, un experimento consiste en realizar repetidamente otro. Así ocurre cuando se lanza una moneda o un dado un cierto número de veces.

Los diagramas en árbol se utilizan en casos en que se encadenan experiencias cada una de las cuales conduce a un número finito de posibles resultados.

Un diagrama en árbol permite organizar toda la asignación de probabilidad en el espacio muestral producto de acuerdo con los siguientes criterios:

- **El extremo de cada rama representa un resultado.**
- **Sobre cada rama se escribe la probabilidad condicionada por el resultado del que parte.**
- **Cada resultado se coloca como origen de ramas que conducen a cada uno de los resultados de la siguiente experiencia.**
- **Dada la incompatibilidad de estas ramas, la probabilidad de cada uno de los sucesos finales que interesan como resultado del proceso se calculará sumando las probabilidades de los "caminos" que a él conducen.**
- **La probabilidad de cada "camino" se calculará por la fórmula del producto, es decir, como producto de las probabilidades que llevan a él, teniendo en cuenta que se trata de probabilidades condicionadas.**



$$\boxed{\mathbf{Total = p(a_1) + p(b_1) + p(c_1) = 1}}$$

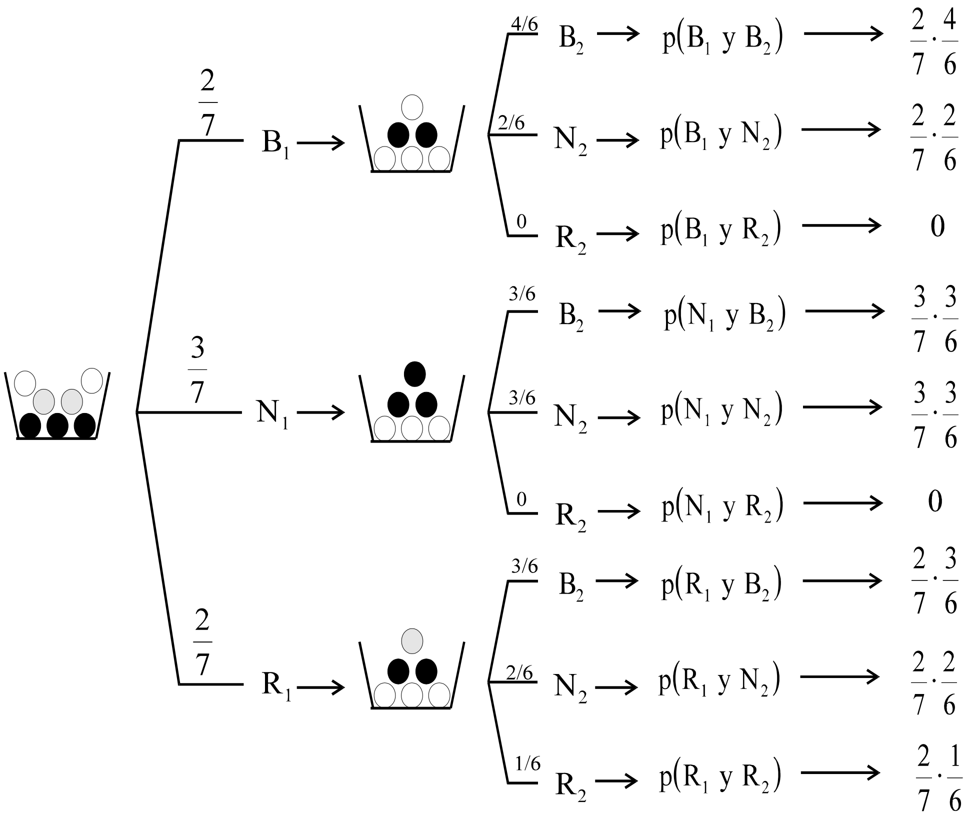
Ejemplo: **Sean dos urnas A y B. La urna A contiene dentro 3 bolas negras, 2 rojas y 2 blancas mientras que la urna B contiene 3 bolas blancas y 2 negras, como se indica en la figura (las bolas son indistinguibles al tacto).**

A **B**

Se saca una bola de A, se observa el color y se introduce en B. Por último sacamos una bola de B. Hacer el diagrama en árbol que refleja esta situación.

Hay dos experimentos: sacar una bola de cada urna. El resultado del primer experimento determina la probabilidad asignada en el segundo.

El esquema en árbol es:



Teorema de la probabilidad compuesta

Sean $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots\ldots\ldots A_n$ n-sucesos dependientes de un mismo experimento aleatorio y tales que la probabilidad de la realización simultánea de los n-sucesos no es nula. Se verifica entonces:

$$\mathbf{p(A_1 \cap A_2 \cap \ldots\ldots \cap A_n) = p(A_1) \cdot p(A_2 / A_1) \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot p(A_n / A_1 \cap A_2 \cap \ldots\ldots\ldots \cap A_{n-1})}$$

Ejemplo: **Calcular la probabilidad de obtener 3 ases de una baraja de 40 cartas si extraemos 3 de ellas.**

<u>Si resolvemos directamente el problema, descomponiéndolo en las tres extracciones tenemos:</u>

- Aquí sacamos las cartas pero no las devolvemos al montón, por tanto al variar la composición de éste varían las probabilidades de los distintos sucesos. Las pruebas son dependientes.

$$p(3\text{ ases}) = p(\text{as en la } 1^a) \cdot p(\text{as en la } 2^a / \text{as en la } 1^a) \cdot p(\text{as en la } 3^a / \text{as en la } 1^a \text{ y en la } 2^a)$$

$$p(\text{as en la } 1^a) = \frac{4}{40}$$

Si en la 1^a sale as, quedan 3 ases en 39 cartas.

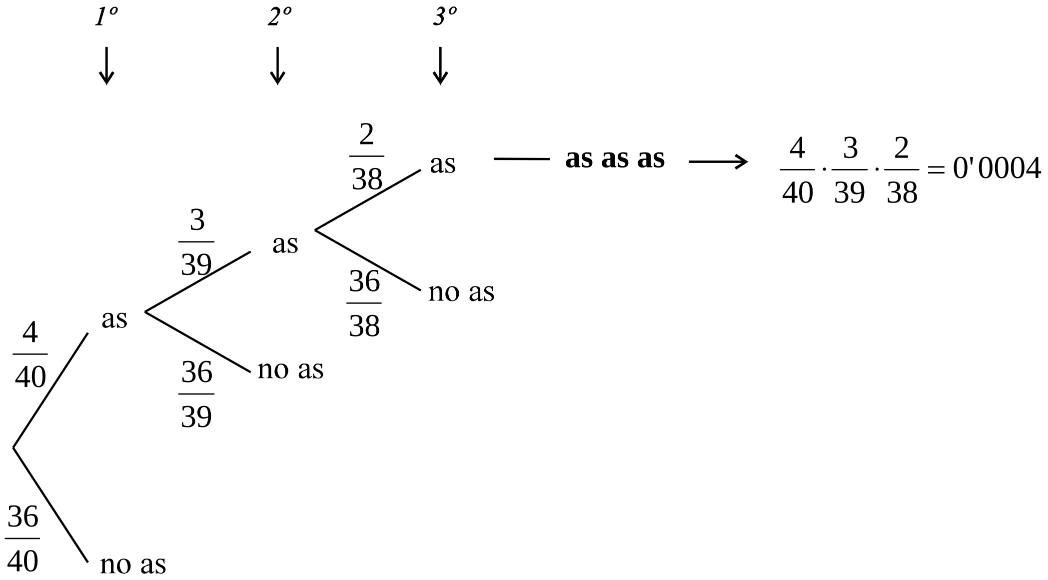
$$p(\text{as en la } 2^a / \text{as en la } 1^a) = \frac{3}{39}$$

Si en la 1^a sale as y en la 2^a sale as, quedan 2 ases en 38 cartas

$$p(\text{as en la } 3^a / \text{as en la } 1^a \text{ y en la } 2^a) = \frac{2}{38}$$

$$p(3\text{ ases}) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} = 0'0004$$

- A través de un diagrama en árbol tenemos:



<u>Si resolvemos directamente el problema, sin descomponerlo en las tres extracciones tenemos:</u>

Casos favorables: Hay 4 cartas y extraemos 3 $\longrightarrow$ $C_{4,3}=4$

Casos posibles: Hay 40 cartas y extraemos 3 $\longrightarrow$ $C_{40,3}=\dfrac{40\cdot 39\cdot 38}{3\cdot 2}$

por tanto:

$$p(3\text{ ases})=\frac{C_{4,3}}{C_{40,3}}=\frac{4}{\dfrac{40\cdot 39\cdot 38}{3\cdot 2}}=0'004$$

Ejemplo: **Se lanzan 3 monedas sucesivamente. Si llamamos A al suceso "obtener cruz en el primer lanzamiento", B al suceso "obtener cara" y C al suceso "obtener dos cruces".**

a) ¿Son A y B incompatibles?

b) ¿Son independientes?

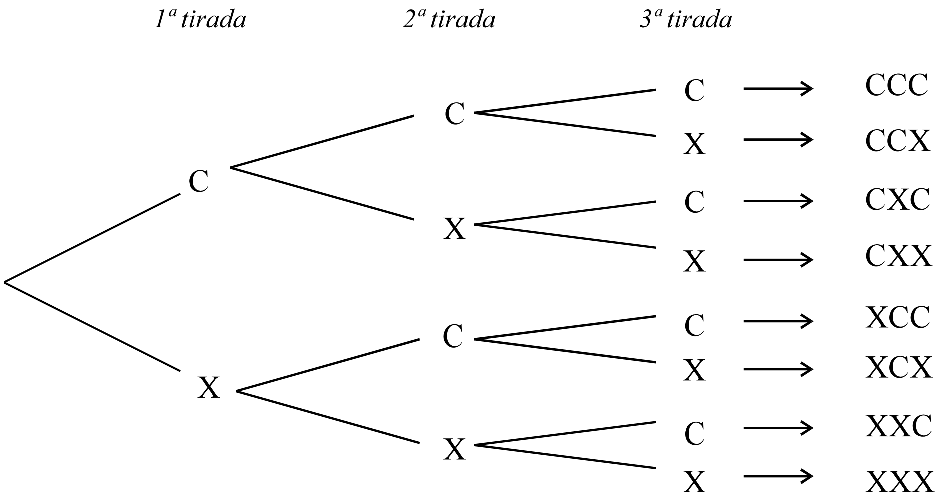
c) ¿Son A y C incompatibles?

d) ¿Son independientes?

e) Hallar la probabilidad de la unión de A con B y C

f) Hallar la probabilidad de la intersección de A, B y C

Primero construimos el espacio muestral a través de un diagrama en árbol que es el camino más cómodo.



El espacio muestral es :

$$E = \{(C,C,C),(C,C,X),(C,X,C),(C,X,X),(X,C,C),(X,C,X),(X,X,C),(X,X,X)\}$$

a) Dos suceso A y B son incompatibles si $A \cap B = \phi$

$$A = \{(X,C,C),(X,C,X),(X,X,C),(X,X,X)\}$$

$$B = \{(C,C,C),(C,C,X),(C,X,C),(C,X,X),(X,C,C),(X,C,X),(X,X,C)\}$$

$$A \cap B = \{(X,C,C),(X,C,X),(X,X,C)\} \neq \phi$$

por tanto A y B son compatibles.

b) Dos sucesos A y B son independientes si $p(A/B) = p(A)$

$$p(A) = \frac{4}{8} = 0'5 \qquad p(A \cap B) = \frac{3}{8} = 0'375 \qquad p(B) = \frac{7}{8} = 0'875$$

$$p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{0'375}{0'875}=0'428$$

Como $p(A/B)\neq p(A) \quad \Rightarrow \quad$ A y B son dependientes

c) $C=\{(C,X,X),(X,C,X),(X,X,C)\}$

$$A\cap C=\{(X,C,X),(X,X,C)\}\neq \phi$$

Por tanto A y C son compatibles.

d) $p(A/C)=\dfrac{p(A\cap C)}{p(C)}$

$p(A\cap C)=\dfrac{2}{8}=0'25 \qquad p(C)=\dfrac{3}{8}=0'375$

$$p(A/C)=\frac{0'25}{0'375}=0'\widehat{6}$$

Como $p(A/C)\neq p(A) \quad \Rightarrow \quad$ A y C son dependientes

e) Como $A\cup B\cup C=E \quad \Rightarrow \quad p(A\cup B\cup C)=p(E)=1$

f) Como $A\cap B\cap C=\{(X,C,X),(X,X,C)\} \quad \Rightarrow \quad p(A\cap B\cap C)=\dfrac{2}{8}$

Ejemplo: Lanzamos dos dados y anotamos los números que salen.

