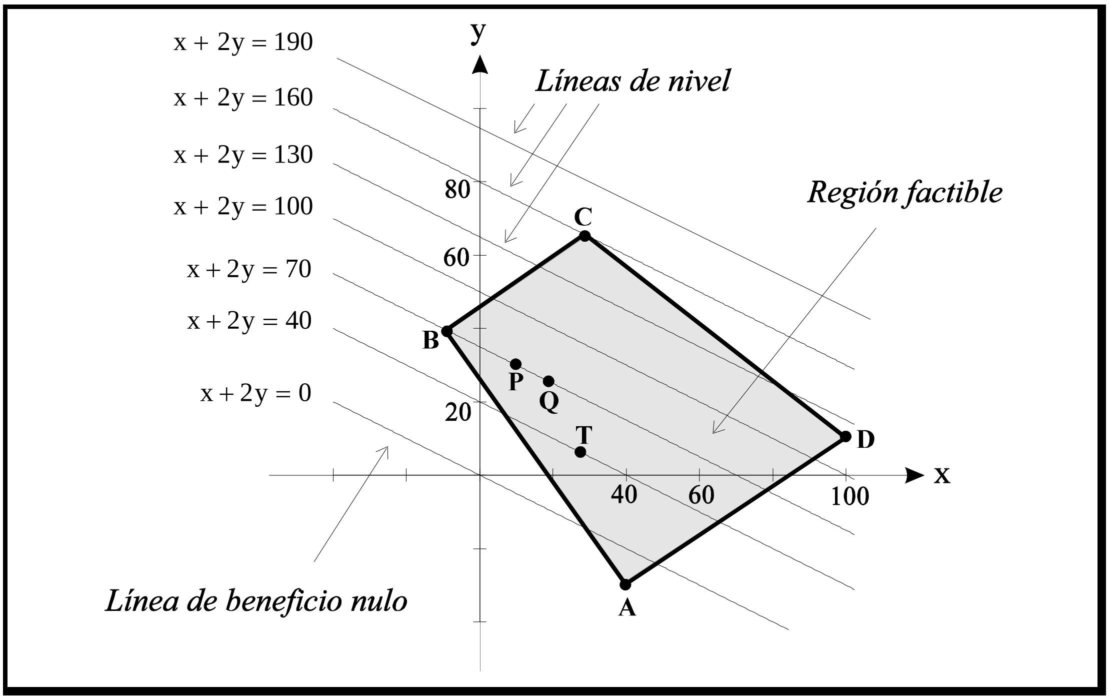
Método gráfico para el cálculo de soluciones

Si la función objetivo es $F(x,y) = ax + by$, llamamos **líneas de nivel asociadas a $F(x,y)$** a los conjuntos de puntos (x,y) del plano en los que la función $F(x,y)$ toma el mismo valor **k**, esto es, a las rectas de ecuación $\mathbf{ax + by = k}$. (El concepto de línea de nivel es análogo al de curvas de nivel de un mapa, que representan los puntos con igual altitud). Para hallar gráficamente la solución de un problema de programación lineal de dos variables es conveniente seguir el proceso que indicamos a continuación:

1. Se dibuja el recinto limitado por las restricciones del problema (región factible).
2. Se representa la recta $\mathbf{ax + by = 0}$ que se suele llamar **línea de beneficio nulo**. Esta es una recta que pasa por el origen de coordenadas y es la más cómoda de representar $(k = 0)$.
3. Se trazan rectas paralelas a la línea de beneficio nulo, que pasen por cada uno de los vértices del recinto. A estas rectas paralelas les llamaremos **líneas de nivel.** Todas las líneas de nivel son paralelas, y el nivel (el valor de la función objetivo) será mayor o menor dependiendo del valor de *k*. Las líneas de nivel que nos interesan son las que cortan a la región factible, pues el máximo de la función objetivo, $F(x,y) = ax + by$, se alcanzará para el máximo de *k*.

En Programación Lineal es frecuente que la función $F(x,y) = ax + by$ <u>tenga sus coeficientes a y b positivos</u> y entonces la búsqueda de los valores máximo y mínimo se puede hacer gráficamente trasladando paralelamente la línea de beneficio nulo. La solución óptima de programación lineal se obtiene para la recta de mayor o menor nivel que tiene puntos en común con la región factible. El valor de k de esa recta será el mínimo o el máximo de la función objetivo.

Ejemplo: **Si la función objetivo es $F(x,y) = x + 2y$, las líneas de nivel son de la forma $x + 2y = k$**



En este caso, el nivel aumenta cuando las rectas se desplazan hacia arriba.

En T, el nivel es 40; en B, P y Q la función objetivo vale $70 \ (x+2y=70)$.

El nivel máximo factible $(k=160)$ se alcanza en el punto C. Éste será el punto en donde la función objetivo se hace máxima.

Discusión de la solución óptima

En muchas cuestiones relacionadas con aplicaciones de las matemáticas, se presenta el problema de tener que hallar los valores máximo y mínimo de una función lineal sobre un conjunto poligonal convexo. La posibilidad de encontrarlos, o no, viene determinada por los siguientes teoremas:

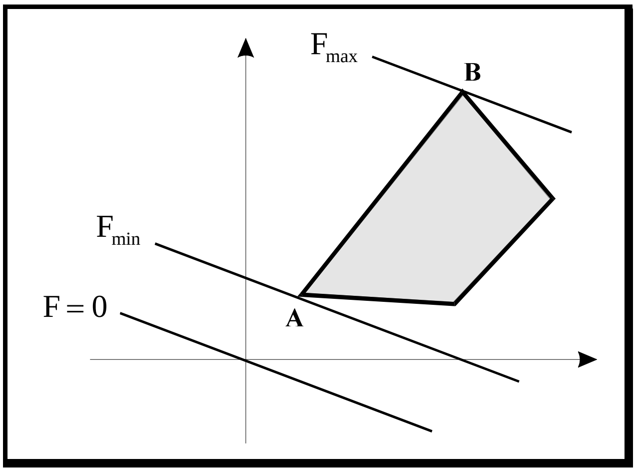
Teorema 1 (Para regiones acotadas)

Sobre un polígono P, convexo, toda función lineal tiene un valor máximo y uno mínimo, y ambos se alcanzan en vértices del mismo.

Podemos determinar gráficamente en qué sentido se traslada la recta $ax+by=k$ disminuyendo k (si queremos minimizar F) o aumentando k (si buscamos el máximo de F). Obviamente, tales valores se pueden obtener hallando el valor de F en todos los vértices y comparando los resultados obtenidos.

La solución óptima está en el primer o último vértice común a la región factible con una recta de nivel. En este caso, la función objetivo se puede minimizar o maximizar.

También puede suceder que haya múltiples, o infinitas, soluciones óptimas. Para que esto sea posible es necesario que una de las rectas que limiten las restricciones tenga la misma pendiente que las rectas de nivel. Todas estas soluciones estarían en uno de los lados del polígono factible, incluidos los vértices que lo limitan.



En el polígono convexo de la figura, la función $\mathbf{F=x+2y}$ alcanza el máximo en B y el mínimo en A.

En efecto, los valores de F en los puntos del polígono se identifican con las paralelas a la línea de beneficio nulo contenidas en las bandas de F_{min} a F_{max}. Entre todas, la de mayor valor es la que pasa por B, y la de menor valor pasa por A.

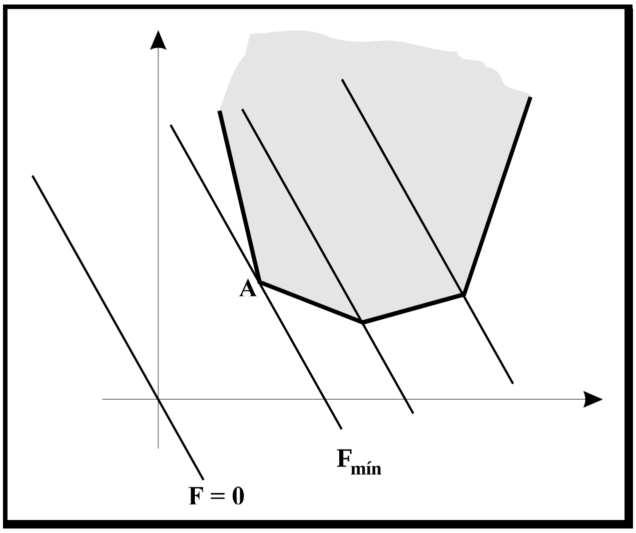
Teorema 2 (Para regiones no acotadas)

La solución óptima de una función lineal $F(x,y)=ax+by$ sobre un conjunto poligonal P, convexo y no acotado, no siempre existe. Su existencia o no, dependerá de la función objetivo. De hecho, <u>o existe sólo mínimo o existe sólo máximo o ninguno de los dos</u>. Todo dependerá de lo siguiente:

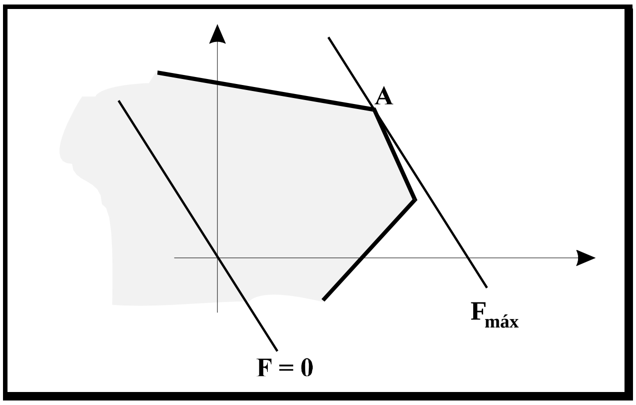
1. **Si una de las paralelas a la línea de beneficio nulo pasa por algún vértice A, de tal modo que todo el interior del conjunto poligonal queda a un mismo lado de dicha paralela, entonces el valor de F en A es máximo, o mínimo.**

2. **Si todas las paralelas a la línea de beneficio nulo "parten" el interior del conjunto poligonal, entonces F no toma valor máximo, ni mínimo, en P.**

<u>Cuando la función F tiene sus coeficientes a y b positivos</u>, es fácil encontrar gráficamente los vértices de valor máximo, o mínimo, trasladando la línea de beneficio nulo como en los dos ejemplos siguientes.



