Septiembre 2002 opción A. Ciencias de la Naturaleza y de la Salud

1)

i) $M = A - 2BC = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 30 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 14 \\ -21 & 4 \end{pmatrix}$

ii) $|D| = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad (\mathrm{Adj}D) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} \quad (\mathrm{Adj}D)^t = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

iii) $DX = M \rightarrow D^{-1}DX = D^{-1}M \rightarrow X = D^{-1}M = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 14 \\ -21 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -165 & 0 \\ 72 & 2 \end{pmatrix}$

$MD^{-1} = YDD^{-1} \rightarrow Y = MD^{-1} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} 9 & 14 \\ -21 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 21 \\ 46 & -159 \end{pmatrix}$

2)

a) Es una distribución $N(1'70, 0'20)$

$$p(X > 1'95) = p\left(z > \frac{1'95 - 1'70}{0'20}\right) = p(z > 1'25) = 1 - p(z < 1'25) = 1 - 0'8944 = 0'1056$$

b) $p(X > 1'65) = p\left(z > \dfrac{1'65 - 1'70}{0'20}\right) = p(z > -0'25) = p(z < 0'25) = 0'5987$

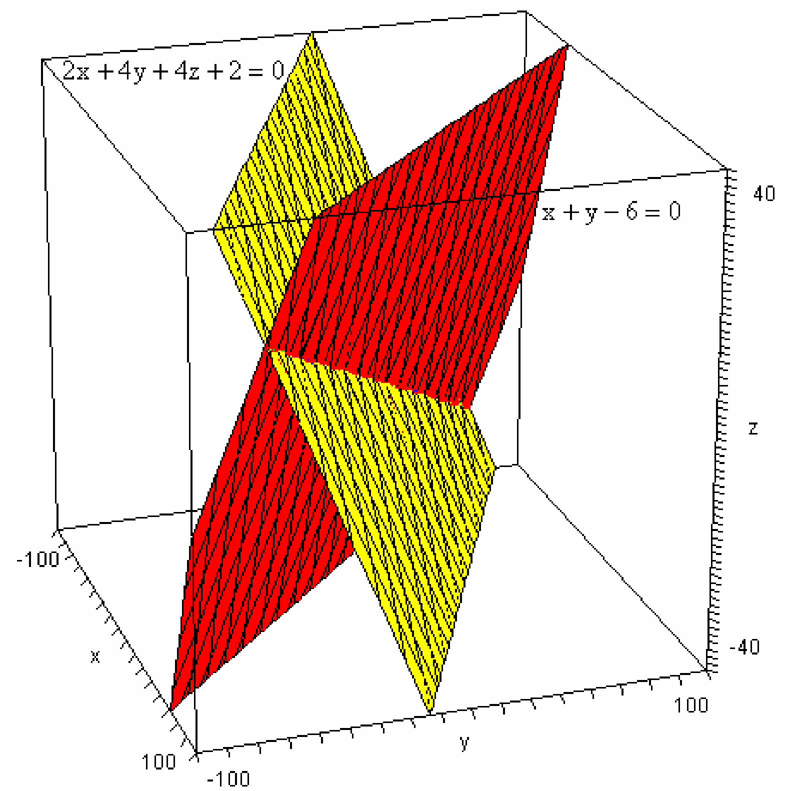
Es un problema de probabilidad condicionada. $p(B/A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$

En nuestro caso

$$p(X > 1'95 / X > 1'65) = \frac{p(X > 1'95 \cap X > 1'65)}{p(X > 1'65)} = \frac{p(X > 1'95)}{p(X > 1'65)} = \frac{0'1056}{0'5987} = 0'1764$$