Sea A = {la suma es 8} y B = {los números difieren en 2}

Calcular:

a) p(A y B) b) p(A y no B) c) p(no A y B) d) p(no A y no B)

e) p(A / B) f) p(A / no B) g) p(no A / B) h) p(A o B)

$A=\{(6,2),(5,3),(4,4),(3,5),(2,6)\}$

$$B=\{(6,4),(5,3),(4,2),(3,1),(1,3),(2,4),(3,5),(4,6)\} \qquad A\cap B=\{(5,3),(3,5)\}$$

1^{3e} método (tabla de contingencia)

	A	$\overline{A}$	
B	$\frac{2}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{8}{36}$
$\overline{B}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{28}{36}$
	$\frac{5}{36}$	$\frac{31}{36}$	**1**

$$p(A)=\frac{5}{36} \qquad p(B)=\frac{8}{36}$$

$$p(\overline{B})=1-p(B)=\frac{28}{36}$$

$$p(\overline{A})=1-p(A)=\frac{31}{36}$$

En la tabla se obtienen los distintos resultados de las probabilidades de las intersecciones de los distintos sucesos.

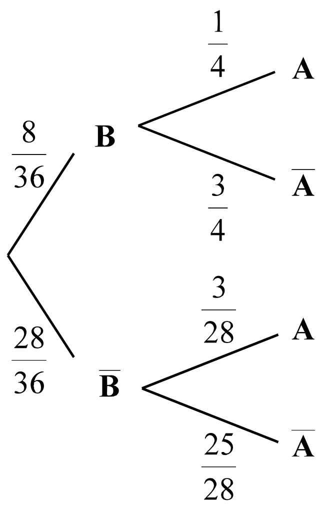
a) $p(A\cap B)=\frac{2}{36}$ b) $p(A\cap\overline{B})=\frac{3}{36}$ c) $p(\overline{A}\cap B)=\frac{6}{36}$

d) $p(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{25}{36}$ e) $p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{\frac{2}{36}}{\frac{8}{36}}=\frac{1}{4}$

f) $p(A/\overline{B})=\frac{p(A\cap\overline{B})}{p(\overline{B})}=\frac{\frac{3}{36}}{\frac{28}{36}}=\frac{3}{28}$ g) $p(\overline{A}/B)=\frac{p(\overline{A}\cap B)}{p(B)}=\frac{\frac{6}{36}}{\frac{8}{36}}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

h) $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=\frac{5}{36}+\frac{8}{36}-\frac{2}{36}=\frac{11}{36}$

2º método (diagrama en árbol)



a) $p(A\cap B)=\frac{8}{36}\cdot\frac{1}{4}=\frac{2}{36}$

b) $p(A\cap\overline{B})=\frac{28}{36}\cdot\frac{3}{28}=\frac{3}{36}$

c) $p(\overline{A}\cap B)=\frac{8}{36}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{6}$

d) $p(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{28}{36}\cdot\frac{25}{28}=\frac{25}{36}$

e) $p(A/B)=\dfrac{1}{4}$ f) $p(A/\overline{B})=\dfrac{3}{28}$ g) $p(\overline{A}/B)=\dfrac{3}{4}$

h) $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=\dfrac{5}{36}+\dfrac{8}{36}-\dfrac{2}{36}=\dfrac{11}{36}$

Ejemplo: En el proceso de fabricación de circuitos impresos para radio transistores se obtiene según demuestra la experiencia de cierto fabricante un 5% de circuitos defectuosos. Un dispositivo para comprobar los defectuosos detecta el 90% de ellos, pero también califica como defectuosos el 2% de los correctos. ¿Cuál es la probabilidad de que sea correcto un circuito al que el dispositivo califica como defectuoso? ¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuoso un circuito calificado de correcto?

Sea $A=\{\text{ser correcto}\}$ $\overline{A}=\{\text{ser defectuoso}\}$

$B=\{\text{la máquina lo califica como correcto}\}$

$\overline{B}=\{\text{la máquina lo califica como incorrecto}\}$

El problema nos pide calcular $p(A/\overline{B})$ y $p(\overline{A}/B)$ y sabemos que:

$$p(A/\overline{B})=\frac{p(A\cap\overline{B})}{p(\overline{B})} \quad \text{y} \quad p(\overline{A}/B)=\frac{p(\overline{A}\cap B)}{p(B)}$$

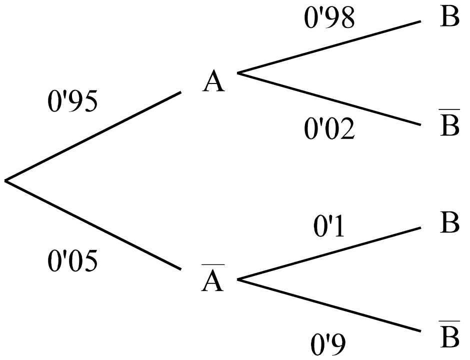
Conocemos los siguientes datos:

$$p(A)=0'95 \qquad p(\overline{B}/\overline{A})=0'9 \qquad p(\overline{A})=0'05$$

$$p(\overline{B}/A)=0'02 \qquad p(B/\overline{A})=0'1 \qquad p(B/A)=0'98$$

y no conocemos $p(B)$, $p(\overline{B})$, $p(A\cap\overline{B})$ y $p(B\cap\overline{A})$.

El diagrama en árbol y la tabla de contingencia correspondientes son:



	A	$\overline{A}$	
B	$0'95\cdot 0'98$	$0'05\cdot 0'1$	$0'936$
$\overline{B}$	$0'95\cdot 0'02$	$0'05\cdot 0'9$	$0'064$
	$0'95$	$0'05$	**1**

ya que

$$p\left(\overline{B}/A\right)=\frac{p\left(A\cap\overline{B}\right)}{p(A)} \qquad 0'02=\frac{p\left(A\cap\overline{B}\right)}{0'95} \quad\Rightarrow\quad p\left(A\cap\overline{B}\right)=0'02\cdot 0'95=0'019$$

$$p\left(\overline{B}/\overline{A}\right)=\frac{p\left(\overline{B}\cap\overline{A}\right)}{p\left(\overline{A}\right)} \qquad 0'90=\frac{p\left(\overline{B}\cap\overline{A}\right)}{0'05} \quad\Rightarrow\quad p\left(\overline{B}\cap\overline{A}\right)=0'90\cdot 0'05=0'045$$

Por tanto concluimos que:

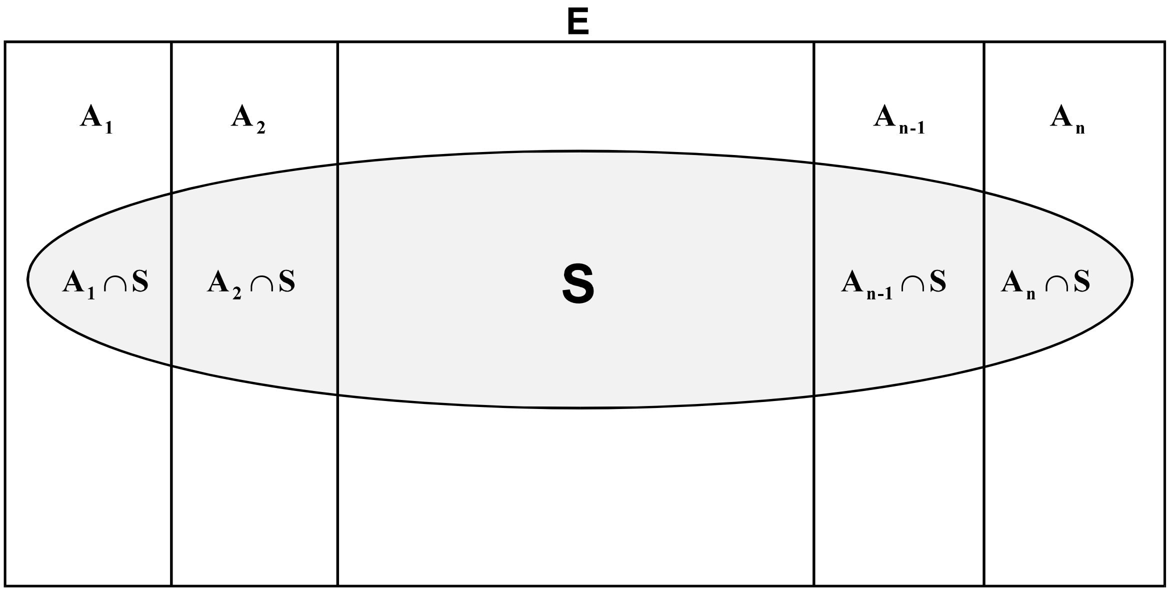
$$p\left(A/\overline{B}\right)=\frac{p\left(A\cap\overline{B}\right)}{p\left(\overline{B}\right)}=\frac{0'019}{0'064}=0'296 \quad \text{y} \quad p\left(\overline{A}/B\right)=\frac{p\left(\overline{A}\cap B\right)}{p(B)}=\frac{0'005}{0'936}=0'0053$$

Teorema de la Probabilidad Total

Sea un conjunto de n sucesos $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ **incompatibles dos a dos** y tales que se verifica $A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_n = E$, es decir, la unión de todos ellos es el espacio probabilístico total E **(sistema completo de sucesos)**. Para cualquier otro suceso $S \subset E$ se verifica:

$$\mathbf{p(S) = p(A_1) \cdot p(S/A_1) + p(A_2) \cdot p(S/A_2) + \cdots\cdots + p(A_n) \cdot p(S/A_n) = \sum_{i=1}^{i=n} p(A_i) \cdot p(S/A_i)}$$

__Demostración__



Descomponemos S en conjuntos disjuntos:

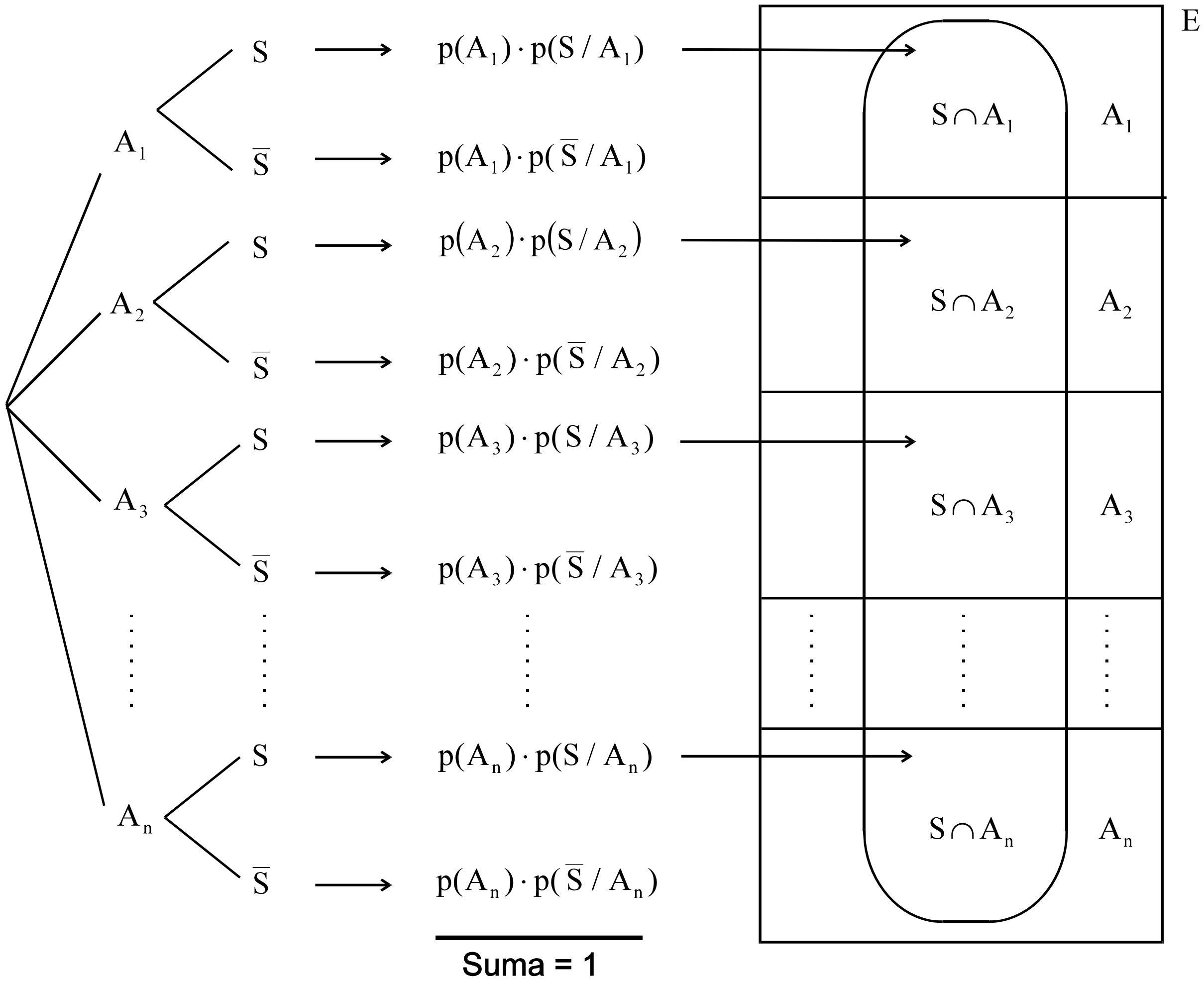
$$S = S \cap E = S \cap (A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \cup A_n) = (S \cap A_1) \cup (S \cap A_2) \cup \ldots\ldots\ldots\ldots \cup (S \cap A_n)$$

Como en el último miembro hay una unión de sucesos incompatibles, se puede aplicar el teorema de las probabilidades totales para sucesos incompatibles.

$$p(S) = p(S \cap A_1) + p(S \cap A_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots + p(S \cap A_n)$$

Recordando por la definición de probabilidad condicionada que $p(S\cap A_k)=p(A_k)\cdot p(S/A_k)$, se obtiene finalmente la expresión buscada.