Sobre el conjunto poligonal de la figura, la función $F=2x+y$ toma valor mínimo en A, y no tiene máximo.

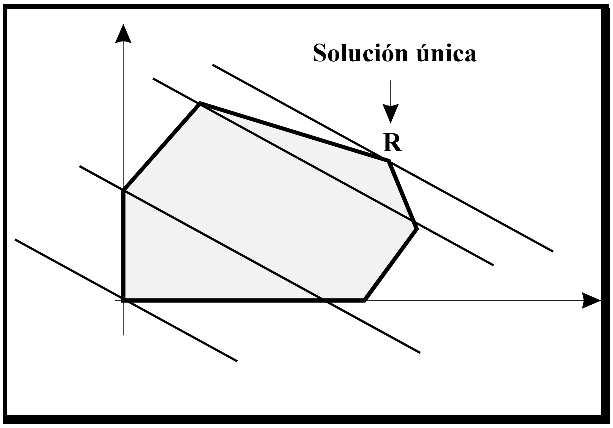


Sobre el conjunto poligonal de la figura, la función $F=2x+y$ toma valor máximo en A, y no tiene mínimo.

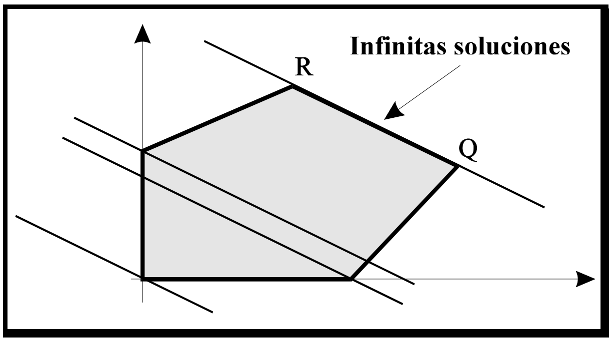
¿Todos los problemas de Programación Lineal tienen solución? En caso afirmativo ¿es ésta única?

Evidentemente, un problema de programación lineal puede tener una solución, infinitas o ninguna, como se puede comprender observando los ejemplos gráficos que se exponen a continuación.

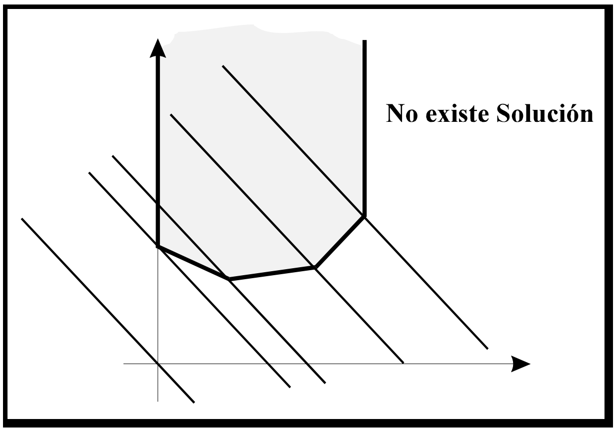
Maximizar la función $F = ax + by$ con $a > 0$ y $b > 0$

- 

En la gráfica se observa que la solución es única, pues la función F alcanza el máximo en el punto R.

- 

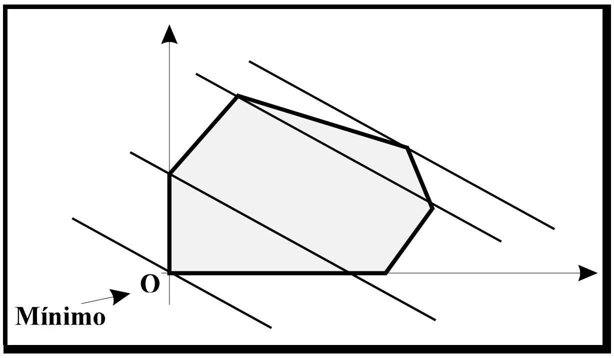
En la gráfica se observa que las soluciones son infinitas, pues la línea de beneficio nulo es paralela al lado QR, que es el que maximiza dicha función. Las soluciones serán, por tanto, los infinitos puntos del segmento RQ.

- 

En la gráfica se observa que no existe solución, pues la función F no alcanza nunca el máximo, debido a que el recinto no está acotado.

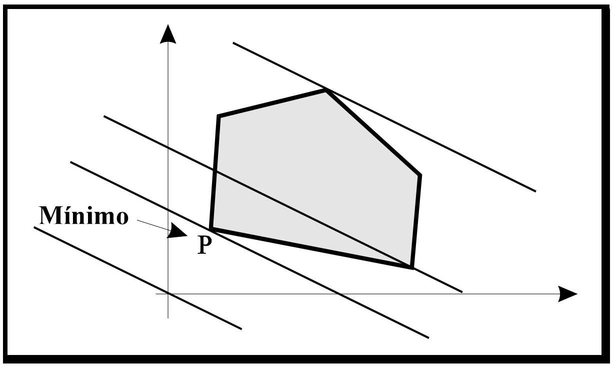
Minimizar la función $F = ax + by$ con $a > 0$ y $b > 0$

➢



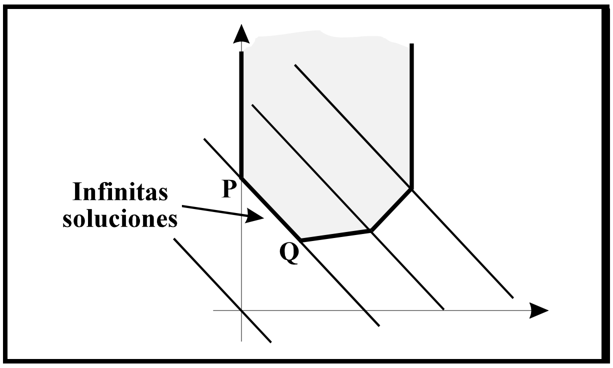
En la gráfica se obtiene el mínimo en el punto O, por ser la recta que pasa por O la que tiene menor ordenada en el origen.

➢ .



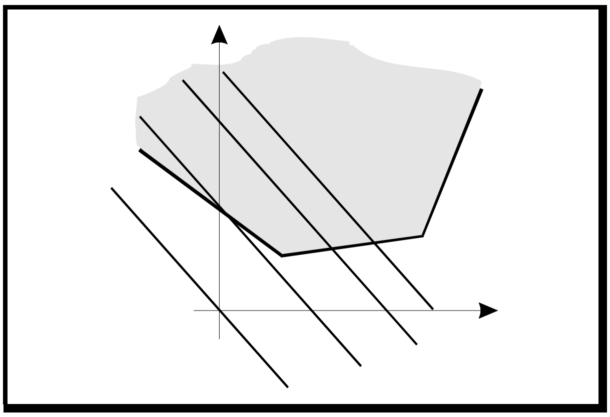
En la gráfica observamos que se obtiene el mínimo en el punto P

➢



En la gráfica se observa que las soluciones son infinitas, pues la línea de beneficio nulo es paralela al lado PQ, que es el que minimiza dicha función. Las soluciones serán, por tanto, los infinitos puntos del segmento PQ.

➢



En esta gráfica no hay mínimo.

Supongamos la función objetivo $F(x,y)=ax+by+c \quad a,b,c\in R$

Vamos a discutir las diferentes situaciones que se nos pueden presentar, dependiendo de si queremos maximizar o minimizar la función objetivo. Los razonamientos que siguen son independientes del valor de **c**.

