Junio 2008

Bloque 1. ÁLGEBRA LINEAL

Problema 1.1

a) Discutiremos el sistema aplicando el Teorema de Rouché Fröbenius

.

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & 1 & 1\\ 1 & \alpha & 1\\ 1 & 1 & \alpha\end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix}\alpha & 1 & 1\\ 1 & \alpha & 1\\ 1 & 1 & \alpha\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{cases}\alpha=-2\\ \alpha=1\end{cases} \qquad A^*=\begin{pmatrix}\alpha & 1 & 1 & 1\\ 1 & \alpha & 1 & 1\\ 1 & 1 & \alpha & 1\end{pmatrix}$$

- Si $\alpha\neq -2$ y $\alpha\neq 1$ $\begin{cases}\text{rg } A=3\\ \text{rg } A^*=3\end{cases} \Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado
- Si $\alpha=-2$

$$\left.\begin{aligned}-2x+y+z&=1\\ x-2y+z&=1\\ x+y-2z&=1\end{aligned}\right\} \qquad \begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=3 \Rightarrow \text{rg}A=2 \qquad \begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=9\neq 0 \Rightarrow \text{rg}A^*=3$$

$$\begin{cases}\text{rg}A=2\\ \text{rg}A^*=3\end{cases} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

- Si $\alpha=1$

$$\left.\begin{aligned}x+y+z&=1\\ x+y+z&=1\\ x+y+z&=1\end{aligned}\right\} \qquad \text{rg}A=\text{rg}A^*=1 \qquad \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

b) $$\left.\begin{aligned}\alpha x+y+z&=1\\ x+\alpha y+z&=1\\ x+y+\alpha z&=1\end{aligned}\right\}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \alpha & 1\\ 1 & 1 & \alpha\end{vmatrix}}{(\alpha-1)^2(\alpha+2)}=\frac{1}{\alpha+2} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}\alpha & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & \alpha\end{vmatrix}}{(\alpha-1)^2(\alpha+2)}=\frac{1}{\alpha+2} \qquad x=\frac{\begin{vmatrix}\alpha & 1 & 1\\ 1 & \alpha & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}}{(\alpha-1)^2(\alpha+2)}=\frac{1}{\alpha+2}$$

Hay infinitos sistemas, todos ellos Compatibles Determinados para valores de $\alpha\neq -2$ y $\alpha\neq 1$. La solución general es:

$$\left(\frac{1}{\alpha+2},\frac{1}{\alpha+2},\frac{1}{\alpha+2}\right)$$

$$\text{c) } \left.\begin{array}{r} y+z=1 \\ x+z=1 \\ x+y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0'5 \\ y=0'5 \\ z=0'5 \end{array}\right.$$

Problema 1.2

$$\text{a) } A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

$$A^3 = A^2A = -I\cdot A = -A = \begin{pmatrix} -17 & -29 \\ 10 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } (I+A)^3 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & .-17 \end{pmatrix}\right)^2 = \begin{pmatrix} 18 & 29 \\ -10 & -16 \end{pmatrix}^3$$

$$\begin{pmatrix} 18 & 29 \\ -10 & -16 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 18 & 29 \\ -10 & -16 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} 18 & 29 \\ -10 & -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 58 \\ -20 & -34 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 18 & 29 \\ -10 & -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 58 \\ -20 & -36 \end{pmatrix}$$

$$\alpha I + \beta A = \alpha\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta\cdot\begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+17\beta & 29\beta \\ -10\beta & \alpha-17\beta \end{pmatrix}$$

Igualando las dos expresiones tenemos:

$$\begin{pmatrix} \alpha+17\beta & 29\beta \\ -10\beta & \alpha-17\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 58 \\ -20 & -36 \end{pmatrix} \to \left.\begin{array}{l} \alpha+17\beta=32 \\ 29\beta=58 \\ -10\beta=-20 \\ \alpha-17\beta=-36 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \beta=2 \\ \alpha=-2 \end{array}\right.$$

Bloque 2. GEOMETRÍA

Problema 2.1

a) Se tiene que verificar $d(A,r)=d(B,r)$

Las ecuaciones paramétricas de la recta r son: $\left\{\begin{array}{l} x=5+t \\ y=t \\ z=-2-2t \end{array}\right.$

Un punto cualquiera C, de la recta r, tiene como coordenadas genéricas $C(5+t,t,-2-2t)$.

