Funciones

Función Afín. Función Lineal
Resolución gráfica
Ecuaciones de 2º grado
Ecuaciones Irracionales
Resolución de problemas
Parábolas. Representación gráfica
Sistemas de ecuaciones no lineales
Resolución de problemas
Resolución gráfica

Funciones y sistemas de ecuaciones lineales

Una función afín viene dada por la expresión $y = ax + b$, *donde "a" representa la pendiente y "b" la ordenada en el origen. Su representación gráfica es una recta.*

Conocidos dos puntos de la recta, la *pendiente* se calcula dividiendo el incremento de la y (diferencia de ordenadas) entre el incremento de la x (diferencia de abscisas). Si la pendiente es positiva la recta "sube" y si es negativa la recta "baja". *La característica fundamental de una función afín es que a incrementos iguales de la variable x (variable independiente) corresponden incrementos iguales de la variable y (variable dependiente).* Si $b = 0$ la función se llama *lineal* o de *proporcionalidad directa*.

Ejemplos

- **De una función que sabemos que es afín sólo conocemos la tabla de valores que aparece a la derecha. Encuentra la expresión de dicha función y represéntala.**

x	1	4	10
y	5′5	13	28

Solución

Por ser una función afín, cada punto de la recta debe de verificar la ecuación $y = ax + b$.

$$\left.\begin{array}{r} 5'5 = a\cdot 1 + b \\ 13 = a\cdot 4 + b \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{5}{2} \\ b = 3 \end{array}\right. \qquad y = \frac{5}{3}x + 3$$

- **En un experimento de física se obtiene la tabla adjunta, donde el espacio recorrido por un objeto se expresa en metros el tiempo que tarda en recorrerlo se expresa en segundos. ¿Es una función afín?**

t	0′1	0′7	1′2
e	0′05	2′45	7′2

Solución

Una manera de comprobar si es una función afín es verificar que los segmentos que unen dos puntos consecutivos tienen la misma pendiente.

$$\left.\begin{array}{l} (0'1, 0'05) \\ (0'7, 2'45) \end{array}\right\} \quad \frac{2'45 - 0'05}{0'7 - 0'1} = \frac{2'4}{0'6} = 4 \qquad \left.\begin{array}{l} (0'7, 2'45) \\ (1'2, 7'2) \end{array}\right\} \quad \frac{7'2 - 2'45}{1'2 - 0'7} = \frac{4'75}{0'5} = 9'5$$

Como $4 \neq 9'5 \quad \Rightarrow \quad$ no es una función afín

Otra manera es comprobar que cada punto de la recta verifica la ecuación $e = at + b$.

$$\left.\begin{array}{l} 0'05 = 0'1\cdot a + b \\ 2'45 = 0'7\,a + b \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 4 \\ b = -\dfrac{7}{20} \end{array}\right. \qquad e = 4t - \frac{7}{20}$$

Si el tercer punto está alineado con los anteriores debe verificar esta ecuación.

$$7'2 \neq 4 \cdot 1'2 - \frac{7}{20} \qquad 7'2 \neq 4'45 \quad \Rightarrow \quad \text{No es una función afín}$$

- **Una receta para hacer helados recomienda poner 10 gramos de vainilla por cada 200 cm^3 de leche. Encuentra la relación entre la cantidad de leche y de vainilla y representa la función.**

  Solución

  Si llamamos "y" a la cantidad de leche y "x" a los gramos de vainilla la ecuación es de la forma $y = ax$

  $200 = 10 \cdot a \qquad a = 20$

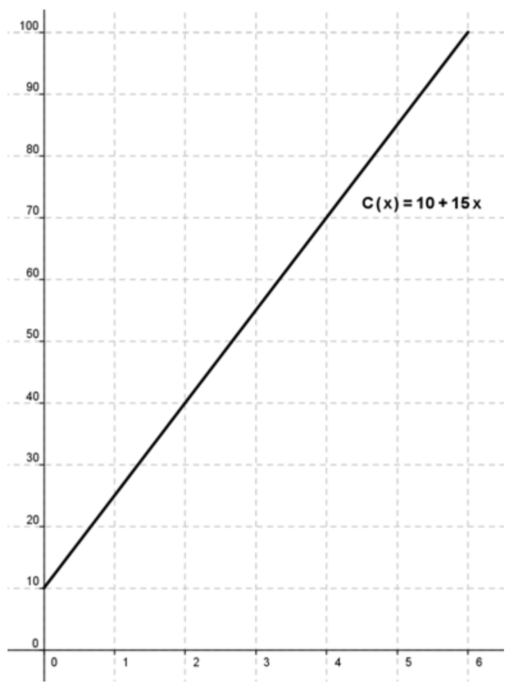
  $y = 20x$

Ejemplo **En una academia cobran, por las clases de inglés, una cantidad fija de 10 € en concepto de matrícula más una cuota de 15 € mensuales.**
Halla la expresión analítica que relaciona el número de meses con el coste total y representa gráficamente la función obtenida.

Solución

Es una función afín $\quad C(x) = 10 + 15x$

Es importante hacer notar, que el dominio de esta función está restringido a los valores positivos de la variable independiente x (tiempo).



Ejemplo **En un recibo de la luz aparece la siguiente información: consumo 1400 kw/h y precio del kw/h 0'2 €.**

a) ¿Cuánto cobrarán por la energía consumida? Escribe la relación entre el consumo y el coste y represéntala gráficamente.

b) Si además nos cobran al mes 20 € por el alquiler del equipo, ¿cómo queda la función que relaciona el consumo y el coste? Represéntala en los mismos ejes que la anterior.

c) **¿Qué transformación sufre el precio si le añadimos el 16 % de IVA? Escribe la función correspondiente y represéntala junto a las otras dos en los mismos ejes.**

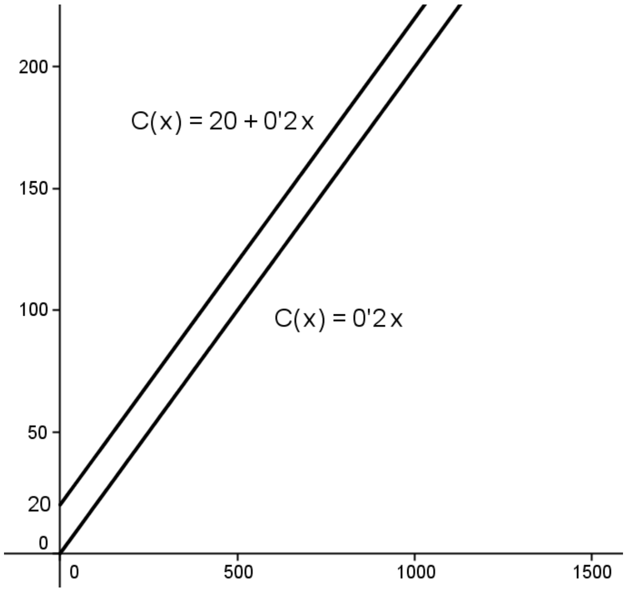
Solución

a) $1400\frac{\text{kw}}{\text{h}}\cdot 0'2\frac{€}{\text{kw}/\text{h}} = 280\,€$

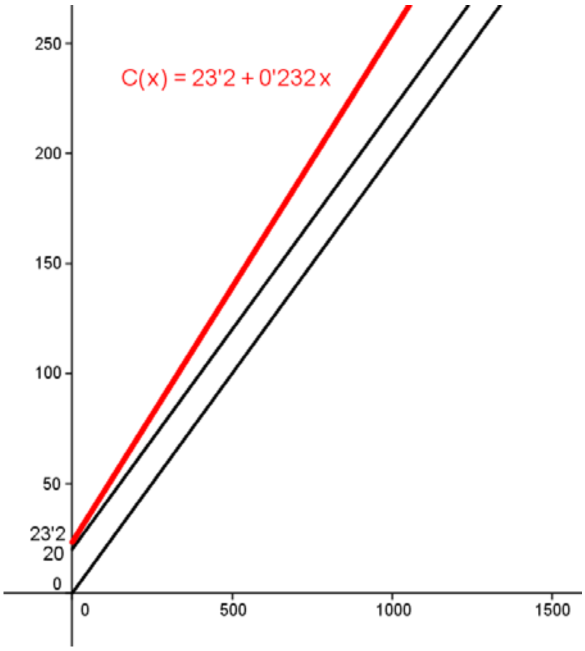
Es una función lineal. Si "x" es el consumo y C(x) es el coste en función del consumo

$$C(x) = 0'2\,x$$

b) $C(x) = 20 + 0'2\,x$



c) $C(x) = 1'16\,(20 + 0'2\,x) = 23'2 + 0'232\,x$



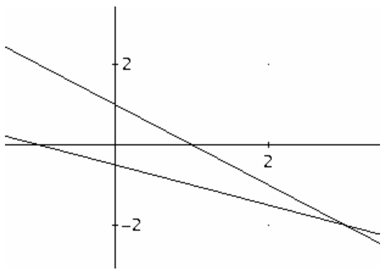
Compatibilidad de un sistema de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas

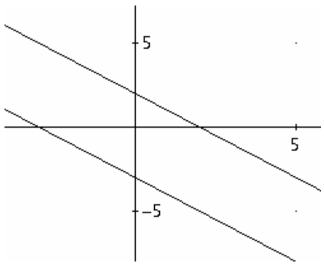
Sea un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas $\left.\begin{matrix} Ax + By = C \\ A'x + B'y = C' \end{matrix}\right\}$ cuya solución la podemos obtener por cualquiera de los tres métodos: *sustitución, reducción* e *igualación*.