Queremos hacer que F sea máxima o mínima, es decir, queremos hacer que **k** sea máxima o mínima, siendo:

$$\mathbf{ax+by+c=k \qquad k>0}$$

Representamos gráficamente la línea de beneficio nulo $ax+by+c=0$ y trazamos las líneas de nivel que pasan por los vértices de la región factible. Si la solución existe será la siguiente:

- **Si $a>0$ y $b>0$**

$$y=-\frac{a}{b}x+\frac{k-c}{b} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \text{Si k es máximo} \Rightarrow \dfrac{k-c}{b} \text{ es máximo} \\ \text{Si k es mínimo} \Rightarrow \dfrac{k-c}{b} \text{ es mínimo} \end{cases}$$

En este caso, la pendiente es negativa y por tanto las rectas forman con el semieje positivo de abscisas un ángulo mayor de 90º y menor de 180º. El máximo se alcanza en el vértice para el cual la línea de nivel que pasa por él corte el eje de ordenadas en el punto más alto. El mínimo se alcanza en el vértice para el cual la línea de nivel que pasa por él corte el eje de ordenadas en el punto más bajo.

- **Si $a<0$ y $b<0$**

$$y=-\frac{a}{b}x+\frac{c-k}{b} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \text{Si k es máximo} \Rightarrow \dfrac{c-k}{b} \text{ es mínimo} \\ \text{Si k es mínimo} \Rightarrow \dfrac{c-k}{b} \text{ es máximo} \end{cases}$$

En este caso, la pendiente es negativa y por tanto las rectas forman con el semieje positivo de abscisas un ángulo mayor de 90º y menor de 180º. El máximo se alcanza en el vértice para el cual la línea de nivel que pasa por él corte el eje de ordenadas en el punto más bajo. El mínimo se alcanza en el vértice para el cual la línea de nivel que pasa por él corte el eje de ordenadas en el punto más alto.

- **Si $a>0$ y $b<0$**

$$y=\frac{a}{b}x+\frac{c-k}{b} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \text{Si k es má ximo} \Rightarrow \dfrac{c-k}{b} \text{ es mínimo} \\ \text{Si k es mínimo} \Rightarrow \dfrac{c-k}{b} \text{ es má ximo} \end{cases}$$

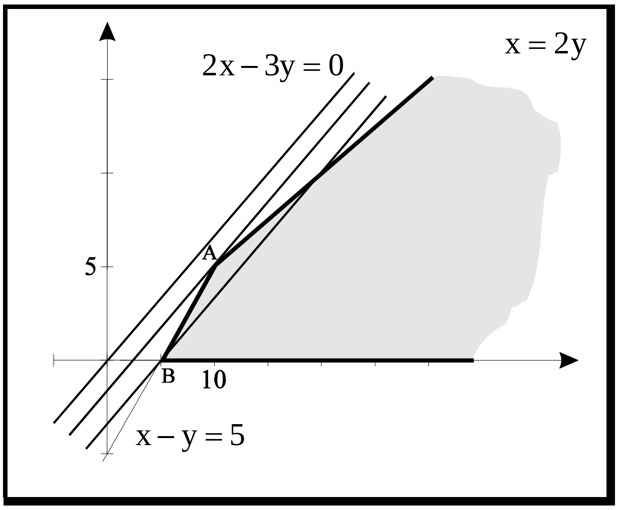
En este caso, la pendiente es positiva y por tanto las rectas forman con el semieje positivo de abscisas un ángulo menor de 90º. El máximo se alcanza en el vértice para el cual la línea de nivel que pasa por él corte el eje de ordenadas en el punto más bajo. El mínimo se alcanza en el vértice para el cual la línea de nivel que pasa por él corte el eje de ordenadas en el punto más alto.

- **Si $a < 0$ y $b > 0$**

$$y = \frac{a}{b}x + \frac{k-c}{b} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \text{Si } k \text{ es máximo} \Rightarrow \dfrac{k-c}{b} \text{ es máximo} \\ \text{Si } k \text{ es mínimo} \Rightarrow \dfrac{k-c}{b} \text{ es mínimo} \end{cases}$$

En este caso, la pendiente es positiva y por tanto las rectas forman con el semieje positivo de abscisas un ángulo menor de 90º. El máximo se alcanza en el vértice para el cual la línea de nivel que pasa por él corte el eje de ordenadas en el punto más alto. El mínimo se alcanza en el vértice para el cual la línea de nivel que pasa por él corte el eje de ordenadas en el punto más bajo.

Ejemplo: Resolver el siguiente problema de programación lineal siendo $F = 2x - 3y$ la función objetivo y $x \geq 0$ $y \geq 0$ $x \geq 2y$ $x - y \geq 5$ las restricciones del problema.



Calculamos los vértices de la región convexa:

$$\left.\begin{array}{r} x - y = 5 \\ x = 2y \end{array}\right\} \Rightarrow A(10,5)$$

$$\left.\begin{array}{r} x - y = 5 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow B(5,0)$$

Como en la función objetivo $b < 0$ y la región es convexa y no acotada, tenemos que guiarnos por la representación gráfica, trazando paralelas a la línea de beneficio nulo. Comprobamos que hay una paralela que pasa por el vértice A y que deja a un mismo lado de ella toda la región convexa, por lo que podemos afirmar que en A hay un máximo o un mínimo. El vértice B lo descartamos porque la paralela que pasa por él *atraviesa* la región convexa. Para saber si en A hay máximo o mínimo, calculamos el valor de la función objetivo en A y en B y así sabremos en cual de los dos es mayor.

$$F(10,5) = 20 - 15 = 5 \qquad\qquad F(5,0) = 10 - 0 = 10$$

Como el valor en A es menor, significa que en A hay un mínimo.

Ejemplo General

<u>Enunciado del problema</u>

Las 20 chicas y los 10 chicos de un curso de 2º de Bachillerato organizan un viaje, para el cual necesitan dinero. Deciden pedir trabajo por las tardes en una compañía encuestadora que contrata a equipos de jóvenes de dos tipos:

TIPO A: **Parejas: una chica y un chico.**

TIPO B: **Equipos de 4, formados por 3 chicas y 1 chico**

Se paga a 30 € la tarde a la pareja y 50 € la tarde al equipo de 4.

¿Cómo les conviene distribuirse para sacar la mayor cantidad posible de dinero?

<u>Análisis de datos</u>

Representaremos los datos en una tabla para poderlos relacionar mejor.

Equipos	**Nº**	**Chicas que intervienen**	**Chicos que intervienen**
Parejas	x	x	x
Equipos de cuatro	y	3y	y
Total		$x+3y$	x+y

Como el número total de chicas es 20, habrá de ser $x+3y \le 20$.

Como el número total de chicos es 10, habrá de ser $x+y \le 10$.

Además, el número de equipos de cada tipo no puede ser negativo: $x \ge 0$ e $y \ge 0$.

La ganancia total diaria es $30x+50y$.

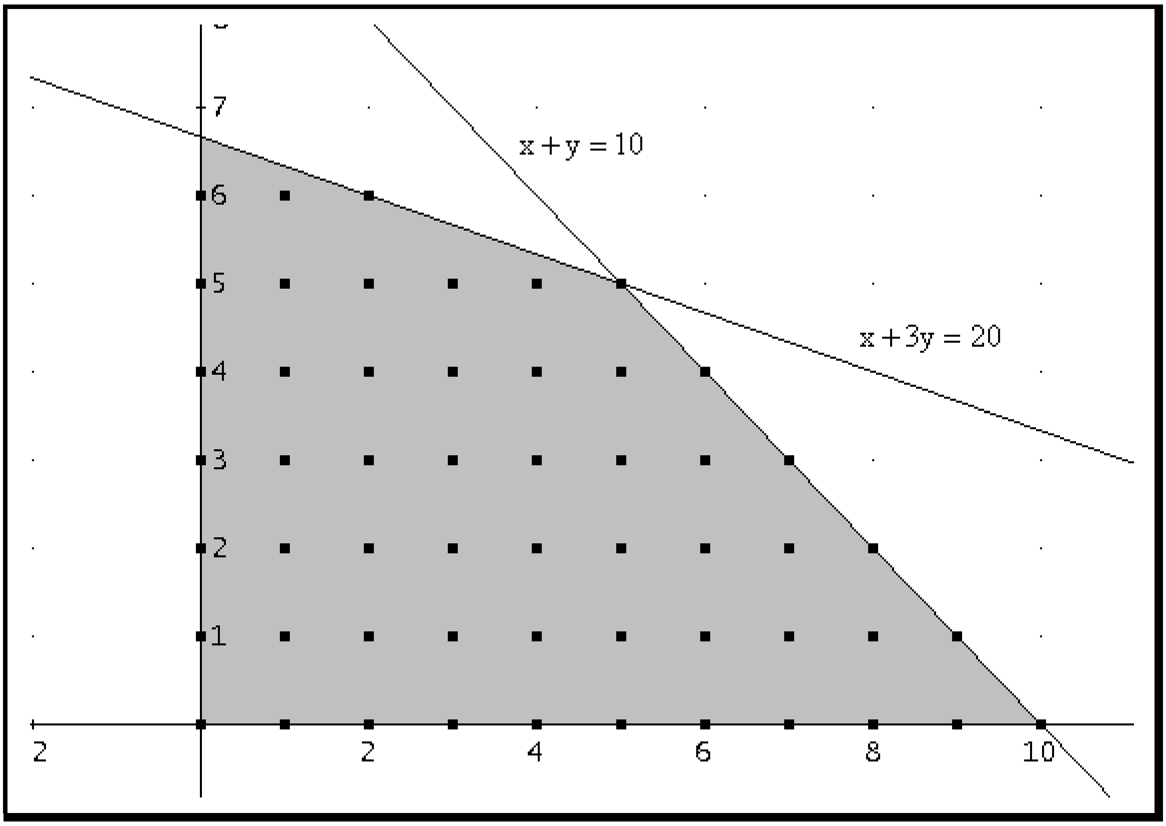
En resumen, deseamos averiguar para qué valores de x e y la expresión:

$$G = 30x + 50y$$

se hace lo más grande posible, teniendo en cuenta que x e y están sometidas a las siguientes restricciones:

