

Bloque 1. ÁLGEBRA LINEAL

Problema 1.1

a) Comprobamos si el determinante de la matriz A es distinto de cero.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \Rightarrow \text{La matriz A tiene inversa.}$$

$$(\text{Adj} A) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \\ 12 & -6 & 9 \end{pmatrix} \quad (\text{Adj} A)^t = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 12 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 12 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } 3 \cdot A^{-1} = 3 \cdot \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 12 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad |3A^{-1}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

c) $xI + yA + zA^2 = B$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 36 & 12 \\ 0 & 9 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 9 & 36 & 12 \\ 0 & 9 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 48 & 12 \\ 0 & 18 & 12 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 3y + 9z = 18 \\ 6y + 36z = 48 \\ 12z = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Problema 1.2

a) Como el sistema tiene 3 ecuaciones y tres incógnitas podemos discutirlo utilizando la Regla de Cramer.

$$\begin{vmatrix} \alpha+3 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -(\alpha+2) \\ 2 & \alpha-3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \alpha^3 + 2\alpha^2 + \alpha = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = -1 \end{cases}$$

$$\text{Si } \alpha = 0 \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}A = 2 \quad \begin{vmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow \text{rg}A^* = 3$$

Como $\text{rg}A = 2 \neq \text{rg}A^* = 3 \Rightarrow$ Sistema Incompatible

b) Si $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq -1 \Rightarrow \text{rg}A = \text{rg}A^* = 3 \Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado

$$\text{c) Si } \alpha = 1 \quad A^* = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ las tres ecuaciones son la misma, por tanto:}$$

$\text{rg}A = \text{rg}A^* = 1 \Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

$$x - 2y - z - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} z = \lambda \\ y = \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + \lambda + 2\mu \\ y = \mu \\ z = \lambda \end{cases} \quad (2 + \lambda + 2\mu, \mu, \lambda)$$

Bloque 2. GEOMETRÍA

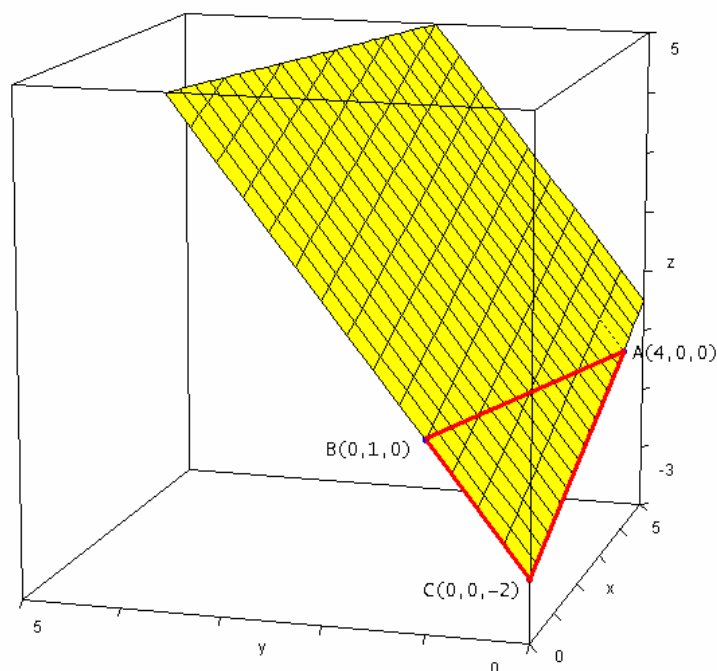
Problema 2.1

a) En el punto donde corta al eje OX se verifica que $y = z = 0 \rightarrow x = 4 \Rightarrow A(4, 0, 0)$

En el punto donde corta al eje OY se verifica que $x = z = 0 \rightarrow y = 1 \Rightarrow B(0, 1, 0)$

