Problema 1

Una pequeña empresa fabrica carteras y maletines con el mismo tipo de piel. Por fabricar cada cartera se utilizan 20 dm^2 de piel y se necesitan 4 horas de trabajo, mientras que por fabricar un maletín se necesitan 50 dm^2 de piel y 3 horas de trabajo.

La empresa dispone de 33 m^2 de piel y de un equipo humano capaz de proporcionar 380 horas de trabajo. Se sabe también que por cada cartera que es vendida, la empresa obtendrá un beneficio de 30 € y por cada maletín el beneficio será de 60 €. Si suponemos que se venden todas las carteras y todos los maletines que se fabrican ¿cuántas carteras y cuántos maletines ha de fabricar la empresa para obtener un beneficio máximo?

La función a optimizar es el beneficio total, del cual buscamos un valor máximo. Dependiendo del número de carteras y de maletines que fabriquemos tenemos:

x = nº de carteras que se fabrican

y = nº de maletines que se fabrican

y como el beneficio depende de estas incógnitas tenemos:

$$B \text{ (beneficio total)} = f(x, y) = 30x + 60y$$

Por su naturaleza, las variables x e y han de ser números enteros (no tiene sentido fabricar medio maletín) y no pueden ser negativos. Satisfacen entonces las restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\} \quad \text{con} \quad x, y \in Z$$

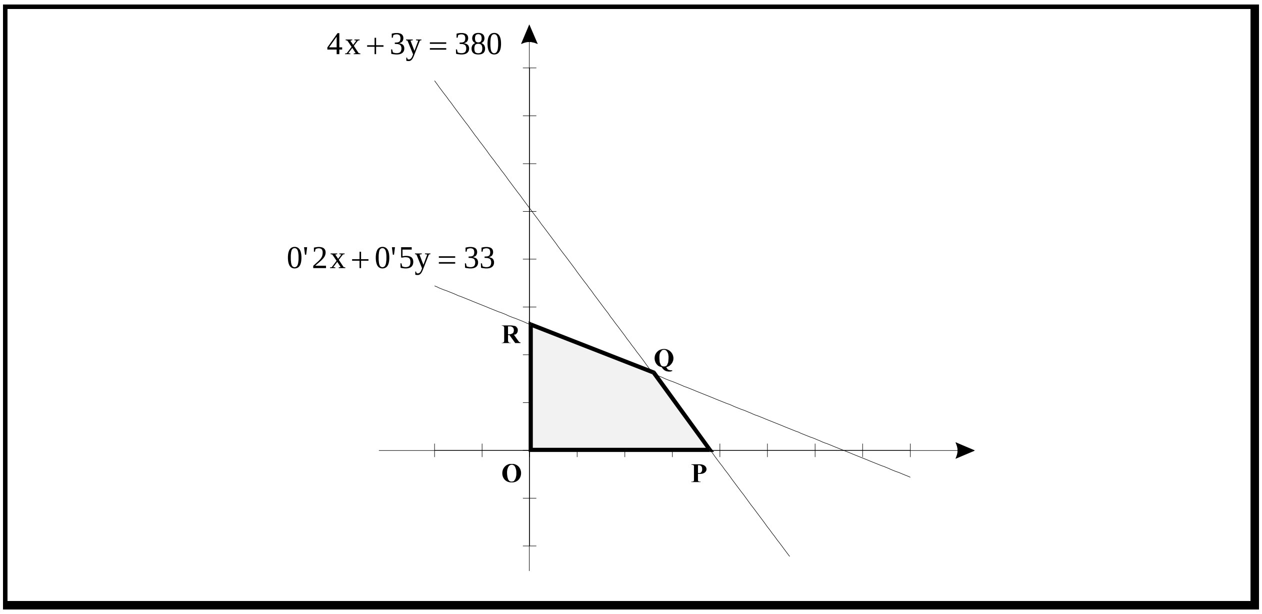
Del contexto del problema se desprenden dos restricciones más para las dos variables:

La relativa a la disponibilidad de la piel $\quad 0'2x + 0'5y \leq 33$

La relativa al total de horas de trabajo utilizables $\quad 4x + 3y \leq 380$

Obtenemos, entonces, un sistema de cuatro inecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ 0'2x + 0'5y &\leq 33 \\ 4x + 3y &\leq 380 \end{aligned}$$



La región factible tiene 4 vértices, que se obtienen como intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ x = 0 \end{array}\right\} \quad O(0,0)$$

$$\left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 4x + 3y = 380 \end{array}\right\} \quad P(95,0)$$

$$\left.\begin{array}{r} 4x + 3y = 380 \\ 20x + 50y = 3300 \end{array}\right\} \quad Q(65,40)$$

$$\left.\begin{array}{r} 20x + 50y = 3300 \\ x = 0 \end{array}\right\} \quad R(0,66)$$

El vértice $O(0,0)$ corresponde a un beneficio total mínimo, ya que si no se fabrica ninguna cartera ni ningún maletín, el beneficio es nulo

$$B(0,0) = 3\cdot 0 + 6\cdot 0 = 0$$

Para calcular el beneficio máximo veamos el valor que toma la función en los demás vértices:

$$B(0,66) = 30\cdot 0 + 60\cdot 66 = 3960\,€$$

$$B(95,0) = 30 \cdot 95 + 60 \cdot 0 = 2850\,€$$

$$B(65,40) = 30 \cdot 65 + 60 \cdot 40 = 4350\,€$$

Es decir, a pesar de que sería más rentable fabricar sólo maletines que no sólo carteras ya que $f(0,66) > f(95,0)$, sin embargo es mucho más rentable fabricar 65 carteras y 40 maletines. Esta es pues la solución óptima del problema planteado.

Problema 2

Una factoría fabrica dos tipos de productos, A y B. Para su elaboración se requieren dos máquinas, M_1 y M_2. El artículo A necesita dos horas de trabajo de la máquina M_1 y 1'5 horas de trabajo de la máquina M_2. El artículo B, respectivamente, 1'5 horas y 1 hora. Cada máquina está en funcionamiento, a lo sumo, 40 horas a la semana. Por cada unidad de artículo A se obtiene un beneficio de 2’5 €, mientras que por cada unidad del artículo B éste es de 1’5 €. ¿Cuántas unidades de A y cuántas de B deben fabricarse semanalmente para obtener un beneficio máximo?

El beneficio semanal será:

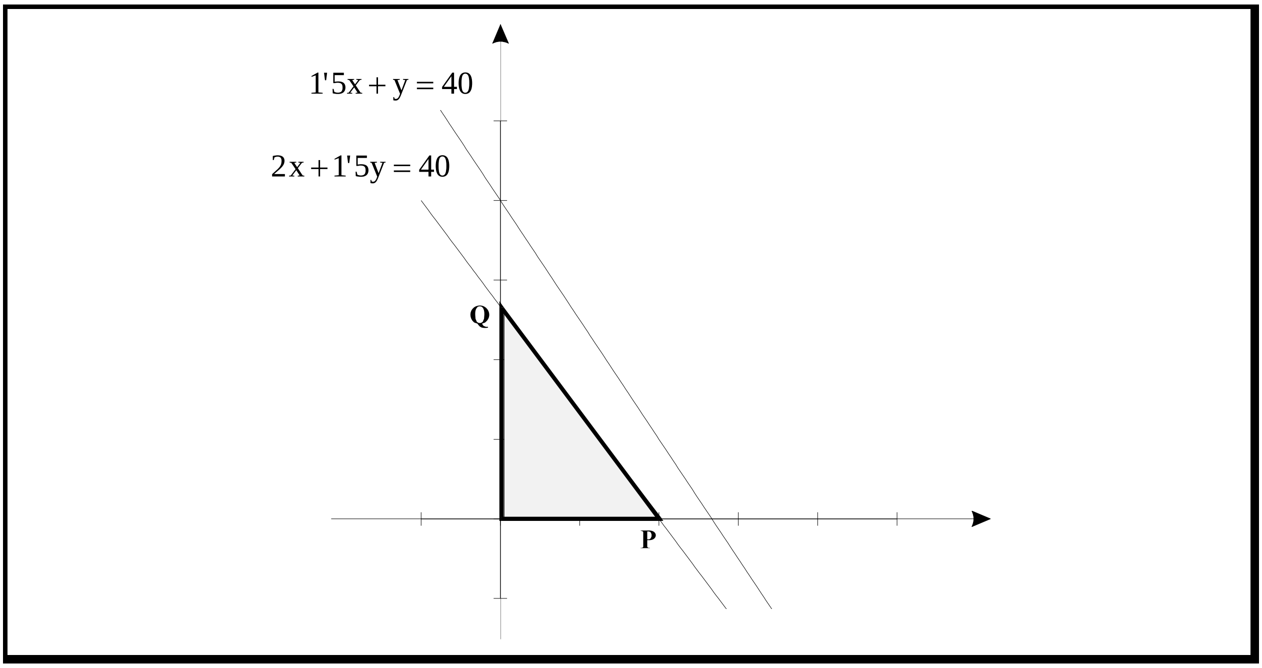
$$B = 2'5x + 1'5y$$

donde **x** es el número de artículos del producto A que se fabrican en una semana, e **y** es el número de artículos B que se elaboran también en una semana. Por otra parte debe ser:

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ 2x + 1'5y &\leq 40 \\ 1'5x + y &\leq 40 \end{aligned}$$

Las dos primeras desigualdades son claras: hay que fabricar un cierto número de unidades de A y de B que, como mínimo, será 0. En cuanto a las otras dos, expresan los tiempos totales de utilización de las dos máquinas.

Observamos que toda solución de la cuarta desigualdad es solución de la tercera siempre y cuando, como es el caso, nos movamos en el primer cuadrante. La solución del problema, es decir, el punto de beneficio máximo, debe ser, si existe, un punto del triángulo rayado.



En este caso los vértices son fáciles de calcular:

$$\left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 2x + 1'5y = 40 \end{array}\right\} \quad P(20,0)$$

$$\left.\begin{array}{r} x = 0 \\ 2x + 1'5y = 40 \end{array}\right\} \quad Q(0,26'66)$$

Sustituyamos en la función beneficio las coordenada de los vértices:

$$B(20,0) = 50\,€ \qquad B(0,26'66) = 39'99\,€$$

por tanto el beneficio es máximo en P es decir cuando el número de unidades fabricadas del artículo A es de 20 y ninguna del artículo B.

Problema 3

Un inversionista dispone de 20000 €. Puede invertir en bonos del tipo A, que dan un rendimiento del 10 por 100, y en bonos del tipo B, cuyo rendimiento es del 15 por 100. Existen unos topes legales que impiden invertir más de 8000 € en bonos del tipo B, pero sucede lo contrario con los del tipo A, en los cuales la inversión mínima es de 5000 €. Por otra parte, el inversionista desea colocar en bonos del tipo A tanto dinero, al menos, como en bonos del

tipo B. ¿Cuánto debe invertir en bonos de cada tipo para que el rendimiento obtenido sea máximo?

