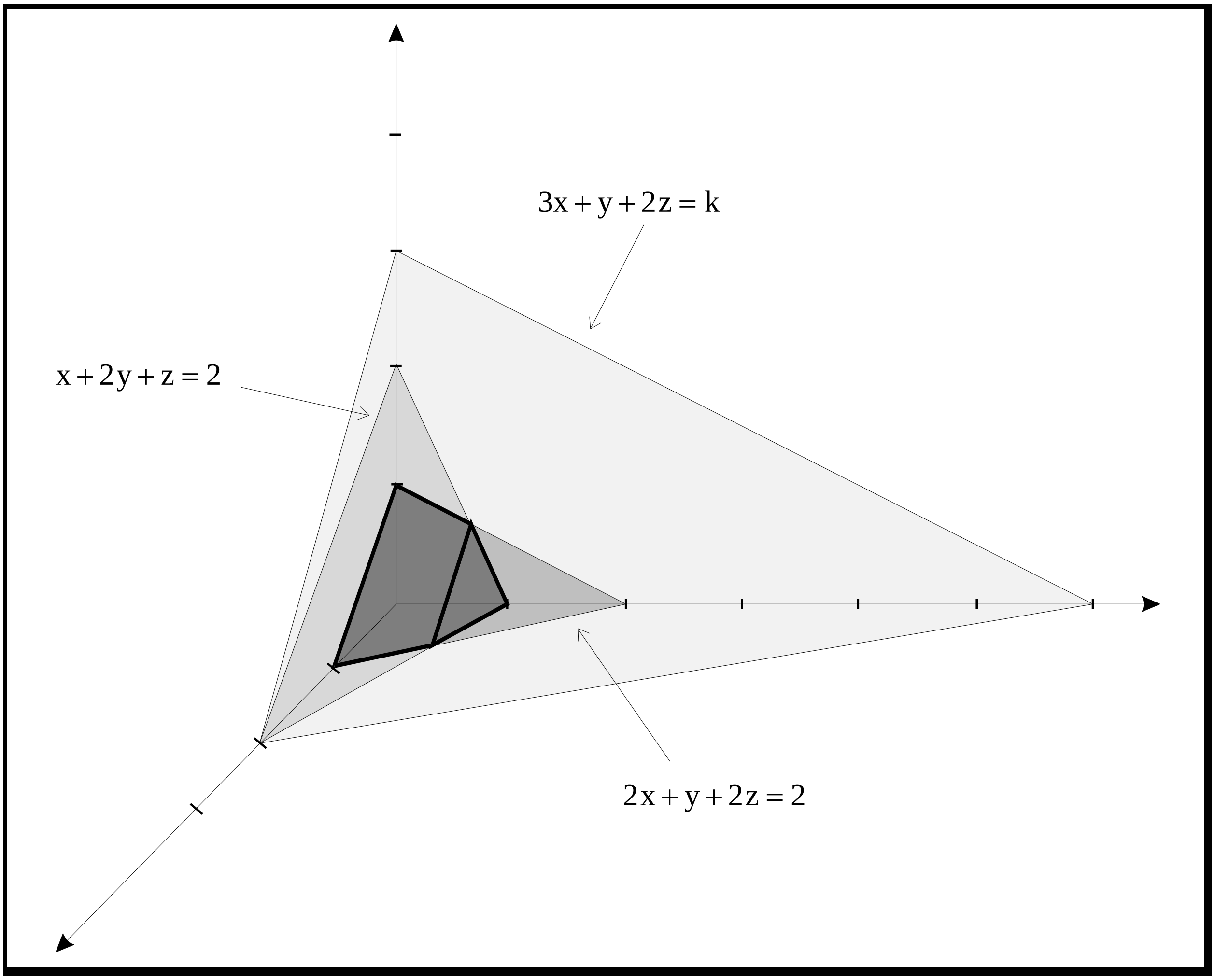
Programación lineal para más de dos variables

Descripción del problema para tres variables

Si pretendiéramos hacer máxima la función objetivo $F(x,y,z) = 3x + y + 2z$

sometida a las restricciones
$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ z &\geq 0 \\ x + 2y + z &\leq 2 \\ 2x + y + 2z &\leq 2 \end{aligned}$$

podríamos proceder como en el caso bidimensional.



Las ecuaciones son planos. Las inecuaciones, semiespacios. El recinto de validez es un poliedro (en la figura más oscuro).

La función objetivo viene dada por un plano móvil (en la figura sombreado $3x+2y+z=k$) que se mueve paralelo a sí mismo. ¿En cuál de los vértices del poliedro tocará primero? No es fácil verlo gráficamente. Habría que localizar los vértices mediante sus coordenadas e ir obteniendo el valor de la función F en un vértice, después en otro contiguo buscando que aumente el valor de F,... y así sucesivamente hasta que lleguemos a un vértice en el cual el valor de F sea superior al que toma en los vértices contiguos. Ahí está el máximo.

