Desigualdades

Dadas dos rectas que se cortan, llamadas **ejes** (rectangulares si son perpendiculares, y oblicuos en caso contrario), un punto puede situarse conociendo las distancias del mismo a los ejes, tomadas a lo largo de paralelas a ellos a partir del punto. Se acostumbra a designar los ejes por **x** e **y** y las distancias a ellos por **ordenada** y **abscisa** respectivamente. La ordenada y la abscisa son las **coordenadas cartesianas** del punto.

Al establecer un sistema cartesiano en el plano y fijar la escala, ya sea horizontal, ya vertical, estamos teniendo en cuenta los criterios de ordenación de números. Recuérdese que los números reales no nulos se dividen en dos clases: los **positivos** que forman el conjunto $\mathbf{R}^+$, y los **negativos** que forman el conjunto $\mathbf{R}^-$. Se suele escribir:

$\mathbf{a > 0}$ para expresar que el número a es positivo

$\mathbf{a < 0}$ para expresar que el número a es negativo

En general se escribe:

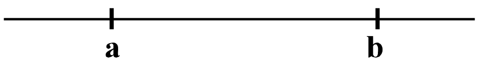
$\mathbf{a < b}$ y se lee "**a es menor que b**" (desigualdad estricta)

$\mathbf{a \le b}$ y se lee "**a es menor o igual que b**" (desigualdad amplia)

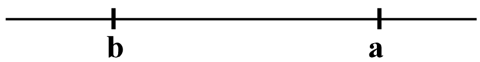
$\mathbf{a > b}$ y se lee "**a es mayor que b**" (desigualdad estricta)

$\mathbf{a \ge b}$ y se lee "**a es mayor o igual que b**" (desigualdad amplia)

Se llama **desigualdad** a cualquiera de las cuatro expresiones anteriores. Gráficamente, la desigualdad $a < b$ significa que el punto representativo de "a" en la recta real se halla a la izquierda del que representa "b", y la desigualdad $a > b$ significa que el punto representativo de "a" en la recta real se halla a la derecha del que representa "b".



Desigualdad $\mathbf{a < b}$



Desigualdad $\mathbf{a > b}$

Reglas para operar sobre desigualdades

Cuando se utilizan desigualdades, deben tenerse en cuenta fundamentalmente las siguientes reglas (aunque las enunciamos sólo con el símbolo <, se cumplen propiedades análogas con los otros tres símbolos >, ≤, y ≥):

I. Si $a<b \;\Rightarrow\; a+c<b+c \quad \forall c\in R$

Debido a esta propiedad, **se pueden transponer términos como en las ecuaciones**, o sea, los elementos que están en un miembro sumando pasan al otro restando.

Ejemplo: La desigualdad $2x<x+5$ equivale a $2x-x<5$, pues basta sumar $-x$ a los dos miembros de la primera

$$2x<x+5 \;\Rightarrow\; 2x+(-x)<x+5+(-x) \;\Rightarrow\; 2x-x<5 \;\Rightarrow\; x<5$$

II. Si $a<b$ y $c<d \;\Rightarrow\; a+c<b+d$

O sea, si se suman dos desigualdades del mismo sentido resulta otra de ese mismo sentido.

III. Si $\begin{cases} a<b \text{ y } c>0 \;\Rightarrow\; a\cdot c<b\cdot c \text{ y } \dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{c} \\ a<b \text{ y } c<0 \;\Rightarrow\; a\cdot c>b\cdot c \text{ y } \dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c} \end{cases}$

O sea, **el sentido de una desigualdad se conserva al multiplicar (o dividir) sus dos miembros por un mismo número positivo, y se invierte si dicho número es negativo.**

Ejemplo: De la expresión $3x<5$ podemos deducir $x<\frac{5}{3}$, porque para despejar x hemos de dividir por 3 (positivo) los dos miembros de la primera desigualdad.

Ejemplo: De la expresión $-3x<5$ podemos deducir $x>-\frac{5}{3}$, porque para despejar x hemos de dividir por -3 (negativo) los dos miembros de la primera desigualdad.

Inecuaciones Lineales

Inecuaciones lineales con una incógnita

Si a, b son dos números reales dados $(a\neq 0)$, cualquiera de las cuatro expresiones siguientes se llama **inecuación lineal de una variable**. La letra **x** se llama **variable** (o **incógnita**).

$$\mathbf{ax<b} \qquad \mathbf{ax>b} \qquad \mathbf{ax\leq b} \qquad \mathbf{ax\geq b}$$

Resolver la inecuación es hallar los valores de la incógnita para los que se satisface la desigualdad. La inecuación posee infinitas soluciones que se pueden representar geométricamente por medio de los puntos de una semirecta. Si los datos que figuran a ambos lados del signo de desigualdad son inconsistentes la inecuación puede carecer de solución.