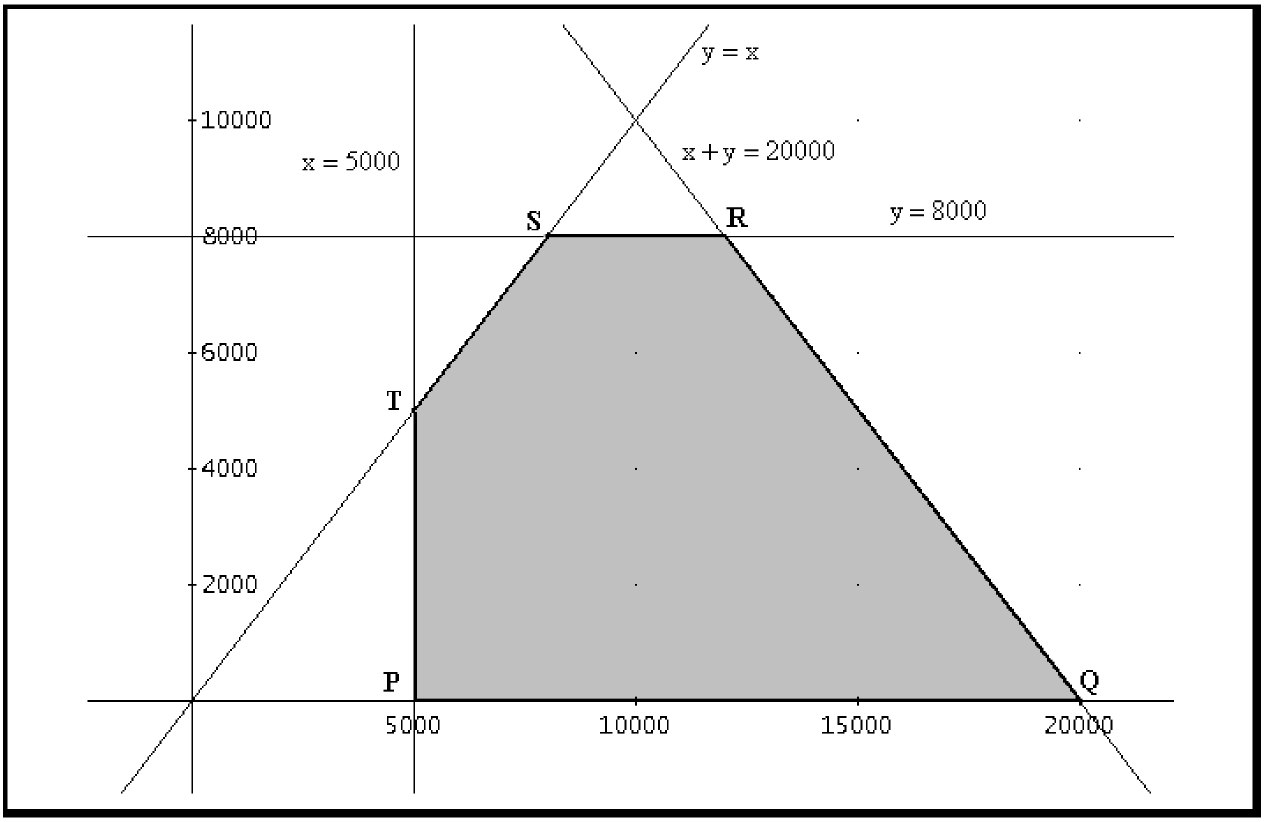
El beneficio que obtiene el inversionista es

$$B = 0'1x + 0'15y$$

donde **x** e **y** son, respectivamente, las cantidades invertidas en bonos del tipo A y en bonos del tipo B. De acuerdo con el enunciado, el sistema de desigualdades es ahora:

$$\begin{aligned} x &\geq 5000 \\ y &\leq 8000 \\ y &\leq x \\ x + y &\leq 20000 \end{aligned}$$

El polígono rayado constituye el conjunto de soluciones en el cual habrá que buscar el punto de beneficio máximo.



Veamos las coordenadas de los vértices de la región factible:

$$\left.\begin{aligned} y &= 0 \\ x &= 5000 \end{aligned}\right\} \quad P(5000,0)$$

$$\left.\begin{array}{r} y = 0 \\ x + y = 20000 \end{array}\right\} \quad Q(20000,0)$$

$$\left.\begin{array}{r} y = 8000 \\ x + y = 20000 \end{array}\right\} \quad R(12000,8000)$$

$$\left.\begin{array}{l} y = 8000 \\ y = x \end{array}\right\} \quad S(8000,8000)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 5000 \\ y = x \end{array}\right\} \quad T(5000,5000)$$

Sustituyamos estos valores en la función beneficio:

$$B(5000,0) = 500 \qquad B(20000,0) = 2000 \qquad B(12000,8000) = 2400$$

$$B(8000,8000) = 2000 \qquad B(5000,5000) = 1250$$

Se observa que el beneficio es máximo en R es decir cuando invierta 12000 € en bonos del tipo A y 8000 € en bonos del tipo B

Problema 4

Un campesino posee un terreno rústico de 70 m^2 que desea utilizar para dos tipos de cultivo, A y B. Cada m^2 de cultivo A le supone un gasto de 60 € y cada m^2 del cultivo B le supone un gasto de 30 €. Por otra parte, el cultivo A supone tres días de trabajo por m^2, mientras que para el cultivo B son 4 días. El agricultor dispone de 1800 € para invertir en el terreno, y cuenta con unos beneficios de 300 € por m^2 cultivado de A, y con 150 € por m^2 cultivado de B.

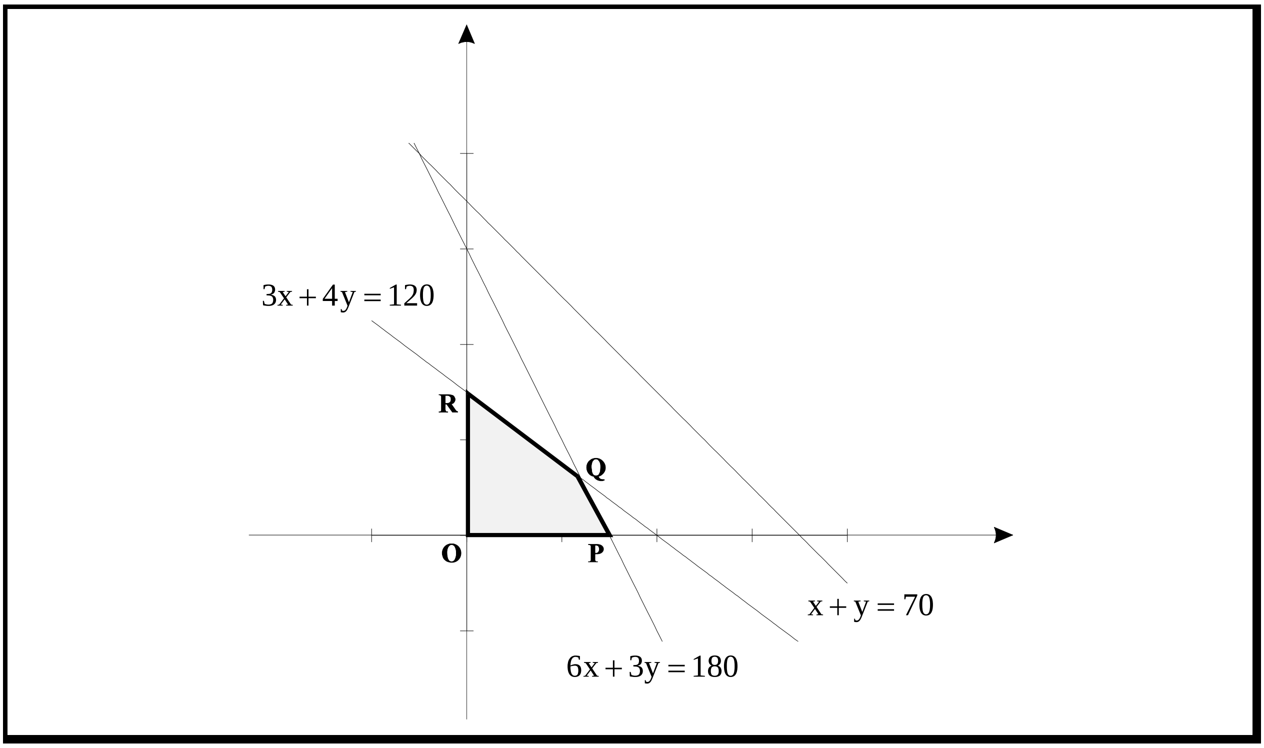
Si el agricultor puede trabajar los cultivos durante 120 días como máximo al año, ¿qué superficie debe dedicar a cada tipo de cultivo para obtener un beneficio máximo?

El beneficio es

$$B = 300x + 150y$$

donde **x** e **y** son las superficies, en m^2, dedicadas a A y B respectivamente. El sistema de inecuaciones que ahora se puede plantear es el siguiente:

$$
\begin{aligned}
x &\geq 0 \\
y &\geq 0 \\
3x + 4y &\leq 120 \\
x + y &\leq 70 \\
60x + 30y &\leq 1800
\end{aligned}
$$



El punto de beneficio máximo habrá que buscarlo en el polígono rayado que constituye el conjunto de soluciones. Ha de observarse, al igual que ocurrió en el ejemplo 1, que la cuarta desigualdad tiene todas las soluciones de las demás en el primer cuadrante, por lo que podría suprimirse sin alterar el resultado.

Calculemos los vértices del polígono convexo:

$$\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad O(0,0)$$

$$\left.\begin{aligned} y &= 0 \\ 6x + 3y &= 180 \end{aligned}\right\} \quad P(30,0)$$

$$\left.\begin{aligned} 3x + 4y &= 120 \\ 6x + 3y &= 180 \end{aligned}\right\} \quad Q(24,12)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ 3x + 4y &= 120 \end{aligned}\right\} \quad R(0,30)$$

Sustituyendo estos valores en la función beneficio obtenemos:

$$B(0,0)=0\,€ \qquad B(30,0)=9000\,€ \qquad B(24,12)=9000\,€ \qquad B(0,30)=4500\,€$$

de donde se deduce que el beneficio máximo se obtiene para todos los puntos del segmento PQ. Hay infinitas soluciones.

Problema 5

Una factoría utiliza dos tipos de maquinaria para producir dos tipos de artículo. El artículo A, del que deben salir diariamente de la factoría al menos 500 unidades, puede obtenerse de la máquina I a razón de 100 unidades diarias, y de la máquina II a razón de 80 unidades diarias. Las cifras correspondientes al artículo B son, respectivamente, 50 y 100, pero se requiere un mínimo de 800 unidades de B fabricadas por día.

El coste de una máquina del tipo I es de 20000 €, y el de una máquina del tipo II de 10000 €. El importador de la maquinaria, por otra parte, no acepta pedidos que no incluyan un mínimo de dos máquinas I y cuatro máquinas II.

En estas condiciones, y si se quiere cubrir la producción, ¿cuántas máquinas de cada tipo se deben comprar para que los costes de adquisición sean mínimos?