$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$
$$x + 3y \leq 20$$
$$x + y \leq 10$$

Representación gráfica de las restricciones



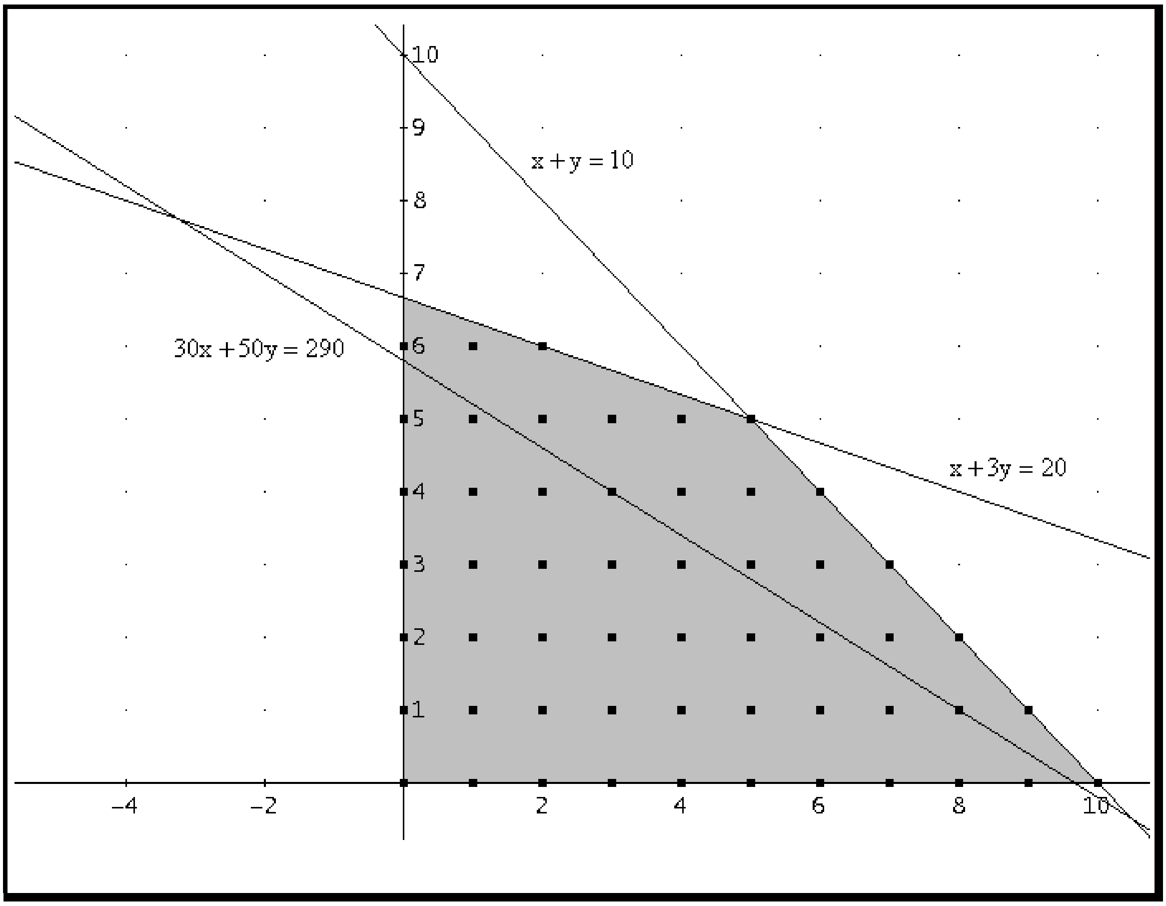
Teniendo en cuenta que los valores de x e y están limitados por cada una de las cuatro restricciones y que al ser x e y el número de equipos encuestadores de cada tipo, han de ser números enteros, sólo hay los 54 puntos posibles reflejados en la gráfica. Habrá que averiguar en cuál de ellos la función $G = 30x + 50y$ toma un valor mayor. Por ejemplo, al punto $(3,4)$, que significa 3 parejas y 4 equipos de cuatro, corresponden unas ganancias de:

$$G(3,4) = 30 \cdot 3 + 50 \cdot 4 = 290 \text{ €}$$

Puede mejorarse. ¿Cómo averiguar en cuál de los puntos se obtiene la ganancia máxima? La posibilidad de obtener la ganancia corresponde a cada uno de los 54 puntos y ver cuál es la mayor, es disparatada.

Significado geométrico de la función ganancias

Hemos visto que en punto $(3,4)$ las ganancias son 290 €. Si cogemos el punto $(8,1)$ también las ganancias son 290 €. La coincidencia es debida a que ambos puntos pertenecen a la recta $30x + 50y = 290$.



La ganancia máxima se conseguirá, pues, sobre una recta $30x + 50y = K$ que cumpla las dos condiciones siguientes:

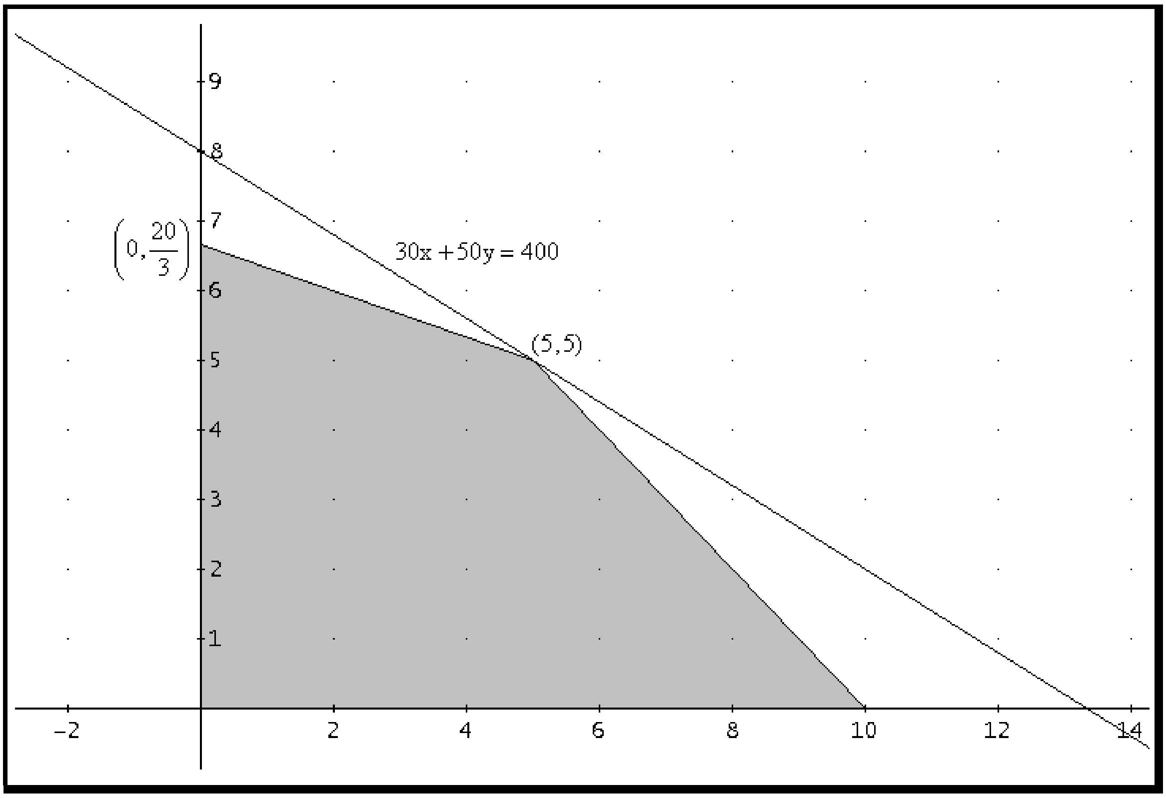
- Ha de pasar por alguno de los puntos factibles (ese punto tendrá los valores de x e y buscados).
- K ha de ser lo mayor posible.

¿Cómo conseguir ambas cosas? Si tenemos en cuenta que todas las rectas $30x + 50y = K$ son paralelas, es fácil explicar la validez del siguiente modo gráfico:

Utilizando regla y cartabón, se localiza la recta que pase por algún punto factible y que esté lo más arriba posible (para que K sea máxima).