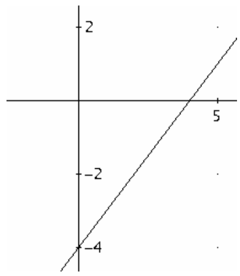
- Si $\dfrac{A}{A'} \neq \dfrac{B}{B'}$ diremos que el sistema es *compatible determinado* y por tanto tiene una única solución. *Gráficamente el sistema representa dos rectas que se cortan un punto cuyas coordenadas corresponden con la solución del sistema de ecuaciones.*
- Si $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} \neq \dfrac{C}{C'}$ diremos que el sistema es *incompatible* y por tanto no tiene solución. *Gráficamente el sistema representa dos rectas paralelas*.
- Si $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'}$ diremos que el sistema es *compatible indeterminado* y por tanto tiene infinitas soluciones. *Gráficamente el sistema representa dos rectas que coinciden*.

Ejemplo **Los gráficos a), b) y c) son la representación gráfica de los sistemas S, S' y S''. Indica qué gráfico corresponde a cada sistema y describe cada uno de los sistemas según todo lo anterior:**

$$\mathbf{S:}\begin{cases} \mathbf{x + y = 1} \\ \mathbf{x + 2y = -1} \end{cases} \qquad \mathbf{S':}\begin{cases} \mathbf{x + y = 2} \\ \mathbf{x + y = -3} \end{cases} \qquad \mathbf{S'':}\begin{cases} \mathbf{2x - 2y = 8} \\ \mathbf{x - y = 4} \end{cases}$$







Ejemplo **¿De cuáles de estos sistemas es solución el par $x = 1, y = -3$? Razónalo.**

$$\begin{cases} \mathbf{x + y = -2} \\ \mathbf{x - y = -4} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{3x + y = 6} \\ \mathbf{x - y = 4} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{2x - y = 5} \\ \mathbf{3x - 2y = 9} \end{cases}$$

Solución

$$\begin{cases} 1 - 3 = -2 \\ 1 - (-3) = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3 \cdot 1 - 3 = 0 \\ 1 - (-3) = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 \cdot 1 - (-3) = 5 \\ 3 \cdot 1 - 2(-3) = 9 \end{cases}$$

Del tercero.

Ejemplo **Los lados de un triángulo están sobre las rectas determinadas por las ecuaciones:**

$$\mathbf{3x + y = 9} \qquad \mathbf{2x + 3y = -1} \qquad \mathbf{x - 2y = -4}$$

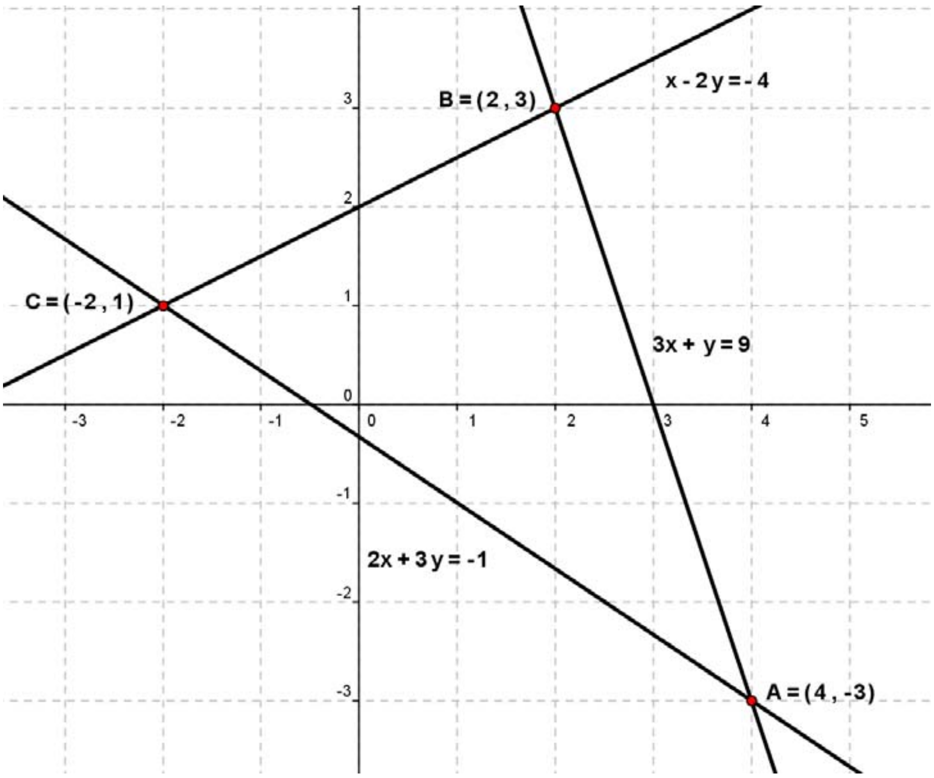
¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del triángulo? Haz una representación gráfica del problema.

Solución

Las coordenadas de los vértices corresponden a los puntos de corte de las rectas y estos se obtienen resolviendo los sistemas de ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{r} 3x+y=9 \\ 2x+3y=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow A(4,-3) \qquad \left.\begin{array}{r} 3x+y=9 \\ x-2y=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow B(2,3)$$

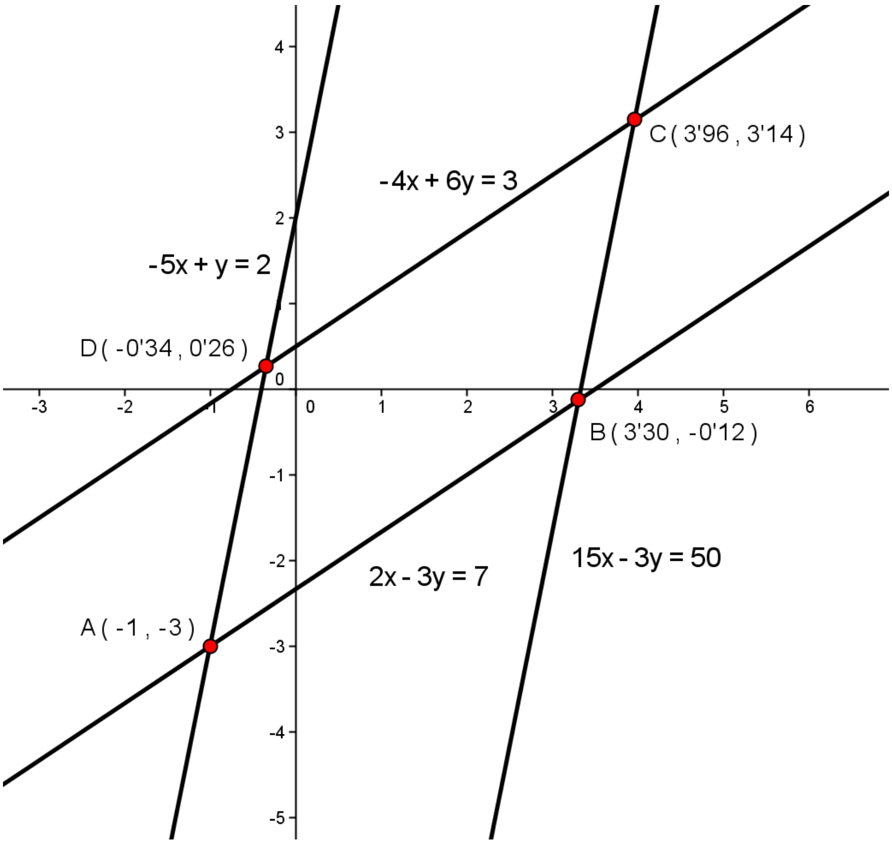
$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y=-1 \\ x-2y=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow C(-2,1)$$



Ejemplo **Los lados de un paralelogramo están sobre las rectas determinadas por las ecuaciones $2x-3y=7$, $-4x+6y=3$, $-5x+y=2$ y $15x-3y=50$. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del paralelogramo? Haz una representación gráfica del problema.**

Solución

Al ser un paralelogramo primero hacemos la representación gráfica para ver cuáles son las rectas cuyas intersecciones determinan los vértices del paralelogramo.



$$\left.\begin{array}{r}-5x+y=2\\ 2x-3y=7\end{array}\right\} \Rightarrow \quad A(-1,-3) \qquad \left.\begin{array}{r}15x-3y=50\\ 2x-3y=7\end{array}\right\} \Rightarrow \quad B(3'3,-0'12)$$

$$\left.\begin{array}{r}15x-3y=50\\ -4x+6y=3\end{array}\right\} \Rightarrow \quad C(3'96,3'14) \qquad \left.\begin{array}{r}-5x+y=2\\ -4x+6y=3\end{array}\right\} \Rightarrow \quad D(-0'34,0'26)$$

Ecuaciones de 2º grado

La fórmula para calcular las raíces de la ecuación completa de segundo grado $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ es:

$$\mathbf{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Número de soluciones

La cantidad $b^2 - 4ac$ que aparece bajo el radical se llama ***discriminante*** de la ecuación, ya que permite *discriminar o distinguir* el número de soluciones de una ecuación de segundo grado, y de su signo depende que ésta tenga o no soluciones.

