Junio 2003 opción A. Ciencias de la Naturaleza y de la Salud. Tecnología.

1)

a) Calculamos el valor del determinante de los coeficientes del sistema.

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 2\\ 0 & \lambda & -1\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix} \qquad A^*=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 2 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & \lambda\\ 1 & 3 & 1 & 5\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}\lambda & 0 & 2\\ 0 & \lambda & -1\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=0 \qquad \lambda(\lambda+1)=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}\lambda=0\\ \lambda=-1\end{cases}$$

- Si $\lambda\neq 0$ y $\lambda\neq -1 \;\Rightarrow\; \operatorname{rg}A=\operatorname{rg}A^*=3$. El sistema es Compatible Determinado.

- Si $\lambda=0$ $\qquad A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix} \qquad A^*=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 3 & 1 & 5\end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2 \qquad \begin{vmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 5\end{vmatrix}=0$$

$\operatorname{rg}A=\operatorname{rg}A^*=2<3$

Sistema Compatible Indeterminado

- Si $\lambda=-1$ $\qquad A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & -1\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix} \qquad A^*=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -1\\ 1 & 3 & 1 & 5\end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-1 \qquad \begin{vmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1\\ 1 & 3 & 5\end{vmatrix}=2$$

$\operatorname{rg}A=2$ y $\operatorname{rg}A^*=3$

Sistema Incompatible

b) El sistema es compatible determinado cuando $\lambda\neq 0$ y $\lambda\neq -1$. Resolviendo por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}0 & 0 & 2\\ \lambda & \lambda & -1\\ 5 & 3 & 1\end{vmatrix}}{\lambda(\lambda+1)}=\frac{-4\lambda}{\lambda(\lambda+1)}=\frac{-4}{\lambda+1} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}\lambda & 0 & 2\\ 0 & \lambda & -1\\ 1 & 5 & 1\end{vmatrix}}{\lambda(\lambda+1)}=\frac{\lambda^2+3\lambda}{\lambda(\lambda+1)}=\frac{\lambda+3}{\lambda+1}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & \lambda\\ 1 & 3 & 5\end{vmatrix}}{\lambda(\lambda+1)}=\frac{2\lambda^2}{\lambda(\lambda+1)}=\frac{2\lambda}{\lambda+1}$$

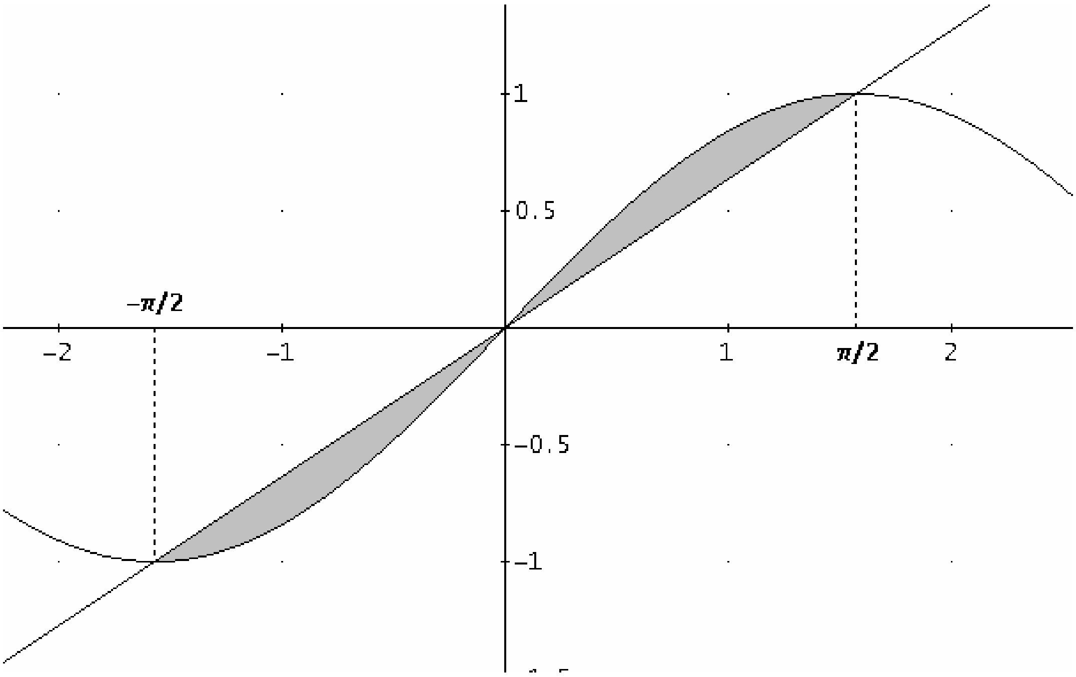
La solución es: $\left(\frac{-4}{\lambda+1},\frac{\lambda+3}{\lambda+1},\frac{2\lambda}{\lambda+1}\right)$