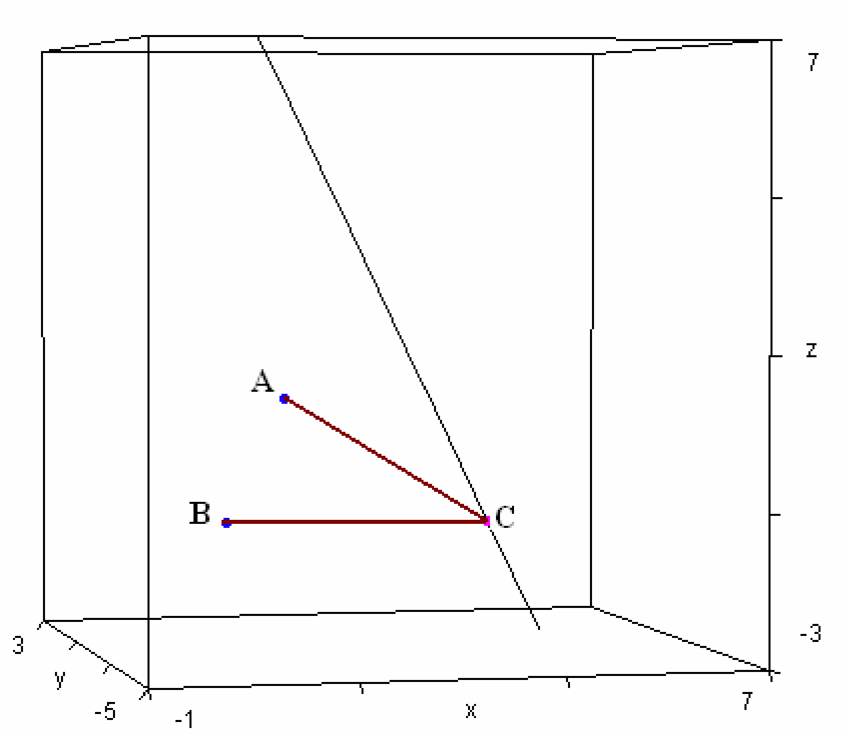
$$d(A,r)=d(A,C)=\sqrt{(5+t-2)^2+(t-1)^2+(-2-2t-1)^2} = \sqrt{6t^2+16t+19}$$

$$d(B,r)=d(B,C)=\sqrt{(5+t-1)^2+(t-0)^2+(-2-2t+1)^2}=\sqrt{6t^2+12t+17}$$

$$\sqrt{6t^2+16t+19}=\sqrt{6t^2+12t+17} \qquad 16t+19=12t+17 \quad \Rightarrow \quad t=-\frac{1}{2}$$

Las coordenadas del punto C son por tanto:

$$C\left(5-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-2+1\right)=C\left(\frac{9}{2},-\frac{1}{2},-1\right)=C(4'5,-0'5,-1)$$



b) El área del triángulo ABC es $A=\dfrac{\left|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CA}\right|}{2}$

$$\overrightarrow{CB}=(1,0,-1)-(4'5,-0'5,-1)=(-3'5,0'5,0)$$

$$\overrightarrow{CA}=(2,1,1)-(4'5,-0'5,-1)=(-2'5,1'5,2)$$

$$\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CA}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3'5 & 0'5 & 0\\ -2'5 & 1'5 & 2\end{vmatrix}=\vec{i}+7\vec{j}-4\vec{k} \qquad \left|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CA}\right|=\sqrt{1^2+7^2+(-4)^2}=\sqrt{66}=8'12$$

$$A=\frac{\left|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CA}\right|}{2}=\frac{8'12}{2}=4'06\,u^2$$

Problema 2.2

a) Ecuaciones paramétricas de r:

$$\left.\begin{array}{r} y+z=0 \\ x-2y-1=0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} y=-\lambda \\ x-2y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=1-2\lambda \\ y=-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

Ecuaciones paramétricas de s:

$$\frac{x}{2}=y-1=\frac{z-3}{-1} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} x=2\mu \\ y=1+\mu \\ z=3-\mu \end{array}\right\}$$

b) Un punto de la recta r es $A=(1,0,0)$ y un vector de dirección es $\vec{u}=(-2,-1,1)$

Un punto de la recta s es $B=(0,1,3)$ y un vector de dirección es $\vec{v}=(2,1,-1)$

$$\overrightarrow{AB}=(0,1,3)-(1,0,0)=(-1,1,3) \qquad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0$$

Como el determinante es igual a cero, las rectas son paralelas o coinciden. Comprobamos si el punto A de r pertenece a s.