<u>Resolución</u>

Primero se aísla la incógnita en un miembro, quedando en el otro miembro un número. Para ello debe tenerse en cuenta las propiedades de las desigualdades; en lo demás se procede como se hace para resolver ecuaciones lineales con una incógnita.

Ejemplo: Resolver analíticamente e interpretar geométricamente la inecuación

$$\mathbf{\frac{2x-3}{4} \geq 3x+8}$$

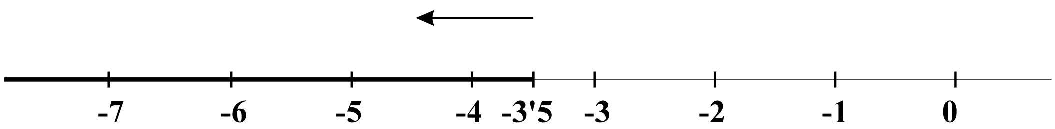
Quitamos denominadores tenemos: $2x-3 \geq 12x+32$

Pasando las incógnitas a un miembro y los números al otro: $-10x \geq 35$

Para obtener la solución hay que dividir por -10, luego se invertirá el sentido de la desigualdad.

Despejando la incógnita: $10x \leq -35 \Rightarrow x \leq \frac{-35}{10} \Rightarrow x \leq -3'5$

Gráficamente los números situados a la izquierda de $-3'5$, incluido él mismo, son soluciones de la inecuación.



Inecuaciones lineales con dos incógnitas

Si a, b, c son números reales dados, cualquiera de las siguientes desigualdades se llama **inecuación lineal de dos incógnitas**. (Las letras x, y se llaman **variables**, o **incógnitas**)

$$\mathbf{ax+by > c}$$
$$\mathbf{ax+by \geq c}$$
$$\mathbf{ax+by < c}$$
$$\mathbf{ax+by \leq c}$$

En los cuatro casos, la solución puede obtenerse despejando una variable y suponiendo luego que a la otra se le puede asignar cualquier valor. Sin embargo, suele resultar muy conveniente representar en el plano las soluciones.

Resolución gráfica

Si representamos gráficamente la recta $ax+by+c=0$ observamos que ésta divide al plano en tres zonas. En una de ellas es $ax+by+c>0$; en otra $ax+by+c<0$ y, por fin, en los puntos de la recta es $ax+by+c=0$. Se trata de averiguar cuál de esas zonas (incluida o no la recta, según la desigualdad sea o no estricta) constituye el conjunto de soluciones de la inecuación.

En la práctica, para representar gráficamente el semiplano de las soluciones de una inecuación con dos incógnitas se siguen los siguientes pasos:

1. Se representa gráficamente la recta $ax+by+c=0$

2. **Se elige un punto cualquiera que no pertenezca a la recta anterior. Si la recta no pasa por el origen el más cómodo de elegir es el $(0,0)$. Se sustituyen las coordenadas de dicho punto en la inecuación. Si la satisfacen, entonces el semiplano de las soluciones es aquel que contiene a dicho punto. Si no la satisfacen, entonces el semiplano de las soluciones es el que no contiene a dicho punto.**

Si la recta pasa por el origen, los puntos más cómodos de elegir son el $(1,0)$ ó el $(0,1)$.

3. Si la desigualdad es estricta ($<$ ó $>$), entonces los puntos de la recta no pertenecen al semiplano de las soluciones y se dice que éste es un **semiplano abierto**. En caso contrario ($\leq$ ó $\geq$) el semiplano de las soluciones contiene los puntos de la recta y se llama **semiplano cerrado**. Una forma de indicar gráficamente que los puntos de la recta pertenecen a la solución de la inecuación es dibujarlos con trazo más grueso que el resto.

En lo sucesivo, vamos a tener que resolver sistemas de inecuaciones lineales, y lo haremos gráficamente determinando la intersección de los semiplanos de soluciones. Si rayáramos el semiplano solución para cada inecuación, obtendríamos dibujos demasiado confusos. Por eso, en vez de rayarlos totalmente, los señalaremos con dos flechas perpendiculares a la recta en los extremos de esta para indicar a qué lado de la recta se encuentra el semiplano de las soluciones.