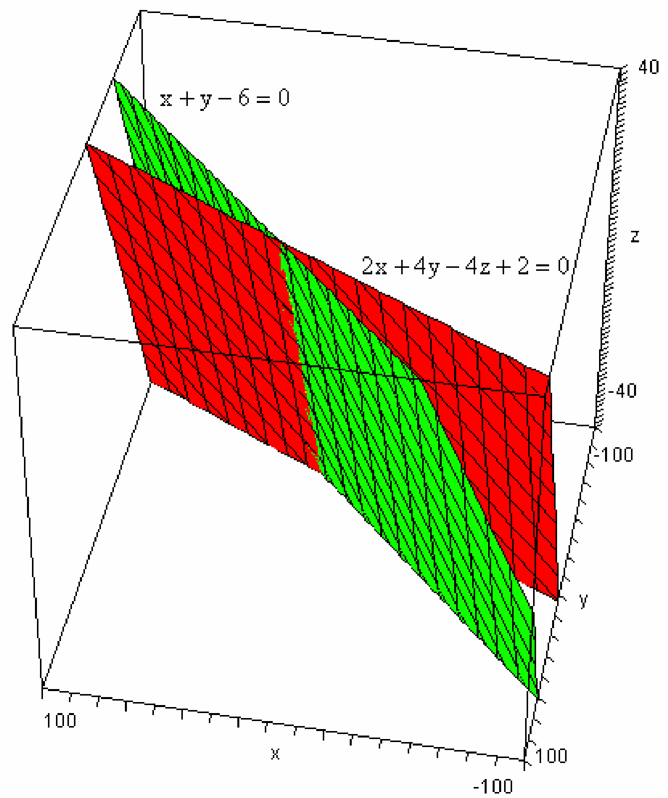
3)

a) $\left.\begin{array}{r} x + y - 6 = 0 \\ 2x + 4y + 4z + 2 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 6 \\ x + 2y = -1 - 2t \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 13 + 2t \\ y = -7 - 2t \\ z = t \end{array}\right.$



b) $\cos 45^{\circ} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{|(1,1,0)(2,4,\lambda)|}{\sqrt{2}\sqrt{4+16+\lambda^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{2}\sqrt{20+\lambda^2}} \quad \to \quad 2\sqrt{20+\lambda^2} = 12$

$$4(20+\lambda^2) = 144 \qquad 4\lambda^2 = 64 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda = 4 \\ \lambda = -4 \end{cases}$$



4) $f(1)=1 \Rightarrow 1+a+b+c=1$

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

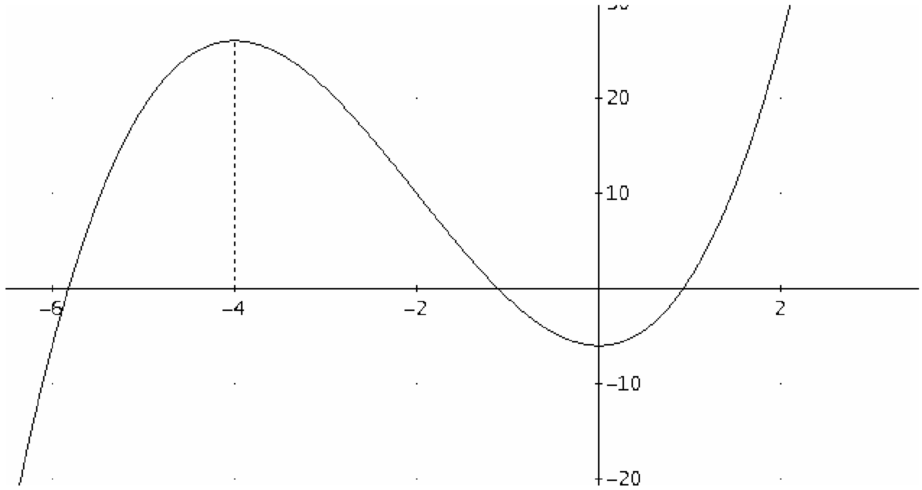
Máximo en $x=-4 \Rightarrow f'(-4)=0 \Rightarrow 48-8a+b=0$