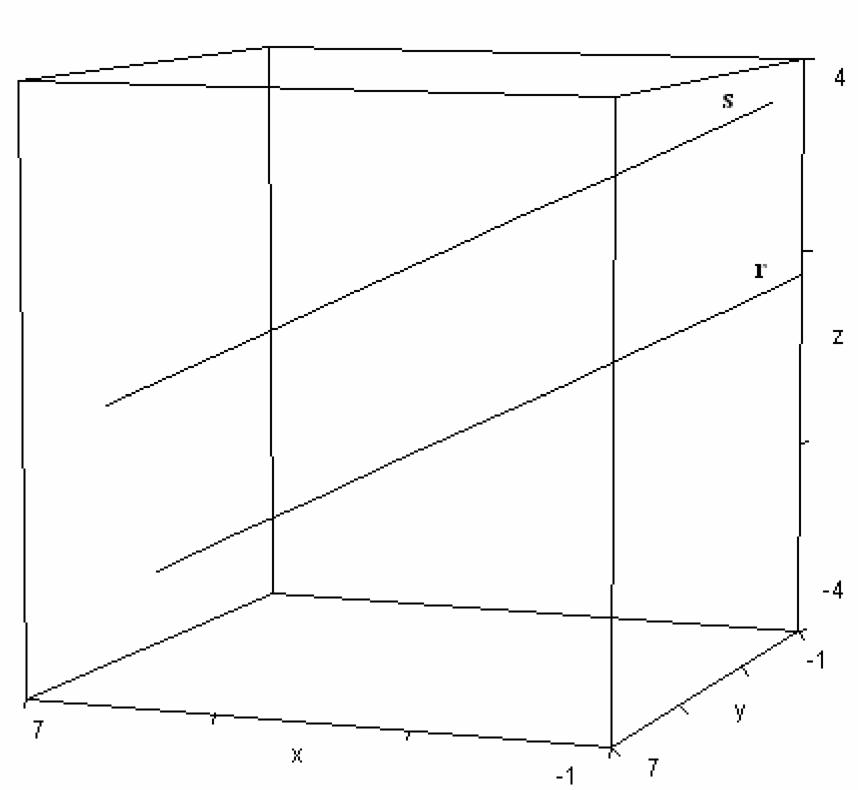
$$\left.\begin{array}{l} 1=2\mu \\ 0=1+\mu \\ 0=3-\mu \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \mu=0'5 \\ \mu=-1 \\ \mu=3 \end{cases}$$

Como los valores de μ son distintos quiere decir que $A\notin s$ y por tanto las rectas r y s son paralelas.

c) La distancia entre las rectas r y s es la distancia de un punto de r a la recta s.