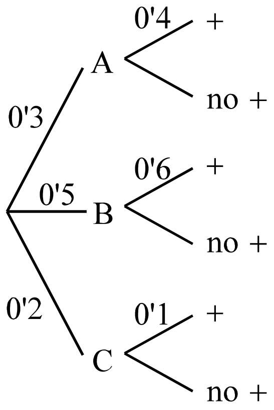
$$p(S)=p(A_1)\cdot p(S/A_1)+p(A_2)\cdot p(S/A_2)+\cdots\cdots\cdots+p(A_n)\cdot p(S/A_n)=\sum_{i=1}^{i=n}p(A_i)\cdot p(S/A_i)$$



Ejemplo: **Un ratón huye de un gato. Puede entrar por cada uno de los callejones A, B ó C. En cada uno de ellos el gato puede alcanzarlo o no. Se dan las siguientes probabilidades: $p(A) = 0'3$, $p(B) = 0'5$, $p(C) = 0'2$**

$p(\text{lo cace habiendo entrado en A}) = p(+/A) = 0'4$, $p(+/B) = 0'6$, $p(+/C) = 0'1$

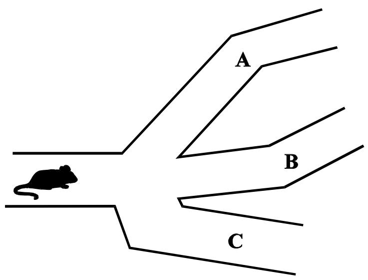
Calcular la probabilidad de que el gato cace al ratón.



$$\longrightarrow \quad p(A \cap +) = p(A) \cdot p(+/A) = 0'3 \cdot 0'4 = 0'12$$

$$\longrightarrow \quad p(B \cap +) = p(B) \cdot p(+/B) = 0'5 \cdot 0'6 = 0'30$$

$$\longrightarrow \quad p(C \cap +) = p(C) \cdot p(+/C) = 0'2 \cdot 0'1 = 0'02$$



Si se observa el diagrama en árbol, tenemos de manera natural la fórmula de la probabilidad total sin más que sumar las probabilidades de las ramas correspondientes:

$$p(+) = p(A \cap +) + p(B \cap +) + p(C \cap +)$$

$$p(+) = p(A) \cdot p(+/A) + p(B) \cdot p(+/B) + p(C) \cdot p(+/C) = 0'12 + 0'30 + 0'02 = 0'44$$

Ejemplo: **Tenemos dos urnas U_1 y U_2, con bolas blancas y bolas negras, y las siguientes composiciones: $U_1 = \{4B, 5N\}, U_2 = \{6B, 4N\}$. De la urna U_1 se extrae una bola y se coloca, sin mirarla en U_2. A continuación, se saca una bola de U_2.**

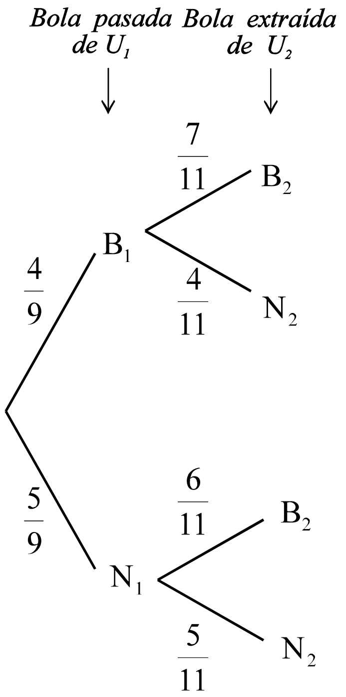
a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?
b) Imaginemos que tenemos en las urnas la composición inicial. De la urna U_1 se extraen ahora dos bolas y se colocan, sin mirarlas en U_2. A continuación, se saca una bola de U_2. ¿Cuál es la probabilidad de que sea negra?

a) Evidentemente, la probabilidad de sacar una bola blanca después del "pase de bola" depende de lo que haya en U_2 y ello, a su vez, depende de qué bola pasó de U_1 a U_2. Por eso, trataremos el experimento como si fuera compuesto, del tipo "bola que pasa - bola que se extrae" y haremos el diagrama que se indica a continuación.

Sean los sucesos:

$B_1 = \{\text{la bola que pasa de } U_1 \text{ a } U_2 \text{ es blanca}\}$

$N_1 = \{\text{la bola que pasa de } U_1 \text{ a } U_2 \text{ es negra}\}$



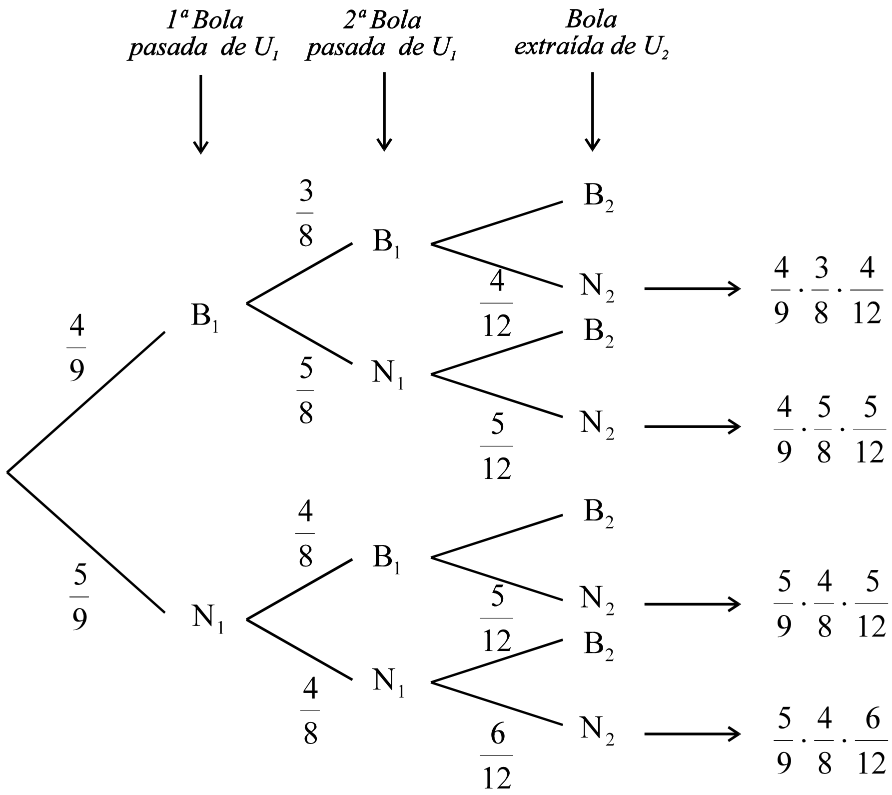
$$\longrightarrow \quad p(B_1 \cap B_2) = p(B_1) \cdot p(B_2 / B_1) = \frac{4}{9} \cdot \frac{7}{11} = \frac{28}{99}$$

$$\longrightarrow \quad p(N_1 \cap B_2) = p(N_1) \cdot p(B_2 / N_1) = \frac{5}{9} \cdot \frac{6}{11} = \frac{30}{99}$$

En el diagrama en árbol se ve claramente que el suceso $B = \{\text{extraer bola blanca}\}$ se da en los casos B_1B_2 y N_1B_2. Por tanto:

$$p(B) = p(B_1) \cdot p(B_2 / B_1) + p(N_1) \cdot p(B_2 / N_1) = \frac{4}{9} \cdot \frac{7}{11} + \frac{5}{9} \cdot \frac{6}{11} = \frac{58}{99}$$

b) El diagrama en árbol correspondiente es:



La probabilidad de que la bola extraída sea negra es:

$$p(N_2) = p(B_1 \cap B_1 \cap N_2) + p(B_1 \cap N_1 \cap N_2) + p(N_1 \cap B_1 \cap N_2) + p(N_1 \cap N_1 \cap N_2) =$$

$$\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{12} + \frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{5}{12} + \frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{5}{12} + \frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{6}{12} = 0'41$$

Si resolvemos el problema por combinatoria tenemos:

La probabilidad de que la bola extraída sea negra supuesto que las dos bolas pasadas fueron blancas es:

$$p = \frac{C_{4,2}}{C_{9,2}}\cdot\frac{C_{4,1}}{C_{12,1}} = \frac{4\cdot 3}{9\cdot 8}\cdot\frac{4}{12}$$

La probabilidad de que la bola extraída sea negra supuesto que de las dos bolas pasadas una es blanca y la otra es negra:

$$p = \frac{C_{4,1}\cdot C_{5,1}}{C_{9,2}}\cdot\frac{C_{5,1}}{C_{12,1}} = \frac{4\cdot 5}{\frac{9\cdot 8}{2}}\cdot\frac{5}{12} = 2\cdot\frac{4\cdot 5\cdot 5}{9\cdot 8\cdot 12}$$

La probabilidad de que la bola extraída sea negra supuesto que las dos bolas pasadas fueron negras es:

$$p = \frac{C_{5,2}}{C_{9,2}}\cdot\frac{C_{6,1}}{C_{12,1}} = \frac{5\cdot 4}{9\cdot 8}\cdot\frac{6}{12}$$

Ejemplo: En una fábrica tienen tres máquinas A, B y C, que producen, respectivamente, el 40%, el 35% y el 25% del total de piezas. Los porcentajes de piezas defectuosas que cada máquina produce son, respectivamente, 3%, 5% y 4%. Calcúlese la probabilidad de que, al escoger al azar una pieza cualquiera, ésta:

a) Sea defectuosa y haya sido producida por A.
b) No sea defectuosa ni producida por A.

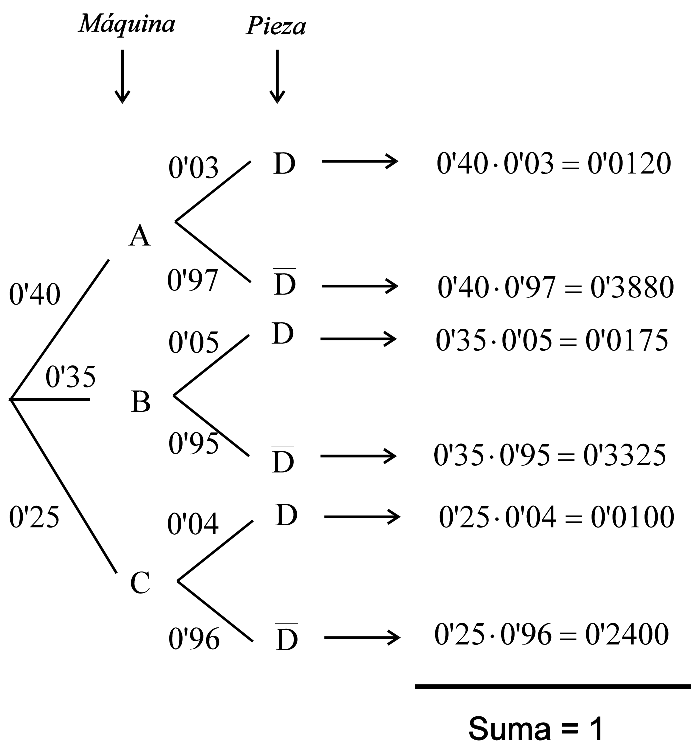
c) Sea defectuosa

Sea E el conjunto de resultados asociado al experimento consistente en extraer una pieza al azar. Sobre E, se consideran los conjuntos:

$A = \{\text{producida por } A\}$ $\qquad B = \{\text{producida por } B\}$

$C = \{\text{producida por } C\}$ $\qquad D = \{\text{es defectuosa}\}$

Veamos el diagrama en árbol correspondiente.



a) Nos piden $p(D \cap A)$. Puede calcularse aplicando el principio de multiplicación de probabilidades, como se observa en el diagrama en árbol.

$$p(D \cap A) = p(A) \cdot p(D/A) = 0'40 \cdot 0'03 = 0'012$$

b) Nos piden $p\left(\overline{D}\cap\overline{A}\right)$. Puede considerarse $\overline{D}\cap\overline{A}$ como unión disjunta de $\overline{D}\cap B$ y $\overline{D}\cap C$ (piénsese en lo que significa). Entonces el diagrama en árbol permite calcularlo inmediatamente:

$$p\left(\overline{D}\cap\overline{A}\right)=p\left(\overline{D}\cap B\right)+p\left(\overline{D}\cap C\right)=p(B)\cdot p\left(\overline{D}/B\right)+p(C)\cdot p\left(\overline{D}/C\right)=$$

$$0'35\cdot 0'95+0'25\cdot 0'96=0'5725$$

c) Nos piden $p(D)$, prescindiendo de cuál sea la máquina que ha producido la pieza. Como la pieza sólo puede proceder de una de las tres máquinas, el suceso D es la unión disjunta de los sucesos $D\cap A$, $D\cap B$ y $D\cap C$, luego:

$$p(D)=p\left(D\cap A\right)+p\left(D\cap B\right)+p\left(D\cap C\right)=p(A)\cdot p\left(D/A\right)+p(B)\cdot p\left(D/B\right)+$$

$$p(C)\cdot p\left(D/C\right)=0'0120+0'0175+0'0100=0'0395$$

Ejemplo: Tenemos dos urnas U_1 y U_2, con bolas blancas, negras y rojas, y las siguientes composiciones: $U_1=\{6B,4N,2R\}$, $U_2=\{3B,7N\}$. Lanzamos un dado al aire, y si aparece un múltiplo de 3 se saca una bola de la urna U_1 y en caso contrario de la urna U_2.