La función a minimizar es $C=20000x+10000y$

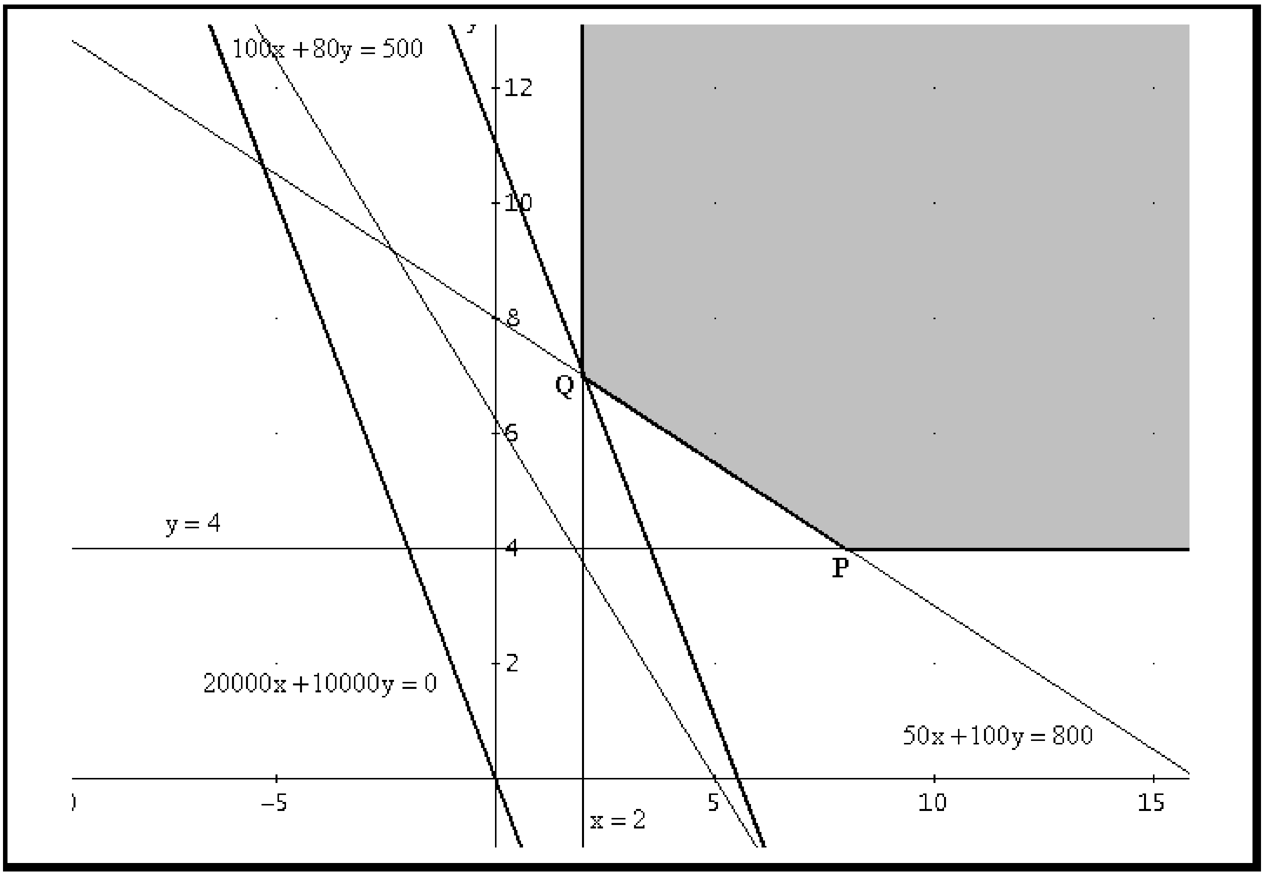
donde **x** es el número de unidades adquiridas de la máquina I, e **y** el correspondiente número de ejemplares de la máquina II. El sistema de inecuaciones es:

$$\begin{aligned} x &\geq 2 \\ y &\geq 4 \\ 100x+80y &\geq 500 \\ 50x+100y &\geq 800 \end{aligned}$$

Ahora la solución no está acotada, por lo que hay que representar la línea de beneficio nulo y trazar líneas paralelas a ella hasta encontrar un vértice que deje todo el recinto a un mismo lado de la línea.

$$20000\,x+10000\,y=0$$

Esto sucede en el vértice Q.



Calculemos las coordenadas de los vértices P y Q:

$$\left.\begin{array}{r} y=4 \\ 50x+100y=800 \end{array}\right\} \quad P(8,4) \qquad\qquad \left.\begin{array}{r} x=2 \\ 50x+100y=800 \end{array}\right\} \quad Q(2,7)$$

Sustituyendo en la función a minimizar tenemos:

$$C(8,4)=200000 \qquad C(2,7)=110000$$

luego los costes de adquisición son mínimos en Q es decir cuando el número de unidades de la maquinaria A que compremos sea de 2 y el número de unidades de la maquinaria B que compremos sea de 7.

Problema 6

El problema de la dieta

Una dieta alimenticia debe contener al menos 400 unidades de vitaminas, 400 unidades de minerales y 1400 calorías. El alimento A contiene, por kg, 200 unidades de vitaminas, 100 unidades de minerales y 400 calorías. El alimento B, debe contener por kg respectivamente, 100, 200 y 500. Cada kg de alimento A cuesta 5 €, y cada kg de B 3 €.

a) ¿Cuál debe ser la composición de la dieta para que el coste diario sea el menor posible?

b) Si el precio de A fuera de 2 €/kg, ¿cuántos kgs de cada producto deberíamos comprar?

a) La función a minimizar es

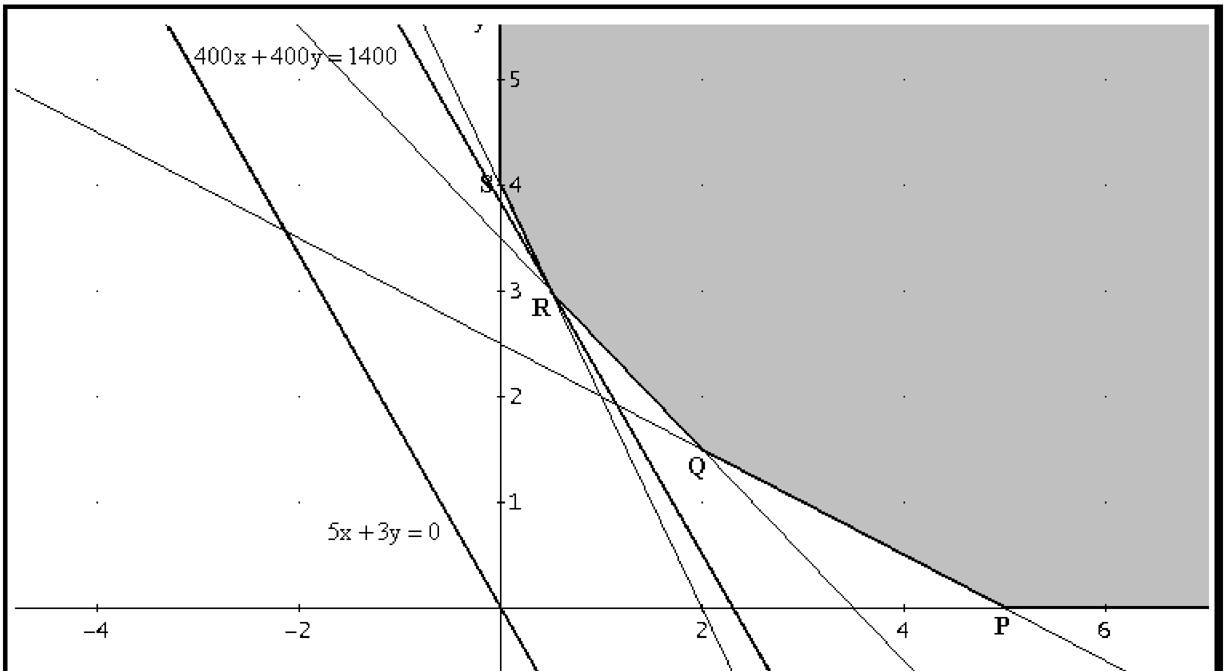
$$C = 5x + 3y$$

siendo **x** e **y** las cantidades en kg de que se compone la dieta diaria.

El conjunto de inecuaciones es:

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ 200x + 100y &\geq 400 \\ 100x + 200y &\geq 500 \\ 400x + 400y &\geq 1400 \end{aligned}$$

De nuevo, el conjunto de soluciones es no acotado. Tenemos que buscar en él la solución del problema si ésta existe, dibujando la línea de beneficio nulo y trazando rectas paralelas a ella.



Calculemos los vértices:

$$\left.\begin{aligned} 100x + 200y &= 500 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad P(5,0) \qquad\qquad \left.\begin{aligned} 100x + 200y &= 500 \\ 400x + 400y &= 1400 \end{aligned}\right\} \quad Q(2,1'5)$$

$$\left.\begin{array}{l}400x+400y=1400\\200x+100y=400\end{array}\right\} \quad R(0'5,3) \qquad \left.\begin{array}{r}x=0\\200x+100y=400\end{array}\right\} \quad S(0,4)$$

Sustituyendo en la función a minimizar tenemos:

$$C(5,0)=25\,€ \qquad C(2,1'5)=14'5\,€ \qquad C(0'5,3)=11'5\,€ \qquad C(0,4)=12\,€$$

de donde se deduce que el coste mínimo se produce en R, luego, para que el coste diario sea el menor posible, la dieta debe estar compuesta por 0'5 kg del alimento A y 3 kg del alimento B.

b) La función a minimizar es $C=2x+3y$

Sustituyendo en la función a minimizar tenemos: $C(2,1'5)=8'5\,€ \qquad C(0'5,3)=10\,€$

de donde se deduce que el coste mínimo se produce en Q, luego, para que el coste diario sea el menor posible, la dieta debe estar compuesta por 2 kg del alimento A y 1'5 kg del alimento B.

Problema 7

La producción anual de una fábrica de cemento es de dos millones y medio de contenedores. La fábrica dispone de colectores mecánicos para controlar la contaminación del aire, pero pese a ello, por la fabricación de cada contenedor se emiten dos unidades de contaminación al aire. Por esta razón se propone a la industria que remplace sus colectores por precipitadores electrostáticos que pueden ser de dos tipos: el tipo A reduce la emisión de partículas contaminantes a la cuarta parte, y el tipo B a la décima parte. Los costes asociados al funcionamiento de los precipitadores son, por contenedor, de 0'14 dólares para el tipo A, y de 0'18 dólares para el tipo B.

Si la contaminación debe reducirse en cuatro millones doscientas mil unidades ¿cuántos contenedores de cemento deben seguir tratamiento anticontaminante en cada tipo de precipitador para que el coste de la operación sea el menor posible?

La función que hay que minimizar es

$$C=0'14x+0'18y$$

donde **x** e **y** significan el número de contenedores tratados con el precipitador A y el precipitador B respectivamente. El sistema de inecuaciones que se plantea en este problema es:

$$\begin{array}{c}x\geq 0\\y\geq 0\\x+y\leq 2.500.000\\1'5x+1'8y\geq 4.200.000\end{array}$$

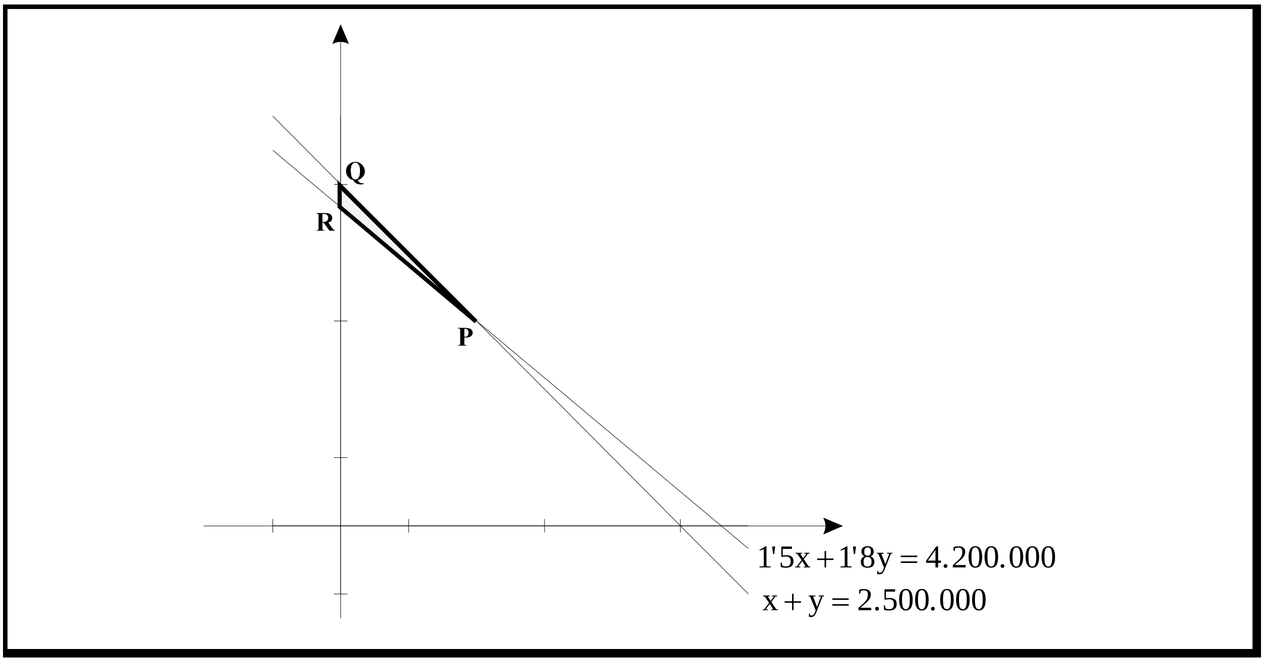
donde la última inecuación se refiere a que si el precipitador A reduce la contaminación a la cuarta parte, ésta disminuirá en $2-0'5=1'5$ unidades por cada contenedor que siga el tratamiento del precipitador. Análogamente, si el precipitador B reduce la contaminación a la décima parte, la correspondiente disminución por contenedor es: $2-0'2=1'8$

Las coordenadas de los vértices son:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=2.500.000 \\ 1'5x+1'8y=4.200.000 \end{array}\right\} \quad P(1.000.000\,,1.500.000)$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y=2.500.000 \\ x=0 \end{array}\right\} \quad Q(0\,,2.500.000)$$

$$\left.\begin{array}{r} x=0 \\ 1'5x+1'8y=4.000.000 \end{array}\right\} \quad R(0\,,2.333.330)$$



Sustituyendo en la función:

$C(1.000.000\,,1.500.000)=410.000 \qquad C(0\,,2.500.000)=450.000 \qquad C(0\,,2.333.330)=420.000$

De los resultados obtenidos se deduce que el coste es menor en P es decir cuando el número de contenedores tratados con el precipitador A sea de 1 millón y el número de ellos tratados con el precipitador B sea de 1 millón y medio.