- Si $\mathbf{b^2 - 4ac > 0}$ existen ***dos soluciones distintas***. Si las soluciones son x_1 y x_2, la ecuación puede factorizarse así:

  $$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

- Si $\mathbf{b^2 - 4ac = 0}$ el radical se anula, y las dos soluciones son iguales. Se dice también que se trata de ***una solución o raíz doble.***

  Si la raíz doble es x_1, la ecuación puede factorizarse así:

  $$a(x - x_1)(x - x_1) = a(x - x_1)^2 = 0$$

- Si $\mathbf{b^2 - 4ac < 0}$ no existen raíces cuadradas reales y la ecuación ***no tiene soluciones reales***. En este caso se dice que la ecuación es irreducible ya que no se puede factorizar al carecer de raíces reales.

Ejemplo $\mathbf{x^2 - 7x - 18 = 0}$

Es muy importante identificar bien los coeficientes de x^2, de x y el término independiente, con sus signos respectivos. $a = 1, b = -7$ y $c = -18$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(-18)}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 72}}{2} = \frac{7 \pm 11}{2} \qquad x_1 = \frac{7+11}{2} = 9 \qquad x_2 = \frac{7-11}{2} = -2$$

Comprobación:

$x_1 = 9 \rightarrow 9^2 - 7 \cdot 9 - 18 = 0 \qquad 81 - 63 - 18 = 0$

$x_2 = -2 \rightarrow (-2)^2 - 7(-2) - 18 = 0 \qquad 4 + 14 - 18 = 0$

Ejemplo $\mathbf{5x^2 - 6x - 27 = 0}$

$a = 5, b = -6$ y $c = -27$

$$x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4(5)(-27)}}{2\cdot 5}=\frac{6\pm\sqrt{36+540}}{10}=\frac{6\pm 24}{10}\qquad x_1=\frac{6+24}{10}=3\qquad x_2=\frac{6-24}{10}=-1'8$$

Comprobación:
$$x_1=3\ \rightarrow\ 5\cdot 3^2-6\cdot 3-27=0\qquad 45-18-27=0$$
$$x_2=-1'8\ \rightarrow\ 5\cdot(-1'8)^2-6\cdot(-1'8)-27=0\qquad 16'2+10'8-27=0$$

Ejemplo $\mathbf{12x^2+4x-5=0}$

$a=12, b=4$ y $c=-5$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4(12)(-5)}}{2\cdot 12}=\frac{-4\pm\sqrt{16+240}}{24}=\frac{-4\pm 16}{24}\qquad x_1=\frac{-4+16}{24}=\frac{1}{2}\qquad x_2=\frac{-4-16}{24}=\frac{-5}{6}$$

Comprobación:
$$x_1=\frac{1}{2}\ \rightarrow\ 12\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\cdot\frac{1}{2}-5=0\qquad 12\cdot\frac{1}{4}+2-5=0\qquad 3+2-5=0$$
$$x_2=\frac{-5}{6}\ \rightarrow\ 12\cdot\left(\frac{-5}{6}\right)^2+4\cdot\frac{-5}{6}-5=0\qquad 12\cdot\frac{25}{36}-\frac{10}{3}-5=0\qquad \frac{25}{3}-\frac{10}{3}-5=0$$

Ejemplo $\mathbf{x^2-\frac{7}{6}x+\frac{1}{3}=0}$

$a=1, b=-\frac{7}{6}$ y $c=\frac{1}{3}$ En este caso lo más práctico es eliminar los denominadores para operar con número enteros. $x^2-\frac{7}{6}x+\frac{1}{3}=0\ \rightarrow\ 6x^2-7x+2=0$

$$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4(6)(2)}}{2\cdot 6}=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{12}=\frac{7\pm 1}{12}\qquad x_1=\frac{7+1}{12}=\frac{2}{3}\qquad x_2=\frac{7-1}{12}=\frac{1}{2}$$

Comprobación:
$$x_1=\frac{2}{3}\ \rightarrow\ \left(\frac{2}{3}\right)^2-\frac{7}{6}\left(\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{3}=0\qquad \frac{4}{9}-\frac{7}{9}+\frac{1}{3}=0\qquad \frac{4-7+3}{9}=0$$
$$x_2=\frac{1}{2}\ \rightarrow\ \left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{6}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}=0\qquad \frac{1}{4}-\frac{7}{12}+\frac{1}{3}=0\qquad \frac{3-7+4}{9}=0$$

Ejemplo $\mathbf{x^2+(x+2)^2=580}$

Eliminamos el paréntesis, reducimos términos semejantes y simplificamos la expresión resultante.

$$x^2+x^2+4x+4=580\ \rightarrow\ 2x^2+4x-576=0\ \rightarrow\ x^2+2x-288=0$$

$a=1, b=2 \text{ y } c=-288$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(1)(-288)}}{2\cdot 1}=\frac{-2\pm\sqrt{1156}}{2}=\frac{-2\pm 34}{2}\qquad \begin{array}{l} x_1=\dfrac{-2+34}{2}=16 \\ x_2=\dfrac{-2-34}{2}=-18 \end{array}$$

Comprobación: $\begin{array}{llll} x_1=16 & \rightarrow & 16^2+2\cdot 16-288=0 & 256+32-288=0 \\ x_2=-18 & \rightarrow & (-18)^2+2(-18)-288=0 & 324-36-288=0 \end{array}$

Ejemplo $\mathbf{4x^2-4x+1=0}$

$a=4, b=-4 \text{ y } c=1$

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(4)(1)}}{2\cdot 4}=\frac{4\pm\sqrt{16-16}}{8}=\frac{4\pm 0}{8}=\frac{1}{2}\qquad x_1=x_2=\frac{1}{2}$$

En este caso la solución o raíz es doble.

Comprobación: $x=\frac{1}{2}\quad\rightarrow\quad 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\frac{1}{2}+1=0\qquad 4\cdot\frac{1}{4}-2+1=0\qquad 1-2+1=0$

Ejemplo $\mathbf{x^2+x+1=0}$

$a=1, b=1 \text{ y } c=1$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(1)(1)}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\quad\Rightarrow\quad \text{No tiene solución}$$

Ejemplo $\mathbf{x^2-5x=0}$

Aplicando la fórmula $a=1, b=-5 \text{ y } c=0$

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4(1)(0)}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{5\pm 5}{2}\qquad \begin{array}{l} x_1=\dfrac{5+5}{2}=5 \\ x_2=\dfrac{5-5}{2}=\dfrac{0}{2}=0 \end{array}$$

Sacando factor común

$x^2-5x=0\qquad x(x-5)=0\qquad \begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=5 \end{array}$

Comprobación: $\begin{array}{llll} x_1=0 & \rightarrow & 0^2-5\cdot 0=0 & 0=0 \\ x_2=5 & \rightarrow & 5^2-5\cdot 5=0 & 25-25=0 \end{array}$

Ejemplo $\mathbf{x^2-81=0}$

Aplicando la fórmula $a=1, b=0 \text{ y } c=-81$

$$x=\frac{0^2\pm\sqrt{0^2-4(1)(-81)}}{2\cdot 1}=\frac{\pm\sqrt{324}}{2}=\frac{\pm 18}{2}\qquad \begin{array}{l} x_1=9 \\ x_2=-9 \end{array}$$

Despejando directamente la incógnita

$x^2 - 81 = 0 \qquad x^2 = 81 \qquad x = \pm\sqrt{81} = \pm 9 \qquad \begin{matrix} x_1 = 9 \\ x_2 = -9 \end{matrix}$

Comprobación: $\begin{matrix} x_1 = 9 & \rightarrow & 9^2 - 81 = 0 & 81 - 81 = 0 \\ x_2 = -9 & \rightarrow & (-9)^2 - 81 = 0 & 81 - 81 = 0 \end{matrix}$

Ejemplo *Resolver las siguientes ecuaciones sin aplicar la fórmula.*

$$\textbf{a)}\ \mathbf{3x^2 - 5x = 0} \qquad \textbf{b)}\ \mathbf{25x^2 - \frac{1}{100} = 0} \qquad \textbf{c)}\ \mathbf{4(3-2x)(1+7x) = 0}$$