a) ¿Cuál es la probabilidad de salga una bola blanca?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que salga una bola negra?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que salga una bola roja?

a) La probabilidad de obtener bola blanca es:

$$p(B)=p\left(\dot{3}\right)\cdot p\left(B/\dot{3}\right)+p\left(\text{no }\dot{3}\right)\cdot p\left(B/\text{no }\dot{3}\right)=\frac{1}{6}+\frac{6}{30}=\frac{11}{30}=0'36$$

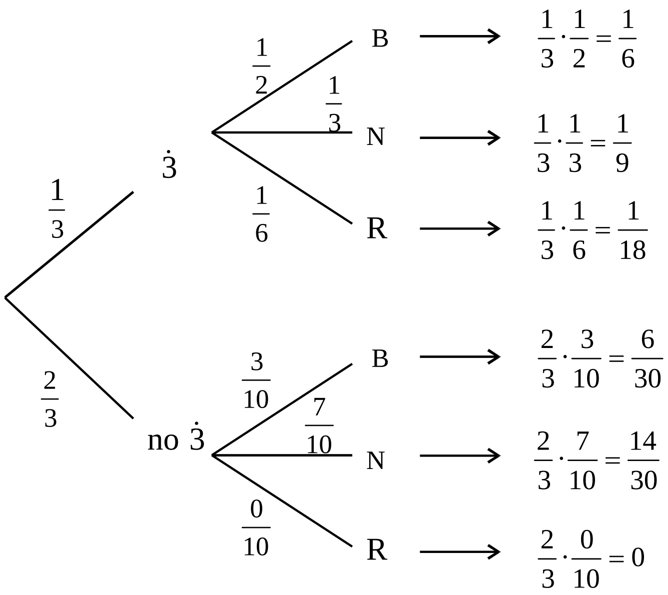
b) La probabilidad de obtener bola negra es:

$$p(N)=p\left(\dot{3}\right)\cdot p\left(N/\dot{3}\right)+p\left(\text{no }\dot{3}\right)\cdot p\left(N/\text{no }\dot{3}\right)=\frac{1}{9}+\frac{14}{30}=\frac{52}{90}=0'57$$

c) La probabilidad de obtener bola roja es:

$$p(R)=p\left(\dot{3}\right)\cdot p\left(R/\dot{3}\right)+p\left(\text{no }\dot{3}\right)\cdot p\left(R/\text{no }\dot{3}\right)=\frac{1}{18}+0=\frac{1}{18}=0'05$$

El diagrama en árbol correspondiente es:



Ejemplo: De una urna que contiene 5 bolas blancas y 3 negras se extraen a la vez 3 bolas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos bolas blancas y una negra, suponiendo que las bolas del mismo color no se distinguen y que después de cada extracción no las devolvemos a la urna?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la 1ª sea negra, la 2ª sea blanca y la 3ª sea blanca si después de cada extracción no devolvemos las bolas a la urna?

c) Resolver el apartado a) suponiendo que las bolas están numeradas.

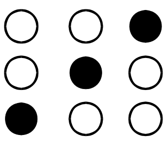
d) Resolver el apartado a) teniendo en cuenta que después de cada extracción devolvemos la bola a la urna.

a)

- Podemos considerar el experimento como una sucesión de 3 extracciones simples sin devolución.

  Como los sucesos son dependientes tenemos:

$$p(B_1B_2N_3)=p(B_1\cap B_2\cap N_3)=p(B_1)\cdot p(B_2/B_1)\cdot p(N_3/B_1\cap B_2)=\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}=\frac{5}{28}$$



Pero el suceso 2 blancas y una negra también se satisface en los siguientes casos: $B_1N_2B_3$ y $N_1B_2B_3$, por tanto:

$$p(B_1N_2B_3)=p(B_1\cap N_2\cap B_3)=p(B_1)\cdot p(N_2/B_1)\cdot p(B_3/B_1\cap N_2)=\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}=\frac{5}{28}$$

$$p(N_1B_2B_3)=p(N_1\cap B_2\cap B_3)=p(N_1)\cdot p(B_2/N_1)\cdot p(B_3/N_1\cap B_2)=\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}=\frac{5}{28}$$

En resumen, la probabilidad de extraer dos bolas blancas y una negra es:

$$p(2\ B\ y\ 1\ N) = p(B_1B_2N_3) + p(B_1N_2B_3) + p(N_1B_2B_3) = 3\cdot\frac{5}{28} = 0'53$$

- Lo mismo podíamos haberlo razonado de la siguiente manera:

  Las distintas formas de presentarse dos bolas blancas y una negra son 3, es decir, 3 formas distintas de ordenarse las bolas en las que se repite dos veces la blanca y una la negra:

$$PR_3^{2,1} = \frac{3!}{2!\cdot 1!} = 3$$

  Por tanto:

$$p(2B\ y\ 1N) = \frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\boxed{3} = \frac{180}{336} = 0'5357$$

- Si resolvemos el problema directamente, sin descomponerlo en tres extracciones lo haremos de la siguiente manera que nos da directamente los tres casos:

$$\text{Casos favorables} \longrightarrow C_{5,2}\cdot C_{3,1}$$

$$\text{Casos posibles} \longrightarrow C_{8,3}$$

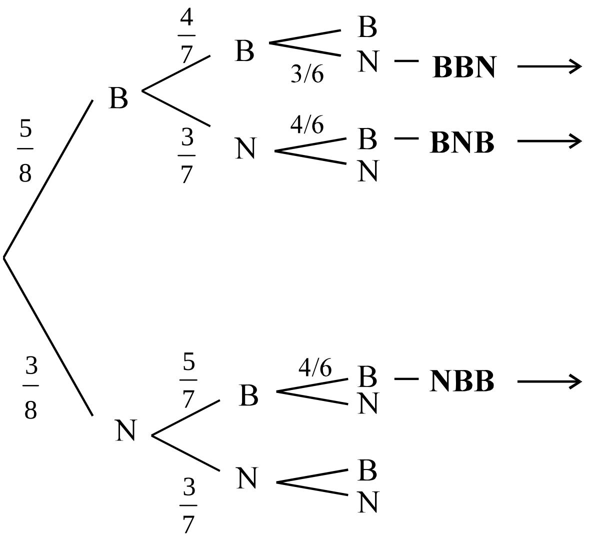
$$p(2b\ y\ 1n) = \frac{C_{5,2}\cdot C_{3,1}}{C_{8,3}} = 0'53$$

  Son combinaciones, porque las bolas del mismo color y tamaño no las podemos distinguir. En el caso de BNB, no distinguimos las bolas blancas de los extremos, aunque éstas se intercambien, ya que son exactamente iguales en peso, en tamaño y en color. Las distinguiríamos si fueran de distinto tamaño, distinto color, distinto peso o tuvieran alguna marca. En este caso serían variaciones, porque al variar el orden se distinguen.

  El problema de sacar bolas una tras otra sin devolución, sin que importe el orden, equivale al de sacar las bolas a la vez. Aquí sólo nos interesa el conjunto de bolas que han salido y no el orden en el que se han sacado.

- Este ejemplo también queda resuelto si utilizamos los diagramas en árbol y sumamos las secuencias correspondientes al problema que nos piden, teniendo en cuenta que cada caso posible es una secuencia.

  Hemos considerado que no diferenciamos las bolas del mismo color.



$$\text{BBN} \longrightarrow \frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}=\frac{5}{28}$$

$$\text{BNB} \longrightarrow \frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}=\frac{5}{28}$$

$$\text{NBB} \longrightarrow \frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}=\frac{5}{28}$$

$$3\cdot\frac{5}{28}=\frac{15}{28}=0'53$$

b) El orden que nos piden en la extracción de las bolas corresponde a una de las ramas del diagrama en árbol, y lo podemos hacer directamente o utilizando la combinatoria.

- $p(NBB)=\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}=\frac{5}{28}$

- Utilizando la combinatoria $\quad p(NBB)=\frac{C_{3,1}}{C_{8,1}}\cdot\frac{C_{5,1}}{C_{7,1}}\cdot\frac{C_{4,1}}{C_{6,1}}=\frac{5}{28}$

c) Veamos qué ocurre cuando las bolas están numeradas:

$$\left.\begin{array}{l}B_1B_2N_7\\B_1B_3N_7\\B_1B_4N_7\\B_1B_5N_7\end{array}\right\}\qquad\left.\begin{array}{l}B_2B_1N_7\\B_2B_3N_7\\B_2B_4N_7\\B_2B_5N_7\end{array}\right\}\qquad\left.\begin{array}{l}B_3B_1N_7\\B_3B_2N_7\\B_3B_4N_7\\B_3B_5N_7\end{array}\right\}\qquad\left.\begin{array}{l}B_4B_1N_7\\B_4B_2N_7\\B_4B_3N_7\\B_4B_5N_7\end{array}\right\}\qquad\left.\begin{array}{l}B_5B_1N_7\\B_5B_2N_7\\B_5B_3N_7\\B_5B_4N_7\end{array}\right\}$$

En total hay $4\cdot 5=20$ ternas donde las dos primeras bolas son blancas y la tercera es la misma bola negra.

Cada una de esas ternas puede acabar con 3 bolas negras que son distintas, es decir en N_6, N_7 y N_8, por tanto el número de ternas donde las dos primeras bolas son blancas y la tercera es negra son:

$$V_{5,2}\cdot V_{3,1}=\frac{5!}{(5-2)!}\cdot\frac{3!}{(3-1)!}=5\cdot 4\cdot 3=60$$

Ahora bien, si tenemos en cuenta todas las ordenaciones posibles en cada una de las ternas obtenemos:

$$p(B_1B_2N_7) = p(B_1N_7B_2) = p(N_7B_1B_2)$$

Al tener en cuenta las distintas ordenaciones tenemos que multiplicar por las tres posibles donde se repiten dos bolas blancas, es decir por $PR_3^{2,1} = 3$ por tanto:

$$\text{Casos favorables} \quad \rightarrow \quad V_{5,2} \cdot V_{3,1} \cdot PR_3^{2,1}$$

$$\text{Casos posibles} \quad \rightarrow \quad V_{8,3}$$

$$p(2B \text{ y } 1N) = \frac{V_{5,2} \cdot V_{3,1} \cdot PR_3^{2,1}}{V_{8,3}} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3}{8 \cdot 7 \cdot 6} = 0'53$$

El resultado es el mismo que si no están numeradas, como es lógico.

d) El hecho de "devolver la bola a la urna" significa que una vez anotado el color de la bola, ésta vuelve a la urna antes de anotar la siguiente.

- Aquí los sucesos ya no son dependientes luego:

$$p(2B \text{ y } 1N) = p(B_1B_2N_3) + p(B_1N_2B_3) + p(N_1B_2B_3) = p(B_1) \cdot p(B_2) \cdot p(N_3) +$$

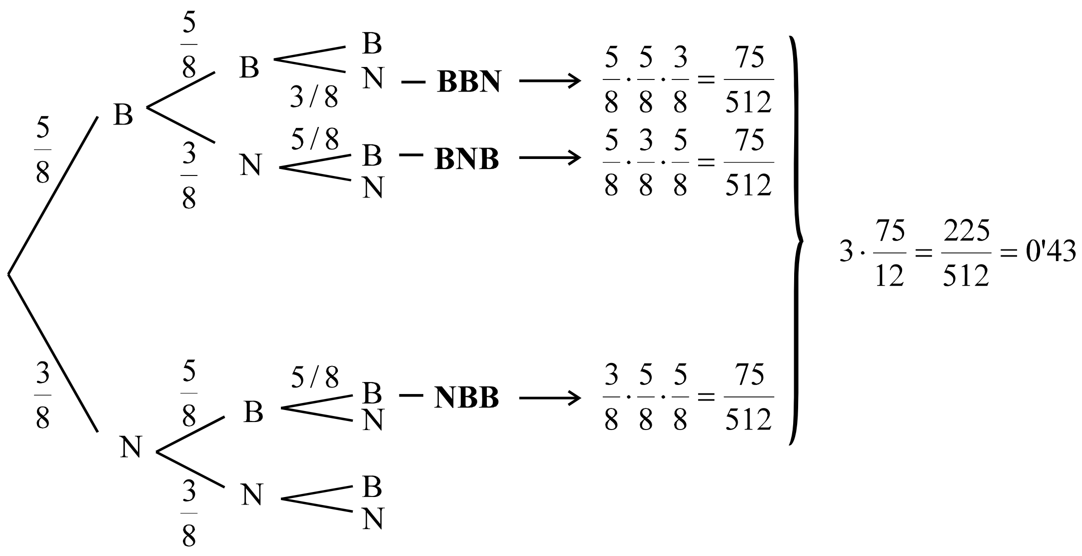
$$+p(B_1) \cdot p(N_2) \cdot p(B_3) + p(N_1) \cdot p(B_2) \cdot p(B_3) = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} = 0'4394$$

- Lo mismo nos da si utilizamos la fórmula de las permutaciones:

$$PR_3^{2,1} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$$

$$p(2B \text{ y } 1N) = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8} \cdot \boxed{3} = 0'4394$$

- A través del diagrama en árbol



Ejemplo: **Se extraen 5 cartas de una baraja ordinaria (40 cartas). Calcular la probabilidad de obtener:**

a) Tres oros.

b) Tres oros y dos espadas.

c) Un trío y una pareja (full).

d) La primera un as, la segunda un rey, la tercera un as, la cuarta un rey y la quinta un rey.

e) Cuatro cartas con el mismo número.

f) Cinco cartas con numeración consecutiva, supuesto que los números de las cartas son: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

g) Si extraemos sólo tres cartas ¿Cuál es la probabilidad de sacar cada una con un número distinto?

h) Probabilidad de obtener un "póker" (cuatro números iguales).

i) Probabilidad de obtener dobles parejas.