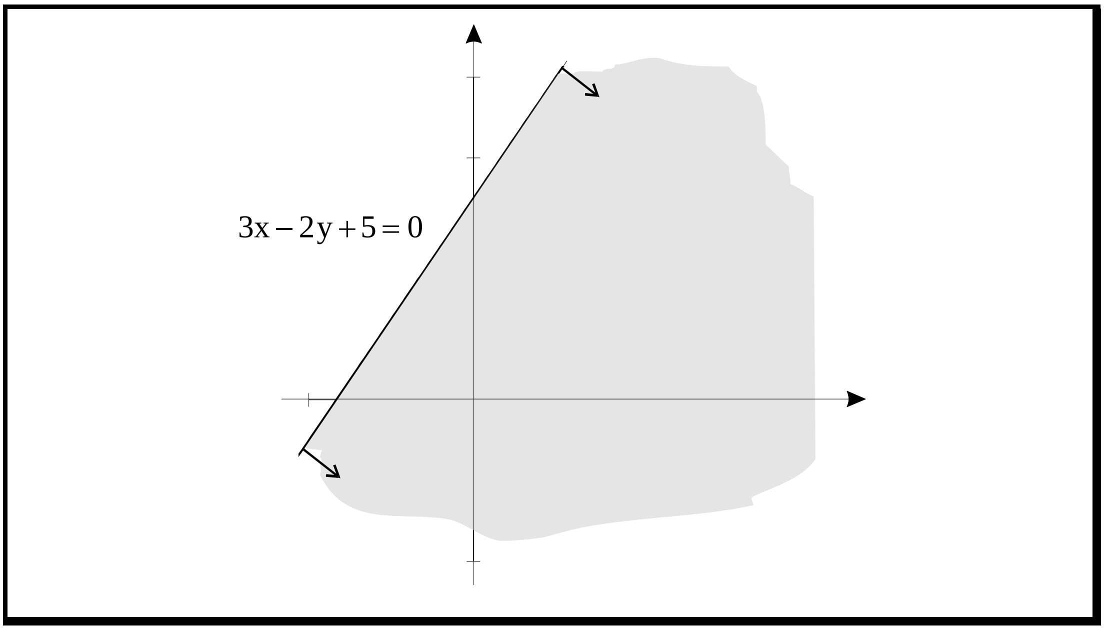
Ejemplo: Representar gráficamente las soluciones de la inecuación $3x-2y+5>0$

Representamos gráficamente la recta $3x-2y+5=0$.

Como no pasa por el origen, escogemos el punto $(0,0)$ y lo sustituimos en la inecuación:

$$3\cdot 0-2\cdot 0+5=5>0 \quad \Rightarrow \quad 5>0$$

luego el semiplano que contiene a dicho punto, excluyendo los puntos de la recta (por ser una desigualdad estricta) es la solución del sistema.



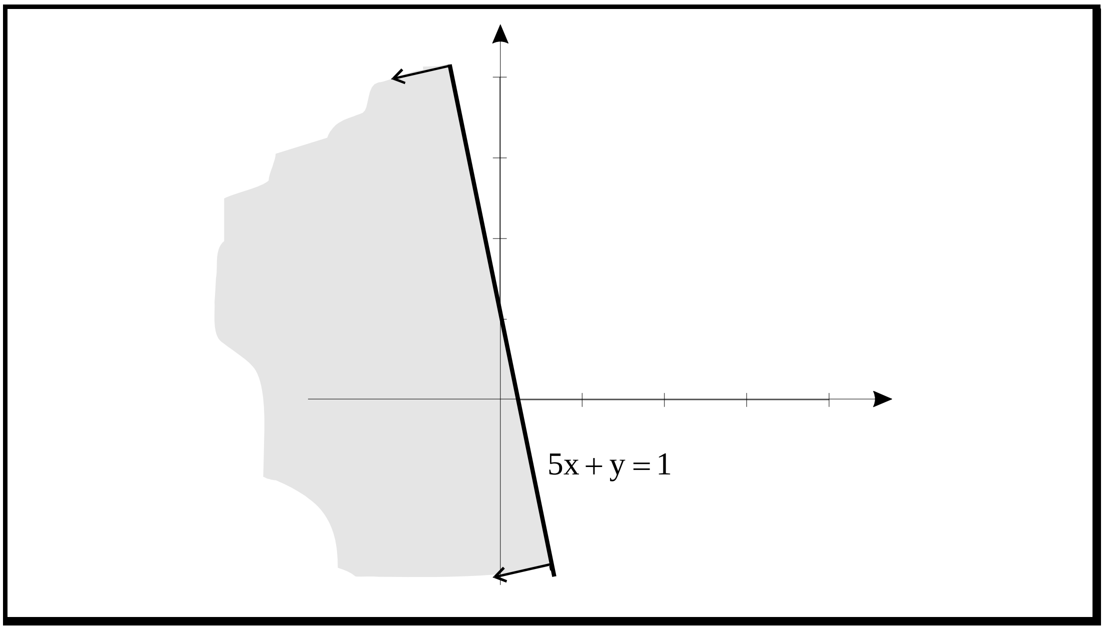
Ejemplo: Representar gráficamente las soluciones de la inecuación $5x+y\le 1$