Soluciones

$$\text{a)}\ x(3x-5) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x = 0 \\ 3x - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{3} \end{matrix}$$

$$\text{b)}\ 25x^2 - \frac{1}{100} = 0 \qquad 25x^2 = \frac{1}{100} \qquad x^2 = \frac{1}{2500} \qquad x = \pm\sqrt{\frac{1}{2500}} = \pm\frac{1}{50}$$

$$\text{c)}\ 4(3-2x)(1+7x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} 3 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x = -3 \quad x = \frac{-3}{-2} = 1'5 \\ 1 + 7x = 0 \quad \Rightarrow \quad 7x = -1 \quad x = \frac{-1}{7} \end{matrix}$$

Ejemplo $\mathbf{x(2x-1) + \frac{3}{5} = \frac{3x^2 - x}{5} + \frac{1}{5}}$

Eliminamos los paréntesis y los denominadores.

$$2x^2 - x + \frac{3}{5} = \frac{3x^2 - x}{5} + \frac{1}{5} \qquad 10x^2 - 5x + 3 = 3x^2 - x + 1 \qquad 7x^2 - 4x + 2 = 0$$

$a = 7, b = -4$ y $c = 2$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(7)(2)}}{2 \cdot 7} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 56}}{14} = \frac{4 \pm \sqrt{-40}}{14}$$

No tiene solución

Ejemplo $\mathbf{x(x-1) + 1 = \frac{5}{6} + \frac{x(2x-1)}{3}}$

Eliminamos los paréntesis y los denominadores.

$$x^2 - x + 1 = \frac{5}{6} + \frac{2x^2 - x}{3} \qquad 6x^2 - 6x + 6 = 5 + 4x^2 - 2x \qquad 2x^2 - 4x + 1 = 0$$

$a = 2, b = -4$ y $c = 1$

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(2)(1)}}{2\cdot 2}=\frac{4\pm\sqrt{16-8}}{4}=\frac{4\pm\sqrt{8}}{4}=\frac{4\pm 2\sqrt{2}}{4}=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}\qquad x_1=\frac{2+\sqrt{2}}{2}\quad x_2=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

Ejemplo $\quad \mathbf{(x+1)\left[\frac{3}{2}-2(1-x)\right]=3x^2+\frac{11(x-1)}{2}}$

Eliminamos el paréntesis del interior del corchete.

$$(x+1)\left[\frac{3}{2}-2+2x)\right]=3x^2+\frac{11(x-1)}{2}\qquad (x+1)\left[\frac{-1+4x}{2}\right]=3x^2+\frac{11(x-1)}{2}$$

Multiplicamos el paréntesis por el corchete.

$$\frac{(x+1)(-1+4x)}{2}=3x^2+\frac{11(x-1)}{2}\qquad \frac{-x+4x^2-1+4x}{2}=3x^2+\frac{11x-11}{2}$$

$$\frac{4x^2+3x-1}{2}=3x^2+\frac{11x-11}{2}\qquad 4x^2+3x-1=6x^2+11x-11\qquad -2x^2-8x+10=0$$

$$2x^2+8x-10=0\qquad a=2,b=8\ y\ c=-10$$

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4(2)(-10)}}{2\cdot 2}=\frac{-8\pm\sqrt{64+80}}{4}=\frac{-8\pm 12}{4}\qquad x_1=\frac{-8+12}{4}=1\quad x_2=\frac{-8-12}{4}=-5$$

Ejemplo $\quad \mathbf{\frac{(x+2)^2}{5}-\frac{x^2-9}{4}=\frac{(x+3)^2}{2}+\frac{1}{5}}$

Eliminamos los paréntesis. $\quad \frac{x^2+4+4x}{5}-\frac{x^2-9}{4}=\frac{x^2+9+6x}{2}+\frac{1}{5}$

$m.c.m.(2,4,5)=20\qquad 20\left(\frac{x^2+4+4x}{5}-\frac{x^2-9}{4}\right)=20\left(\frac{x^2+9+6x}{2}+\frac{1}{5}\right)$

$$4(x^2+4+4x)-5(x^2-9)=10(x^2+9+6x)+4$$

$$4x^2+16+16x-5x^2+45=10x^2+90+60x+4\qquad 11x^2+44x+33=0\qquad x^2+4x+3=0$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4(1)(3)}}{2\cdot 1}=\frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{-4\pm 2}{2}\qquad x_1=\frac{-4+2}{2}=-1\quad x_2=\frac{-4-2}{2}=-3$$

Ejemplo $\quad \mathbf{(v-1)^2=\frac{v(v+1)}{2}+1}$

Eliminamos los paréntesis. $\quad v^2+1-2v=\frac{v^2+v}{2}+1$

$$2v^2+2-4v=v^2+v+2 \qquad v^2-5v=0 \quad v(v-5)=0 \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} v_1=0 \\ v-5=0 \;\rightarrow\; v_2=5 \end{array}$$

<u>*Ejemplo*</u> $\mathbf{\dfrac{(m-2)^2}{3}-\dfrac{(m+1)(m-5)}{2}=1+\dfrac{m-1}{2}}$

Eliminamos los paréntesis. $\dfrac{m^2+4-4m}{3}-\dfrac{m^2-5m+m-5}{2}=1+\dfrac{m-1}{2}$

$m.c.m.(2,3)=6 \qquad 6\left(\dfrac{m^2+4-4m}{3}-\dfrac{m^2-4m-5}{2}\right)=6\left(1+\dfrac{m-1}{2}\right)$

$$2(m^2+4-4m)-3(m^2-4m-5)=6+3(m-1)$$

$$2m^2+8-8m-3m^2+12m+15=6+3m-3 \qquad m^2-m-20=0$$

$$m=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-20)}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm\sqrt{1+80}}{2}=\frac{1\pm 9}{2} \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} m_1=\dfrac{1+9}{2}=5 \\ m_2=\dfrac{1-9}{2}=-4 \end{array}$$

<u>*Ejemplo*</u> $\mathbf{(t-1)(t+1)-\dfrac{6-5t}{3}=(t+2)^2}$

Eliminamos los paréntesis. $t^2-1-\dfrac{6-5t}{3}=t^2+4+4t$

$3t^2-3-(6-5t)=3t^2+12+12t \qquad 3t^2-3-6+5t=3t^2+12+12t$

$$-7t=21 \qquad t=\frac{21}{-7}-3$$

Ecuaciones con radicales o ecuaciones irracionales

Son aquellas que tienen la incógnita bajo el signo radical. Se resuelven mediante los pasos siguientes:

1) *Se aísla un radical en uno de los dos miembros, pasando los restantes términos, radicales y no radicales, al otro miembro.*
2) *Se elevan al cuadrado los dos miembros. Si el índice de la raíz es distinto de 2, hay que elevar los dos miembros de la ecuación a la potencia necesaria según el índice de la raíz, con el objeto de que ésta desaparezca.*
3) *Si existe todavía algún radical se repite el proceso.*
4) *Se resuelve la ecuación obtenida y se comprueba cuáles de las soluciones obtenidas verifican la ecuación dada. Es fundamental comprobar todas las soluciones, ya que en el proceso de elevar al cuadrado, aunque se conservan todas las soluciones, pueden introducirse soluciones nuevas que, naturalmente, hay que rechazar.*

Ejemplo $\mathbf{\sqrt{2x-3}-x=-1}$

1) $\sqrt{2x-3}=-1+x$

2) $\left(\sqrt{2x-3}\right)^2=(-1+x)^2 \qquad 2x-3=(-1)^2+(x)^2+2(-1)(+x) \qquad 2x-3=1+x^2-2x$

3) $x^2-4x+4=0 \qquad x=\dfrac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(1)(4)}}{2\cdot 1}=\dfrac{4\pm\sqrt{16-16}}{2}=\dfrac{4}{2}=2$

4) $\sqrt{2\cdot 2-3}-2=-1 \qquad \sqrt{1}-2=-1 \qquad -1=-1$

Ejemplo $\mathbf{\sqrt{x}+3=4}$

$$\sqrt{x}=4-3 \qquad \sqrt{x}=1 \qquad \left(\sqrt{x}\right)^2=1^2 \qquad x=1$$

Comprobación: $\sqrt{1}+3=4 \qquad 4=4$

Ejemplo $\mathbf{2\sqrt{x+5}+10=x}$

$$2\sqrt{x+5}=x-10 \qquad \left(2\sqrt{x+5}\right)^2=(x-10)^2 \qquad 4(x+5)=x^2+(-10)^2+2(x)(-10)$$

$$4x+20=x^2+100-20x \qquad x^2-24x+80=0$$

$$x=\frac{-(-24)\pm\sqrt{(-24)^2-4(1)(80)}}{2\cdot 1}=\frac{24\pm\sqrt{576-320}}{2}=\frac{24\pm 16}{2} \qquad x_1=\frac{24+16}{2}=20 \qquad x_2=\frac{24-16}{2}=4$$

Comprobación:
$x_1=20 \rightarrow 2\sqrt{20+5}+10=20 \qquad 10+10=20 \qquad 20=20$
$x_2=4 \rightarrow 2\sqrt{4+5}+10=4 \qquad 6+10\neq 4 \qquad 16\neq 4$

La solución de la ecuación es $x=20$.