Problema 8

Un canal de televisión decide organizar un programa de 3 horas de duración en el cual actuarán un grupo de comediantes y un cantante.. La distribución de las tres horas de programación es flexible, pero debe ajustarse a las limitaciones siguientes:

a) Ha de incluir un tiempo de publicidad entre 18 y 36 minutos e inferior en cualquier caso al tiempo destinado al grupo de comediantes.

b) El tiempo destinado a los comediantes no puede exceder las dos horas y el cantante ha de emplear el tiempo restante hasta completar las tres horas.

Por otra parte, cada minuto que pasa los anuncios cuestan 500 €, el grupo de comediantes 1500 € y el cantante 1000 €.

De acuerdo con la experiencia, se ha estimado que cada minuto destinado a los comediantes proporciona cuatro mil espectadores adicionales, cada minuto destinado al cantante proporciona dos mil y contrariamente, por cada minuto de anuncios, la audiencia disminuye en mil espectadores.

Cómo se han de distribuir las tres horas del programa a fin de:

1) Obtener la máxima audiencia.

2) Minimizar el coste del programa.

En este caso tenemos dos funciones a optimizar, las cuales dependerán de las variables:

x = nº de minutos destinados a los comediantes

y = nº de minutos destinados a la publicidad

ya que el número de minutos destinados al cantante es la resta, es decir, $180 - x - y$

Tenemos:

1) A (audiencia) = f (x, y) = $4000x + 2000 \cdot (180 - x - y) - 1000y$ o también

$$A = 1000 \cdot (2x - 3y + 360)$$

2) C (costes) = g (x, y) = $1500x + 1000 \cdot (180 - x - y) + 500y$ o también

$$C = 500 \cdot (x - y + 360)$$

Nuevamente, las variables x, y por su naturaleza no pueden ser negativas; satisfacen entonces las restricciones:

$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

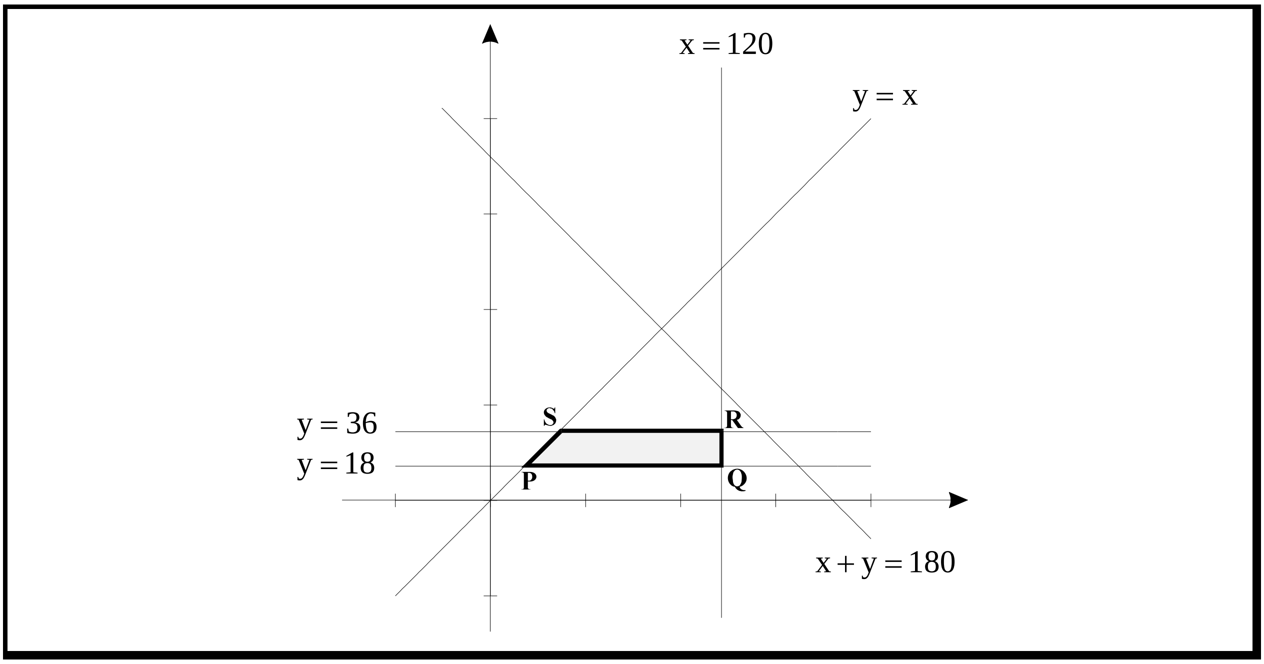
Por otra parte , las restricciones enunciadas en el apartado a) del enunciado se expresan por

$$18 \leq y \leq 36$$
$$y \leq x$$

mientras que las enunciadas en el apartado b) se expresan por

$$x \leq 120$$
$$x + y \leq 180$$

Hemos obtenido un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas.



Si calculamos los vértices de la región factible tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} y = x \\ y = 18 \end{array}\right\} \quad P(18,18)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 120 \\ y = 18 \end{array}\right\} \quad Q(120,18)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 120 \\ y = 36 \end{array}\right\} \quad R(120,36)$$

$$\left.\begin{array}{l} y = 36 \\ y = x \end{array}\right\} \quad S(36,36)$$

Sustituyamos todos los valores de los vértices en la función que da la audiencia para saber cual es la máxima:

$$A(18,18) = 342.000 \quad A(120,18) = 546.000 \quad A(120,36) = 492.000 \quad A(36,36) = 324.000$$

De lo anterior se deduce que la audiencia máxima se obtiene para $A(120,18) = 546.000$ luego la solución óptima es única. El coste del programa de máxima audiencia es de $C(120,18) = 231000$.

Sustituyamos todos los valores de los vértices en la función que da el coste para saber el coste mínimo:

$$C(18,18) = 180000\,€ \qquad C(120,18) = 231000\,€$$

$$C(120,36) = 222000\,€ \qquad C(36,36) = 180000\,€$$

Como hay dos vértices para los cuales el coste mínimo es el mismo significa que el coste mínimo se obtiene para todos los puntos del segmento determinado por los vértices $P(18,18)$ y $S(36,36)$. Esto significa que el programa tendrá un coste mínimo siempre que los comediantes y la publicidad ocupen el mismo número de minutos, y este número esté comprendido entre 18 y 36.

Se observa que en todas las soluciones de coste mínimo la audiencia es pequeña, pero ¿en cual de ellas la audiencia es máxima? Tendremos bastante con comparar el valor de la función audiencia en los extremos del segmento PS, es decir en los vértices P y S.

$$A(18,18) = 3420 > 3240 = A(36,36)$$

de donde se deduce que entre todas las soluciones de coste mínimo, la que proporciona una audiencia más grande es la determinada por el vértice P, es decir, aquella en la cual tanto los comediantes como la publicidad ocupan 18 minutos.

Problema 9

Una empresa de automóviles fabrica coches y camiones y dispone de tres talleres A (motores), B (carrocerías) y C (montajes), que trabajan simultáneamente y necesitan por cada unidad las siguientes horas:

	A	B	C
Coche	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{8}{7}$
Camión	$\frac{4}{3}$	3	$\frac{5}{2}$

a) ¿Qué producción mensual obtendría si A y B trabajaran 200 horas?

b) ¿Sería conveniente hacer trabajar 200 horas mensuales a los talleres A y B si en C no pudieran trabajar más de 200 horas por mes?

c) Suponiendo que ningún taller puede trabajar más de 200 horas/mes, dibújese el polígono de producción factible.

d) En las condiciones del apartado c), si los beneficios por coche y camión son 3000 € y 4000 € respectivamente, ¿cómo se debería fijar la producción para tener un beneficio total máximo?

a) Si llamamos $\begin{cases} x \text{ al número de coches} \\ y \text{ al número de camiones} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{horas necesarias en } A = \dfrac{4x}{3} + \dfrac{4y}{3} \\ \text{horas necesarias en } B = \dfrac{x}{2} + 3y \end{cases}$

Por tanto $\left.\begin{array}{r} \dfrac{4x}{3} + \dfrac{4y}{3} = 200 \\ \dfrac{x}{2} + 3y = 200 \end{array}\right\}$ y este sistema tiene la solución $x = 100,\ y = 50.$

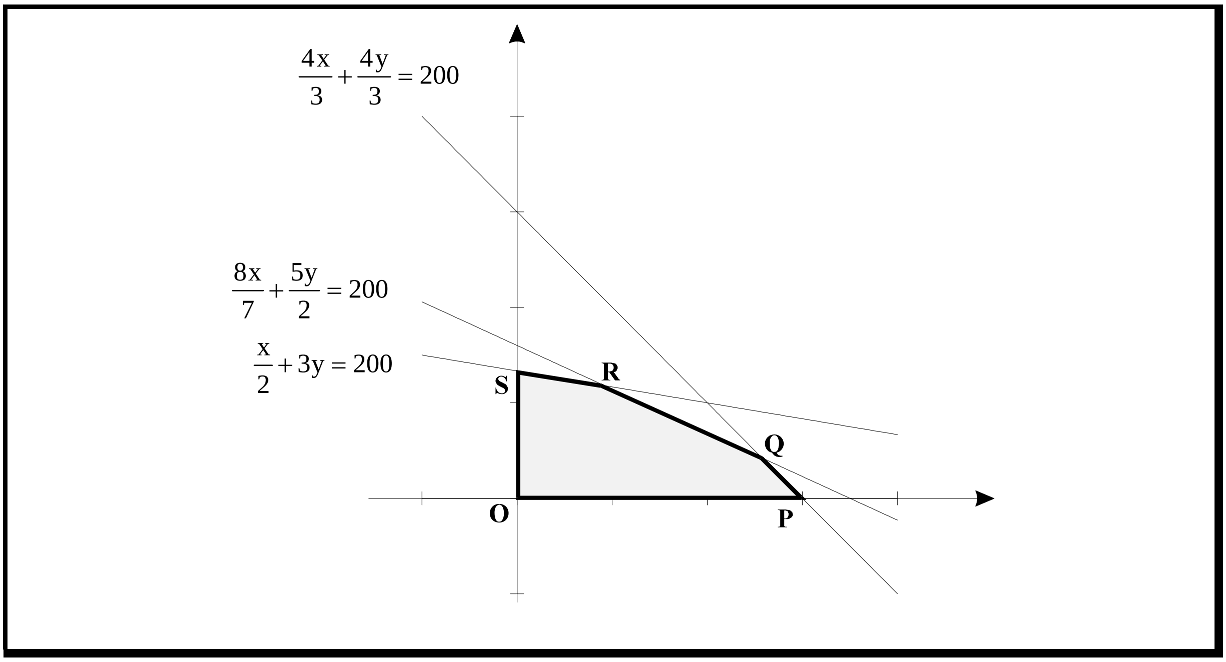
b) Para montar esos 100 coches y 50 camiones, el taller C necesitaría el siguiente número de horas por mes:

$$100 \cdot \frac{8}{7} + 50 \cdot \frac{5}{2} = 239'8 \text{ horas}$$

Por tanto, si C sólo dispone de 200 horas, no es conveniente que trabajen A y B durante tantas horas mensuales. En vez de eso, les convendrá rebajar su producción para ajustarla más a la cadena de montaje.