En este tipo de problemas, donde las cartas se van repartiendo sucesivamente una a una, no se tiene en cuenta para nada el orden en que se han sacado, ya que sólo nos interesa el conjunto de cartas que quedan en la mano de cada jugador. Sería lo mismo sacarlas del montón una tras otra que coger las cinco a la vez. Para tener en cuenta el orden se debe especificar en el enunciado, como en el caso del apartado d).

a)

- Casos favorables de sacar tres cartas y que sean oros $\rightarrow$ $C_{10,3}=\dfrac{10!}{3!\cdot 7!}=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2}$

  Casos favorables de sacar dos cartas que no sean oros $\rightarrow$ $C_{30,2}=\dfrac{30!}{2!\cdot 28!}=\dfrac{30\cdot 29}{2}$

  Casos favorables de sacar cinco cartas de las que 3 sean oros y 2 de un palo

  distinto $\rightarrow$ $C_{10,3}\cdot C_{30,2}=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2}\cdot\dfrac{30\cdot 29}{2}=52.200$

  Casos posibles de sacar 5 cartas cualesquiera:

$$C_{40,5}=\frac{40!}{5!\cdot 35!}=\frac{40\cdot 39\cdot 38\cdot 37\cdot 36}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}=658.008$$

$$p(3\text{ oros})=\frac{C_{10,3}\cdot C_{30,2}}{C_{40,5}}=\frac{52.200}{658.008}=0'079$$

  La ventaja de utilizar las combinaciones es que obtenemos todas las posibilidades al mismo tiempo.

- Otra forma de enfocar el problema es plantearlo utilizando la definición de probabilidad condicionada:

  Si la primera carta que extraigo es un oro, tengo 10 cartas favorables de 40 posibles. Si la segunda es un oro, tengo 9 cartas favorables (porque ya he extraído una) de 39 posibles. Si la tercera es un oro, tengo 8 cartas favorables (porque ya he extraído dos) de 38 posibles. Si la cuarta que extraigo no es un oro, tengo 30 cartas favorables (que no son oros) de 37 posibles (porque ya he sacado 3 oros) y si la quinta carta que extraigo tampoco es un oro, tengo 29 cartas favorables (porque ya he extraído una que no era oros) de 36 posibles (porque ya he sacado 3 oros y otra que no es oros).

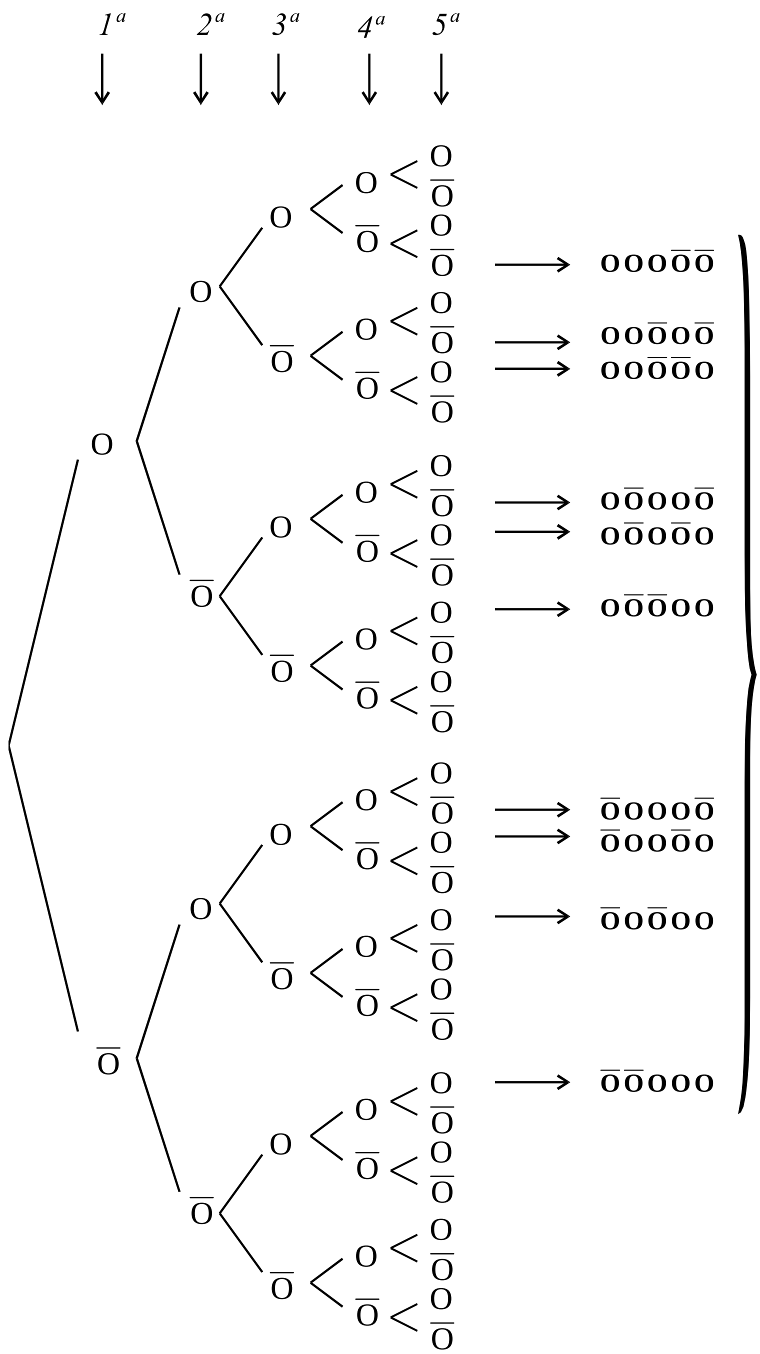
  En total tenemos $\dfrac{10}{40}\cdot\dfrac{9}{39}\cdot\dfrac{8}{38}\cdot\dfrac{30}{37}\cdot\dfrac{29}{36}$

  Pero este producto sólo no da el que la primera sea oros, que la segunda sea oros, que la tercera sea oros, que la cuarta no sea oros y que la quinta no sea oros, pero siempre en éste orden.

Para que estén todas las posibles maneras de extraer 5 cartas de las que 3 sean oros y dos no lo sean deberemos multiplicar la cantidad anterior por todas las posibles ordenaciones, como nos indica el siguiente diagrama en árbol:

Sean los sucesos:

$$\mathrm{O} = \{\text{Que la carta extraída sea oros}\} \text{ y } \overline{\mathrm{O}} = \{\text{Que la carta extraída no sea oros}\}$$



$$\mathbf{PR_5^{3,2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10}$$

Es decir, la probabilidad de extraer 5 cartas de las que 3 sean oros y 2 no lo sean es:

$$p(3\text{ oros}) = \frac{10}{40}\cdot\frac{9}{39}\cdot\frac{8}{38}\cdot\frac{30}{37}\cdot\frac{29}{36}\cdot PR_5^{3,2} = \frac{10}{40}\cdot\frac{9}{39}\cdot\frac{8}{38}\cdot\frac{30}{37}\cdot\frac{29}{36}\cdot 10 = 0'079$$

b)

- Casos favorables de sacar tres oros $\rightarrow$ $C_{10,3} = \frac{10!}{3!\cdot 7!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2}$

  Casos favorables de sacar dos espadas $\rightarrow$ $C_{10,2} = \frac{10!}{2!\cdot 8!} = \frac{10\cdot 9}{2}$

  Casos favorables de sacar cinco cartas de las que 3 sean oros y 2 espadas $\rightarrow$

$$C_{10,3}\cdot C_{10,2} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2}\cdot\frac{10\cdot 9}{2} = 5.400$$

  Casos posibles de sacar 5 cartas cualesquiera:

$$C_{40,5} = \frac{40!}{5!\cdot 35!} = \frac{40\cdot 39\cdot 38\cdot 37\cdot 36}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} = 658.008$$

$$p(3\text{ oros y }2\text{ espadas}) = \frac{C_{10,3}\cdot C_{10,2}}{C_{40,5}} = \frac{5.400}{658.008} = 0'0082$$

- Haciéndolo usando la definición de probabilidad condicionada tenemos:

$$p(3\text{ oros y }2\text{ espadas}) = \frac{10}{40}\cdot\frac{9}{39}\cdot\frac{8}{38}\cdot\frac{10}{37}\cdot\frac{9}{36}\cdot PR_5^{3,2} = 0'0082$$

c)

- El suceso "trío pareja" puede imaginarse como unión de los sucesos incompatibles:

  AAARR; AAA77; 333CC; AAA11; 55522;........ de los que hay $10\cdot 9 = 90$

  El trío de ases los podemos combinar con nueve parejas ya que con una pareja de ases es imposible pues sólo hay 4 ases en la baraja. Como esto sucede para todos los tríos y hay 10 en la baraja esto significa que cada uno de ellos se puede combinar con otros 9.

  Casos favorables de sacar un trío $\rightarrow$ $C_{4,3} = \frac{4!}{3!\cdot 1!} = 4$

Casos favorables de sacar una pareja $\rightarrow \quad C_{4,2} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{4\cdot 3}{2}$

Casos favorables de sacar cinco cartas de las que 3 sean un trío y 2 una pareja

$$C_{4,3}\cdot C_{4,2}\cdot 90 = 4\cdot\frac{4\cdot 3}{2}\cdot 90 = 2.160$$

Casos posibles de sacar 5 cartas cualesquiera:

$$C_{40,5} = \frac{40!}{5!\cdot 35!} = \frac{40\cdot 39\cdot 38\cdot 37\cdot 36}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} = 658.008$$

$$p(\text{un trío y una pareja}) = \frac{C_{4,3}\cdot C_{4,2}}{C_{40,5}}\cdot 90 = \frac{2.160}{658.008} = 0'0032$$

- Haciéndolo usando la definición de probabilidad condicionada tenemos:

$$p(\text{un trío y una pareja}) = \frac{4}{40}\cdot\frac{3}{39}\cdot\frac{2}{38}\cdot\frac{4}{37}\cdot\frac{3}{36}\cdot PR_5^{3,2}\cdot 90 = 0'0032$$

d)

- En este caso **sí que nos importa el orden de extracción de las cartas, luego <u>sólo hay una posibilidad</u>** que si la representáramos en un diagrama en árbol correspondería a una sola rama.

$$p(\text{as, rey , as, rey, rey}) = \frac{C_{4,1}}{C_{40,1}}\cdot\frac{C_{4,1}}{C_{39,1}}\cdot\frac{C_{3,1}}{C_{38,1}}\cdot\frac{C_{3,1}}{C_{37,1}}\cdot\frac{C_{2,1}}{C_{36,1}} = 0'0000036$$

- Haciéndolo usando la definición de probabilidad condicionada tenemos:

$$p(\text{as, rey , as, rey, rey}) = \frac{4}{40}\cdot\frac{4}{39}\cdot\frac{3}{38}\cdot\frac{3}{37}\cdot\frac{2}{36} = 0'0000036$$

e)

- El suceso 4 cartas con el mismo número puede considerarse como unión de dos sucesos incompatibles, como se indica a continuación:

$AAAA\overline{A},\ 7777\overline{7},\ RRRR\overline{R}$,.................... es decir, hay 10 posibilidades

$$p(\text{4 cartas con el mismo número}) = \frac{10\cdot C_{36,1}}{C_{40,5}} = \frac{10\cdot 36}{\frac{40\cdot 39\cdot 38\cdot 37\cdot 36}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}} = 0'00054$$

- Haciéndolo usando la definición de probabilidad condicionada tenemos:

$$p(4 \text{ cartas con el mismo número}) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} \cdot \frac{1}{37} \cdot \frac{36}{36} \cdot PR_5^{4,1} \cdot 10 = 0'00054$$

f)

- Los posibles sucesos son:

A2345, 23456, 34567, 4567S, 567SC y 67SCR es decir, hay 6

$$p(5 \text{ cartas con numeración consecutiva}) = \frac{C_{4,1} \cdot C_{4,1} \cdot C_{4,1} \cdot C_{4,1} \cdot C_{4,1}}{C_{40,5}} \cdot 6 = 0'0093$$

- Haciéndolo usando la definición de probabilidad condicionada tenemos:

$$p(5 \text{ cartas con numeración consecutiva}) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} \cdot \frac{4}{38} \cdot \frac{4}{37} \cdot \frac{4}{36} \cdot P_5 \cdot 6 = 0'0093$$

g) Para la 1ª carta tenemos 40 casos favorables y 40 posibles.