Ejemplo $\mathbf{\dfrac{10}{\sqrt{6-x}}=5}$

Eliminamos el denominador pasando la raíz al segundo miembro multiplicando al 5.

$$10=5\sqrt{6-x} \qquad 10^2=\left(5\sqrt{6-x}\right)^2 \qquad 100=25(6-x) \qquad 100=150-25x$$

$$25x=50 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{50}{25}=2$$

Comprobación: $\dfrac{10}{\sqrt{6-2}}=5 \qquad \dfrac{10}{2}=5 \quad 5=5$

Ejemplo $\mathbf{\sqrt{4-2x}+\sqrt{x+2}=2}$

Dejamos uno de los radicales en el primer miembro y elevamos los dos miembros al cuadrado.

$$\sqrt{4-2x}=2-\sqrt{x+2} \qquad \left(\sqrt{4-2x}\right)^2=\left(2-\sqrt{x+2}\right)^2$$

$$4-2x=2^2+\left(-\sqrt{x+2}\right)^2+2(2)\left(-\sqrt{x+2}\right) \qquad 4-2x=4+x+2-4\sqrt{x+2}$$

Dejamos el radical en el primer miembro y elevamos nuevamente los dos miembros al cuadrado.

$$4\sqrt{x+2}=4+x+2-4+2x \qquad 4\sqrt{x+2}=2+3x \qquad \left(4\sqrt{x+2}\right)^2=(2+3x)^2$$

$$16(x+2)=2^2+(3x)^2+2(2)(3x) \qquad 16x+32=4+9x^2+12x \qquad 9x^2-4x-28=0$$

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(9)(-28)}}{2\cdot 9}=\frac{4\pm\sqrt{16+1008}}{18}=\frac{4\pm 32}{18} \qquad x_1=\frac{4+32}{18}=2 \qquad x_2=\frac{4-32}{18}=-\frac{14}{9}$$

Comprobación:

$$x_1=2 \quad \rightarrow \quad \sqrt{4-2\cdot 2}=2-\sqrt{2+2} \qquad 0=2-2 \qquad 0=0$$

$$x_2=-\frac{14}{9} \quad \rightarrow \quad \sqrt{4-2\cdot\left(\frac{-14}{9}\right)}\neq 2-\sqrt{\frac{-14}{9}+2} \qquad \sqrt{4+\frac{28}{9}}\neq 2-\sqrt{\frac{4}{9}} \qquad \frac{8}{3}\neq\frac{4}{3}$$

La solución de la ecuación es $x=2$.

Ejemplo $\mathbf{7+\sqrt[3]{5x-2}=9}$

$$\sqrt[3]{5x-2}=9-7 \qquad \sqrt[3]{5x-2}=2 \qquad \left(\sqrt[3]{5x-2}\right)^3=2^3 \qquad 5x-2=8 \qquad x=2$$

Comprobación: $7+\sqrt[3]{5\cdot 2-2}=9 \qquad 7+\sqrt[3]{8}=9 \qquad 7+2=9 \qquad 9=9$

Ecuaciones Bicuadradas

Se llaman ecuaciones bicuadradas a las ecuaciones de cuarto grado que carecen de término impar. Su forma general es:

$$\mathbf{a\,x^4 + b\,x^2 + c = 0}$$

Si la expresamos de la forma $a\,(x^2)^2 + bx^2 + c = 0$ *y hacemos el cambio* $x^2 = z$ *obtenemos la ecuación de segundo grado* $a\,z^2 + bz + c = 0$. *Resolviendo esta ecuación en z se obtienen a lo más dos soluciones* z_1 y z_2 *que permiten calcular x.*

$$x^2 = z_1 \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} x = +\sqrt{z_1} \\ x = -\sqrt{z_1} \end{array} \qquad x^2 = z_2 \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} x = +\sqrt{z_2} \\ x = -\sqrt{z_2} \end{array}$$

Ejemplo $\mathbf{x^4 - 5x^2 + 4 = 0}$

$$x^2 = z \qquad z^2 - 5z + 4 = 0 \qquad z = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(4)}}{2\cdot 1} = \frac{5 \pm 3}{2} \qquad \begin{array}{l} z_1 = \dfrac{5+3}{2} = 4 \\ z_2 = \dfrac{5-3}{2} = 1 \end{array}$$

$$z_1 = 4 \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} x_1 = +\sqrt{4} = 2 \\ x_2 = -\sqrt{4} = -2 \end{array} \qquad z_2 = 1 \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} x_3 = +\sqrt{1} = 1 \\ x_4 = -\sqrt{1} = -1 \end{array}$$

Ejemplo $\mathbf{x^4 - 5x^2 - 36 = 0}$

$$x^2 = z \qquad z^2 - 5z - 36 = 0 \qquad z = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(-36)}}{2\cdot 1} = \frac{5 \pm 13}{2} \qquad \begin{array}{l} z_1 = \dfrac{5+13}{2} = 9 \\ z_2 = \dfrac{5-13}{2} = -4 \end{array}$$

$$z_1 = 9 \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} x_1 = +\sqrt{9} = 3 \\ x_2 = -\sqrt{9} = -3 \end{array} \qquad z_2 = -4 \;\Rightarrow\; \text{No hay solución}$$

Ejemplo $\mathbf{3x^4 - 5x^2 = 0}$

$$x^2 = z \qquad 3z^2 - 5z = 0 \qquad z = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(0)}}{2\cdot 3} = \frac{5 \pm 5}{6} \qquad \begin{array}{l} z_1 = \dfrac{5+5}{6} = \dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3} \\ z_2 = \dfrac{5-5}{6} = 0 \end{array}$$

$$z_1 = \frac{5}{3} \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} x_1 = +\sqrt{\dfrac{5}{3}} \\ x_2 = -\sqrt{\dfrac{5}{3}} \end{array} \qquad z_2 = 0 \;\Rightarrow\; x_3 = x_4 = 0$$

Problemas propuestos con soluciones

a) $x^2-6x+9=16$ **b)** $3x^2+2x-3=2x^2+7-x$ **c)** $11(x-1)^2=(2x-3)^2+4x^2+1$

d) $\frac{(x+2)^2}{5}-\frac{x^2-9}{4}=\frac{(x+3)^2}{2}+\frac{1}{5}$ **e)** $2+(2x+3)(x-2)=(2x+1)(x-4)+18$

f) $\frac{x^2-x-4}{4}=\frac{x^2+x-2}{2}$ **g)** $\frac{x^2+1}{3}-1=\frac{x^2-4}{6}+x$ **h)** $x^4-5x^2-36=0$

i) $3x+6x=(x+2)(5-3x)$ **j)** $\left(x-\frac{1}{3}\right)(3x+4)=0$ **k)** $\frac{16x^2}{25}-\frac{1}{16}=0$ **l)** $\frac{3}{5}x^2-x=0$

m) $\frac{x^2-32}{4}=-\frac{28}{x^2-9}$ **n)** $(x\sqrt{2}-1)^2+(\sqrt{2}+x)^2=(\sqrt{3}\,x-2)^2$ **o)** $x^4-16=0$

p) $\sqrt{2x-1}=4$ **q)** $x=\sqrt{x+7}+5$ **r)** $x-7=2\sqrt{x+1}$ **s)** $3-\sqrt{y+2}=7$

t) $\sqrt{x-3}+\sqrt{x+5}=4$ **u)** $\sqrt{2x-5}=1+\sqrt{x-3}$ **v)** $\frac{\sqrt{-3x+2}}{\sqrt{-x+2}}=3$

Soluciones

a) $x_1=7$ y $x_2=-1$ b) $x_1=2$ y $x_2=-5$ c) $x_1=\frac{5+\sqrt{22}}{3}$ y $x_2=\frac{5-\sqrt{22}}{3}$

d) $x_1=-1$ y $x_2=-3$ e) $x=3$ f) $x_1=0$ y $x_2=-3$ g) $x_1=0$ y $x_2=6$

h) $x_1=3$ y $x_2=-3$ i) $x_1=\frac{\sqrt{55}-5}{3}$ y $x_2=\frac{-\sqrt{55}-5}{3}$ j) $x_1=\frac{1}{3}$ y $x_2=-\frac{4}{3}$

k) $x_1=-\frac{5}{16}$ y $x_2=\frac{5}{16}$ l) $x_1=0$ y $x_2=\frac{5}{3}$ m) $x_1=-5, x_2=-4, x_3=4$ y $x_4=5$

n) $x=\frac{1}{4\sqrt{3}}$ o) $x_1=-2$ y $x_2=2$ p) $x=\frac{17}{2}$ q) $x=9$ r) $x=15$ s) no tiene

t) $x=4$ u) $x_1=3$ y $x_2=7$ v) $x=\frac{8}{3}$

Resolución de problemas

1) ***Al aumentar en 3 cm el lado de un cuadrado se forma otro cuadrado de 324 cm² de área. Calcula la medida del lado del cuadrado inicial.***

Sean "x" la medida del lado del cuadrado inicial. Al aumentar el lado 3 cm, el nuevo lado del cuadrado será de $x+3$.

$$(x+3)^2 = 324 \qquad x^2+9+6x = 324 \qquad x^2+6x-315=0$$

$$x = \frac{-6\pm\sqrt{6^2-4(1)(-315)}}{2\cdot 1} = \frac{-6\pm\sqrt{36+1260}}{2} = \frac{-6\pm 36}{2} \qquad x_1 = \frac{-6+36}{2} = 15 \qquad x_2 = \frac{-6-36}{2} = -21$$

La solución válida es la positiva, es decir, 15 cm ya que el lado del cuadrado no puede ser negativo.