En el punto donde corta al eje OZ se verifica que $x = y = 0 \rightarrow z = -2 \Rightarrow C(0, 0, -2)$

$$\overrightarrow{AB} = (-4, 1, 0) \quad \overrightarrow{AC} = (-4, 0, -2)$$



El área del triángulo viene dada por la fórmula $A_T = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{2}$

$$A_T = \frac{|-2\vec{i} - 8\vec{j} + 4\vec{k}|}{2} = \frac{\sqrt{4 + 64 + 16}}{2} = \frac{\sqrt{84}}{2} = \frac{2\sqrt{21}}{2} = \sqrt{21} u^2$$

b) El perímetro viene dado por la fórmula $p = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{BC}|$ $\overrightarrow{BC} = (0, -1, -2)$

$$p = \sqrt{16 + 1} + \sqrt{16 + 4} + \sqrt{1 + 4} = \sqrt{17} + \sqrt{20} + \sqrt{5} = 10'8313 \text{ ul}$$

$$c) \hat{A} = \arccos \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{AC}|}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|} = \arccos \frac{|(-4, 1, 0) \cdot (-4, 0, -2)|}{\sqrt{16+1} \cdot \sqrt{16+4}} = \arccos \frac{16}{\sqrt{340}} = 29'8050''$$

$$\hat{B} = \arccos \frac{|\vec{BA} \cdot \vec{BC}|}{|\vec{BA}| |\vec{BC}|} = \arccos \frac{|(4, -1, 0) \cdot (0, -1, -2)|}{\sqrt{16+1} \cdot \sqrt{1+4}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{85}} = 83'7731''$$

$$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 66'4219''$$

Problema 2.2

a) El plano de ecuación $z = 0$ es el plano XY, por tanto su vector característico es $(0, 0, 1)$

El vector de dirección de la recta que pasa por A y es perpendicular al plano XY es $\vec{u} = (0, 0, 1)$. La ecuación de la recta es:

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \\ z = t \end{cases}$$

b) La recta de ecuación $x = y = 4$ es $\begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \\ z = s \end{cases}$

Las coordenadas de un punto Q de esta recta son $Q(4, 4, s)$.

La recta que pasa por los puntos O y Q tiene por vector de dirección $\vec{OQ} = (4, 4, s)$.

El plano perpendicular a dicha recta tiene como vector característico o normal el mismo, por tanto su ecuación es:

$$4x + 4y + sz + D = 0$$

El plano pasa por el punto $P(0, 0, 12)$, por tanto verifica su ecuación: $12s + D = 0$

El plano pasa por el punto $Q(4, 4, s)$, por tanto verifica su ecuación: $32 + s^2 + D = 0$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones.

$$\begin{cases} 12s + D = 0 \\ 32 + s^2 + D = 0 \end{cases} \rightarrow s^2 - 12s + 32 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s = 4 \rightarrow D = -48 \\ s = 8 \rightarrow D = -96 \end{cases}$$

Obtenemos los planos que nos piden.

$$4x + 4y + 4z - 48 = 0 \rightarrow x + y + z - 12 = 0$$

$$4x + 4y + 8z - 96 = 0 \rightarrow x + y + 2z - 24 = 0$$

Bloque 3. ANÁLISIS

Problema 3.1

a) Dominio

$$(3-x)(3+x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-3 \end{cases} \quad D = \forall x \in \mathbb{R} - \{-3, 3\}$$

Monotonía

$$f(x) = \frac{1}{9-x^2} \quad f'(x) = \frac{2x}{(9-x^2)^2} \quad 2x=0 \rightarrow x=0$$

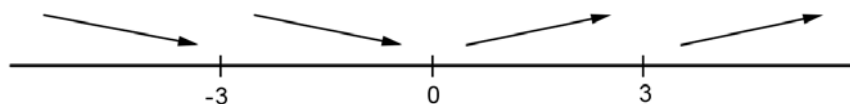
Como el denominador está elevado al cuadrado siempre es positivo.