Representamos gráficamente la recta $5x+y=1$.

Como no pasa por el origen, escogemos el punto $(0,0)$ y lo sustituimos en la inecuación:

$$5\cdot 0+0=0\le 1 \quad\Rightarrow\quad 0\le 1$$

luego el semiplano que contiene a dicho punto, incluyendo los puntos de la recta (por ser una desigualdad amplia) es la solución del sistema**.**



Sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas

Sistema lineal de m inecuaciones lineales con dos incógnitas es el conjunto de m inecuaciones lineales con esas incógnitas, que se verifica simultáneamente en una cierta región del plano.

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{a_1x+b_1y \geq c_1} \\ \mathbf{a_2x+b_2y \geq c_2} \\ \mathbf{a_3x+b_3y \geq c_3} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \mathbf{a_mx+b_my \geq c_m} \end{array}\right\}$$

donde los signos $\geq$ pueden ser sustituidos por $>, <$ o $\leq$.

El punto $P(x_0, y_0)$ cuyas coordenadas son solución de cada una de las inecuaciones del sistema se llama **punto factible. Región factible** es la solución del sistema de inecuaciones lineales.

Resolver un sistema lineal de m inecuaciones con dos incógnitas es encontrar la región del plano tal que las coordenadas de sus puntos satisfacen las m inecuaciones. Para ello, se representan las rectas asociadas a cada inecuación lineal, eligiendo posteriormente el semiplano solución de cada inecuación, por lo que la intersección de todos ellos será la solución del sistema lineal de m inecuaciones. **Teniendo en cuenta que los semiplanos pueden ser abiertos o cerrados, hay que especificar en cada caso si los puntos frontera de la región de las soluciones le pertenecen o no.**

Ejemplo:Resolver el sistema $\left.\begin{array}{r} \mathbf{x-y \geq 0} \\ \mathbf{3x-y \leq 4} \\ \mathbf{3x+4y \leq 9} \end{array}\right\}$

Representamos la recta $x-y=0$. Como pasa por el origen, escogemos el punto $(1,0)$ y lo sustituimos en la inecuación $x-y \geq 0$:

$$1-0=1 \geq 0$$

Como se verifica la desigualdad, la solución de la inecuación es el semiplano que contiene a dicho punto, incluidos los puntos de la recta, por ser la desigualdad amplia.

Representamos la recta $3x-y=4$. Como no pasa por el origen, escogemos el punto $(0,0)$ y lo sustituimos en la inecuación $3x-y \leq 4$:

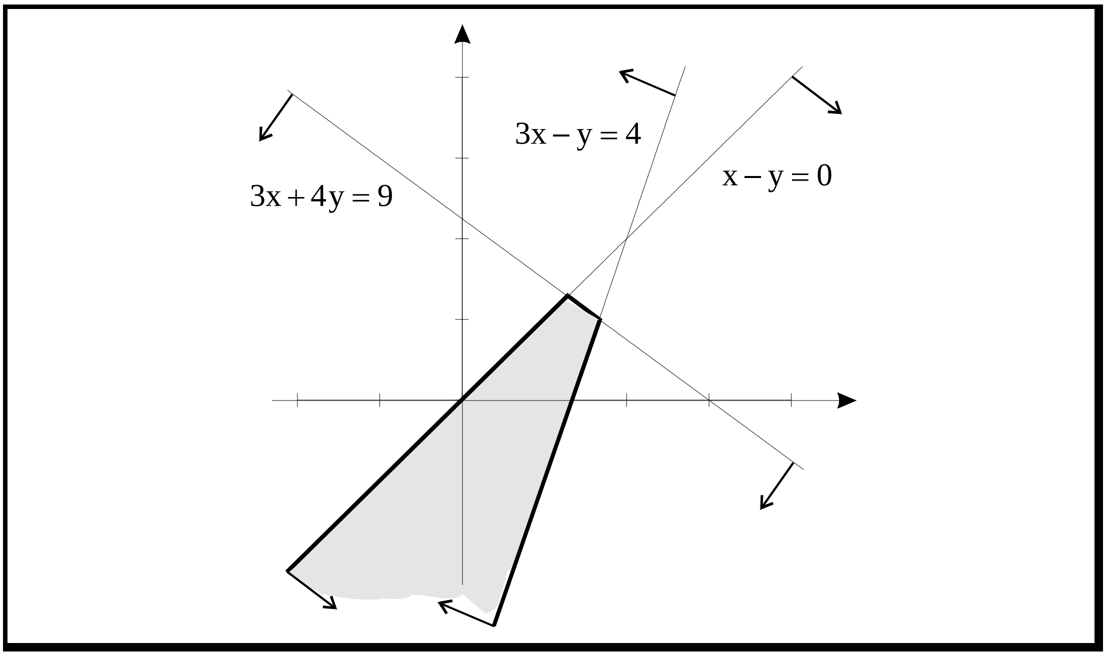
$$3 \cdot 0-0=0 \leq 4$$

Como se verifica la desigualdad, la solución de la inecuación es el semiplano que contiene a dicho punto, incluidos los puntos de la recta, por ser la desigualdad amplia.

Representamos la recta $3x+4y=9$. Como no pasa por el origen, escogemos el punto $(0,0)$ y lo sustituimos en la inecuación $3x+4y\le 9$:

$$3\cdot 0+4\cdot 0=0\le 9$$

Como se verifica la desigualdad, la solución de la inecuación es el semiplano que contiene a dicho punto, incluidos los puntos de la recta, por ser la desigualdad amplia.

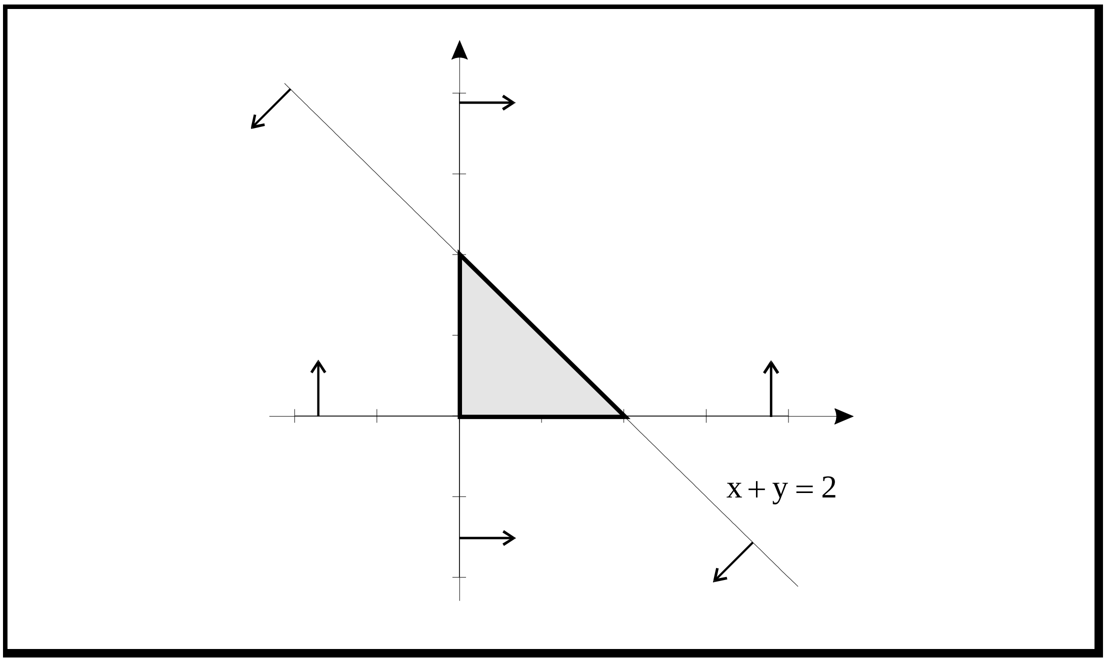


Ejemplo: **Resolver el sistema** $\left.\begin{array}{r}\mathbf{x\ge 0}\\ \mathbf{y\ge 0}\\ \mathbf{x+y\le 2}\end{array}\right\}$

Representamos la recta $x+y=2$. Como no pasa por el origen, escogemos el punto $(0,0)$ y lo sustituimos en la inecuación $x+y\le 2$:

$$0+0=0\le 2$$

Como se verifica la desigualdad, la solución de la inecuación es el semiplano que contiene a dicho punto, incluidos los puntos de la recta, por ser la desigualdad amplia.