Comprobación: $(15+3)^2 = 324 \qquad 18^2 = 324 \qquad 324 = 324$

2) ***La tercera parte del cuadrado de un número entero, sumado a la quinta parte del mismo número da como resultado 78. Calcula dicho número.***

Sea "x" el número buscado. $\frac{x^2}{3}+\frac{x}{5} = 78$

$$\text{m.c.m.}(3,5) = 15 \qquad 15\left(\frac{x^2}{3}+\frac{x}{5}\right) = 15\cdot 78 \qquad 5x^2+3x-1170=0$$

$$x = \frac{-3\pm\sqrt{3^2-4(5)(-1170)}}{2\cdot 5} = \frac{-3\pm\sqrt{9+23400}}{10} = \frac{-3\pm 153}{10} \qquad x_1 = \frac{-3+153}{10} = 15 \qquad x_2 = \frac{-3-153}{10} = -15'6$$

La solución válida es 15, ya que de las dos soluciones es la única que es un número entero.

Comprobación: $\frac{15^2}{3}+\frac{15}{3} = 78 \qquad 75+5=78$

3) ***Una caja mide 5 cm de altura y de ancho mide 5 cm más que de largo. Su volumen es de 1500 cm³. Calcula su longitud y su anchura.***

Sea "x" el largo de la caja.

$$1500 = x(x+5)5 \qquad 1500 = 5x^2+25x \qquad 5x^2+25x-1500=0 \qquad x^2+5x-300=0$$

$$x = \frac{-5\pm\sqrt{5^2-4(1)(-300)}}{2\cdot 1} = \frac{-5\pm\sqrt{25+1200}}{2} = \frac{-5\pm 35}{2} \qquad x_1 = \frac{-5+35}{2} = 15 \qquad x_2 = \frac{-5-35}{2} = -20$$

La solución válida es la positiva, es decir, 15 cm ya que el lado de la caja no puede ser negativo. Por tanto, el largo es 15 cm, el ancho 20 cm y la altura es de 5 cm.

Comprobación: $1500 = 15\cdot(15+5)\cdot 5 \qquad 1500 = 15\cdot 20\cdot 5 \qquad 1500 = 1500$

4) ***Calcula la hipotenusa de un triángulo rectángulo sabiendo que las medidas de sus lados son tres números enteros consecutivos.***

Sea "x" uno de los lados. Los otros dos serán $x+1$ y $x+2$, por tanto, la hipotenusa será el $x+2$ que es el mayor. Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos:

$$(x+2)^2 = x^2 + (x+1)^2 \qquad x^2+4+4x = x^2+x^2+1+2x \qquad x^2+4+4x = 2x^2+1+2x$$

$$-x^2+2x+3=0 \qquad x^2-2x-3=0$$

$$x = \frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(-3)}}{2\cdot 1} = \frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \frac{2\pm 4}{2} \qquad x_1 = \frac{2+4}{2} = 3 \qquad x_2 = \frac{2-4}{2} = -1$$

La solución válida es 3. Los lados del triángulo son 3, 4 y 5.

Comprobación: $(3+2)^2 = 3^2 + (3+1)^2 \qquad 5^2 = 3^2 + 4^2 \qquad 25 = 9 + 16$

5) ***Calcula las dimensiones de un rectángulo en el que la base mide 2 cm menos que la altura y la diagonal mide 10 cm.***

Sea "x" la medida de la altura. La base será $x-2$. Aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene:

$$100 = x^2 + (x-2)^2 \qquad 100 = x^2 + x^2 + 4 - 4x \qquad 2x^2 - 4x - 96 = 0 \qquad x^2 - 2x - 48 = 0$$

$$x = \frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(-48)}}{2\cdot 1} = \frac{2\pm\sqrt{4+192}}{2} = \frac{2\pm 14}{2} \qquad x_1 = \frac{2+14}{2} = 8 \qquad x_2 = \frac{2-14}{2} = -6$$

Las dimensiones son 8 cm de altura y 6 cm de base.

Comprobación: $100 = 8^2 + (8-2)^2 \qquad 100 = 64 + 36$

6) ***La suma de los cuadrados de dos números consecutivos positivos es 85. ¿Cuáles son los números?***

Sea "x" uno de los números. El número consecutivo será $x+1$.

$$x^2 + (x+1)^2 = 85 \qquad x^2 + x^2 + 1 + 2x = 85 \qquad 2x^2 + 2x - 84 = 0 \qquad x^2 + x - 42 = 0$$

$$x = \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(1)(-42)}}{2\cdot 1} = \frac{-1\pm\sqrt{1+168}}{2} = \frac{-1\pm 13}{2} \qquad x_1 = \frac{-1+13}{2} = 6 \qquad x_2 = \frac{-1-13}{2} = -7$$

La solución válida es 6, por tanto los números consecutivos positivos son 6 y 7.

Comprobación: $6^2 + (6+1)^2 = 85 \qquad 36 + 49 = 85$

7) ***El producto de dos números consecutivos positivos es 156. ¿Cuáles son esos números?***

Sea "x" uno de los números. El número consecutivo será $x+1$.

$$x(x+1)=156 \qquad x^2+x=156 \qquad x^2+x-156=0$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(1)(-156)}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm\sqrt{1+624}}{2}=\frac{-1\pm 25}{2} \qquad x_1=\frac{-1+25}{2}=12 \qquad x_2=\frac{-1-25}{2}=-13$$

La solución válida es 12 que es el número positivo, por tanto los números consecutivos positivos son 12 y 13.

Comprobación: $12(12+1)=156 \qquad 12\cdot 13=156$

8) ***El cuadrado de un número positivo, menos el triple del número, menos 7 es 11. ¿Cuál es el número?***

Sea "x" el número. $x^2-3x-7=11 \qquad x^2-3x-18=0$

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4(1)(-18)}}{2\cdot 1}=\frac{3\pm\sqrt{9+72}}{2}=\frac{3\pm 9}{2} \qquad x_1=\frac{3+9}{2}=6 \qquad x_2=\frac{3-9}{2}=-3$$

La solución válida es 6 que es el número positivo.

Comprobación: $6^2-3\cdot 6-7=11 \qquad 36-18-7=11 \qquad 11=11$

9) ***El área de un rectángulo es 18 cm². ¿Cuáles son sus dimensiones sabiendo que una es el doble que la otra?***

Sea "x" la base del rectángulo. La altura será 2x.

$$x\cdot 2x=18 \qquad 2x^2=18 \qquad x^2=\frac{18}{2}=9 \qquad x=\sqrt{9}=3$$

La solución válida es 3 que es la positiva, por tanto la base mide 3 y la altura 6.

Comprobación: $3\cdot 2\cdot 3=18 \qquad 18=18$

10) ***La edad de un padre es el cuadrado de la de su hijo. Dentro de 24 años la edad del padre será el doble que la del hijo. ¿Cuántos años tienen ahora cada uno?***

Sea "x" la edad actual del hijo. La edad del padre será x^2.

$$x^2+24=2(x+24) \qquad x^2+24=2x+48 \qquad x^2-2x-24=0$$

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(-24)}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm\sqrt{4+96}}{2}=\frac{2\pm 10}{2} \qquad x_1=\frac{2+10}{2}=6 \qquad x_2=\frac{2-10}{2}=-4$$

La solución válida es 6 que es la positiva, por tanto el hijo tiene 6 años y el padre 36.

Comprobación: $6^2 + 24 = 2(6+24) \qquad 60 = 60$

11) ***La suma de las edades de los 4 miembros de una familia es 104 años. El padre tiene 6 años más que la madre que tuvo a los dos hijos gemelos a los 27 años. ¿Qué edad tiene cada uno?***

Sea "x" la edad actual de la madre. La edad del padre será $x+6$.

$$x + x + 6 + 2(x-27) = 104 \qquad 2x + 6 + 2x - 54 = 104 \qquad 4x = 152 \qquad x = 38$$

La madre tiene 38 años, el padre 44 y los hijos gemelos $38 - 27 = 11$ años.