Este punto resulta ser el $(5,5)$, para el cual las ganancias son:

$$G(5,5) = 30 \cdot 5 + 50 \cdot 5 = 400\ €$$



Si por precaución calculamos la ganancia en los vértices contiguos $\left(0,\frac{20}{3}\right)$ y $(10,0)$, obtenemos valores menores:

$$G\left(0,\frac{20}{3}\right)=30\cdot 0+50\cdot\frac{20}{3}=333'\widehat{3}$$

$$G(10,0)=30\cdot 10+50\cdot 0=300$$

Con lo cual podemos ya asegurar que la ganancia máxima se consigue haciendo 5 equipos de 4 y 5 parejas, y es de 400 € por cada tarde de trabajo.

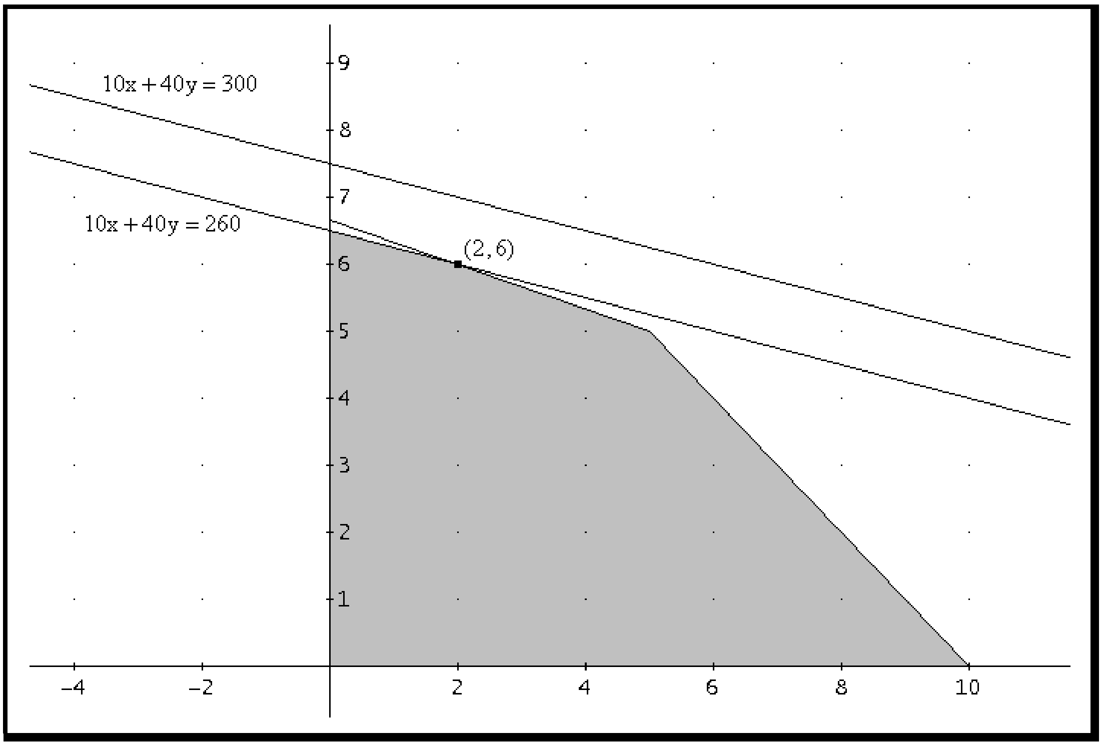
El mismo problema con otras funciones de ganancia

a) Si la agencia pagara a 10 € la pareja y 40 € el equipo de 4, las función de ganancia sería:

$$G(x,y)=10x+40y$$

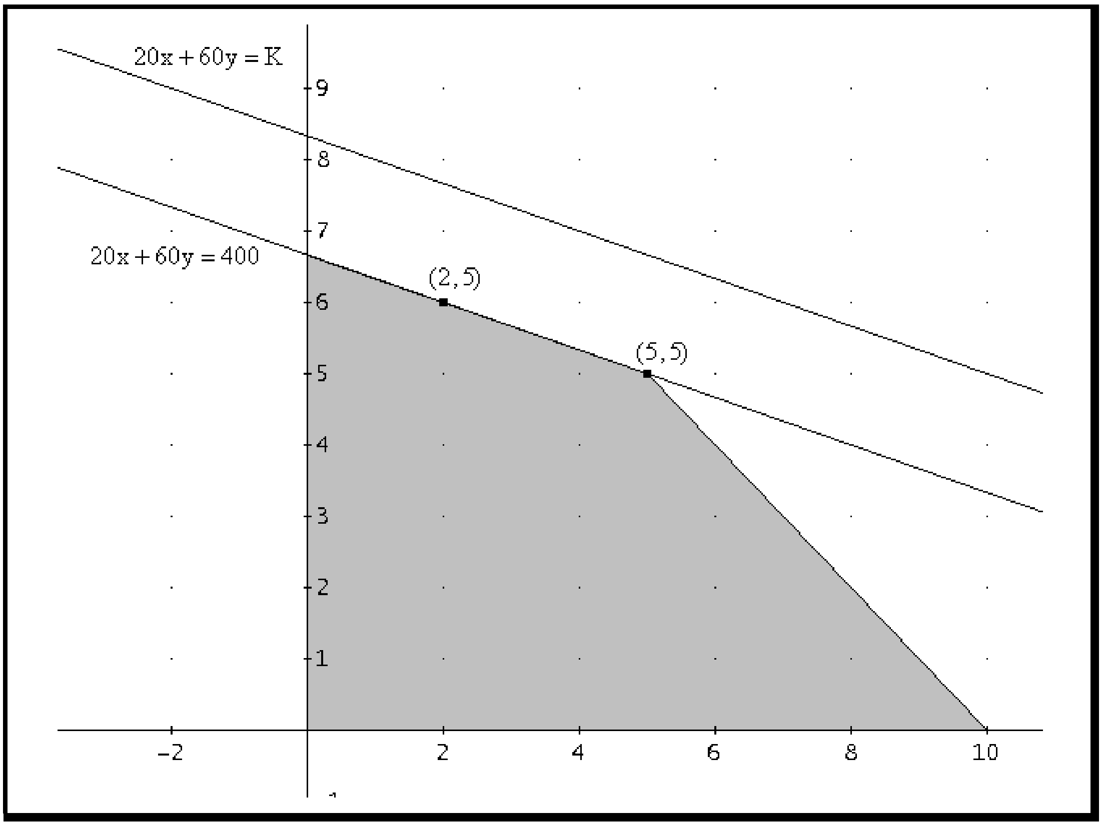
En tal caso el punto factible para el cual la función ganancia toma un valor mayor es el $(2,6)$ [2 parejas, 6 grupos de 3].

$$G(2,6)=10\cdot 2+40\cdot 6=260$$



b) Si se pagara a 20 € la pareja y a 60 € el equipo de 4: $G(x,y) = 20x + 60y$

La función ganancia toma el valor máximo en todos los puntos factibles de la recta $20x + 60y = 400$. Estos puntos son $(2,6)$ y $(5,5)$. Para ellos la ganancia es obviamente 400.



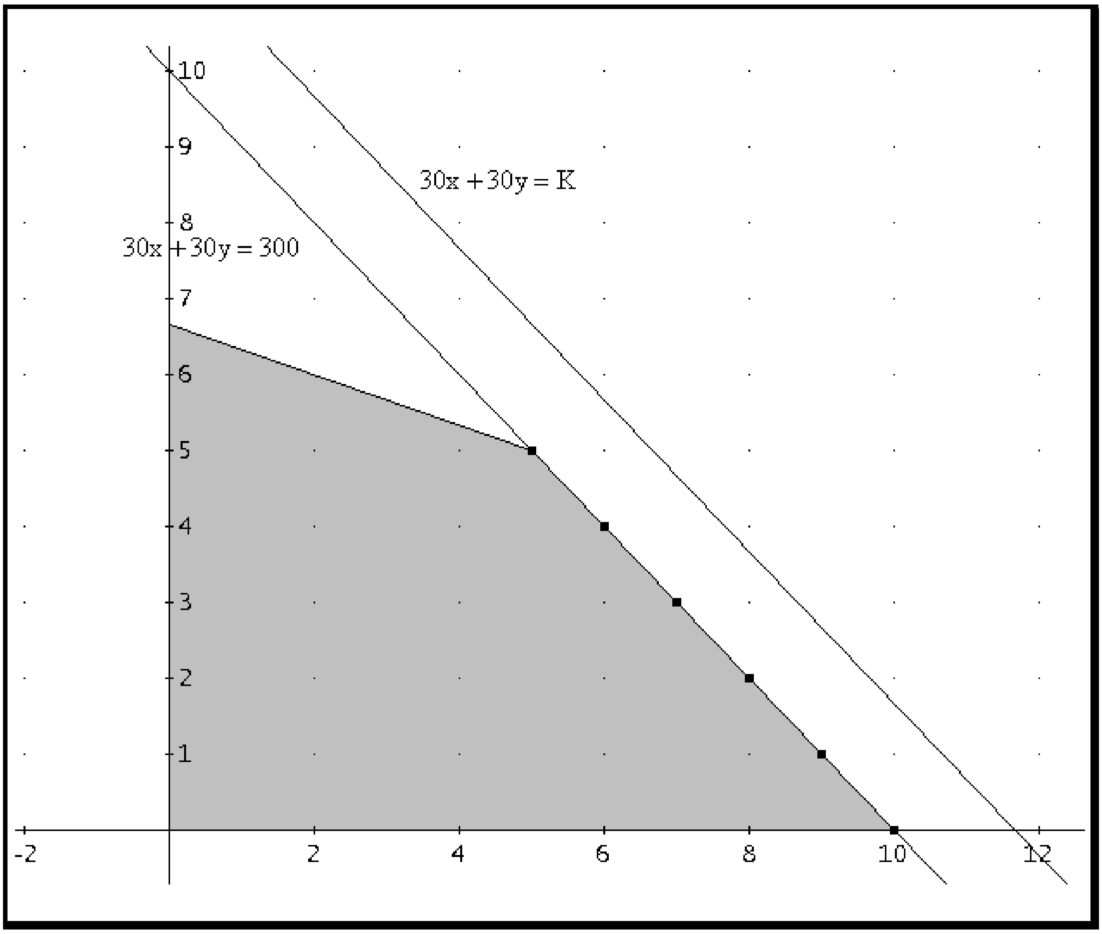
c) Si se pagara a 30 € la pareja y a 30 € el equipo de 4:

$$G(x,y) = 30x + 30y$$

El máximo se obtiene en todos los puntos factibles de la recta:

$$30x + 30y = 300$$

y este máximo es 300.

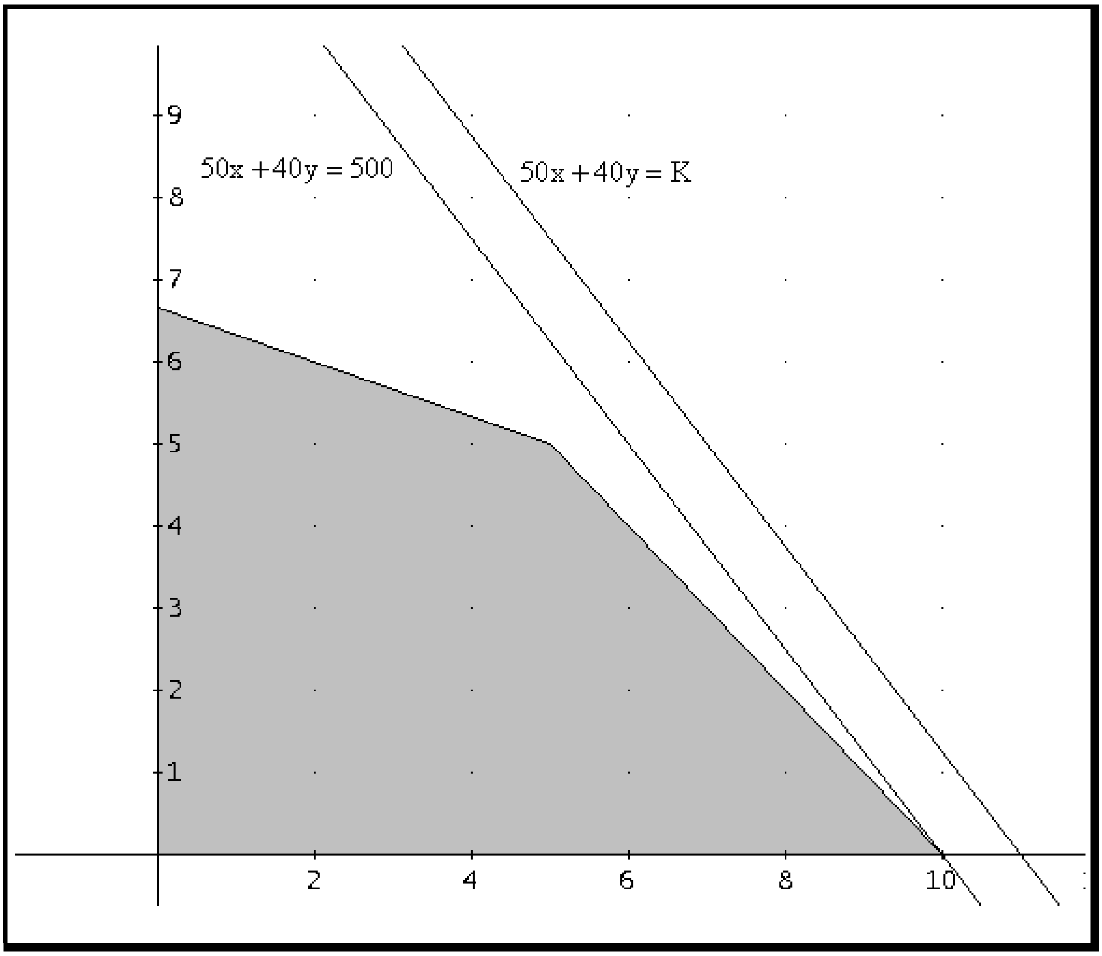


d) Si se diera el caso disparatado de pagar a 50 € la pareja y a 40 € el grupo de 4, es decir que la pareja cobrara más que el grupo de 4, tendríamos:

$$G(x,y) = 50x + 40y$$

El máximo se obtendría en el punto $(10,0)$, es decir, sólo se contratarían parejas.

$$G(10,0) = 50 \cdot 10 = 500$$



Ejemplo: Sea P el conjunto poligonal convexo definido por el sistema de inecuaciones:

$$\mathbf{3x + 2y \leq 6}$$
$$\mathbf{3x - 2y \geq 0}$$
$$\mathbf{5x - y \leq 23}$$

a) Dibujarlo y hallar sus vértices
b) Razonar que la función $z = 3x - y$ no tiene en el conjunto P ni máximo ni mínimo.
c) Razonar que la función $z = 3x + y$ tiene máximo y no tiene mínimo en el conjunto P. Hallarlo.

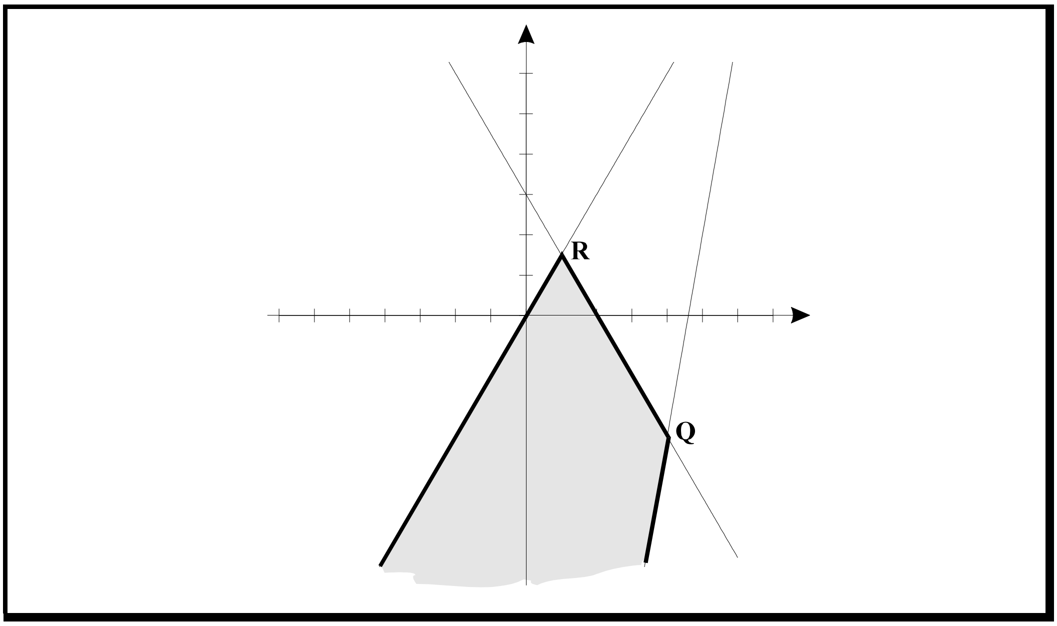
a) Los vértices de P son las soluciones de los siguientes sistemas:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 6 \\ 3x - 2y = 0 \end{array}\right\} \quad R(1,1'5)$$