El sistema es compatible indeterminado cuando $\lambda = 0$.

$$\left.\begin{array}{r} 2z = 0 \\ -z = 0 \\ x + 3y + z = 5 \end{array}\right\} \quad z = 0 \quad y = \lambda \quad x = 5 - 3\lambda \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 5 - 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

2)

a)



Los puntos de corte son $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ y $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Por simetría el área es:

$$A = 2\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin x - \frac{2x}{\pi}\right] dx\right| = 2\left|\left[-\cos x - \frac{x^2}{\pi}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right| = 2\left|-\cos\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{4\pi} - (-\cos 0 - 0)\right| =$$

$$2\left|-\frac{\pi}{4} + 1\right| = 2 \cdot 0'2146 = 0'4292$$

b) Nos piden calcular la integral $\int \frac{2x}{\pi} \operatorname{sen} x \, dx = \frac{2}{\pi}\int x \operatorname{sen} x \, dx$

Integramos por partes: $\begin{cases} u = x \;\; \rightarrow \;\; du = dx \\ dv = \operatorname{sen} x \, dx \;\; \rightarrow \;\; v = \int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x \end{cases}$

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx = -x\cos x - \int (-\cos x) \, dx = -x\cos x + \int \cos x \, dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + k$$

$$\frac{2}{\pi}\int x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{2}{\pi}(-x\cos x + \operatorname{sen} x) + k$$

3)

a) Calculamos la ecuación de la recta de regresión de Y sobre X: $y-\bar{y}=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x-\bar{x})$

$$\begin{cases}\bar{x}=1'69\\ \sigma_x=0'11\end{cases} \qquad \begin{cases}\bar{y}=80'25\\ \sigma_y=6'83\end{cases} \qquad \sigma_{xy}=0'69$$

$$y-80'25=\frac{0'69}{0'11^2}(x-1'69) \quad \rightarrow \quad y(1'72)=81'96$$

b) Calculamos la ecuación de la recta de regresión de X sobre Y: $x-\bar{x}=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}(y-\bar{y})$

$$x-1'69=\frac{0'69}{6'83^2}(y-80'25) \quad \rightarrow \quad x(80)=1'68$$

4)

a) Ecuación de r:

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(7,8,3)-(3,6,7)=(4,2,-4) \quad \rightarrow \quad \begin{cases}x=3+4\lambda\\ y=6+2\lambda\\ z=7-4\lambda\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x=3+2\lambda\\ y=6+\lambda\\ z=7-2\lambda\end{cases}$$

Ecuación de r':

$$\left.\begin{matrix}x-4y-z=-10\\ 3x-4y+z=-2\end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix}x-4y=-10+\mu\\ 3x-4y=-2-\mu\end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{cases}x=4-\mu\\ y=\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\mu\\ z=\mu\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x=4-2\mu\\ y=\frac{7}{2}-\mu\\ z=2\mu\end{cases}$$

Comprobamos que los vectores de dirección de las dos rectas son proporcionales:

$$\frac{2}{-2}=\frac{1}{-1}=\frac{-2}{2}$$

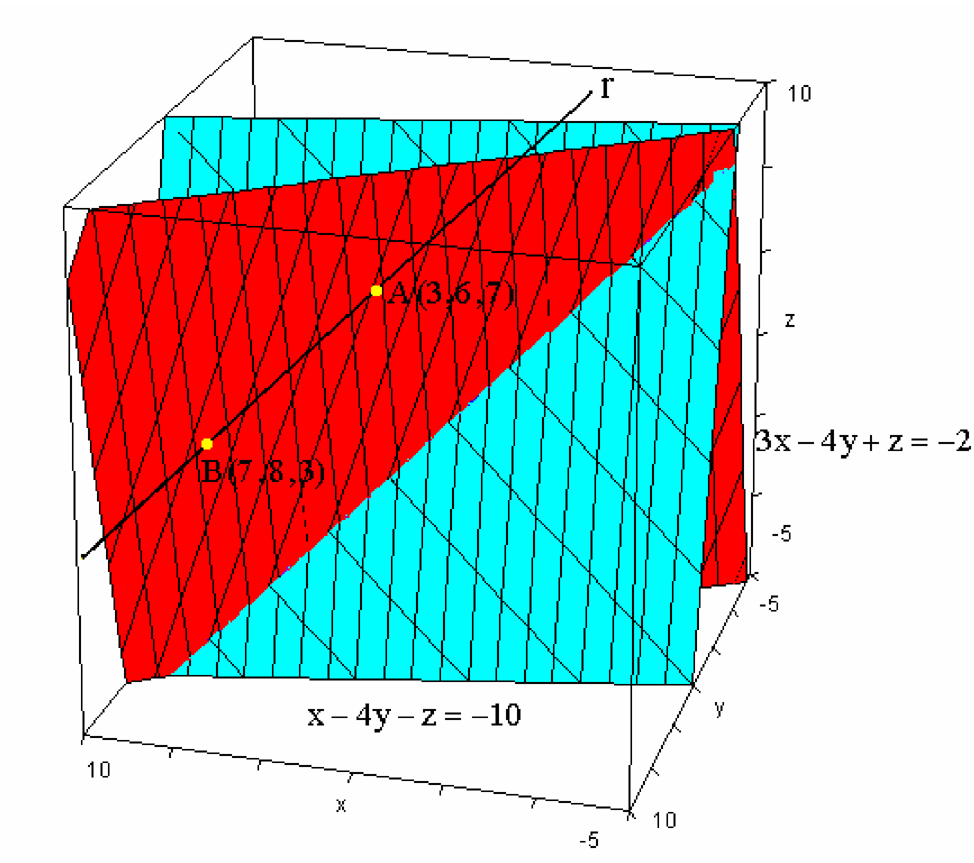
El punto $A(3,6,7)$ de r no pertenece a r' ya que $\begin{cases}3=4-2\mu\\ 6=\frac{7}{2}-\mu\\ 7=2\mu\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\mu=\frac{1}{2}\\ \mu=-\frac{5}{2}\\ \mu=\frac{7}{2}\end{cases}$ por lo tanto las rectas son paralelas.

b) Calculamos la distancia desde el punto A de r a la recta r'. Sea $P\left(4,\frac{7}{2},0\right)$ un punto de r'.

$$\overrightarrow{PA}=A-P=(3,6,7)-(4,\frac{7}{2},0)=\left(-1,\frac{5}{2},7\right)$$

$$d(r,r') = d(A,r') = \frac{\left|\overrightarrow{PA}\times\vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|} = \frac{\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & \frac{5}{2} & 7\\ -2 & -1 & 2\end{matrix}\right\|}{\left|\sqrt{4+1+4}\right|} = \frac{\left|12\,\vec{i}-12\,\vec{j}+6\,\vec{k}\right|}{3} = \frac{\sqrt{12^2+12^2+6^2}}{3} = 6$$

c) El área es: $A = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot h}{2} = \dfrac{\left|4,2,-4\right|\cdot d(r,r')}{2} = \dfrac{6\cdot 6}{2} = 18\,u^2$



Junio 2003 opción B. Ciencias de la Naturaleza y de la Salud. Tecnología.

1)

a)

$$\left.\begin{array}{l} X = C + 2Y \\ X = \dfrac{B-Y}{2} \end{array}\right\} \qquad C + 2Y = \frac{B-Y}{2} \qquad 2C + 4Y = B - Y \qquad Y = \frac{B-2C}{5}$$

$$Y = \frac{1}{5}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

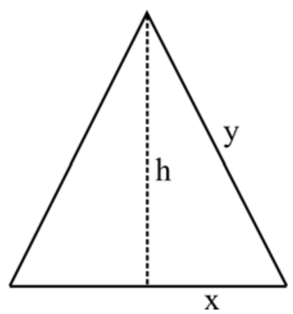
$$X = C + 2Y = C + 2\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $(2X+Y)X - (2X+Y)(2Y) = (2X+Y)(X-2Y) = BC = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2)

a)

Llamamos "x" a la mitad del lado desigual e "y" a los lados iguales. De la figura se deducen las relaciones siguientes:



$$y^2 = h^2 + x^2$$

Como $2y + 2x = 60 \;\Rightarrow\; y = 30 - x$

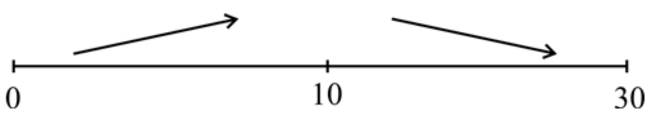
$$h = \sqrt{y^2 - x^2} = \sqrt{(30-x)^2 - x^2} = \sqrt{900 - 60x}$$

$$A(x) = \frac{2x\cdot h}{2} = x\,h = x\sqrt{900-60x} \qquad f(x) = [A(x)]^2 = x^2(900-60x) = 900x^2 - 60x^3$$