$$f'(-4) < 0$$

$$f'(-2) < 0$$

$$f'(2) > 0$$

$$f'(4) > 0$$



La función es creciente $\forall x \in]0, 3[\cup]3, \infty[$

La función es decreciente $\forall x \in]-\infty, -3[\cup]-3, 0[$

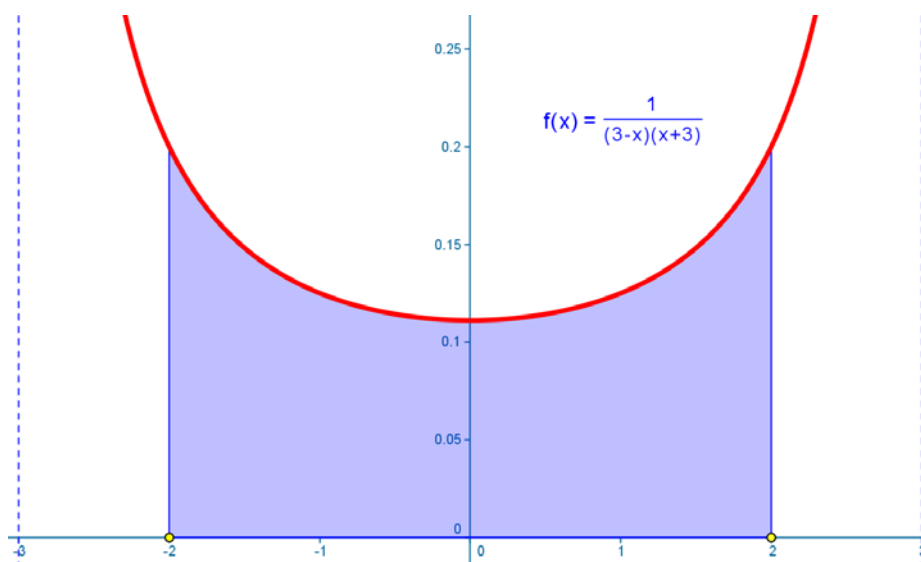
$$b) \frac{1}{(3-x)(x+3)} = \frac{A}{3-x} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3) + B(3-x)}{(3-x)(x+3)}$$

$$1 = A(x+3) + B(3-x) \rightarrow \begin{cases} \text{Si } x = -3 & 1 = 6B \Rightarrow B = \frac{1}{6} \\ \text{Si } x = 3 & 1 = 6A \Rightarrow A = \frac{1}{6} \end{cases}$$

c) Sabemos que la función no corta al eje de abscisas.

$$\int \frac{1}{(3-x)(x+3)} dx = \frac{1}{6} \int \frac{dx}{3-x} + \frac{1}{6} \int \frac{dx}{x+3} = -\frac{1}{6} \ln|3-x| + \frac{1}{6} \ln|x+3|$$

$$A = \left| \int_{-2}^2 \frac{1}{(3-x)(x+3)} dx \right| = \left| \left[-\frac{1}{6} \ln|3-x| + \frac{1}{6} \ln|x+3| \right]_{-2}^2 \right| = \left| \frac{1}{6} \ln 5 + \frac{1}{6} \ln 5 \right| = \frac{1}{3} \ln 5 = 0'5364$$



Problema 3.2

a) $f(x) + f(-x) = e^x - e^{-x} + e^{-x} - e^x = 0$

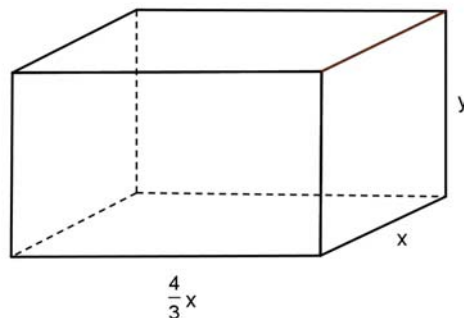
b) $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^a (e^x - e^{-x}) dx = \left[e^x + e^{-x} \right]_{-a}^a = e^a + e^{-a} - (e^{-a} + e^a) = 0$

c) $f'(x) = e^x + e^{-x}$ $f''(x) = e^x - e^{-x} = 0 \rightarrow e^x = e^{-x} \quad e^x = \frac{1}{e^x} \quad e^{2x} = 1$
 $2x \ln e = \ln 1 \quad 2x = 0 \quad x = 0 \rightarrow f(0) = e^0 - e^0 = 0$. El punto es $I(0, 0)$