$$\overrightarrow{BA}=(1,0,0)-(0,1,3)=(1,-1,-3)$$

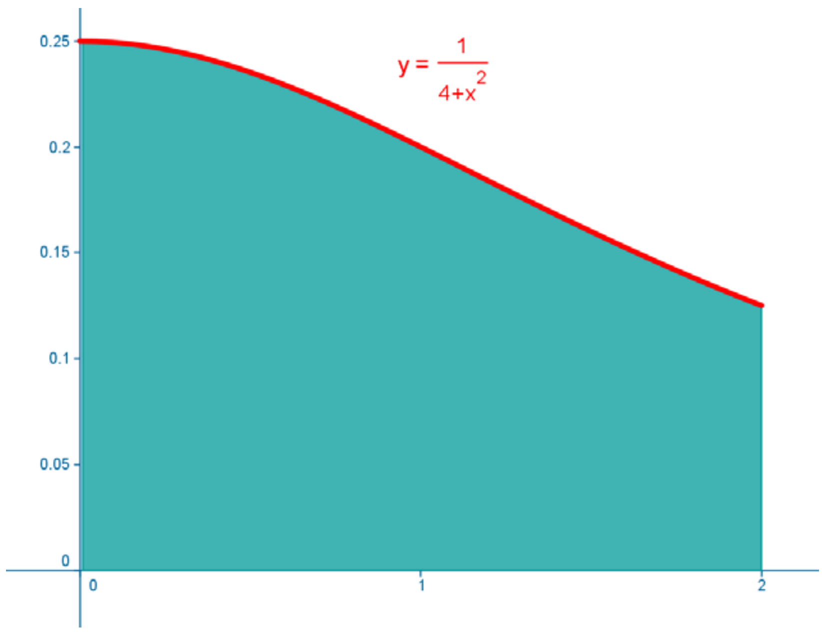
$$d(r,s)=d(A,s)=\frac{\left|\overrightarrow{BA}\times\vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|}=\frac{\left\|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}\right\|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{\left|4\vec{i}-5\vec{j}+3\vec{k}\right|}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{4^2+(-5)^2+3^2}}{\sqrt{6}}=2'88 \text{ u.l.}$$



Bloque 3. ANÁLISIS

Problema 3.1

a)



$$A = \int_0^2 \frac{1}{4+x^2}dx = \int_0^2 \frac{\frac{1}{4(4+x^2)}}{4}dx = \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{\frac{1}{4+x^2}}{4}dx = \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}}dx =$$

$$\frac{1}{4}\int_0^2 \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx = \frac{1}{4}\cdot 2\int_0^2 \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^2 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}1 - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}0 = \frac{\pi}{8}u^2$$

b) Del enunciado del problema se deduce que

$$\int_0^\alpha \frac{1}{4+x^2}dx = 2\cdot\int_\alpha^2 \frac{1}{4+x^2}dx \qquad \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^\alpha = 2\cdot\frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_\alpha^2$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}0 = \operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{2} \qquad \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{arctg}1 \qquad \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{6} \qquad \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\alpha}{2} \qquad \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1'1547$$

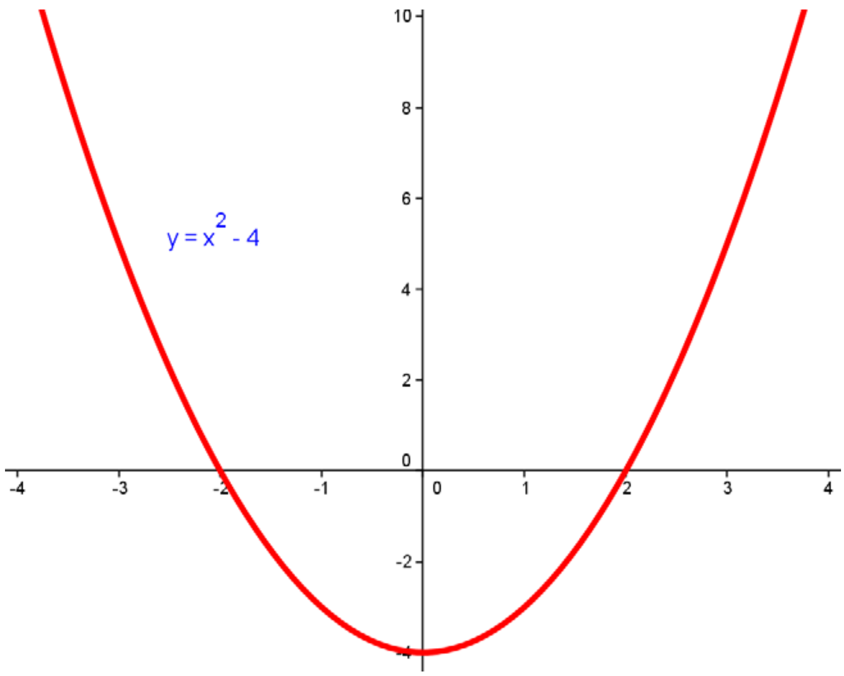
Problema 3.2

a) La gráfica de la función $f(x) = x^2 - 4$ es una parábola que es cóncava por ser el coeficiente de x^2 un número positivo.