c) El polígono de producción factible está dado por las restricciones:

$$\frac{4x}{3}+\frac{4y}{3}\leq 200$$
$$\frac{x}{2}+3y\leq 200$$
$$\frac{8x}{7}+\frac{5y}{2}\leq 200$$
$$x\geq 0$$
$$y\geq 0$$



Obviamente, los puntos del polígono que corresponden a producciones realizables son los de coordenadas enteras.

d) La función que da el beneficio según el número de coches y camiones es

$$B=3000x+4000y$$

Calculamos los vértices del polígono para ver en cual de ellos el beneficio es máximo:

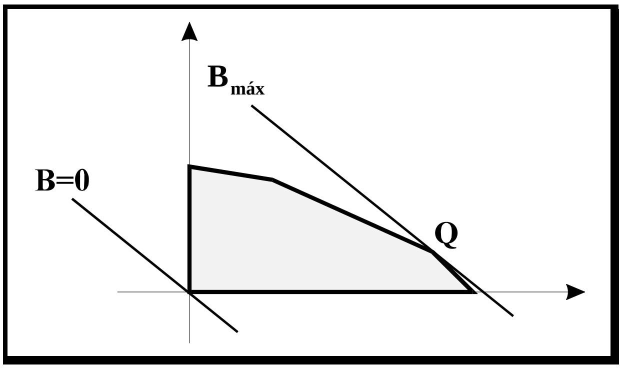
$$\left.\begin{array}{r} x=0 \\ \frac{x}{2}+3y=200 \end{array}\right\} \quad S(0,66'66) \qquad \left.\begin{array}{r} \frac{x}{2}+3y=200 \\ \frac{8x}{7}+\frac{5y}{2}=200 \end{array}\right\} \quad R(45'90,59'01)$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{4x}{3}+\dfrac{4y}{3}=200\\[2mm]\dfrac{8x}{7}+\dfrac{5y}{2}=200\end{array}\right\} \quad Q(128'94,21'05) \qquad \left.\begin{array}{l}\dfrac{4x}{3}+\dfrac{4y}{3}=200\\ y=0\end{array}\right\} \quad P(150,0) \qquad \left.\begin{array}{l}x=0\\ y=0\end{array}\right\} \quad O(0,0)$$

Sustituyendo estos valores para la función beneficio, y teniendo en cuenta que tanto la "x" como la "y" deben ser cantidades enteras, tenemos:

$$B(0,66)=264000\,€ \qquad B(46,59)=374000\,€ \qquad B(129,21)=471000\,€$$

$$B(150,0)=450000\,€ \qquad B(0,0)=0\,€$$



Luego el beneficio máximo sucede en Q, es decir cuando el número de coches es de 129 y el de camiones de 21 siendo entonces el beneficio de 4710000 €

En la figura adjunta se ha dibujado la línea de beneficio nulo y su paralela por el punto Q que es la línea de beneficio máximo

Problema 10

El problema del transporte

Una empresa tiene dos factorías A y B. En ellas fabrica un determinado producto, a razón de 500 y 400 unidades por día respectivamente. El producto ha de ser distribuido posteriormente entre tres centros I, II y III que requieren, respectivamente, 200, 300 y 400 unidades. Los costos de transportar cada unidad del producto desde cada factoría a cada centro distribuidor son los indicados en la tabla siguiente:

	I	II	III	Fabricación
A	**50**	**60**	**10**	**500 unidades**
B	**25**	**40**	**20**	**400 unidades**
Demanda	**200**	**300**	**400**	

¿De qué manera deben organizar el transporte a fin de que los gastos sean mínimos?

Si llamamos: $\begin{cases} \text{x al nú mero de unidades de A que se llevan a I} \\ \text{y al nú mero de unidades de A que se llevan a II} \end{cases}$

	I	II	III	Fabricación
A	x	y	$500 - x - y$	500 unidades
B	$200 - x$	$300 - y$	$x + y - 100$	400 unidades
Demanda	200	300	400	

tendremos que: $\begin{cases} 200 - x & \text{unidades de B se llevan a I} \\ 300 - y & \text{unidades de B se llevan a II} \\ 500 - x - y & \text{unidades de A se llevan a III} \\ 400 - (500 - x - y) = x + y - 100 & \text{unidades de B se llevan a III} \end{cases}$

La función que da los gastos es el resultado de sumar cada uno de los productos de las seis cantidades transportadas por sus respectivos precios de transporte.

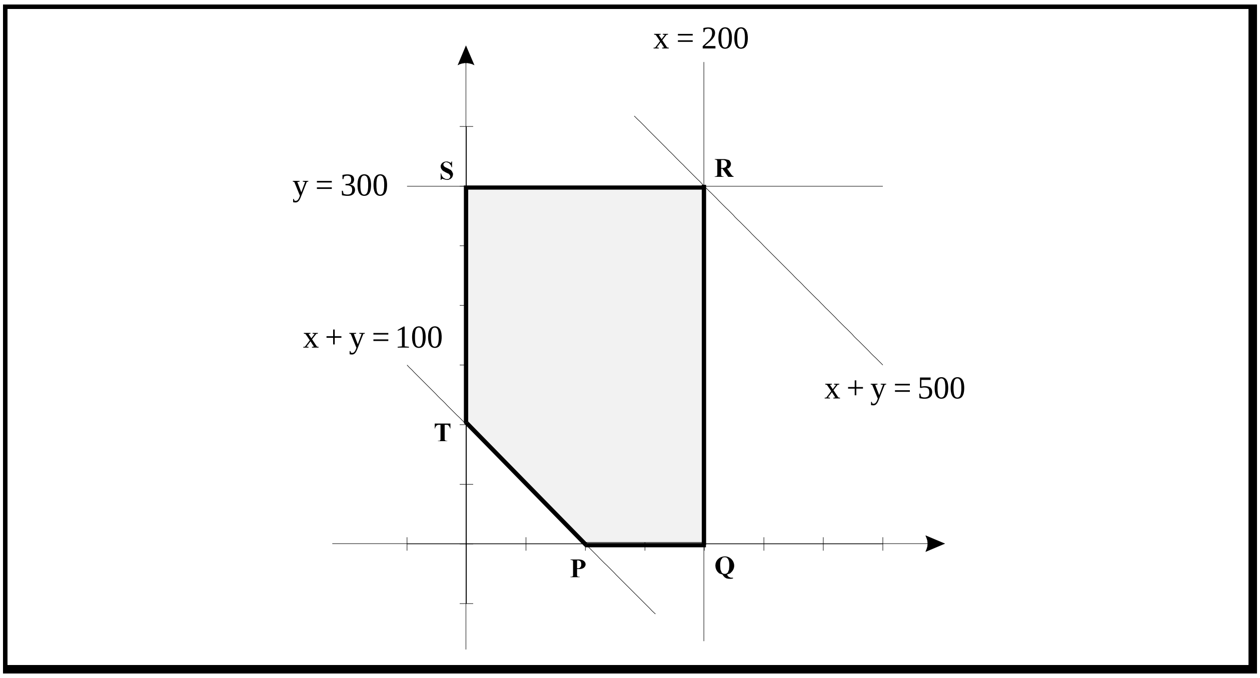
$$G = 50x + 60y + 25 \cdot (200 - x) + 40 \cdot (300 - y) + 10 \cdot (500 - x - y) + 20 \cdot (x + y - 100)$$

$$G = 35x + 30y + 20000$$

Las restricciones se obtienen al obligar a que todas las cantidades sean positivas:

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ 500 - x - y &\geq 0 \\ 200 - x &\geq 0 \\ 300 - y &\geq 0 \\ x + y - 100 &\geq 0 \end{aligned}$$

Estas restricciones dan lugar a la región factible de la figura adjunta:



Si calculamos los vértices y obtenemos el valor correspondiente para el gasto tenemos:

Vértices	Gasto
T(0,100)	G = 23.000
S(0,300)	G = 27.000
P(100,0)	G = 23.500
Q(200,0)	G = 27.000
R(200,300)	G = 36.000

El gasto mínimo se verifica en T(0,100).

En definitiva, el transporte debe organizarse como indica el siguiente cuadro:

	I	II	III
Unidades de A	0	100	400
Unidades de B	200	200	0

Problema 11

Cuando la solución no da un número entero

Un fabricante de chocolate elabora dos tipos de cajas de bombones, de 250 gr y de 300 gr, respectivamente. Obtiene un beneficio de 5 € por caja de las primeras, y de 6’5 € por caja

de las últimas. Si dispone de 100 kg de chocolate para confeccionar las cajas, y el número de cajas pequeñas debe ser, al menos, igual al de cajas grandes, ¿cuántas de cada tipo debe hacer si desea obtener un beneficio máximo?

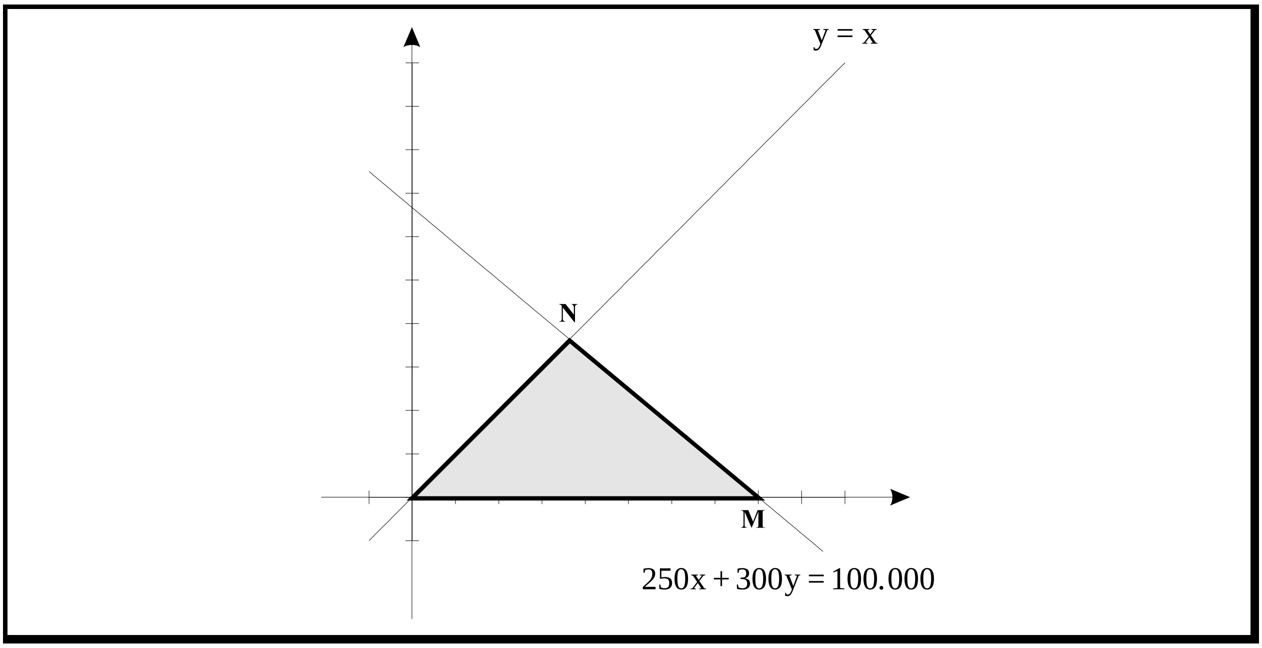
Llamemos "x" al número de cajas del primer tipo, e "y" al número de cajas del segundo tipo.