Comprobación: $38 + 38 + 6 + 2(38-27) = 104 \qquad 82 + 2 \cdot 11 = 104 \qquad 104 = 104$

12) ***Para construir una pirámide regular de base cuadrada y de 30 m de altura se han necesitado 2250 m^3 de piedra. Calcula el lado de la base de la pirámide.***

Si "x" es el lado del cuadrado de la base de la pirámide, la fórmula que nos da el volumen es:

$$V = \frac{1}{3} \times \text{Área de la base} \times \text{altura} = \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot 30$$

$$2250 = \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot 30 \qquad 6750 = 30x^2 \qquad x^2 = \frac{6750}{30} = 225 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{225} = 15\,\text{m}$$

Comprobación: $2250 = \frac{1}{3} \cdot 15^2 \cdot 30 \qquad 2250 = 2250$

13) ***Busca los números que cumplan la siguiente condición: "La décima parte del número más los dos tercios de su cuadrado da un resultado nulo".***

Sea "x" el número que buscamos.

$$\frac{x}{10} + \frac{2}{3}x^2 = 0 \qquad 30\left(\frac{x}{10} + \frac{2}{3}x^2\right) = 0 \qquad 3x + 20x^2 = 0 \qquad 20x^2 + 3x = 0$$

$$x(20x+3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ 20x + 3 = 0 \qquad 20x = -3 \qquad x = \dfrac{-3}{20} \end{cases}$$

Comprobación: $\dfrac{\frac{-3}{20}}{10} + \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{-3}{20}\right)^2 = 0 \qquad \dfrac{-3}{200} + \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{9}{400} = 0 \qquad \dfrac{-3}{200} + \dfrac{18}{1200} = 0$

$$1200 \cdot \frac{-3}{200} + 1200 \cdot \frac{18}{1200} = 0 \qquad 6(-3) + 18 = 0 \qquad -18 + 18 = 0$$

Gráficas de las Funciones Cuadráticas

1) **Un grupo de jóvenes amantes de los deportes de riesgo han decidido hacer puenting desde un puente de 185 m de altura. Van lanzándose con cuerdas de diferentes longitudes y midiendo el tiempo que tardan en sentir el tirón de la cuerda en sus pies. Al final de la jornada han recopilado todos estos datos en una tabla:**

t (seg)	1	2	3	4	5	6
e (m)	5	20	45	80	125	180

a) Representa en un sistema de ejes de coordenadas esas parejas de valores.
b) Trata de encontrar una expresión algebraica que reproduzca esa tabla.

2) **Expresa el volumen de una lata cilíndrica de altura 2 dm en función del radio de la base y representa gráficamente la función obtenida.**

3) **Con un cartón cuadrado de 5 dm de lado se desea construir una caja cortando cuadrados de lado x en las esquinas.**
a) Expresa el área de la caja en función de x y represéntala gráficamente.
b) **Si la caja tiene tapa, expresa el área y representa gráficamente la función correspondiente**.

Utilizando el programa de matemáticas Geogebra, o la Calculadora Gráfica contesta los siguientes apartados:

1) **Representa las funciones** $y = x^2$ $y = 0'5x^2$ $y = 5x^2$ $y = -x^2$. **¿Qué relación encuentras entre ellas?**

2) **Representa las funciones** $y = x^2$ $y = x^2 + 1$ $y = x^2 - 3$. **¿Qué relación encuentras entre ellas?**

3) **¿Cómo será la ecuación de la parábola** $y = x^2$ **desplazada verticalmente 2 unidades?**

4) **Representa las funciones:** $y = x^2$ $y = (x-1)^2$ $y = (x+3)^2$. **¿Qué relación encuentras entre ellas?**

5) **Si la parábola** $y = x^2$ **la desplazamos horizontalmente 2 unidades hacia la derecha ¿cuál es su ecuación? ¿y si la desplazamos horizontalmente una unidad hacia la izquierda?**

6) **Si la parábola** $y = -x^2$ **la desplazamos horizontalmente 5 unidades hacia la izquierda y verticalmente 3 unidades hacia abajo ¿cuál es su ecuación?**

7) **Desarrolla las potencias de las funciones del problema 5). Compara el resultado con las ecuaciones de partida y ponte otros ejemplos.**

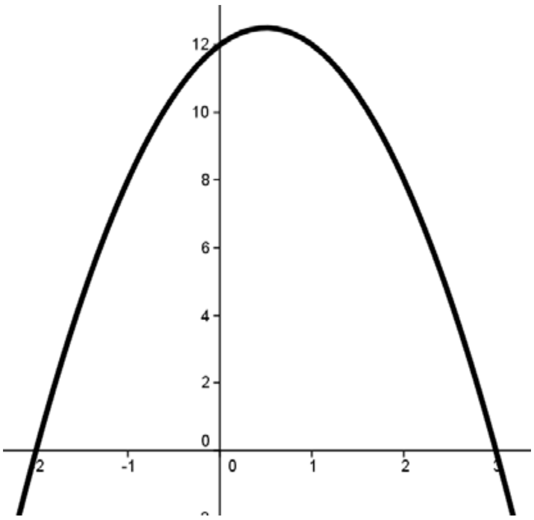
8)
a) Representa la función $y = (x-3)(x-1)$ **y observa detenidamente su gráfica.**

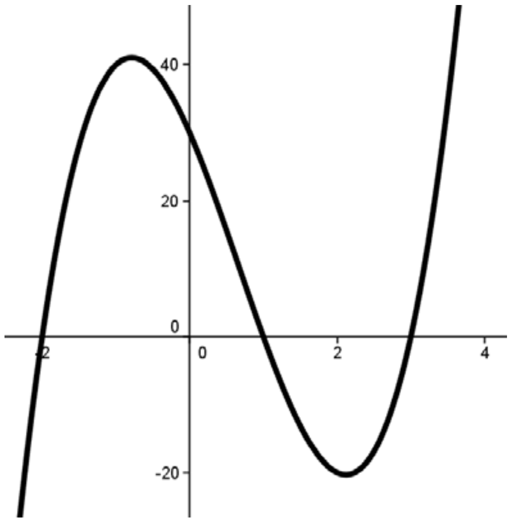
b) **Borra la gráfica de la función anterior y representa las funciones $y=(x+2)(x-4)$, $y=-2(x+2)(x-4)$ e $y=\frac{5}{4}(x+1)(x+3)$. ¿Qué relación guardan los números que aparecen en la función con los puntos de corte con el eje de abscisas?**

c) **Representa en los mismos ejes de coordenadas las funciones $y=(x-3)(x+1)$, $y=2(x-3)(x+1)$ e $y=-3(x-3)(x+1)$. ¿qué tienen en común estas tres gráficas? ¿en qué se diferencian? Basándote en las conclusiones obtenidas en este apartado ¿te atreves a escribir la ecuación general de una parábola si conocemos los puntos donde esta corta al eje de abscisas?**

d) **Borra las funciones anteriores y representa la función $y=(x+1)(x-2)(x+3)$. La gráfica correspondiente a esta función no es una parábola, pero si observas detenidamente la función y su gráfica puedes deducir los puntos donde corta al eje de abscisas. Estas funciones se denominan funciones polinómicas de tercer grado. ¿Cuál será la ecuación general de estas funciones? ¿y de una función polinómica de cuarto grado?**

9) **Teniendo en cuenta las conclusiones del apartado anterior y observando las gráficas de las siguientes funciones ¿cuáles son sus raíces (puntos de corte con el eje de abscisas)? Haz la descomposición factorial de cada una de las funciones y encuentra su expresión desarrollada.**





Pasos para representar gráficamente una parábola $y = ax^2 + bx + c$

Ejemplo *Representar gráficamente la parábola* $\mathbf{y = -2x^2 - 2x + 12}$

En este ejemplo $a = -2$ $b = -2$ y $c = 12$

1) Cálculo del Vértice $V(x_v, y_v)$
$$\begin{cases} x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-2}{2(-2)} = -0'5 \\ y_v = (-0'5)^2 - 2(-0'5) + 12 = 12'5 \end{cases}$$

El vértice es el punto $V(-0'5, 12'5)$

2) Cortes con el eje de abscisas o eje horizontal (OX)

Hacemos siempre $y = 0$ y resolvemos la ecuación resultante $-2x^2 - 2x + 12 = 0$

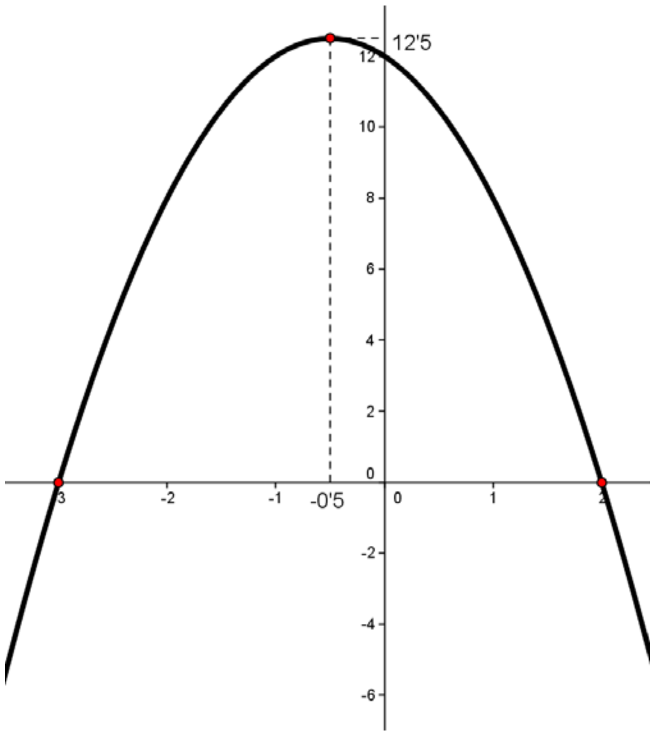
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (12)}}{2 \cdot (-2)} = \frac{2 \pm 10}{-4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

Los puntos de corte son $(-3, 0)$ y $(2, 0)$

3) Corte con el eje de ordenadas o eje vertical (OY)

Hacemos siempre $x = 0$ y calculamos el valor resultante de la "y". En nuestro ejemplo:

$x = 0 \rightarrow y = 12 \Rightarrow$ El punto de corte es el $(0, 12)$



Problemas sobre parábolas

1)

a) Escribe la ecuación de la parábola resultante de trasladar el vértice de la $y = x^2$ al punto $(3,-1)$.

b) Calcula los puntos en que corta al eje OX. Represéntala.

c) Ponte otros ejemplos.