El mínimo corresponde al punto $(0,-4)$ ya que:

$$f'(x) = 2x = 0 \quad \to \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad f(0) = -4$$

La función es decreciente $\forall x \in \left]-\infty, 0\right[$ y creciente $\forall x \in \left]0, \infty\right[$



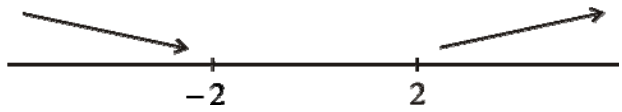
b) $g(x) = \ln f(x) = \ln(x^2 - 4) \qquad x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$

$$D[g(x)] = \forall x \in \left]-\infty, -2\right[\cup \left]2, \infty\right[$$

c) $g'(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 4}$

$g'(-3) < 0$

$g'(3) > 0$

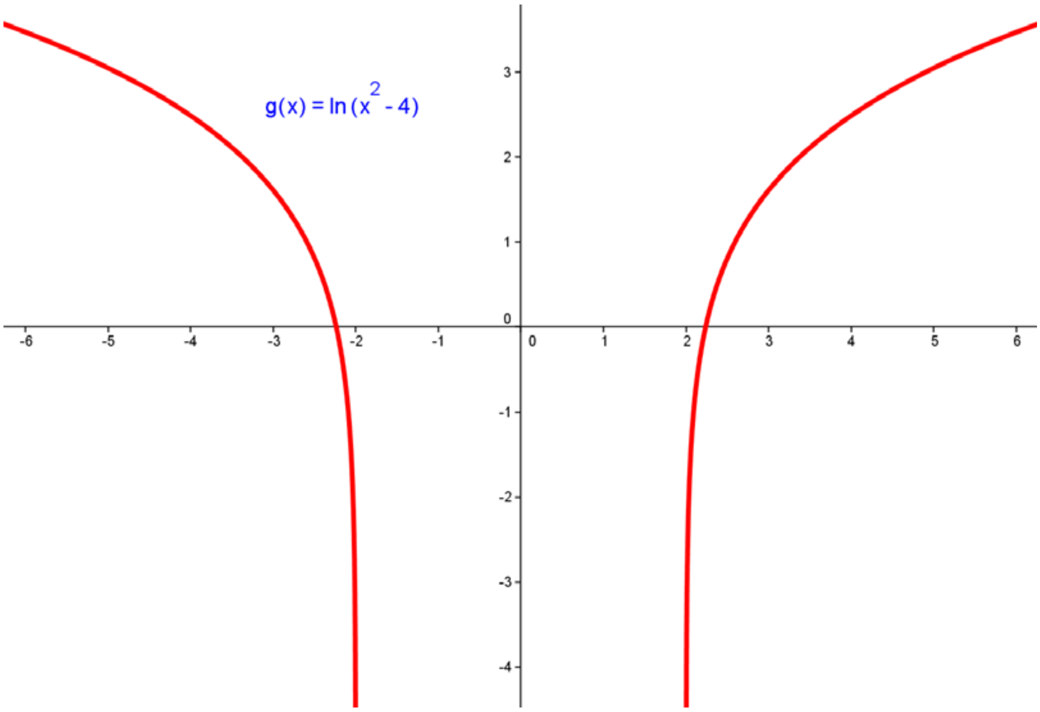


$$g(x) \text{ es decreciente } \forall x \in \left]-\infty, -2\right[$$

$$g(x) \text{ es creciente } \forall x \in \left]2, \infty\right[$$

No hay máximos ni mínimos absolutos, ya que:

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \infty \qquad \lim_{x \to -\infty} g(x) = \infty \qquad \lim_{x \to -2^-} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 2^+} g(x) = -\infty$$



Bloque 4. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

<u>Problema 4.1</u>

Sean “x” e “y” el ancho y largo de la hoja de papel respectivamente.