Para la segunda carta tenemos 36 casos favorables (porque hay que quitar las 4 de la primera carta que son iguales) y 39 posibles (ya hemos sacado una, la 1ª).

Para la 3ª carta tenemos 32 casos favorables (porque hay que quitar las 4 iguales de la 1ª y las 4 iguales de la 2ª) y 38 posibles (ya hemos sacado dos, la 1ª y la 2ª).

$$p(\text{sacar tres cartas distintas}) = \frac{40}{40} \cdot \frac{36}{39} \cdot \frac{32}{38} = 0'777$$

h) Podemos formar grupos de 4 cartas de uno de los 10 números de 10 maneras distintas, desde 4 ases hasta 4 reyes, y una más de las 36 cartas restantes. Por tanto la probabilidad de obtener un póker es:

$$p(\text{póker}) = \frac{10 \cdot C_{36,1}}{C_{40,5}} = \frac{10 \cdot 36}{\frac{40!}{5! \cdot 35!}} = 5'47 \cdot 10^{-4}$$

i) Para formar dobles parejas (sin "full" ni "póker") hay que tener cartas de tres números distintos, es decir, dos de uno, dos de otro y una de un tercero.

Las posibilidades de obtener la 1ª pareja de entre 4 cartas iguales son $\rightarrow \; 10 \cdot C_{4,2}$

Las posibilidades de obtener la 2ª pareja de entre 4 cartas iguales son $\rightarrow \; 9 \cdot C_{4,2}$

Las posibilidades de obtener la 5ª carta y cuyo nº no coincida con los dos anteriores son 32.

$$\text{p(dobles parejas)} = \frac{10 \cdot C_{4,2} \cdot 9 \cdot C_{4,2} \cdot 32}{C_{40,5}} = \frac{10 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot 9 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot 32}{\frac{40!}{5! \cdot 35!}} = 0'1575$$

Teorema de Bayes

Sea un conjunto de n sucesos $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ **incompatibles dos a dos** y tales que se verifica $A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_n = E$, es decir, la unión de todos ellos es el espacio probabilístico total E **(sistema completo de sucesos)**. Sea S un suceso cualquiera del que conocemos la probabilidad de los sucesos condicionados S/A_i. En estas condiciones se pueden calcular las probabilidades de los sucesos condicionados $A_1/S, A_2/S, \ldots\ldots, A_n/S$ mediante la fórmula de Bayes.

$$\mathbf{p(A_i/S) = \frac{p(A_i)\cdot p(S/A_i)}{p(A_1)\cdot p(S/A_1) + p(A_2)\cdot p(S/A_2) + \cdots + p(A_n)\cdot p(S/A_n)} = \frac{p(A_i)\cdot p(S/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} p(A_i)\cdot p(S/A_i)}}$$

<u>Demostración</u>

Del Teorema de la Probabilidad Total sabemos que:

$$p(S) = p(A_1)\cdot p(S/A_1) + p(A_2)\cdot p(S/A_2) + \cdots\cdots + p(A_n)\cdot p(S/A_n)$$

y por la definición de probabilidad condicionada tenemos:

$$p(A_i/S) = \frac{p(A_i \cap S)}{p(S)}$$

$$p(S/A_i) = \frac{p(S \cap A_i)}{p(A_i)} \quad \Rightarrow \quad p(S \cap A_i) = p(A_i)\cdot p(S/A_i) \quad \text{o} \quad p(A_i \cap S) = p(A_i)\cdot p(S/A_i)$$

Si sustituimos en $p(A_i/S) = \dfrac{p(A_i \cap S)}{p(S)}$ la expresión de $p(S)$ y de $p(A_i/S)$ tenemos:

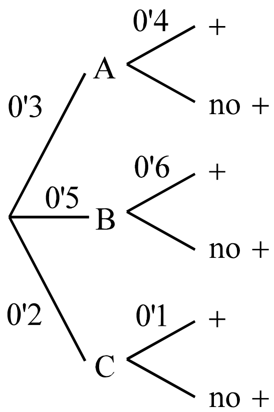
$$p(A_i/S) = \frac{p(A_i)\cdot p(S/A_i)}{p(A_1)\cdot p(S/A_1) + p(A_2)\cdot p(S/A_2) + \cdots\cdots + p(A_n)\cdot p(S/A_n)}$$

Obsérvese que el numerador es uno de los sumandos que aparecen en el denominador. La fórmula nos da la probabilidad del suceso A_i a posteriori, es decir, la probabilidad de que presentado el suceso S se deba a la hipótesis o suceso A_i. Esta situación es la inversa de la planteada en el Teorema de la Probabilidad Total. ***<u>Aquí deseamos conocer la probabilidad de que, habiéndose producido un efecto S, éste se deba a una causa determinada</u>*** $\mathbf{A_i}$.

En general, debemos conocer las probabilidades que entran en la fórmula, si bien en ocasiones se supone que dichas probabilidades son iguales cuando no hay razones para suponer lo contrario.

Este teorema está en la raíz de una de las más recientes ramas del Cálculo de Probabilidades: la **Teoría de la Decisión**, que tiene innumerables aplicaciones a la Economía.

Ejemplo: **Supongamos el problema del gato que persigue al ratón. Al poco rato, llega el gato con el ratón en las fauces. ¿En cuál de los tres caminos lo habrá cazado? No lo sabemos. Pero calculemos qué probabilidad tiene de haberlo cazado en cada sitio.**



$\longrightarrow \quad 0'3\cdot 0'4 = 0'12 \qquad p(A)\cdot p(+/A) = 0'12$

$\longrightarrow \quad 0'5\cdot 0'6 = 0'30 \qquad p(B)\cdot p(+/B) = 0'30$

$\longrightarrow \quad 0'2\cdot 0'1 = 0'02 \qquad p(C)\cdot p(+/C) = 0'02$

$$p(A/+) = \frac{0'12}{0'12+0'30+0'02} = 0'2727$$

$$p(B/+) = \frac{0'30}{0'12+0'30+0'02} = 0'6818$$

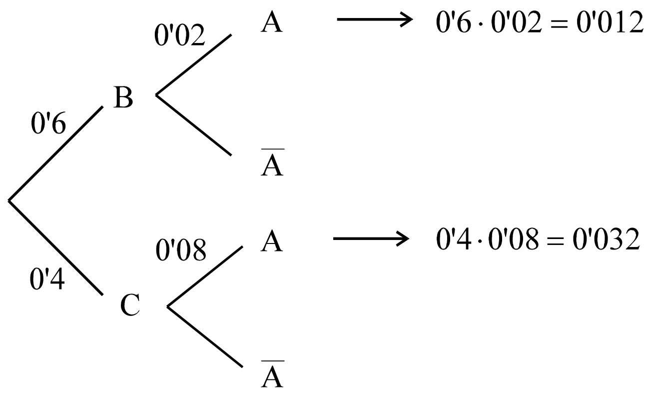
$$p(C/+) = \frac{0'02}{0'12+0'30+0'02} = 0'0455$$

Ejemplo: **En una clase de COU el 8% de los chicos y el 2% de las chicas han cumplido 19 años. El 60% de los alumnos de la clase son mujeres. Se elige al azar un estudiante de la clase y resultó que tenía 19 años cumplidos. ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante sea mujer?**

Sean los sucesos

$$A = \{\text{El estudiante tiene 19 años cumplidos}\} \qquad B = \{\text{Es mujer}\} \qquad C = \{\text{Es varón}\}$$

$$p(B/A) = \frac{p(B)\cdot p(A/B)}{p(B)\cdot p(A/B) + p(C)\cdot p(A/C)} \qquad p(B) = 0'6 \quad p(C) = 0'4 \quad p(A/B) = 0'02 \quad p(A/C) = 0'08$$



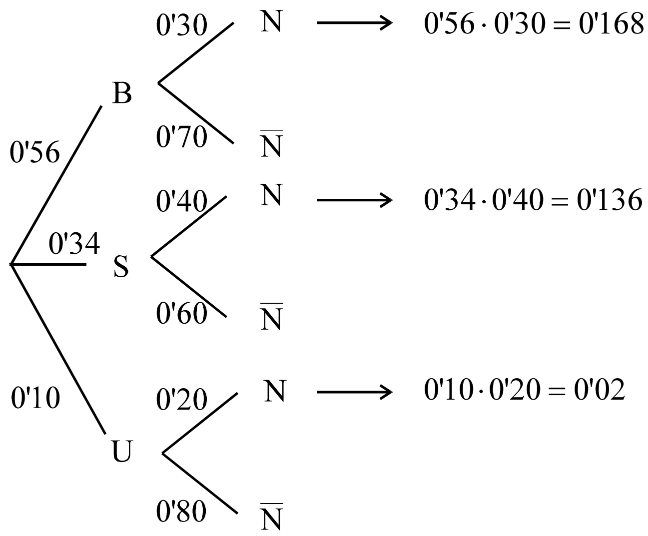
$$p(B/A) = \frac{0'6\cdot 0'02}{0'6\cdot 0'02 + 0'4\cdot 0'08} = 0'27$$

Ejemplo: **El 56% de los profesores de cierto país trabajan en EGB, el 34% trabajan en la Enseñanza Secundaria y el resto en la Universidad. La enfermedad más extendida entre ellos es la *neurosis-agudo-depresivo-angustiosa* (NADA o N para abreviar). La padecen el 30% de los que trabajan en Básica, el 40% de los que trabajan en Secundaria y el 20 % de los que trabajan en Superior. ¿Cuál es la probabilidad de que un profesor trabaje en Secundaria, si padece esa enfermedad?**

Consideremos los sucesos:

$$B = \{\text{profesores de básica}\} \qquad S = \{\text{profesores de secundaria}\}$$

$$U = \{\text{profesores de universidad}\} \qquad N = \{\text{padece la enfermedad}\}$$



$$p(S/N)=\frac{p(S)\cdot p(N/S)}{p(B)\cdot p(N/B)+p(S)\cdot p(N/S)+p(U)\cdot p(N/U)}=\frac{0'136}{0'168+0'136+0'02}=0'42$$

Ejemplo: Se han lanzado unos dados y se han obtenido 4 puntos. Hallar la probabilidad de que se haya jugado con dos dados.

Sean los sucesos:

$A=\{\text{Salir 4 puntos}\}\qquad B=\{\text{Obtener un 4 al lanzar un dado}\}=\{4\}$

$C=\{\text{Obtener un 4 al lanzar dos dados}\}=\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$

$D=\{\text{Obtener un 4 al lanzar tres dados}\}=\{(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1)\}$

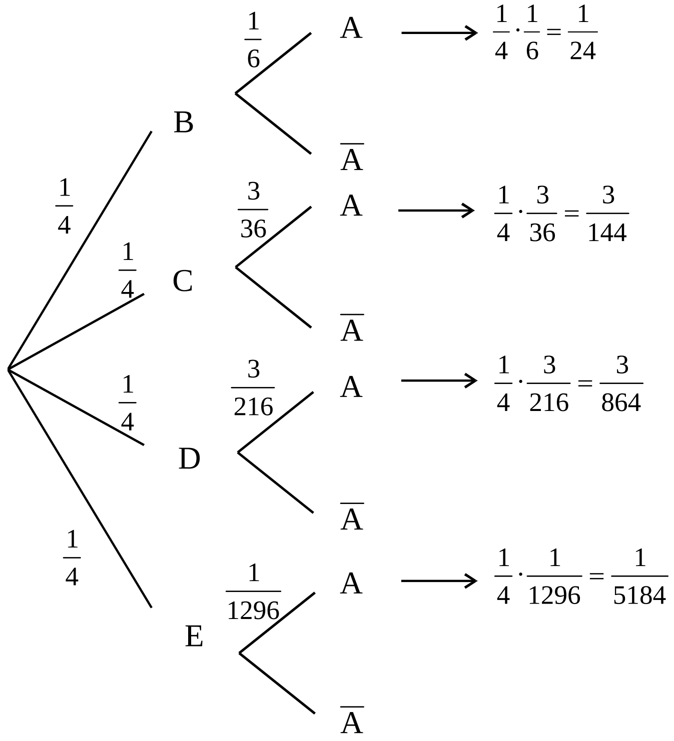
$E=\{\text{Obtener un 4 al lanzar cuatro dados}\}=\{(1,1,1,1)\}$

Las probabilidades correspondientes de B, C, D y E son iguales y por tanto valen $\frac{1}{4}$

$$p(B)=\frac{1}{4}\qquad p(C)=\frac{1}{4}\qquad p(D)=\frac{1}{4}\qquad p(E)=\frac{1}{4}$$

$$p(A/B)=\frac{1}{6}\quad p(A/C)=\frac{3}{6^2}=\frac{3}{36}\quad p(A/D)=\frac{3}{6^3}=\frac{3}{216}\quad p(A/E)=\frac{1}{6^4}=\frac{1}{1296}$$

Hagamos el diagrama correspondiente.



$$p(C/A)=\frac{p(C)\cdot p(A/C)}{p(B)\cdot p(A/B)+p(C)\cdot p(A/C)+p(D)\cdot p(A/D)+p(E)\cdot p(A/E)}=$$

$$\frac{\frac{3}{144}}{\frac{1}{24}+\frac{3}{144}+\frac{3}{864}+\frac{1}{5184}}=0'3148$$

Ejemplo: Tenemos dos urnas U_1 y U_2, con bolas blancas y negras, y las siguientes composiciones: $U_1=\{3B,5N\}$, $U_2=\{2B,4N\}$. Se saca una bola de U_1 y se echa en U_2. Después, sacando una bola de U_2 resulta ser blanca.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola pasada de U_1 a U_2 fuese negra?