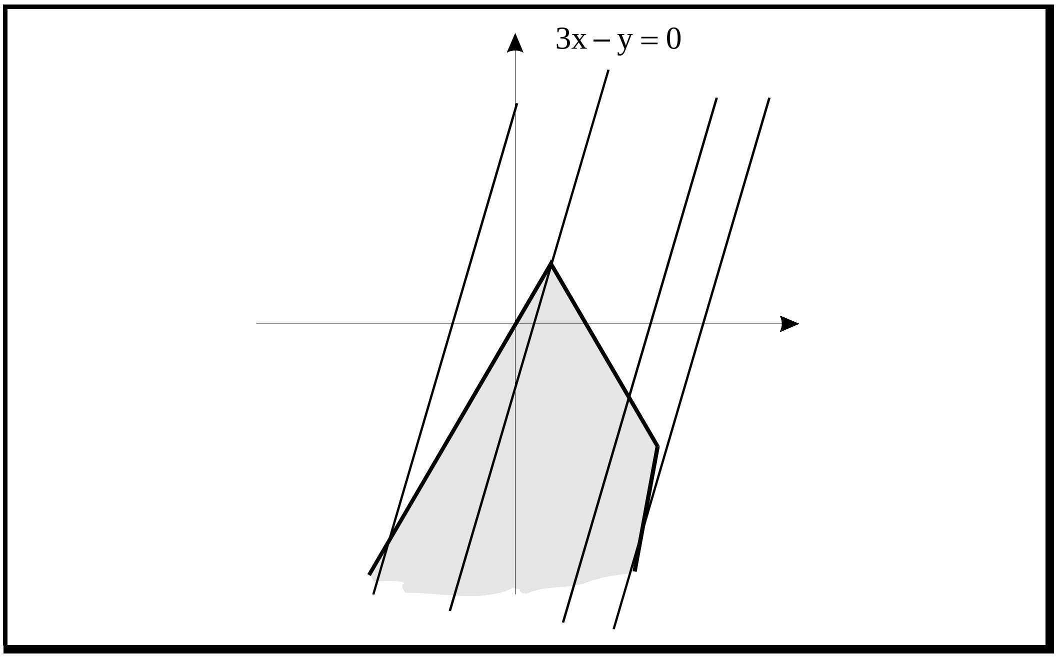
$$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 6 \\ 5x - y = 23 \end{array}\right\} \quad Q(4,-3)$$

$$\left.\begin{array}{r} 3x-2y=0 \\ 5x-y=23 \end{array}\right\} \quad \text{Ninguna}$$

En la siguiente figura se da la representación gráfica de P

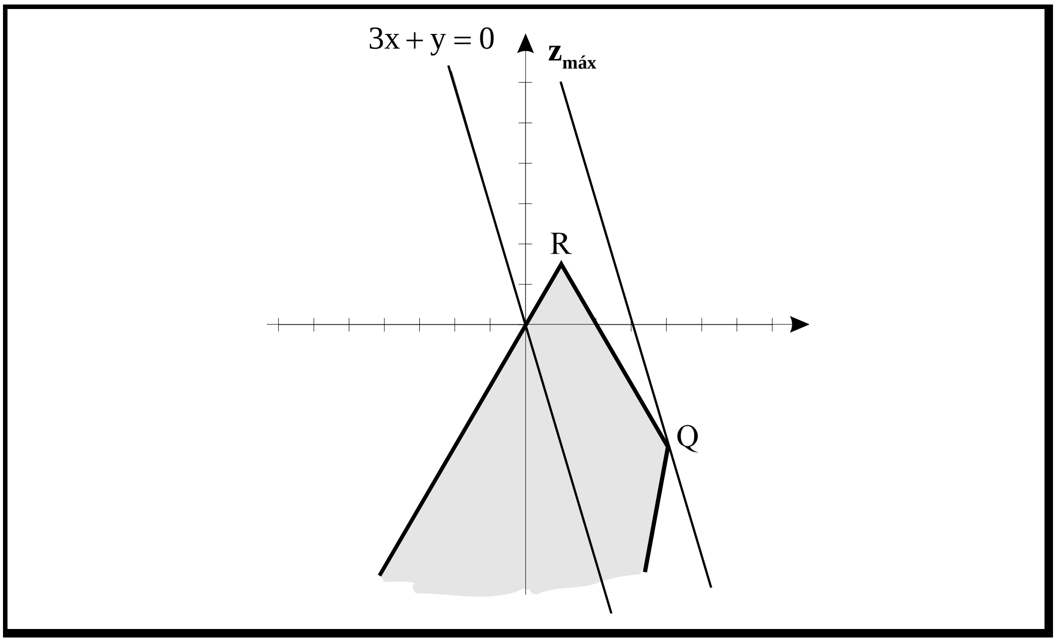


b) En la siguiente figura puede observarse, que cualquier recta paralela a la línea de beneficio nulo, $0=3x-y$, corta al conjunto poligonal P. Por tanto, z no puede tomar en dicho conjunto valor máximo ni valor mínimo. (Teorema 2.2).



c) Si z tiene valor negativo, se aprecia en la figura que la recta $z=3x+y$ cortará al conjunto P. Sin embargo, las rectas que pasan por encima del punto Q no cortarán a P. Así pues, la función z no puede tomar un valor mínimo en P, pero tomará un valor máximo en el vértice $Q(4,-3)$, que será:

$$z = 3\cdot 4 + 1\cdot(-3) = 9$$

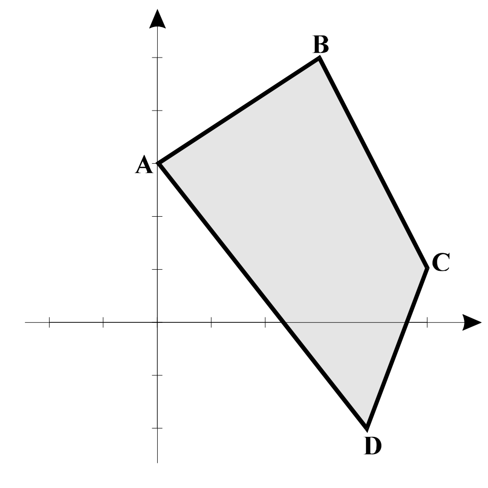


Ejemplo: Encontrar los valores máximo y mínimo de cada una de las siguientes funciones sobre el polígono de la figura adjunta:

a) $\mathbf{z = 3x + 5y}$

b) $\mathbf{z = 3x - 2y}$

c) $\mathbf{z = 2x + y}$

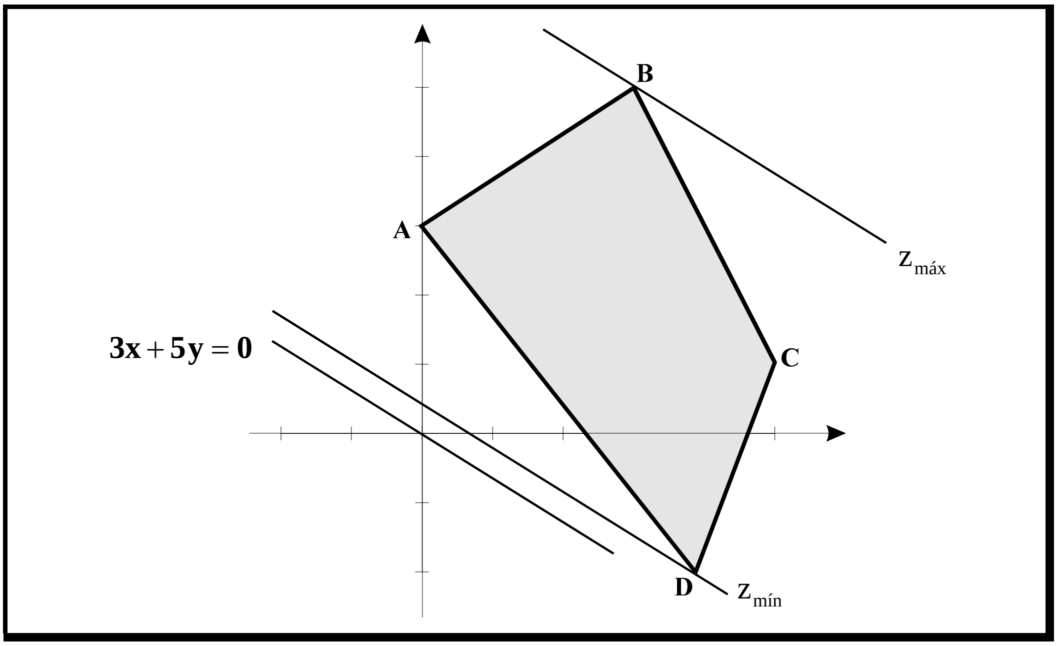


$\mathbf{A(0,3),\ B(3,5),\ C(5,1),\ D(4,-2)}$

a) Los valores máximo y mínimo de una función lineal en un polígono convexo se alcanzan en los vértices. Por tanto, evaluaremos los valores de z en los cuatro vértices.

$$\text{En A}: \quad z = 3\cdot 0 + 5\cdot 3 = 15 \qquad \text{En B}: \quad z = 3\cdot 3 + 5\cdot 5 = 34$$
$$\text{En C}: \quad z = 3\cdot 5 + 5\cdot 1 = 20 \qquad \text{En D}: \quad z = 3\cdot 4 - 5\cdot 2 = 2$$