Ejemplo: **Resolver el sistema** $\left.\begin{array}{r} \mathbf{-x+y \le 1} \\ \mathbf{x+2y \le 6} \\ \mathbf{2x+3y > 3} \\ \mathbf{-3x+8y > 4} \end{array}\right\}$

Representamos la recta $-x+y=1$. Como no pasa por el origen, escogemos el punto $(0,0)$ y lo sustituimos en la inecuación $-x+y\le 1$:

$$-0+0=0\le 1$$

Como se verifica la desigualdad, la solución de la inecuación es el semiplano que contiene a dicho punto, incluidos los puntos de la recta, por ser la desigualdad amplia.

Representamos la recta $x+2y=6$. Como no pasa por el origen, escogemos el punto $(0,0)$ y lo sustituimos en la inecuación $x+2y\le 6$:

$$0+2\cdot 0=0\le 6$$

Como se verifica la desigualdad, la solución de la inecuación es el semiplano que contiene a dicho punto, incluidos los puntos de la recta, por ser la desigualdad amplia.

Representamos la recta $2x+3y=3$. Como no pasa por el origen, escogemos el punto $(0,0)$ y lo sustituimos en la inecuación $2x+3y>3$:

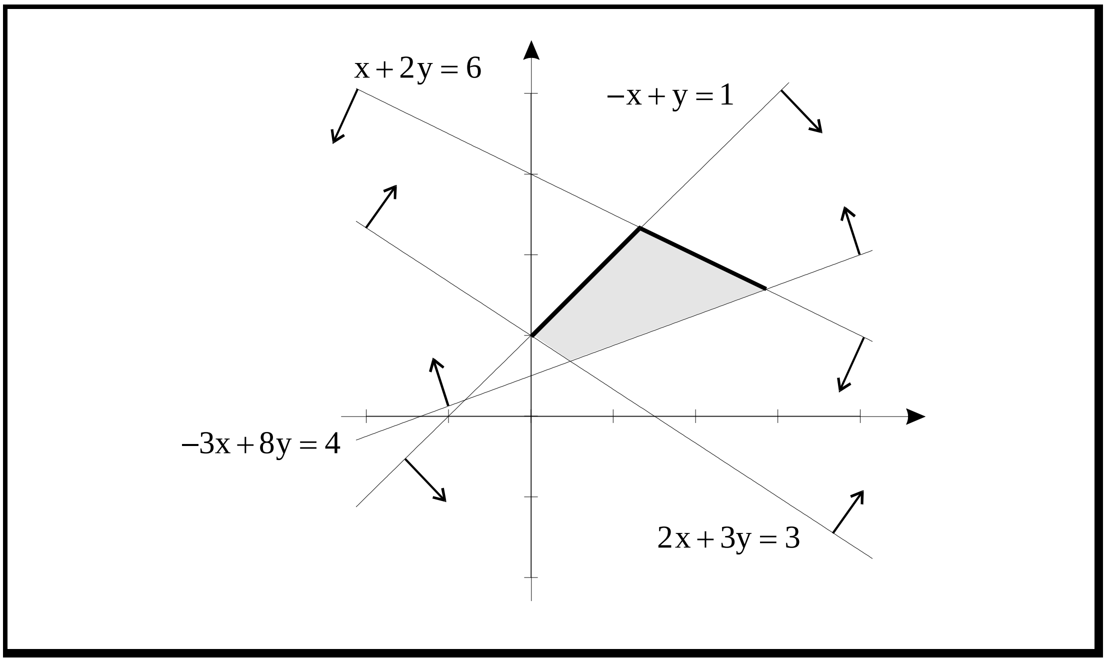
$$2\cdot 0+3\cdot 0=0\not> 3$$

Como no se verifica la desigualdad, la solución de la inecuación es el semiplano que no contiene a dicho punto, excluidos los puntos de la recta, por ser la desigualdad estricta.

Representamos la recta $-3x+8y=4$. Como no pasa por el origen, escogemos el punto $(0,0)$ y lo sustituimos en la inecuación $-3x+8y>4$:

$$-3\cdot 0+8\cdot 0=0\not>4$$

Como no se verifica la desigualdad, la solución de la inecuación es el semiplano que no contiene a dicho punto, excluidos los puntos de la recta, por ser la desigualdad estricta.