La función a optimizar es

$$B = 5x + 6'5y$$

El conjunto de restricciones son:

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ 250x + 300y &\leq 100000 \\ x &\geq y \end{aligned}$$



Las coordenadas de los vértices del conjunto factible son:

$$M(400,0) \qquad \left.\begin{aligned} x = y \\ 250x + 300y = 100000 \end{aligned}\right\} \quad N\left(\frac{2000}{11}, \frac{2000}{11}\right) = N(181'818, 181'818)$$

Vértices	Beneficios
M(400,0)	$B = 2000$ €
N(181'81,181'81)	$B = 2090'90$ €

El beneficio máximo se obtiene en N, pero esta solución es teórica ya que x e y representan números de cajas y deben de ser números enteros. Por ello hay que buscar los que estén más próximos a la solución teórica, y por supuesto dentro de la región factible.

Por ejemplo, si cogemos el punto $(182,182)$ que es el que más cerca está de $N(181'818,181'818)$ observamos que no es solución del sistema de inecuaciones, ya que no verifica la segunda desigualdad.

Como no sabemos si está dentro o fuera del recinto, lo comprobamos.

$$(182,182) \longrightarrow \left.\begin{array}{r} x \geq y \\ 250x + 300y \leq 100000 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 182 \geq 182 \\ 1001 \not\leq 1000 \end{array}\right\}$$

Si cogemos el punto $(181,182)$ observamos que tampoco es solución porque no verifica la primera desigualdad

$$.(181,182) \longrightarrow \left.\begin{array}{r} x \geq y \\ 250x + 300y \leq 100000 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 181 \not\geq 182 \\ 998'5 \leq 1000 \end{array}\right\}$$

Si cogemos el punto $(182,181)$ observamos que es solución del sistema:

$$(182,181) \longrightarrow \left.\begin{array}{r} x \geq y \\ 250x + 300y \leq 100000 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 182 \geq 181 \\ 998 \leq 1000 \end{array}\right\}$$

por tanto el beneficio es máximo cuando el número de cajas del primer tipo es de 182 y el número de cajas del segundo tipo es de 181 con lo que se consigue un beneficio máximo de $B = 2086'5\,€$.

Problema 12

Una fábrica produce bicicletas y motocicletas. En la planta de montaje se tarda media hora en montar una bicicleta y tres cuartos de hora en una motocicleta. En la planta de acabado se invierte un tiempo de media hora en cada caso. En ambas plantas se trabaja 40 horas a la semana, pero se dispone de un tiempo variable e impredecible para poner el sistema en funcionamiento y para dejar la maquinaria en condiciones al acabar la jornada de trabajo. Por otra parte, por razones de mercado, el número de bicicletas no debe ser superior al número de motocicletas.

a) Resolver gráficamente el sistema de ecuaciones que se puede plantear a partir de los datos del enunciado.

b) ¿Se pueden producir semanalmente 20 bicicletas y 30 motocicletas? ¿Y 25 bicicletas y 20 motocicletas? ¿Y 10 bicicletas y 20 motocicletas?

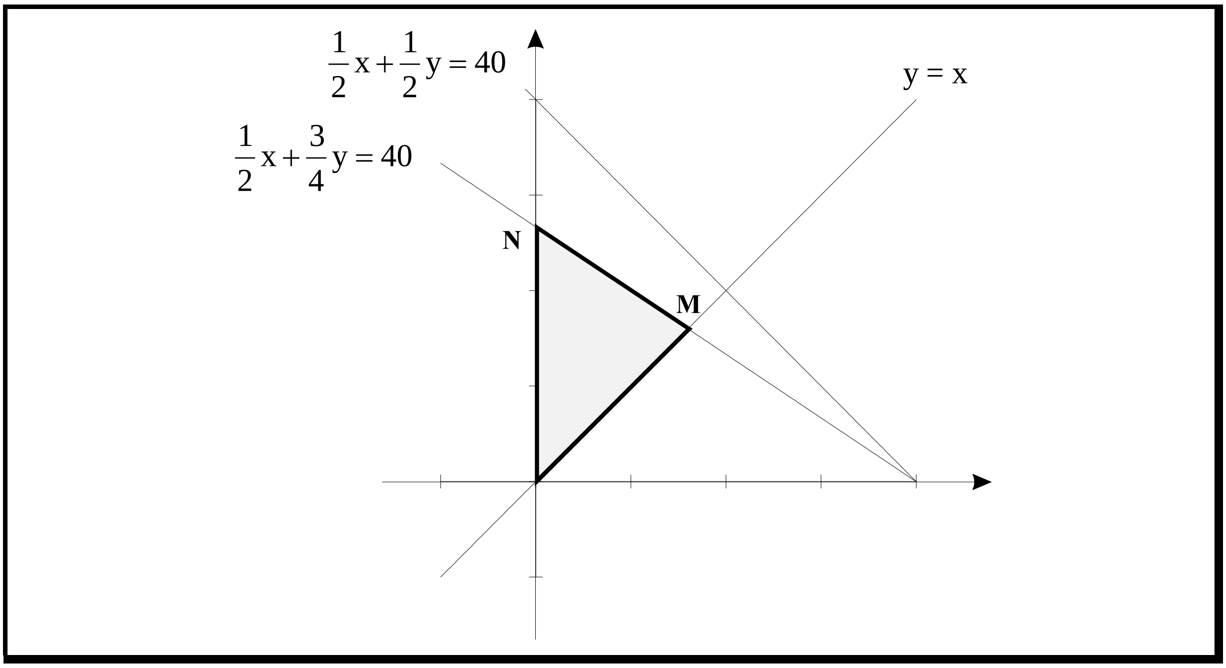
c) Si el beneficio obtenido por la venta de cada bicicleta es de 30 €, y por cada motocicleta de 100 €, determinar el número de vehículos de cada clase que se deben fabricar semanalmente para que los beneficios obtenidos sean máximos.

a) Sea "x" el número de bicicletas e "y" el número de motocicletas. Podemos agrupar los datos en la siguiente tabla:

	Montaje	Acabado
Bicicletas	$\frac{1}{2}$ x	$\frac{1}{2}$ x
Motocicletas	$\frac{3}{4}$ x	$\frac{1}{2}$ y
Horas semanales	40	40

El conjunto de restricciones es el siguiente:

$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$
$$x \leq y$$
$$\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y \leq 40$$
$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \leq 40$$



b)

$\left.\begin{array}{l} x=20 \\ y=30 \end{array}\right\}$ Sí pertenece al conjunto de soluciones ya que está dentro del conjunto factible

$\left.\begin{array}{l} x=25 \\ y=20 \end{array}\right\}$ No pertenece al conjunto de soluciones. No está dentro del conjunto factible

$\left.\begin{array}{l} x=10 \\ y=20 \end{array}\right\}$ Sí pertenece al conjunto de soluciones ya que está dentro del conjunto factible

c) La función objetivo correspondiente es : $B=30x+100y$

Si calculamos los vértices de la región factible obtenemos:

$$N\left(0,\frac{160}{3}\right) \qquad \left.\begin{array}{r} x=y \\ \frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y=40 \end{array}\right\} \quad M(32,32)$$

Vértices	Beneficios
$M(32,32)$	$B=4160€$
$N\left(0,\frac{160}{3}\right)$	$B=5333'33€$

de donde se deduce que el beneficio es máximo en el punto N.

Como es obvio, no corresponde a una situación real y habría por tanto, que hallar el valor entero más próximo a éste y que por supuesto pertenezca al conjunto de soluciones, es decir, esté dentro del conjunto factible.

Por ejemplo, para el punto $(0,53)$ que pertenece al conjunto factible se obtiene un beneficio de $B=5300€$.

Si cogemos el punto $(1,53)$ y sustituimos en la ecuación $\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y\le 40$ obtenemos $40'25\le 40$ lo que significa que la desigualdad no se cumple, luego el beneficio es máximo cuando el número de bicicletas fabricadas es nulo y el de motocicletas es de 53.

Problema 13

Un técnico en electrónica fabrica receptores de televisión de dos tipos. Cada receptor del primer tipo le supone 3 horas diarias de trabajo, y cada uno del segundo tipo 2 horas, no dedicando a esta tarea más de 12 horas diarias. Cada receptor del primer tipo le supone unas ganancias de 120 €, mientras que los del segundo tipo sólo le proporcionan 90 €.

a) ¿Cuántos receptores de cada tipo debe fabricar al día para que obtenga un beneficio máximo? ¿Cuál es ese beneficio diario?

b) La adopción de un nuevo sistema de control en los receptores le supone media hora más de trabajo por cada TV del primer tipo, y un cuarto de hora para las del segundo. ¿Cuál será, ahora, la nueva estrategia de producción? ¿Cuáles sus beneficios?

c) Si desea obtener el mismo beneficio que antes, ¿en cuánto debe incrementar el precio de cada receptor, si lo quiere hacer por igual para los dos tipos?

a) Si llamamos

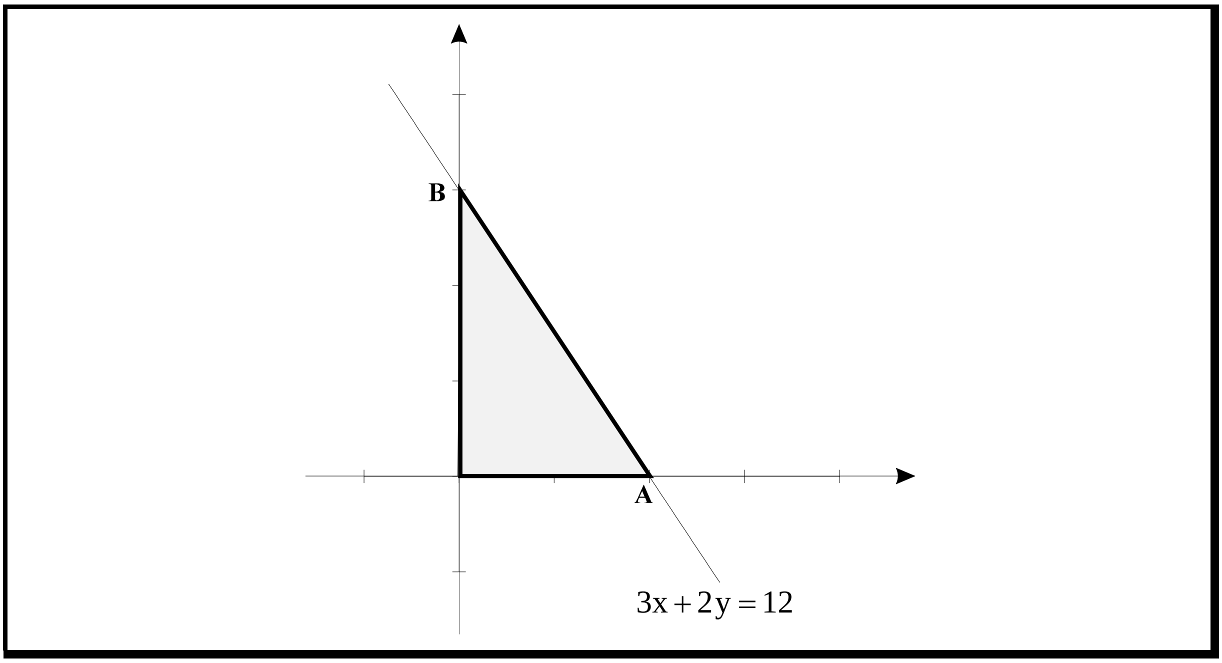
x = número de receptores del primer tipo y = número de receptores del segundo tipo

La función que nos da el beneficio máximo es

$$B = 120x + 90y$$

Las restricciones del problema son:

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ 3x + 2y &\leq 12 \end{aligned}$$