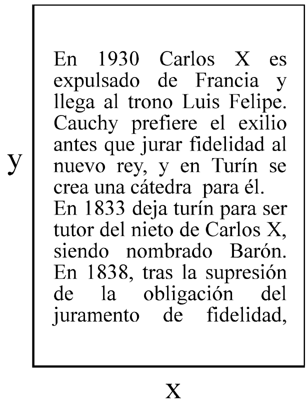
$$S = x \cdot y$$

Por otra parte, el trozo de papel que contiene texto impreso es:

$$18 = (x - 2)(y - 4)$$

$$18 = xy - 4x - 2y + 8 \quad \rightarrow \quad x(y-4) = 10 + 2y$$

$$x = \frac{10+2y}{y-4} \quad \rightarrow \quad S = \frac{10+2y}{y-4} \cdot y = \frac{10y+2y^2}{y-4} \quad \forall y > 4$$



Estudiamos la monotonía de la función:

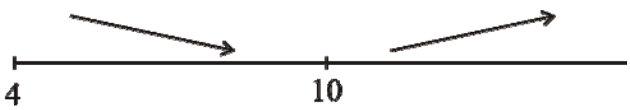
$$S' = \frac{(10+4y)(y-4) - (10y+2y^2)}{(y-4)^2} = \frac{2 \cdot (y^2 - 8y - 20)}{(y-4)^2}$$

$$y^2 - 8y - 20 = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ y = 10 \end{cases}$$

Evidentemente la solución negativa la descartamos.

Sabemos que el dominio de la función es $\forall y > 4$. Estudiamos la monotonía de la función:

$$S'(5) < 0$$
$$S'(11) > 0$$



Del estudio de la monotonía se deduce que para $y = 10$ cm. el gasto de papel es mínimo.

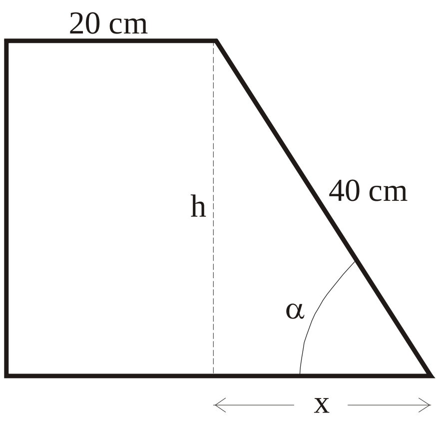
El valor correspondiente de x es: $x = \dfrac{10 + 2 \cdot 10}{10-4} = 5\text{cm}$

Las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo son $x = 5\,\text{cm}$ e $y = 10\,\text{cm}$

Problema 4.2

El área del trapecio es:

$$S = \frac{B+b}{2} \cdot h = \frac{20+x+20}{2} \cdot h = \frac{40+x}{2} \cdot h$$



Aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo:

$$40^2 = h^2 + x^2 \quad \rightarrow \quad h = \sqrt{40^2 - x^2}$$

$$S = \frac{40+x}{2} \cdot \sqrt{1600 - x^2} \quad \rightarrow \quad S' = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1600 - x^2} + \frac{40+x}{2} \cdot \frac{-2x}{2 \cdot \sqrt{1600 - x^2}} =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1600-x^2}+\frac{-40x-x^2}{2\cdot\sqrt{1600-x^2}}=\frac{1600-x^2-40x-x^2}{2\cdot\sqrt{1600-x^2}}=\frac{-2x^2-40x+1600}{2\cdot\sqrt{1600-x^2}}=0$$

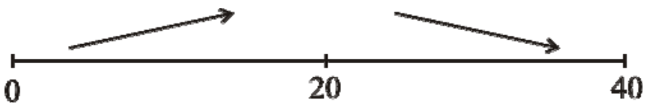
$$-2x^2-40x+1600=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x=-40 \\ x=20 \end{cases}$$

Evidentemente la solución negativa la descartamos.

Sabemos que el dominio de la función es $\forall x\in[0,40]$. Estudiamos la monotonía de la función:

$S'(10)>0$

$S'(25)<0$



Del estudio de la monotonía se deduce que en $x=20$ hay un máximo.

$$x=20 \quad\to\quad h=\sqrt{1600-20^2}=34'64$$

El ángulo α lo calculamos a través de la tangente:

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{h}{x}=\frac{34'64}{20}=1'732 \quad\Rightarrow\quad \alpha=\mathrm{arctg}\,1'732=60^{\circ}$$