Obsérvese en la gráfica que el punto $(0,1)$ no es solución del sistema ya que no satisface la tercera inecuación: $2\cdot 0+3\cdot 1=3\not>3$, mientras que el punto $\left(\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right)$ es solución del sistema porque es el punto de corte de dos rectas dibujadas con trazo grueso, lo que significa que corresponde a desigualdades amplias, y por tanto, determinan semiplanos cerrados

$$-\frac{4}{3}+\frac{7}{3}=1\leq 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{4}{3}+2\cdot\frac{7}{3}=6\leq 6$$

Ejemplo: Resolver el sistema $\left.\begin{array}{r} \mathbf{x-y\le 0} \\ \mathbf{x-3y>-12} \\ \mathbf{x-y\ge -5} \\ \mathbf{x-3y<4} \end{array}\right\}$

Representamos la recta $x-y=0$. Como pasa por el origen, escogemos el punto $(1,0)$ y lo sustituimos en la inecuación $x-y\le 0$:

$$1-0=1\not\le 0$$

Como no se verifica la desigualdad, la solución de la inecuación es el semiplano que no contiene a dicho punto, incluidos los puntos de la recta, por ser la desigualdad amplia.

Representamos la recta $x-3y=-12$. Como no pasa por el origen, escogemos el punto $(0,0)$ y lo sustituimos en la inecuación $x-3y>-12$:

$$0-3\cdot 0=0>-12$$

Como se verifica la desigualdad, la solución de la inecuación es el semiplano que contiene a dicho punto, incluidos los puntos de la recta, por ser la desigualdad amplia.

Representamos la recta $x-y=-5$. Como no pasa por el origen, escogemos el punto $(0,0)$ y lo sustituimos en la inecuación $x-y\ge -5$:

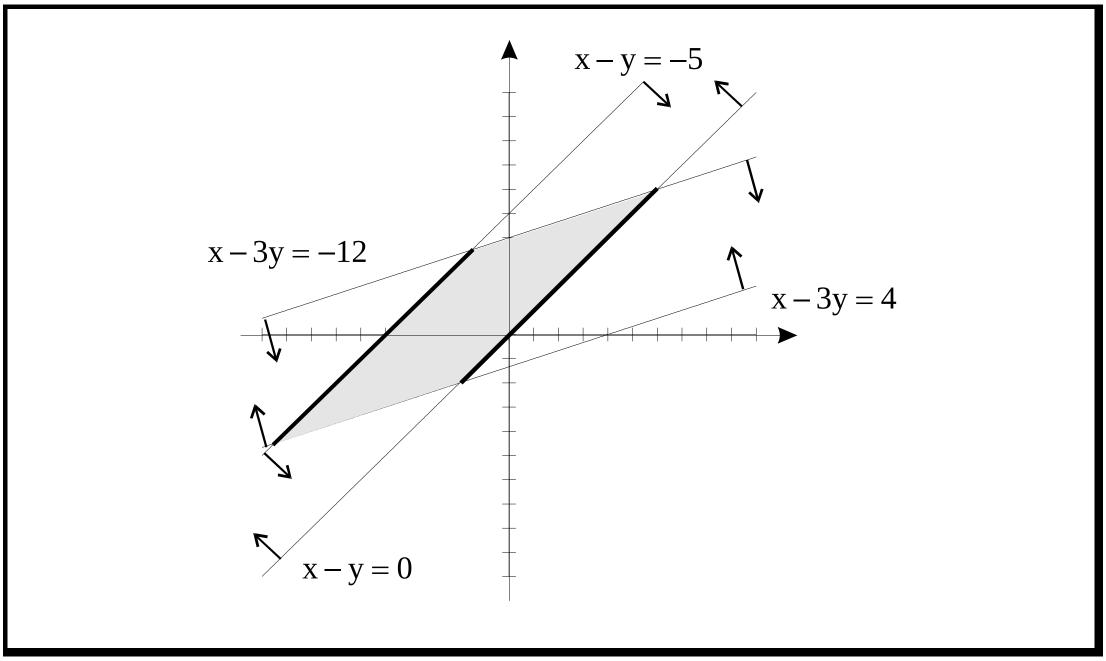
$$0-0=0\ge -5$$

Como se verifica la desigualdad, la solución de la inecuación es el semiplano que contiene a dicho punto, incluidos los puntos de la recta, por ser la desigualdad amplia.