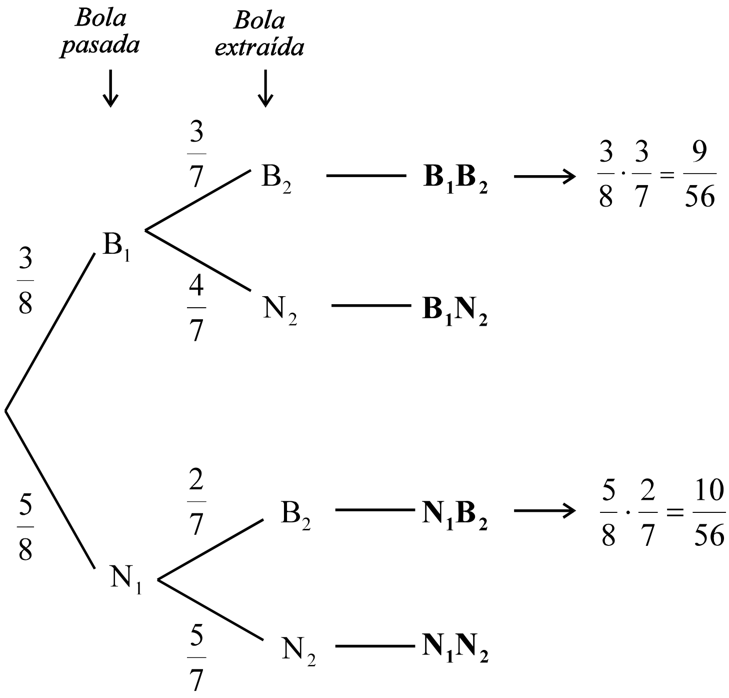
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola pasada de U_1 a U_2 fuese blanca?

Sean los sucesos:

$B_1=\{\text{la bola que pasa de } U_1 \text{ a } U_2 \text{ es blanca}\}$

$N_1=\{\text{la bola que pasa de } U_1 \text{ a } U_2 \text{ es negra}\}$

Nos piden calcular $p(N_1/B_2)$ y $p(B_1/B_2)$



a) $$p(N_1/B_2)=\frac{p(N_1)\cdot p(B_2/N_1)}{p(B_1)\cdot p(B_2/B_1)+p(N_1)\cdot p(B_2/N_1)}=\frac{\frac{10}{56}}{\frac{9}{56}+\frac{10}{56}}=0'5263$$

b) $$p(B_1/B_2)=\frac{p(B_1)\cdot p(B_2/B_1)}{p(B_1)\cdot p(B_2/B_1)+p(N_1)\cdot p(B_2/N_1)}=\frac{\frac{9}{56}}{\frac{9}{56}+\frac{10}{56}}=0'4736$$

Ejemplo: De una urna se hacen extracciones sucesivas de la siguiente manera: Se extrae una bola y, antes de la extracción siguiente, se devuelve a la urna añadiendo, además otra del mismo color. Inicialmente, en la urna hay una bola blanca y otra negra.

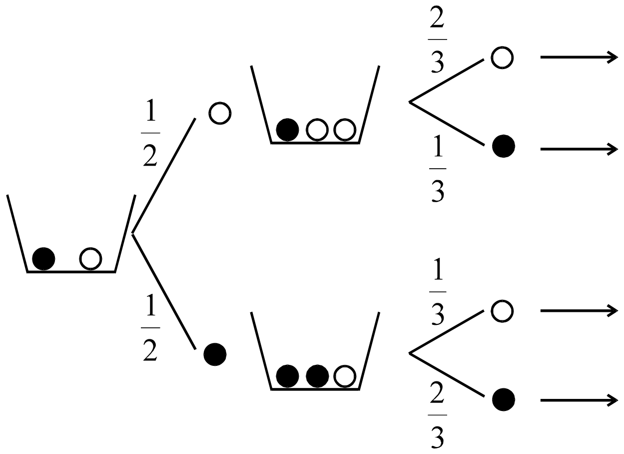
a) Hallar la probabilidad de que en la segunda extracción salga una bola blanca, si en primera salió una bola negra.

b) Hallar la probabilidad de que salga bola negra en la primera y blanca en la segunda.

c) Hallar la probabilidad de que en la segunda extracción salga una bola negra.

d) Si en la segunda extracción ha salido una bola negra, ¿cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída fuera blanca?

Representamos los datos en un diagrama en árbol.



$$p(b,b)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{6}$$

$$p(b,n)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

$$p(n,b)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

$$p(n,n)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{6}$$

a) $p(2^a \text{ blanca} / 1^a \text{ negra}) = \dfrac{1}{3}$

b) $p(1^a \text{ negra y } 2^a \text{ blanca}) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$

c) $p(2^a \text{ negra}) = p(1^a \text{ blanca y } 2^a \text{ negra}) + p(1^a \text{ negra y } 2^a \text{ negra}) = \dfrac{1}{6}+\dfrac{2}{6}=\dfrac{3}{6}$

d) $p(1^a \text{ blanca} / 2^a \text{ negra}) = \dfrac{p(1^a \text{ blanca y } 2^a \text{ negra})}{p(2^a \text{negra})} = \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{2}{6}} = \dfrac{1}{3}$

Ejemplo: **Una urna contiene 25 bolas blancas sin marcar, 75 bolas blancas marcadas, 125 bolas negras sin marcar y 175 marcadas y negras.**

a) Se extrae una bola. Calcular la probabilidad de que sea blanca.
b) Se extrae una bola y está marcada. ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?
c) Se extrae una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que sea negra o esté marcada?
d) ¿Son independientes los sucesos "sacar bola marcada" y "sacar bola blanca"?

1^{er} método (tabla de contingencia)

	B	N	
M	75	175	250
$\overline{M}$	25	125	150
	100	300	400

a) $p(B)=\dfrac{100}{400}=0'25$

b) $p(B/M)=\dfrac{p(B\cap M)}{p(M)}=\dfrac{75}{250}=0'3$

c) $p(N \cup M) = p(N) + p(M) - p(N \cap M) = \frac{300}{400} + \frac{250}{400} - \frac{175}{400} = \frac{375}{400} = 0'9375$

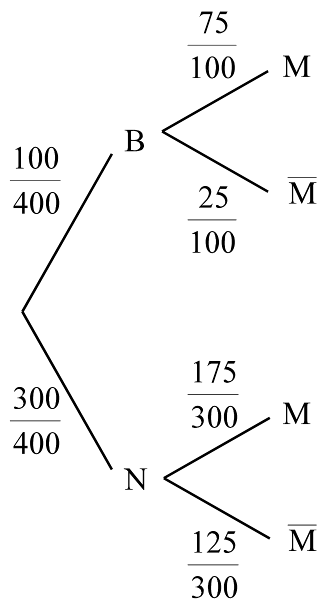
d) $p(B \cap M) = \frac{75}{400} = 0'1875 \qquad p(B) = \frac{100}{400} \qquad p(M) = \frac{250}{400}$

$$p(B) \cdot p(M) = \frac{100}{400} \cdot \frac{250}{400} = 0'1562 \qquad p(B \cap M) \neq p(B) \cdot p(M) \quad \Rightarrow$$

Los sucesos son dependientes.

<u>2º método</u> (diagrama en árbol)

a) $p(B) = \frac{100}{400} = 0'25$



b) $p(B/M) = \dfrac{\frac{100}{400} \cdot \frac{75}{100}}{\frac{100}{400} \cdot \frac{75}{100} + \frac{300}{400} \cdot \frac{175}{300}} = 0'3$

c) $p(N \text{ ó } M) = \frac{100}{400} \cdot \frac{75}{100} + \frac{300}{400} \cdot \frac{175}{300} + \frac{300}{400} \cdot \frac{125}{300} =$

$\frac{375}{400} = 0'9375$

d) $p(B \cap M) = \frac{75}{400} \neq p(B) \cdot p(M) = \frac{100}{400} \cdot \left(\frac{100}{400} \cdot \frac{75}{100} + \frac{300}{400} \cdot \frac{175}{300} \right) = \frac{100}{400} \cdot \frac{250}{400}$

Ejemplo práctico sobre la probabilidad condicionada

En un centro sanitario de la zona de Govan, en Glasgow, hay un ordenador programado para investigar la **Dispepsia**, *una enfermedad del estómago consistente en una digestión difícil y laboriosa cuya causa es la falta de secreción péptica.*

El ordenador hace una serie de preguntas sobre los síntomas, su carácter, grado y frecuencia. Las preguntas prueban a distinguir entre las diferentes causas de la dispepsia. El paciente contesta utilizando un teclado especialmente diseñado . Después de cada respuesta, el ordenador calcula las probabilidades de las diferentes enfermedades posibles.

La dispepsia puede representar el 20% de las visitas al médico de cabecera y en todo el país significa de 6 a 8 millones de días de trabajo perdidos. En esta situación hay muchos diagnósticos posibles. Algunos se han de tratar en el hospital pero la mayoría se pueden curar en casa. El objetivo de esta investigación es probar de clasificar los pacientes entre los que es mejor que los trate su médico de cabecera y los que necesitan ser atendidos en el hospital por el especialista correspondiente.

Evidentemente, podemos examinar al paciente para encontrarle algunas cosas, pero su historia es básica. Podemos hacer que el ordenador pida a los pacientes su historia a partir de una serie de preguntas.

A partir de la historia del paciente, el ordenador identifica las enfermedades más probables. Además de sugerir el tratamiento, el ordenador también da las probabilidades de cada una de las enfermedades y el doctor puede decidir si el paciente ha de ver a un especialista o si él mismo puede tratar la enfermedad.

Esta es una aplicación importante de la probabilidad. Evaluar la probabilidad de que el paciente tenga una enfermedad concreta. El ordenador hace una serie de preguntas y calcula las probabilidades de cada una.

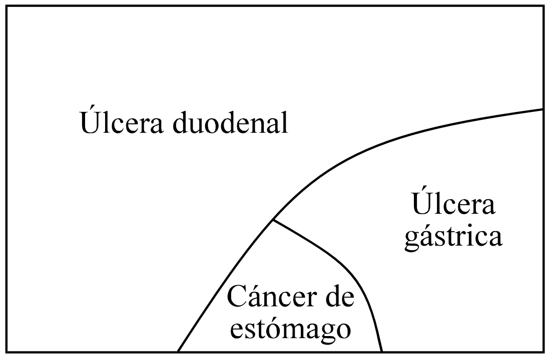
Cada enfermedad tiene una probabilidad, y a medida que se contestan las preguntas las probabilidades cambian para reflejar las respuestas que se han dado. Las preguntas que hace el ordenador han estado preparadas para discriminar las enfermedades, de forma que la mayor parte de las veces hay una sola enfermedad que acaba teniendo una probabilidad alta, mientras que el resto tienen probabilidades más bajas.

En el experimento de Glasgow se pueden hacer muchas preguntas y en consecuencia se necesita una teoría de la probabilidad un poco complicada. Para darnos una idea del tipo de razonamiento que comportan los cálculos, nos fijaremos en un supuesto restringido. También introduciremos un concepto que es vital para entender este tipo de problemas, el concepto de la probabilidad condicionada.

Comencemos con una hipótesis reducida. Lo que hemos hecho es limitarnos a tres enfermedades principales que todas provocan mal de estómago: ***úlcera duodenal, úlcera gástrica y cáncer de estómago***.

Hemos representado las tres enfermedades en un diagrama de Venn. El diagrama entero representa el conjunto universal y representa las personas de una determinada área, como la de Goven en Glasgow, que han ido al médico por un problema de estómago.

Como queremos que en esta etapa el análisis sea sencillo, supondremos que estas enfermedades son *exhaustivas y exclusivas*.



Exhaustivas quiere decir que quien padece mal de estómago sólo puede tener una de estas tres enfermedades, no hay otra posibilidad. Exclusivas significa que si el paciente padece una de estas tres enfermedades no puede padecer ninguna otra.