En general, si el problema tiene tres variables obtendremos una superficie poliédrica convexa que podrá estar no acotada. En este caso se hallan los vértices de la superficie poliédrica y a continuación se evalúa la función objetivo en cada uno de ellos, para así poder obtener en qué vértice la función alcanza el valor máximo o mínimo.

Programación lineal con n variables. El método del Simplex.

Se trata de optimizar (hacer máxima o mínima) una función lineal

$$\mathbf{F(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots, x_n) = l_1x_1 + l_2x_2 + l_3x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + l_nx_n}$$

sometida a una serie de restricciones dadas por inecuaciones lineales:

$$\begin{array}{c}
\mathbf{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n \le c_1} \\
\mathbf{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n \le c_2} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathbf{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_n \le c_m}
\end{array}$$

Es fácil comprender que a medida que crece el número de variables el problema se complica de tal manera que resulta prácticamente imposible resolverlo por estos métodos.

Una forma de eliminar tal complicación consistiría en realizar un programa para ordenador que permitiese obtener todos los vértices de la superficie poliédrica que satisfacen las restricciones lineales. Seguidamente se evaluaría la función a maximizar (o minimizar) para cada uno de esos vértices y así obtendríamos el resultado óptimo.

Ahora bien, en la práctica los problemas de programación lineal suelen tener gran número de variables y restricciones, por lo que el método descrito anteriormente podría resultar muy lento, e incluso agotar los recursos mecánicos de un ordenador.

Para reducir en gran medida esta complejidad, **Dantzig** ideó en 1947 el método del **Simplex** que en líneas generales consiste en:

1. Se selecciona un vértice A como punto de partida.

2. De las distintas aristas que pasan por A, se escoge una que nos lleve a otro vértice, B, en el cual la función F valga más que en A.

3. Se repite el paso anterior hasta llegar a un vértice en el cual el valor de F sea mayor que en todos los contiguos.

Este proceso se realiza mecánicamente mediante transformaciones en una enorme matriz, en la que figuran todas las condiciones del problema junto con unas nuevas variables (llamadas variables de holgura) y que nos llevan, indefectiblemente, a la solución óptima, si la hay.

En 1984, Narendra Karmarkar un matemático indio establecido en Estados Unidos diseñó una importante modificación del método del simplex. Su algoritmo ha demostrado una eficacia bastante mayor, sobre todo cuando se trabaja con sistemas de un número de variables y de inecuaciones verdaderamente grande. Un cierto problema reciente de programación lineal con 800.000 variables fue resuelto con el algoritmo de Karmarkar tras 10 horas de trabajo de ordenador. Se cree que el problema hubiera necesitado semanas enteras de ordenador mediante el método del simplex.

Sin embargo, en el tratamiento de sistemas moderadamente grandes, el método del simplex parece, todavía, preferible.

El problema del viajante

Un viajante comercial de Barcelona desea hacer una gira con su avioneta por todas las capitales de provincia de la península para volver después a Barcelona. Por razón del tiempo y del dinero quisiera planificar su itinerario de modo que éste resulte lo más corto posible, en kilómetros.

Éste es un ejemplo del famoso **problema del viajante**, de indudable interés práctico y económico. Otras situaciones en la que se presentan variantes del mismo problema son las siguientes:

1. Un operario cuyo trabajo consiste en recoger las monedas de las 100 cabinas telefónicas que tienen asignadas, desea hacerse un itinerario lo más breve posible.

2. Una compañía eléctrica que tiene que enviar a un agente para leer los contadores de una zona a la que sirve, desea hacerlo de modo que se minimice el tiempo y los gastos de desplazamiento.

3. Un robot que hace los agujeros en una de las placas metálicas de la fabricación en serie de un automóvil, ahorrará un montón de dinero si es programado de forma que minimice el tiempo de su trabajo en cada placa.

Lo que se busca al resolver el problema del viajante es un ***algoritmo***, es decir, un procedimiento automático que, partiendo de los datos, conduzca, paso a paso, a la mejor solución posible, es decir, a la determinación del itinerario óptimo. Se puede pensar en diversos procedimientos que parecen razonables.

A. *Se hacen todos los itinerarios posibles. Se computa el kilometraje de cada uno. Se escoge el de mínimo kilometraje.*

Para 25 ciudades hay $\frac{25!}{2}$ itinerarios posibles que no repiten ciudades dos veces, es decir, aproximadamente $3 \cdot 10^{23}$. Un ordenador que construyese un millón de itinerarios en un segundo tardaría más de diez mil millones de años en construirlos todos.

B. Saliendo de Barcelona el viajante se dirige a la ciudad más cercana, luego a la más cercana no recorrida aún, etc., hasta que las recorre todas. Luego se vuelve a Barcelona.

Se pueden dar situaciones en las que este algoritmo conduce a situaciones pésimas.

Actualmente se sospecha que no existe un algoritmo eficiente que conduzca en un tiempo razonable a la solución óptima del problema del viajante. Hoy día existen algoritmos que conducen eficazmente a soluciones que con seguridad no sobrepasan en kilometraje una vez y media el kilometraje de la solución óptima, es decir, que con seguridad son, a lo sumo, una vez y media peores que la solución óptima.