Mínimo en $x=0 \Rightarrow f'(0)=0 \Rightarrow b=0$

Sustituyendo en la ecuación anterior $48-8a=0 \Rightarrow a=6$

$$f(1)=1 \Rightarrow 1+6+c=1 \Rightarrow c=-6$$

La función es: $f(x)=x^3+6x^2-6$



1)

i) $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&5\\3&5&\lambda^2\end{pmatrix}$ $\quad\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&5\\3&5&\lambda^2\end{vmatrix}=0\qquad \lambda^2-9=0\ \Rightarrow\ \begin{cases}\lambda=3\\\lambda=-3\end{cases}$

$$\begin{vmatrix}1&1\\2&3\end{vmatrix}=1\qquad A^*=\begin{pmatrix}1&1&1&\lambda\\2&3&5&2\\3&5&\lambda^2&1\end{pmatrix}$$

- Si $\lambda\neq 3$ y $\lambda\neq -3$ $\quad rgA=rgA^*=3\ \Rightarrow$ S.C.D.
- Si $\lambda=3$

$$A^*=\begin{pmatrix}1&1&1&3\\2&3&5&2\\3&5&9&1\end{pmatrix}\qquad\begin{vmatrix}1&1&3\\2&3&2\\3&5&1\end{vmatrix}=0\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}rgA=2\\rgA^*=2\end{cases}\Rightarrow\ \text{S.C.I.}$$

- Si $\lambda=-3$

$$A^*=\begin{pmatrix}1&1&1&-3\\2&3&5&2\\3&5&9&1\end{pmatrix}\qquad\begin{vmatrix}1&1&-3\\2&3&2\\3&5&1\end{vmatrix}=-6\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}rgA=2\\rgA^*=3\end{cases}\Rightarrow\ \text{S.I.}$$

ii) $\left.\begin{matrix}x+y+z=3\\2x+3y+5z=2\end{matrix}\right\}\ \rightarrow\ \left.\begin{matrix}x+y=3-t\\2x+3y=2-5t\end{matrix}\right\}\ \rightarrow\ \begin{cases}x=7+2t\\y=-4-3t\\z=t\end{cases}$

La solución general del sistema es el conjunto $(7+2t,-4-3t,t)$ con $t\in R$

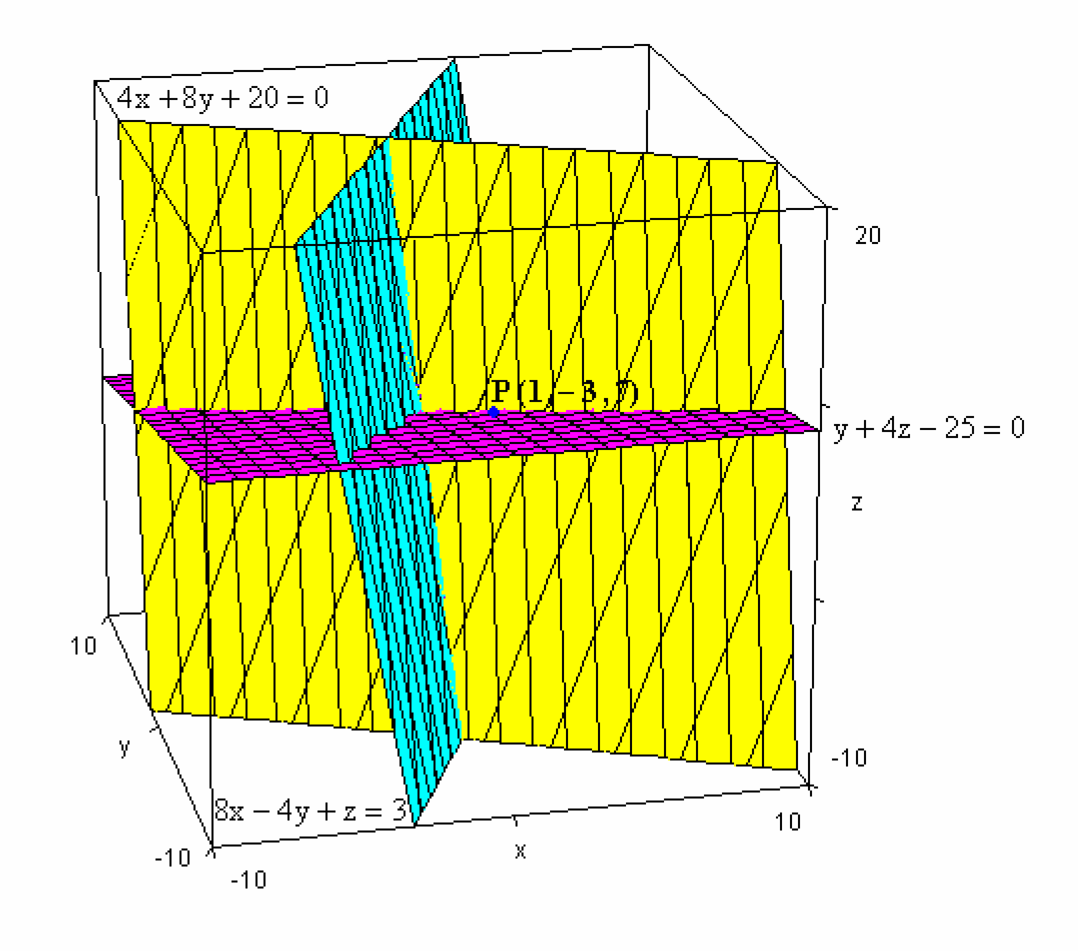
iii)Si los vectores son perpendiculares el producto escalar es cero.