Calculamos las coordenadas de los vértices

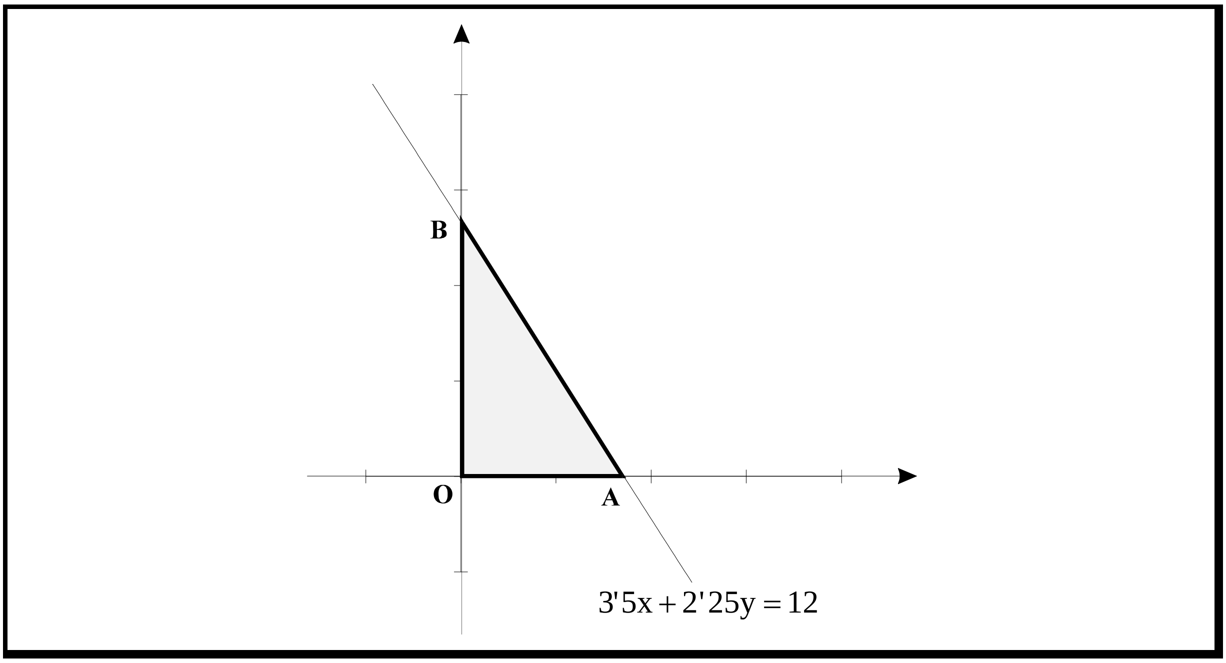
$$O(0,0) \qquad \left.\begin{array}{r} y=0 \\ 3x+2y=12 \end{array}\right\} \; A(4,0) \qquad \left.\begin{array}{r} x=0 \\ 3x+2y=12 \end{array}\right\} \; B(0,6)$$

Vértices	Beneficios
O(0,0)	B = 0 €
A(4,0)	B = 480 €
B(0,6)	B = 540 €

luego el beneficio máximo se obtiene cuando el número de receptores del primer tipo es cero y el número del segundo tipo es 6.

b) Con la nueva situación las restricciones son:

$$\begin{array}{r} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3'5x + 2'25y \leq 12 \end{array}$$



$$O(0,0) \qquad A(3'42,0) \qquad B(0,5'33)$$

Vértices	Beneficios
$O(0,0)$	$B = 0\ €$
$A(3'42,0)$	$B = 411'42\ €$
$B(0,5'33)$	$B = 480\ €$

El beneficio máximo se obtiene en el punto B pero la ordenada no es un número entero. Si cojemos el punto $B(0,5)$ vemos que está dentro del conjunto factible, condición que no cumplen los puntos más cercanos a él como el (0,6), el (1,5) ó el (1, 4) que no cumplen las restricciones del problema.

Por tanto cuando el número de receptores del primer tipo es cero y el del segundo tipo es 5 el beneficio es máximo y da:

$$B = 450€$$

c) Veamos la diferencia de los beneficios

$$\Delta B = 540 - 450 = 90\ €$$

El precio de cada uno debe aumentar en $\frac{90}{5} = 18\ €$

Problema 14

Un estudiante recibe de sus padres semanalmente 20 €, que dedica exclusivamente a ir al cine. Los locales de estreno, donde se proyecta una película, le cuestan 4 €, y los cines de barrio, donde proyectan dos películas, 3 €. Si desea ver, al menos, un estreno a la semana, ¿cómo debe distribuir su asistencia a ambos tipos de locales para que el número de películas que ve sea el máximo posible? ¿Le sobra algún dinero semanalmente?

Si llamamos

x = películas de estreno

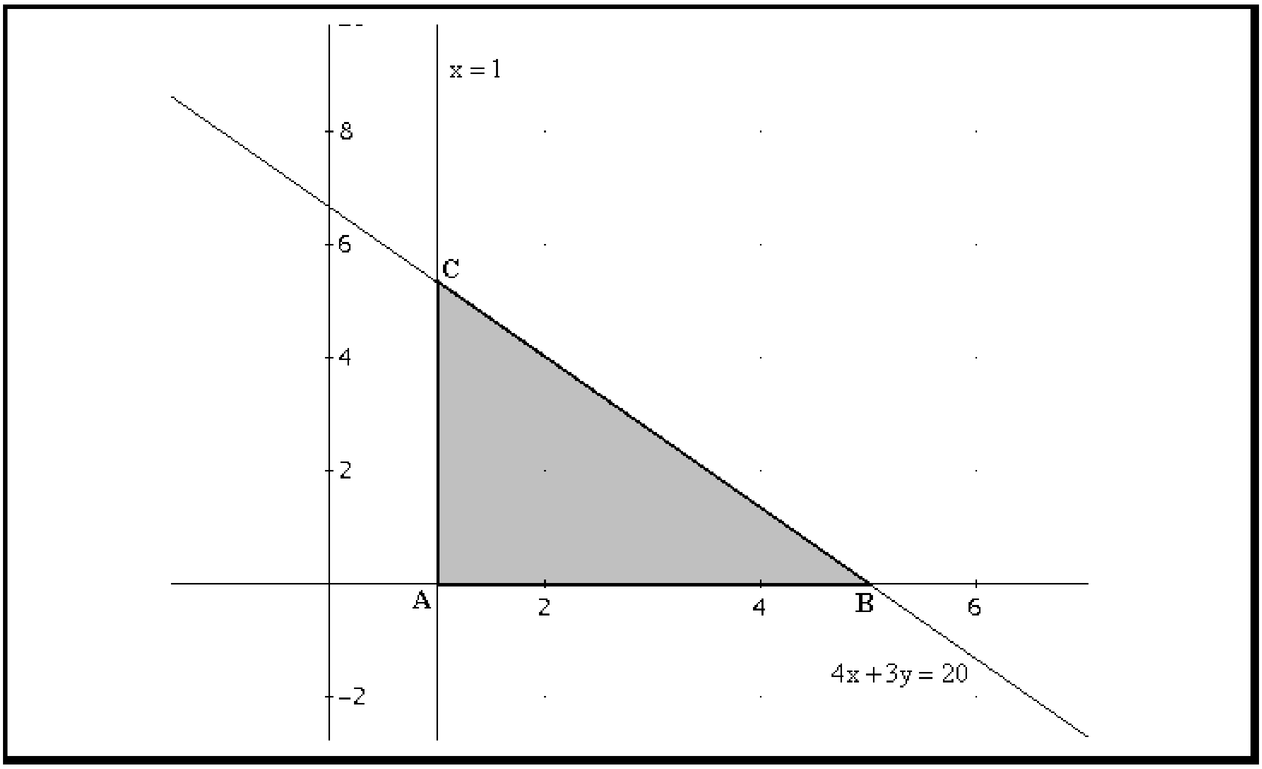
y = cines de barrio

La función a maximizar es

$$N = x + 2y$$

Las restricciones son

$$\begin{aligned} 4x + 3y &\le 20 \\ x &\ge 1 \end{aligned}$$



Las coordenadas de los vértices son:

$$A(1,0) \qquad B(5,0) \qquad C(1,5'33)$$

Vértices	Número de películas
$A(1,0)$	$N = 1$
$B(5,0)$	$N = 5$
$C(1,5'33)$	$N = 11'66$

El número de películas es máximo en C, pero como las dos coordenadas deben de ser números enteros tenemos que buscar el par de números enteros más cercano a éstos que estén dentro del conjunto factible. Se obtiene que la solución correcta es el punto $(1,5)$ es decir, cuando el número de películas de estreno que vea sea 1 y el número de películas que vea en cines de barrio sea de 10. Según lo anterior se gasta:

$$4€ + 15€ = 19€ \;\; \text{y le sobra 1 €}$$

Problema 15

Los 400 alumnos de un colegio van a ir de excursión. Para ello se contrata el viaje a una empresa que dispone de 8 autobuses con 40 plazas y 10 con 50 plazas, pero sólo de 9 conductores para ese día. Dada la diferente capacidad y calidad, el alquiler de cada autobús de los grandes cuesta 80 € y el de cada uno de los pequeños 60 € ¿Cuántos autobuses de cada clase convendrá alquilar para que el viaje resulte lo más económico posible?

Sea

$$x = \text{número de autobuses de 40 plazas}$$

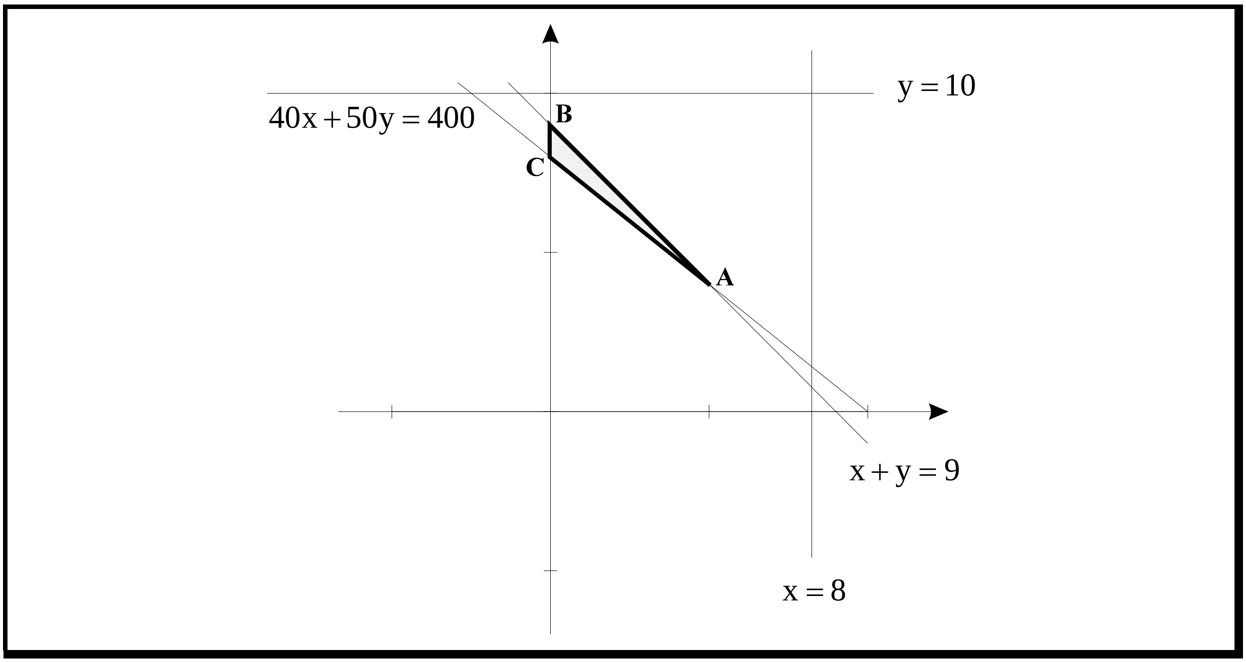
$$y = \text{número de autobuses de 50 plazas}$$

La función a optimizar será

$$C = 60x + 80y$$

y las restricciones

$$\begin{aligned} 0 \le x \le 8 \\ 0 \le y \le 10 \\ x + y \le 9 \\ 40x + 50y \ge 400 \end{aligned}$$



Las coordenadas de los vértices son:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 9 \\ 40x + 50y &= 400 \end{aligned}\right\} \qquad A(5,4) \qquad B(0,9) \qquad C(0,8)$$

Vértices	Coste
A(5,4)	C = 620 €
B(0,9)	C = 720 €
C(0,8)	C = 640 €

Por lo tanto el coste es mínimo alquilando 5 autobuses de 40 plazas y 4 de 50 plazas. El precio es de 620 €.