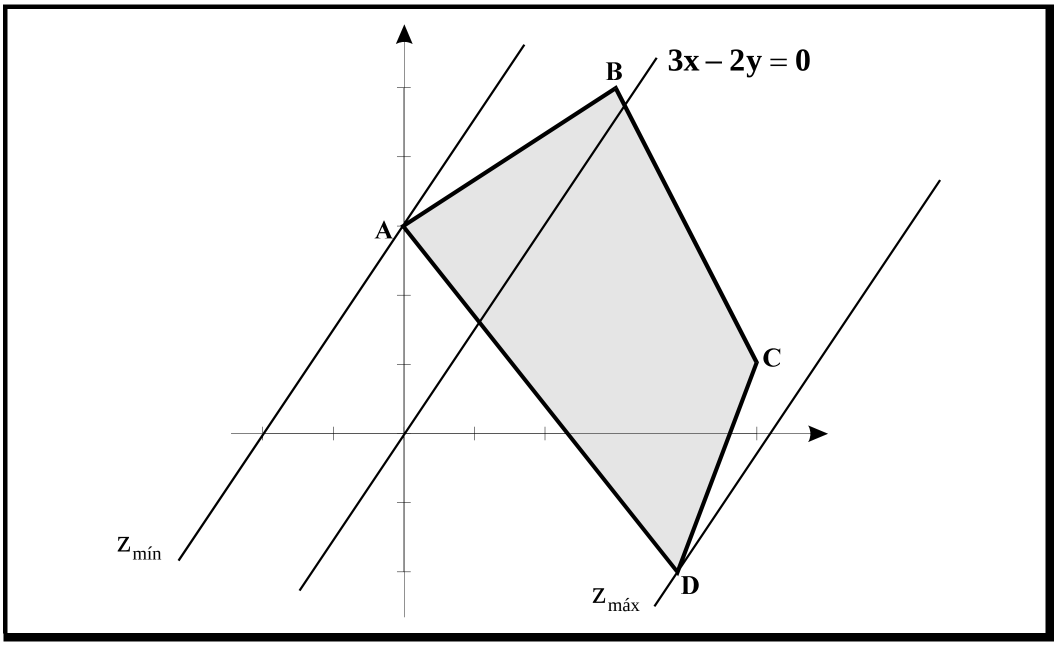
El valor máximo de z en el polígono es 34 y se alcanza en el vértice B. Asimismo, el mínimo de z es 2 y lo proporcionan las coordenadas de D. Todo esto queda reflejado en la siguiente figura:



b) Análogamente, para la función $z=3x-2y$

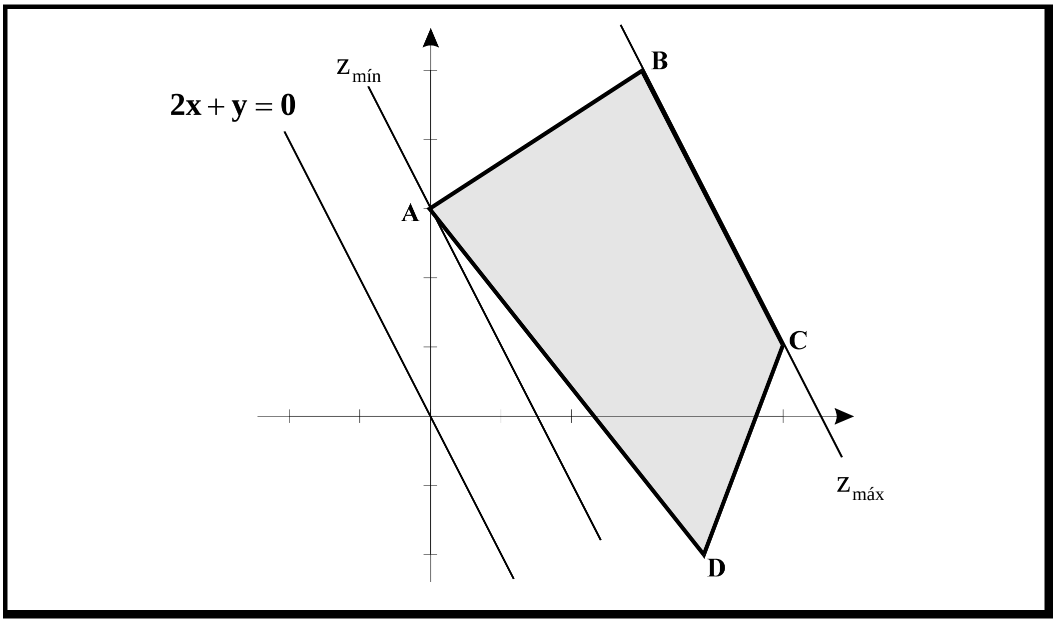
En A:	$z=3\cdot 0-2\cdot 3=-6$	En B:	$z=3\cdot 3-2\cdot 5=-1$
En C:	$z=3\cdot 5-2\cdot 1=13$	En D:	$z=3\cdot 4+2\cdot 2=14$

El valor máximo de z en el polígono es 14 y se alcanza en el vértice D. Asimismo, el mínimo de z es -6 y lo proporcionan las coordenadas de A. Todo esto queda reflejado en la siguiente figura:



c) En este caso, el máximo se alcanza en dos vértices. Por tanto, se alcanza también en cualquier punto del segmento que los une.

En A:	$z = 2 \cdot 0 + \cdot 3 = 3$	En B:	$z = 2 \cdot 3 + 5 = 11$
En C:	$z = 2 \cdot 5 + 1 = 11$	En D:	$z = 2 \cdot 4 - 2 = 6$



Luego, se alcanza el máximo en cualquier punto del segmento BC. Ese máximo vale 11. El mínimo se alcanza en el vértice A y su valor es 3.

Problema de máximos

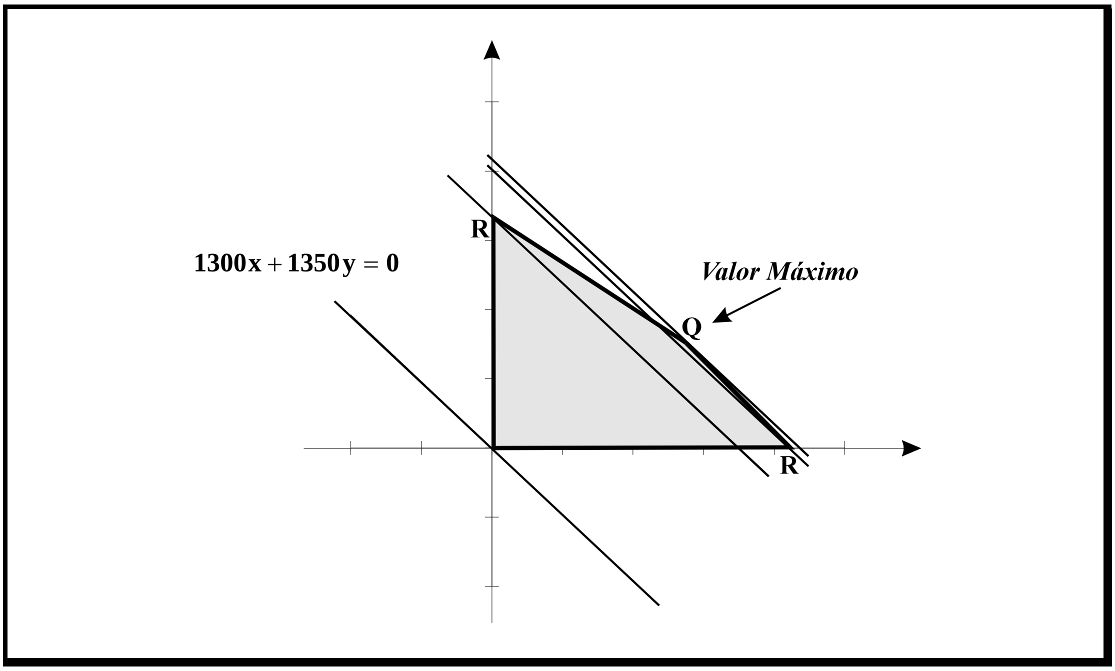
Se trata de maximizar la función $F = 1300x + 1350y$ con las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ 3x + 2y &\leq 500 \\ x + 1'5y &\leq 100 \\ x + y &\leq 85 \end{aligned}$$

1. Representamos el recinto limitado por las inecuaciones:

2. Representamos la línea de beneficio nulo $1300x + 1350y = 0$

3. Trazamos las líneas de nivel que pasen por los vértices P, Q y R. Se observa gráficamente que la función alcanza su máximo en el vértice $Q(55,30)$, ya que la recta que pasa por él tiene mayor ordenada en el origen que las demás como se comprueba a continuación.



Problema de mínimos

Se trata de minimizar la función $F = 200x + 100y$ con las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} 300x + 100y &\geq 30.000 \\ 4x + 8y &\geq 800 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

1. Representamos el recinto limitado por las inecuaciones:

2. Representamos la línea de beneficio nulo $200x + 100y = 0$

3. Trazamos las líneas de nivel que pasen por los vértices A, B y C. Se observa gráficamente que la función alcanza su mínimo en el vértice $B(80, 60)$, ya que la recta que pasa por él tiene menor ordenada en el origen que las demás como se comprueba a continuación.