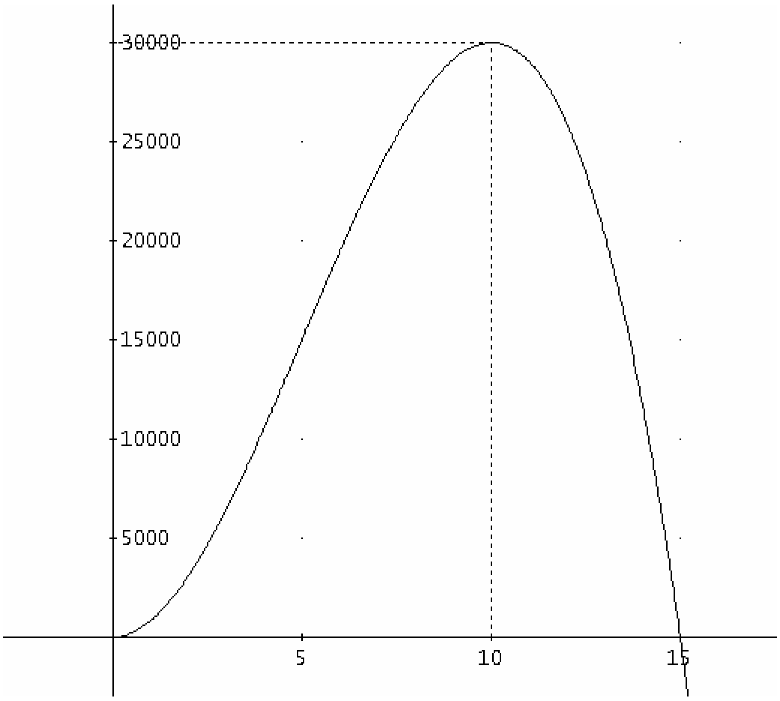
b) $f'(x) = 1800x - 180x^2 = 0 \qquad 180x(10-x) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = 0 \\ x = 10 \end{cases} \qquad$ con $x \in \,]0,30[$

$f'(5) = 4500 > 0$

$f'(20) = -36000 < 0$



Por tanto, en $x = 10$ $f(x)$ alcanza su valor máximo cuyo valor es 30000 como se observa en la gráfica de la función.



3) Estamos ante una distribución Binomial donde $n = 5$, $p = \frac{1}{6}$ y $q = \frac{5}{6}$.

a) $p(X = 2) = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0'161$

b) $p(X \le 1) = p(X = 0) + p(X = 1) = \binom{5}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^5 + \binom{5}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0'8038$

c) $p(X > 2) = 1 - p(X \le 2) = 1 - (0'161 + 0'8038) = 0'0352$

4) a) Ecuación de la recta r: $\vec{u} = (-1,2,1) - (2,2,4) = (-3,0,-3) = (-1,0,-1)$ $\quad \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 \\ z = 4 - t \end{cases}$

Ecuación del plano π: $A(1,0,1)$, $B(1,-1,0)$, $C(3,0,0)$

$\overrightarrow{AB} = (0,-1,-1) \qquad \overrightarrow{AC} = (2,0,-1) \qquad \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad x - 2y + 2z - 3 = 0$

Para que la recta y el plano sean paralelos el producto escalar del vector de dirección de la recta y del vector característico del plano tiene que ser cero.

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = (-1,0,-1) \cdot (1,-2,2) = -1 + 0 - 2 = -3 \neq 0$$

La recta y el plano no son paralelos.

b) Sustituimos las ecuaciones paramétricas de la recta en la ecuación del plano.

$$2-t-2\cdot 2+2(4-t)-3=0 \;\rightarrow\; t=1 \;\rightarrow\; \begin{cases} x=2-1=1 \\ y=2 \\ z=4-1=3 \end{cases} \;\Rightarrow\; P(1,2,3)$$

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{\left|\vec{u}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|(-1,0,-1)\cdot(1,-2,2)\right|}{\sqrt{1+1}\sqrt{1+4+4}}=\frac{\left|-1+0-2\right|}{\sqrt{2}\sqrt{9}}=\frac{3}{\sqrt{18}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \;\Rightarrow\; \alpha=45^{\circ}$$

c) Calculamos la distancia de un punto genérico de la recta al plano.

$$d(Q,\pi)=\frac{\left|1\cdot(2-t)-2\cdot 2+2\cdot(4-t)\right|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{\left|2-t-4+8-2t\right|}{3}=\frac{\left|6-3t\right|}{3}=4$$

De aquí se deducen dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 6-3t=12 \\ -6+3t=12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t=-2 \;\Rightarrow\; S(4,2,6) \\ t=6 \;\Rightarrow\; T(-4,2,-2) \end{cases}$$