Problema 16

Un quiosco vende bolígrafos a 2 € y cuadernos a 3 €. Llevamos 12 € y pretendemos comprar los mismos cuadernos que bolígrafos por lo menos. ¿Cuál será el número máximo de piezas que podemos comprar?

Sea

$$x = \text{número de bolígrafos}$$

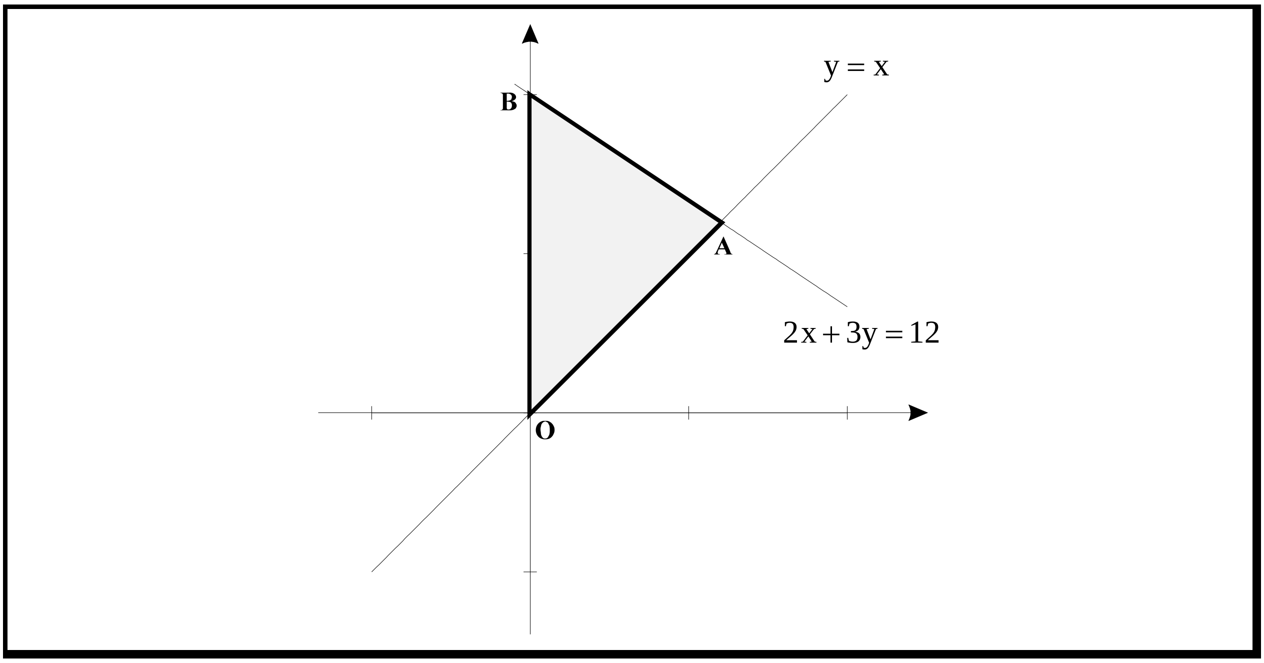
$$y = \text{número de cuadernos}$$

La función a optimizar es

$$F = x + y$$

y las restricciones son:

$$\begin{aligned} x &\leq y \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ 2x + 3y &\leq 12 \end{aligned}$$



Las coordenadas de los vértices del recinto son:

$O(0,0)$ $\qquad \left.\begin{array}{r} y = x \\ 2x+3y=12 \end{array}\right\}$ $A(2'4, 2'4)$ $\qquad B(0,4)$

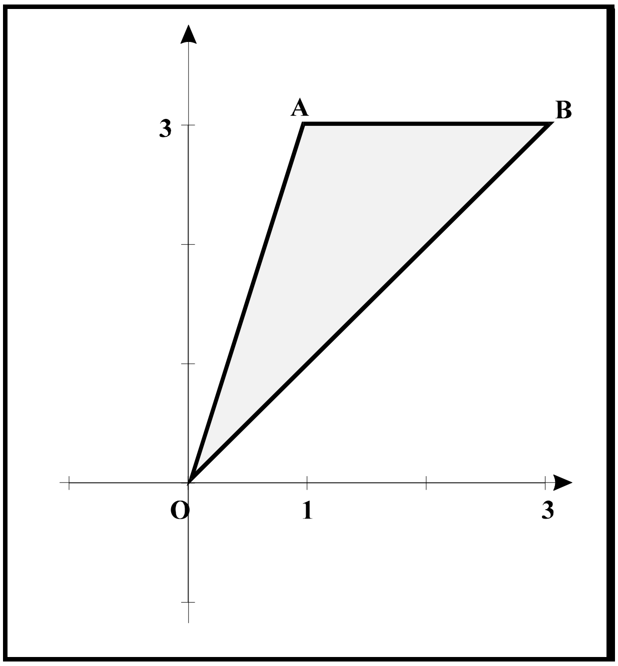
Vértices	Número de piezas
$O(0,0)$	$N = 0$
$A(2'4,2'4)$	$N = 4'8$
$B(0,4)$	$N = 4$

Aunque el mayor número de piezas se da en el punto A, las coordenadas deben de ser números enteros, por lo que buscaremos los puntos más próximos a este que pertenezcan al recinto.

En este caso se cumple para los puntos $(0,4)$, $(1,3)$ y $(2,2)$. Luego el número máximo de piezas que podemos comprar es de 4.

Problema 17

Se considera el recinto plano de la figura en el que están incluidos los tres lados y los tres vértices.



a) Hallar las inecuaciones que definen el recinto.

b) Maximizar la función

$$\mathbf{z = 3x - 6y}$$

sujeta a las restricciones del recinto.

a) La recta que contiene AB es y = 3. El semiplano inferior es $y \le 3$

La recta OB es y - x = 0. El semiplano de la parte superior es $y - x \ge 0$

La recta OA es y - 3x = 0. El semiplano inferior a ella es $y - 3x \le 0$

Por tanto, el recinto dado se expresa analíticamente a través de las inecuaciones

$$\begin{aligned} y &\le 3 \\ y - x &\ge 0 \\ y - 3x &\le 0 \end{aligned}$$

b) La función a maximizar es $z = 3x - 6y$

Las coordenadas de los vértices son:

$O(0,0)$ $\left.\begin{aligned} y &= 3 \\ y &= x \end{aligned}\right\}$ $B(3,3)$ $\left.\begin{aligned} y &= 3 \\ y - 3x &= 0 \end{aligned}\right\}$ $A(1,3)$

Vértices	z
O(0,0)	$z = 0$
B(3,3)	$z = -9$
A(1,3)	$z = -15$

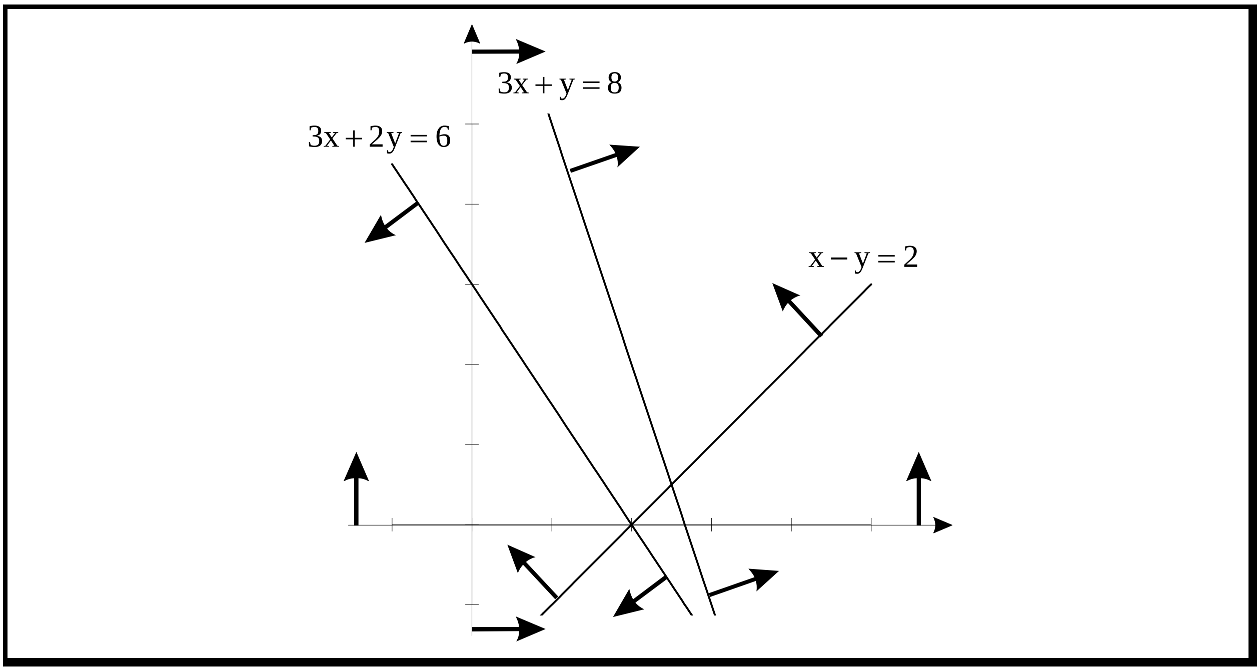
Por tanto el máximo se alcanza para $x = 0$ e $y = 0$

Problema 18

Minimizar la función objetivo $F = 6x - 5y$ sujeta a las restricciones

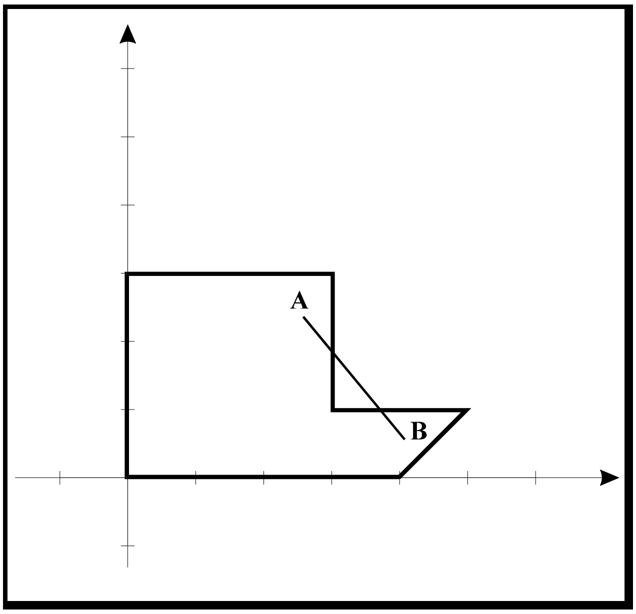
$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\ge \mathbf{0} \\ \mathbf{y} &\ge \mathbf{0} \\ \mathbf{x - y} &\le \mathbf{2} \\ \mathbf{3x + y} &\ge \mathbf{8} \\ \mathbf{3x + 2y} &\le \mathbf{6} \end{aligned}$$

El problema como se ve en el gráfico no tiene solución



Problema 19

El polígono de vértices (0,0), (4,0), (5,1), (3,1), (3,3) y (0,3) ¿Puede ser la región factible de un problema de Programación Lineal con dos variables?



No, porque no es un recinto convexo, y las soluciones de un sistema de inecuaciones con dos incógnitas siempre están dentro de un recinto convexo, abierto o cerrado. Cuando desde dentro del recinto unamos dos puntos, como A y B, no puede quedar ningún trozo de segmento fuera de él.