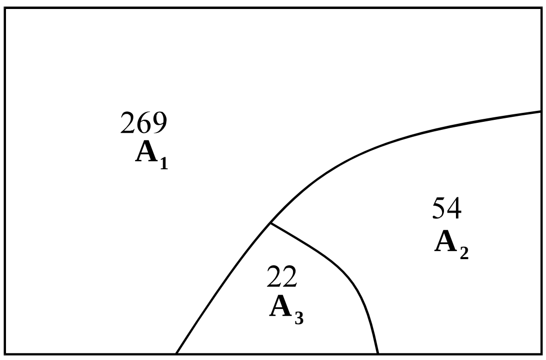
Estas son nuestras suposiciones. ¿Cómo poder asignar las probabilidades? Nombraremos las tres enfermedades con los siguientes símbolos:

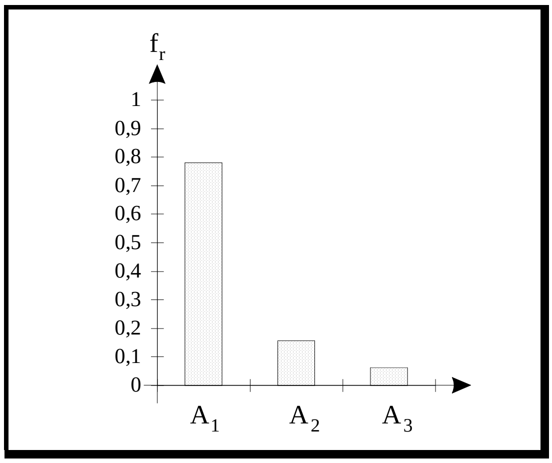
$\mathbf{A_1} =$ **Úlcera duodenal** $\quad \mathbf{A_2} =$ **Úlcera gástrica** $\quad \mathbf{A_3} =$ **Cáncer de estómago**

¿Podemos evaluar la probabilidad de que un paciente tenga una de las tres enfermedades antes de empezar el diagnóstico?

En esta parte de Glasgow, durante los últimos años ha habido 269 casos de úlcera duodenal, 54 de úlcera gástrica y 22 de cáncer de estómago, lo que hace un total de 345 casos. Podemos representar las frecuencias relativas de las tres enfermedades. Haremos servir esto como si fuesen probabilidades iniciales antes de preguntar al paciente. Pero ¿cómo llegaremos a las probabilidades modificadas una vez se ha contestado la primera pregunta?

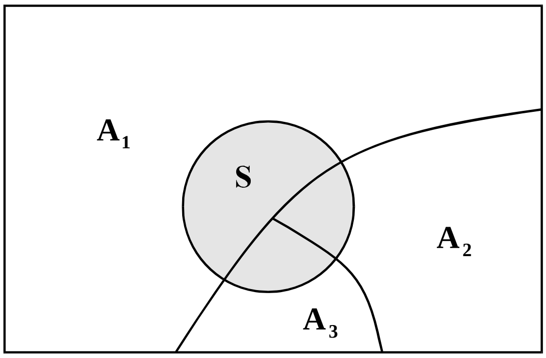
Total 345 casos

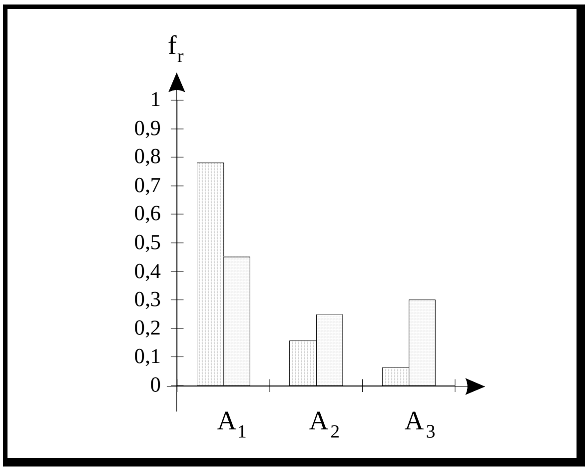




Una de las preguntas que ha de contestar el paciente es *¿las molestias son diarias?* La respuesta del paciente afecta a las probabilidades.

Hemos comenzado con el espacio de los sucesos de todas las personas de Glasgow que han padecido una de las tres enfermedades en los últimos años, pero sólo algunas de estas personas han tenido dolores diarios. Si sólo restringimos nuestra atención sobre estas personas, las frecuencias relativas de las personas que padecen las tres enfermedades serán considerablemente diferentes.





Si sabemos que las molestias son diarias, la probabilidad de cáncer de estómago es considerablemente alta. A esta probabilidad le damos un nombre, la llamamos ***probabilidad condicionada***. Condicionada porque sabemos que conocemos ciertas condiciones relacionadas con el suceso en cuestión, lo cual significa que a pesar de tener disponible todo el espacio de los sucesos nos quedamos restringidos a un subconjunto. Lo expresamos con la notación $\mathbf{p(A_3 / S)}$ para designar la probabilidad condicionada.

Si el suceso que conocemos es el síntoma S (en este caso el dolor aparece diariamente) entonces escribimos la probabilidad $\mathbf{p(A_i / S)}$ *que es la probabilidad de una enfermedad particular ya que sabemos que el síntoma ha sido observado*. En la práctica, son estas probabilidades condicionadas basadas en muchos síntomas las que se utilizan para obtener el diagnóstico final.

Así, utilizamos el lenguaje de la probabilidad condicionada para saber cómo a medida que el paciente contesta más y más preguntas se van modificando las probabilidades. Lo que pasa, es que, por cada pregunta, el suceso condicionante S es diferente, porque se registran más y más síntomas. Por ejemplo, en una cierta fase del interrogatorio el suceso condicionante puede ser que el dolor aparezca diariamente y que no haya vómitos y que el paciente tenga más de 60 años, etc.

Queremos llegar a la probabilidad condicionada que el paciente padezca una enfermedad determinada ya que se han registrado una serie de síntomas, pero los datos no tienen precisamente esta forma.

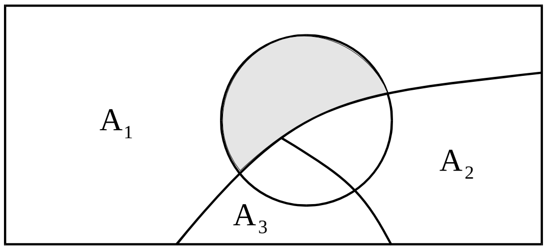
Las preguntas realizadas en el experimento de Glasgow son bastante amplias. Cubren todos los síntomas para los cuales el sistema informatizado ha estado diseñado. Pero como ya hemos visto, las probabilidades condicionadas están dadas al revés. Nos dicen las probabilidades de que el paciente tenga un síntoma suponiendo que ya tiene una determinada enfermedad. Esto no es lo que en la práctica queremos saber. Lo que queremos encontrar es la probabilidad de que tenga una determinada enfermedad porque muestra un determinado síntoma. No podemos entonces hacer servir estos datos directamente. Se han de procesar mediante alguna forma. Los procesaremos mediante el Teorema de Bayes.

El Teorema de Bayes no es más que una forma de intercambiar dos sucesos en la expresión de la probabilidad condicionada. Nos dicen la probabilidad de S dada A_i, $p(S / A_i)$ es decir, la probabilidad del síntoma dada la enfermedad.

Lo que queremos es la probabilidad de A_i dado S, $p(A_i / S)$, es decir, la probabilidad de una enfermedad dado el síntoma. La podemos calcular mediante la fórmula.

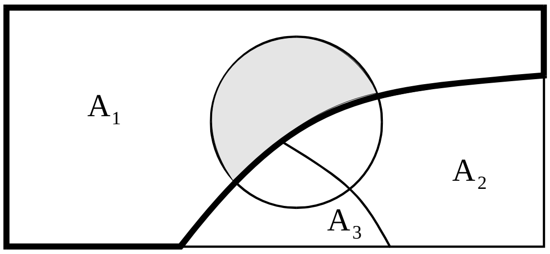
$$\mathbf{p(A_i / S) = \frac{p(S / A_i) \cdot p(A_i)}{p(S)}}$$

Utilizaremos el Teorema de Bayes para calcular la probabilidad de A_1 dado S. Es decir, el espacio restringido de los sucesos es S, el dolor diario, y lo que queremos encontrar es la proporción de pacientes en este espacio que tienen la enfermedad A_1.

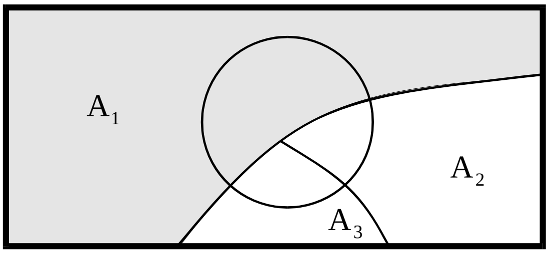


El Teorema de Bayes dice que la podemos calcular a partir de tres cantidades:

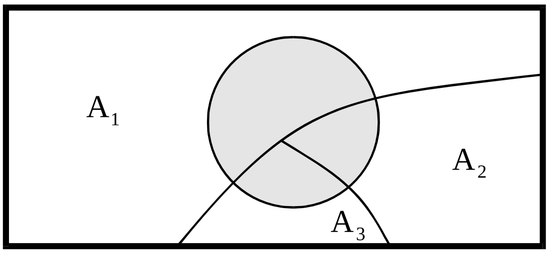
La primera es la probabilidad condicionada inversa $p(S / A_1)$, es decir, la probabilidad de tener un dolor diario dado que se padece una úlcera duodenal. Son datos encontrados por los médicos.



Esto lo multiplicamos por la probabilidad de A_1, $p(A_1)$, es decir la probabilidad inicial de tener una úlcera duodenal que ya hemos utilizado antes.

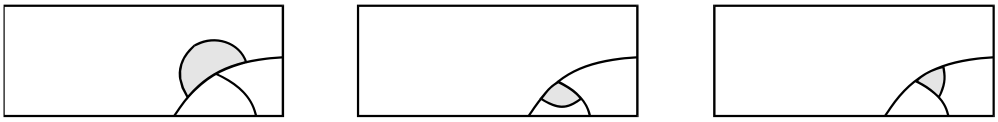


Ahora nos queda un elemento, la probabilidad de S, $p(S)$. Esta no nos la dan directamente pero la podemos calcular. Hay una fórmula para calcular este término partiendo de los valores conocidos del numerador. Se llama el Teorema de las probabilidades totales.



Todo lo que dice el Teorema de las probabilidades totales es que encontraremos $p(S)$ sumando los valores del numerador sobre todos los posibles sucesos condicionantes $p(S) = \sum_{i=1}^{3} p(S / A_i) \cdot p(A_i)$. En nuestro caso tenemos tres de estos sucesos condicionantes. Mirando el diagrama de Venn podemos ver como surge.

Podemos expresar el suceso S mediante su intersección con las tres enfermedades A_1, A_2 y A_3.

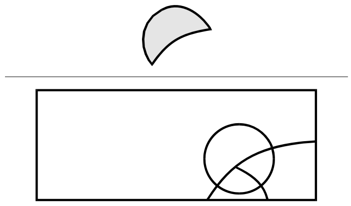


Estas tres intersecciones son mutuamente excluyentes. La probabilidad total del suceso es la suma de las tres probabilidades de las intersecciones.

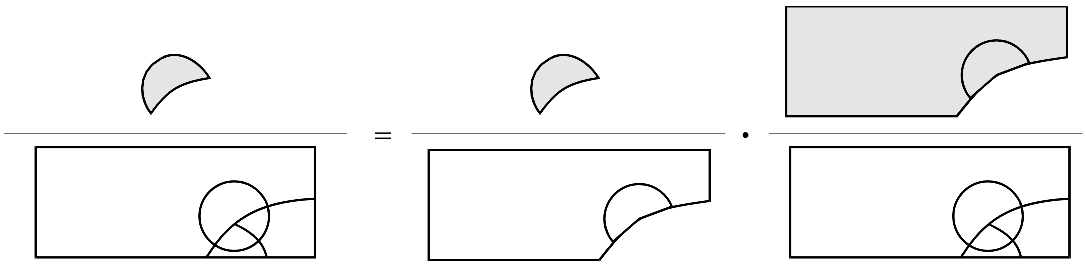
$$p(S) = p(S \cap A_1) + p(S \cap A_2) + p(S \cap A_3)$$

Las podemos escribir en términos de probabilidades condicionadas.

Tomemos $p(S \cap A_1)$. Según este diagrama es el número de personas que hay en la región sombreada dividido por el número total de personas.



Y si se representa como fracción, lo podemos escribir como el producto de dos fracciones. Es la región sombreada como proporción de la región de A_1 multiplicada por la región de A_1 como proporción de todo.



Esto es la probabilidad condicionada de S dada A_1 multiplicada por la probabilidad de A_1.

$$p(S \cap A_1) = p(S / A_1) \cdot p(A_1)$$

Lo mismo podemos decir de la probabilidad de las otras intersecciones, y como la probabilidad de S es la suma de las probabilidades de las intersecciones la podemos reescribir de la siguiente manera:

$$\mathbf{p(S) = p(S / A_1) \cdot p(A_1) + p(S / A_2) \cdot p(A_2) + p(S / A_3) \cdot p(A_3) = \sum_{i=1}^{3} p(S / A_i) \cdot p(A_i)}$$

Esta es la expresión de $p(S)$ en términos de las probabilidades que conocemos. Esta es la cantidad que necesitamos para utilizar el Teorema de Bayes, es decir:

$$\mathbf{p(A_i / S) = \frac{p(A_i) \cdot p(S / A_i)}{\sum_{i=1}^{3} p(A_i) \cdot p(S / A_i)}}$$