$$(7+2t,-4-3t,t)(1,1,2)=0\qquad 7+2t-4-3t+2t=0\ \Rightarrow\ t=-3\ \Rightarrow\ (1,5,-3)$$

2)

a) Por ser perpendiculares, el vector de dirección de la recta es el mismo que el vector característico del plano.

$$\frac{x-1}{8}=\frac{y+3}{-4}=\frac{z-7}{1}\qquad\begin{cases}\dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y+3}{-4}\\[2mm]\dfrac{y+3}{-4}=\dfrac{z-7}{1}\end{cases}\qquad\begin{cases}4x+8y+20=0\\y+4z-25=0\end{cases}$$

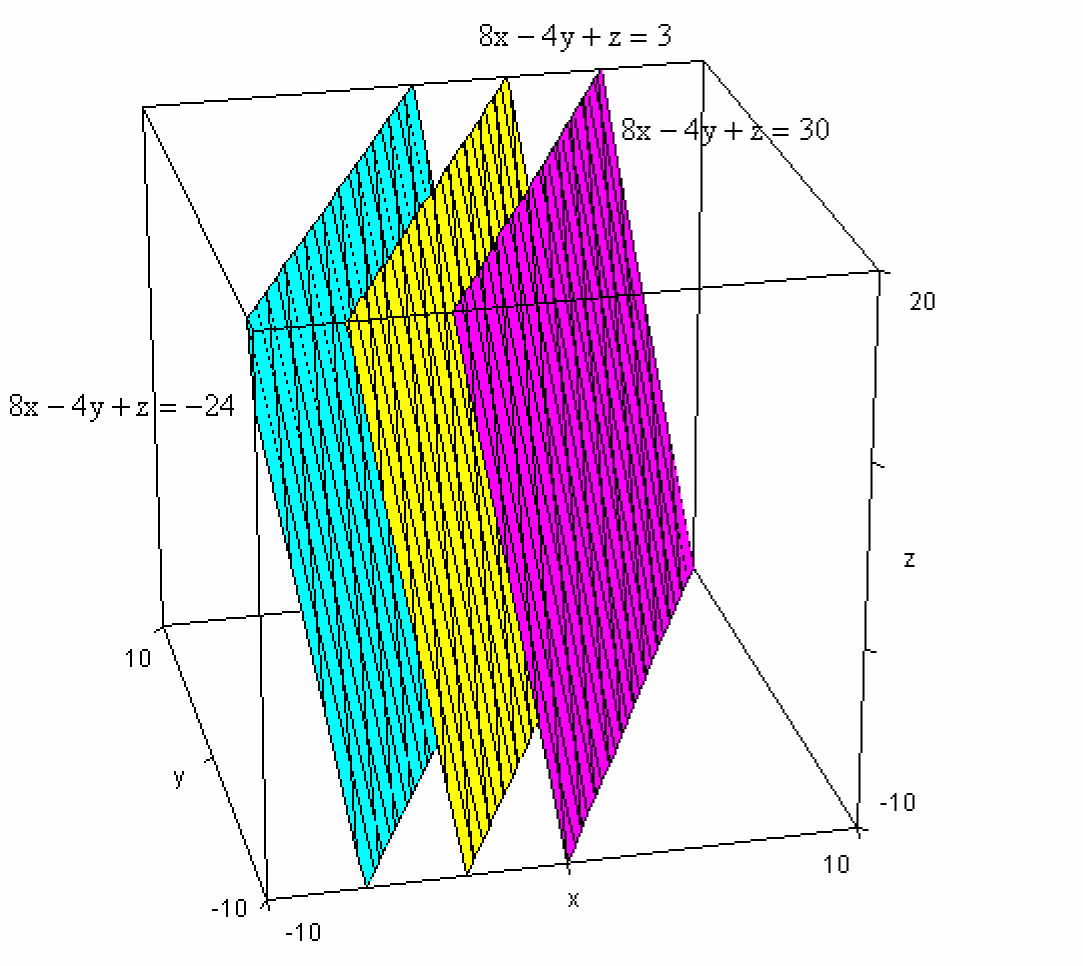


b) $d(P,\pi)=\dfrac{|8\cdot 1-4\cdot(-3)+1\cdot 7-3|}{\sqrt{64+16+1}}=\dfrac{24}{9}=\dfrac{8}{3}$

c) Los planos que distan 3 unidades de π son paralelos a él y habrá dos, uno por cada lado. Al ser paralelos tendrán el mismo vector característico, por tanto:

$$3=\frac{|8x-4y+z-3|}{\sqrt{64+16+1}}=\frac{|8x-4y+z-3|}{9}$$

$$\begin{cases}8x-4y+z-3=27\\ 8x-4y+z-3=-27\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}8x-4y+z=30\\ 8x-4y+z=-24\end{cases}$$



3) Ser trata de una Distribución Binomial donde $n = 5, p = 0'4$ y $q = 0'6 \quad \Rightarrow \quad B(5, 0'4)$

a) $p(X = 0) = \binom{5}{0} \cdot 0'4^0 \cdot 0'6^5 = 0'0777$

b) $p(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot 0'4^2 \cdot 0'6^3 = 0'3456$

c) $p(X = 4) = \binom{5}{4} \cdot 0'4^4 \cdot 0'6^1 = 0'0768$

4) Calculamos los puntos de corte de las dos gráficas resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = \dfrac{2}{1+x^2} \end{array}\right\} \qquad x^2 = \frac{2}{1+x^2} \qquad x^4 + x^2 - 2 = 0 \qquad x^2 = t \qquad t^2 + t - 2 = 0$$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t = 1 \\ t = -2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1 \\ x^2 \neq -2 \end{cases}$$

Los puntos de corte son $(1,1)$ y $(-1,1)$.

Como se observa en la gráfica, el problema presenta una simetría respecto al eje de ordenadas.

$$A = 2\left|\int_0^1 \left[\frac{2}{1+x^2} - x^2\right] dx\right| = 2\left|\left[2\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1\right| = 2\left[2\,\mathrm{arctg}1 - \frac{1}{3} - 0\right] = 4\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} = 2'4749$$