Representamos la recta $x-3y=4$. Como no pasa por el origen, escogemos el punto $(0,0)$ y lo sustituimos en la inecuación $x-3y<4$:

$$0-3\cdot 0=0<4$$

Como se verifica la desigualdad, la solución de la inecuación es el semiplano que contiene a dicho punto, incluidos los puntos de la recta, por ser la desigualdad amplia.



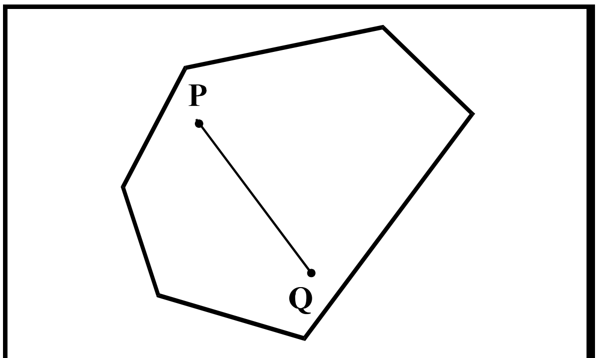
Proposición

El conjunto de las soluciones de un sistema compatible de inecuaciones lineales con dos incógnitas es una región convexa del plano. Si esta región es acotada, entonces es un polígono convexo.

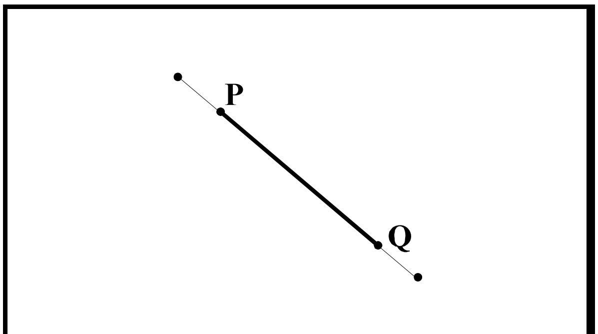
Una región convexa del plano está limitada por una serie de segmentos, o semirectas, que al cortarse dan lugar a una colección de puntos llamados vértices (o puntos extremos).

En otras palabras, esta proposición afirma que si P y Q son puntos del plano que son solución de un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas, entonces cualquier punto del segmento PQ será también solución del sistema; en particular, en el caso de que se trate de un polígono, ***el hecho de que sea convexo equivale a decir que todas sus diagonales están totalmente incluidas dentro del polígono, y por tanto, si todos los vértices son solución, también lo son sus diagonales***.

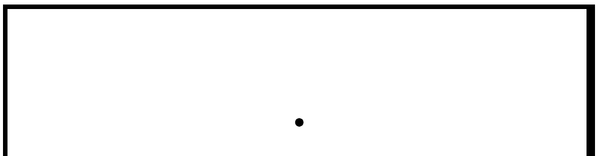
Así pues, gráficamente, las posibles regiones solución de un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas tienen la formas siguientes:



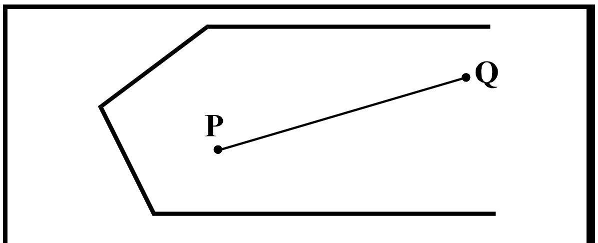
Polígono convexo



Segmento

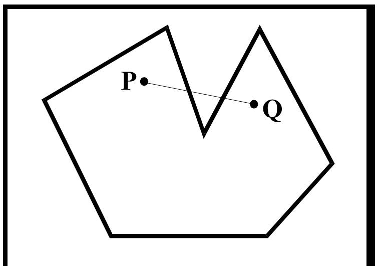


Punto

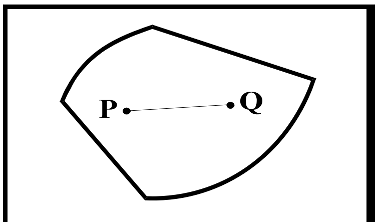


Polígono convexo no acotado

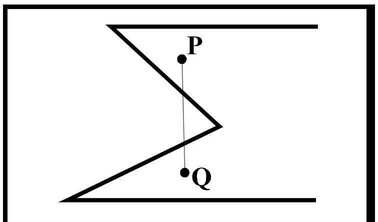
En cambio, ninguna de las formas siguientes puede constituir una región solución, porque la única figura convexa no es un polígono.



Polígono no convexo



Región convexa acotada no poligonal



Región no convexa no acotada