Bloque 4. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Problema 4.1

$$V = 100 = \frac{4}{3}x \cdot x \cdot y = \frac{4}{3}x^2y \rightarrow y = \frac{75}{x^2}$$



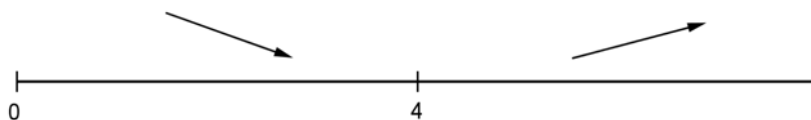
$$C(x) = \frac{4}{3}x^2 \cdot 225 + \frac{4}{3}x^2 \cdot 300 + 256\left(2xy + 2 \cdot \frac{4}{3}xy\right) = 700x^2 + \frac{3584}{3}xy$$

$$\text{Como } y = \frac{75}{x^2} \rightarrow C(x) = 700x^2 + \frac{3584 \cdot 75}{3x} = 700x^2 + \frac{89600}{x}$$

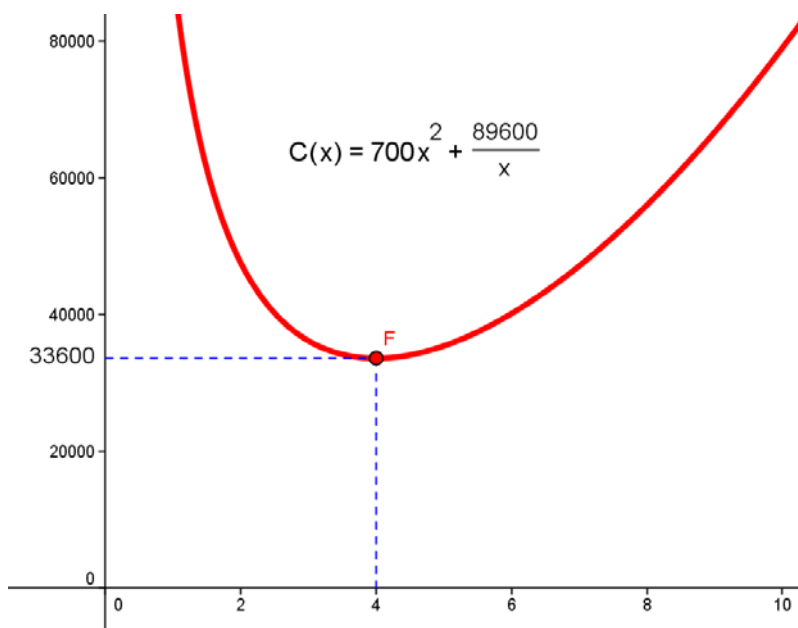
$$C'(x) = 1400x - \frac{89600}{x^2} = 0 \quad 1400x^3 - 89600 = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$C'(1) < 0$$

$$C'(5) > 0$$



El coste mínimo se produce cuando $x = 4$ m y es de $C(4) = 700 \cdot 16 + \frac{89600}{4} = 33600$ €



Problema 4.2

El precio de venta es $300 \cdot 1'4 = 420 \text{ €}$

Si por cada 3 € de rebaja el proveedor vende 5 unidades más tenemos:

Ingresos $\rightarrow I(x) = (420 - 3x)(50 + 5x) = -15x^2 + 1950x + 21000$

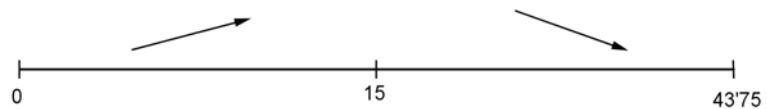
Gastos $\rightarrow G(x) = 300(50 + 5x) = 15000 + 1500x$

Beneficios $\rightarrow B(x) = I(x) - G(x) = -15x^2 + 450x + 9000$

$$B'(x) = -30x + 450 = 0 \Rightarrow x = 15$$

$$B'(5) > 0$$

$$B'(20) < 0$$



El beneficio máximo se obtiene vendiendo 125 unidades a un precio de 375 € y este beneficio es de 12375 €.