Solución

a) $y = (x-3)^2 + 1$

b) Cortes con el eje de abscisas

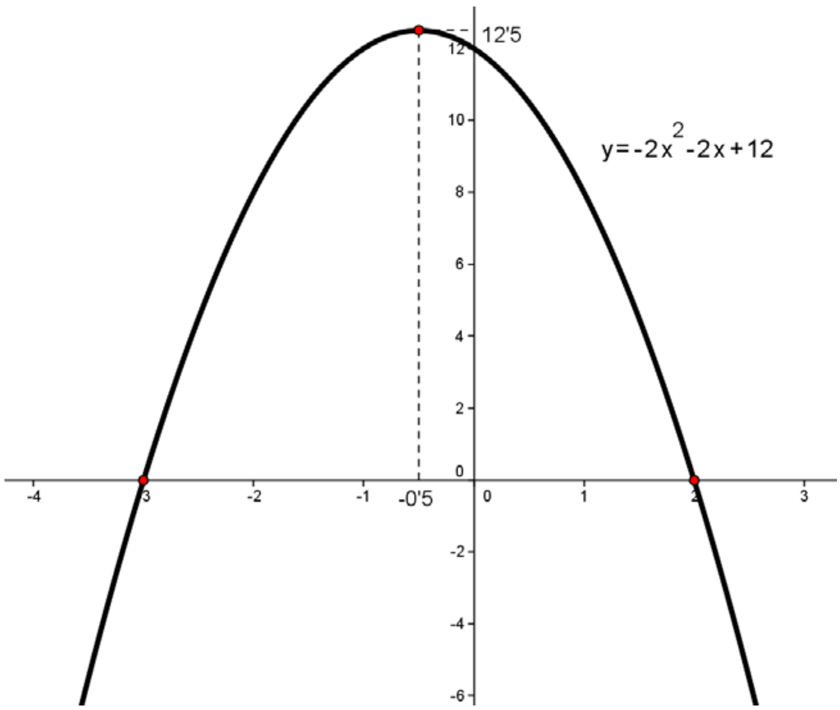
Hacemos $y = 0$ y resolvemos la ecuación resultante

$$(x-3)^2 + 1 = 0 \qquad (x-3)^2 = -1 \qquad \text{No corta a OX}$$

Corte con el eje de ordenadas o eje vertical (OY)

Hacemos $x = 0$ y calculamos el valor resultante de la "y". En nuestro ejemplo:

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad y = (-3)^2 + 1 = 10 \qquad \Rightarrow \qquad \text{El punto de corte es el } (0,10)$$



2)

a) Encuentra el vértice de la parábola $y = x^2 - 10x + 21$. Calcula los puntos de corte con el eje OX y con el eje OY.

b) Represéntala.

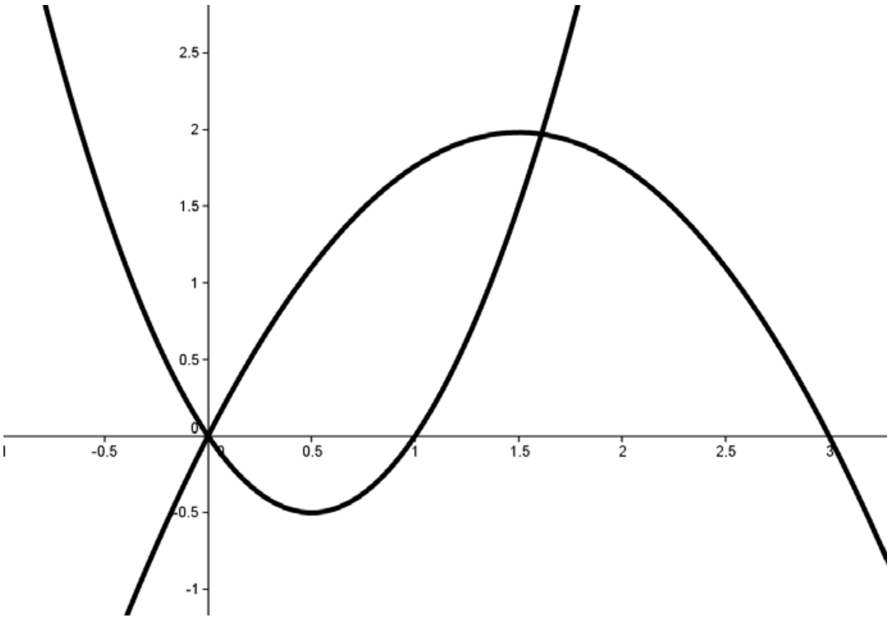
Sol: $V(5,-4)$ $(3,0)$, $(7,0)$ y $(0,21)$

3) Haz lo mismo con las parábolas a) $y = -2x^2 + 5x - 1$ b) $e = -t^2 + 6t - 12$

Sol: a) $V(1'25, 2'125)$ $(0'21, 0)$, $(2'28, 0)$ y $(0, -1)$

b) $V(3, -3)$, No corta al eje de abscisas, $(0, -12)$

4) Determina las ecuaciones de las siguientes parábolas:



<u>*Solución*</u>

Para calcular la ecuación de una parábola conocidos tres de sus puntos lo mejor es sustituir las coordenadas de cada punto en la ecuación general de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ y resolver el sistema formado por las tres ecuaciones lineales con incógnitas "a", "b" y "c". Pero cuando de los tres puntos que conocemos dos corresponden a los puntos de corte con el eje de abscisas el método más rápido es sustituir el tercer punto en la ecuación

$$y = k\,(x - a)(x - b)$$

donde "a" y "b" son las abscisas de los puntos de corte.

Para la parábola cóncava los puntos de corte son $(0, 0)$ y $(1, 0)$. La ecuación es:

$$y = k\,(x - 0)(x - 1)$$

El valor del k lo obtenemos sustituyendo las coordenadas del vértice $(0'5, -0'5)$ en la ecuación.

$$-0'5 = k\,(0'5 - 0)(0'5 - 1) \qquad -0'5 = k \cdot 0'5(-0'5) \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{0'5} = 2$$

La ecuación de la parábola cóncava es $y = 2\,x(x - 1) = 2x^2 - 2x$

Para la parábola convexa los puntos de corte son $(0, 0)$ y $(3, 0)$. La ecuación es:

$$y = k\,(x - 0)(x - 3)$$

El valor del k lo obtenemos sustituyendo las coordenadas del vértice $(1'5, 2)$ en la ecuación.

$$2 = k(1'5-0)(1'5-3) \qquad 2 = k\cdot 1'5(-1'5) \;\Rightarrow\; k = -0'88$$

La ecuación de la parábola convexa es $y = -0'88x(x-3) = -0'88x^2 + 2'64x$

5) El número de personas atacadas cada día por una determinada enfermedad viene dada por la función $f(x) = -x^2 + 40x + 84$, donde x representa el número de días transcurridos desde que se descubrió la enfermedad. Calcula:

a) ¿Cuántas personas enferman al quinto día?

b) ¿Cuándo deja de crecer la enfermedad?

c) ¿Cuándo desaparecerá la enfermedad?

Sol: a) 259 personas b) 20 días c) 42 días

6) Se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba con una velocidad de 14’7 m/s desde un punto situado a 10 m del suelo. Su altura en cada instante está dada por la ecuación $y = -4'9t^2 + 14'7t + 10$.

a) Haz una representación gráfica.

b) ¿En qué instante el cuerpo alcanza la altura máxima? ¿Cuál es ésta?

c) ¿En qué intervalo de tiempo el cuerpo está a una altura superior a los 15 m?

d) ¿En qué instante el cuerpo llegará al suelo?

<u>*Solución*</u>

a) En este caso $a = -4'9$ $b = 14'7$ y $c = 10$. Al ser una función que depende del tiempo el dominio es para $t \geq 0$.

Calculamos el vértice y los puntos de corte con el eje de abscisas.

$$V(x_v, y_v) \quad \begin{cases} x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{14'7}{2(-4'9)} = 1'5 \\ y_v = -4'9(1'5)^2 + 14'7\cdot 1'5 + 10 = 21'025 \end{cases}$$

El vértice es el punto $V(1'5, 21'025)$

Cortes con el eje de abscisas:

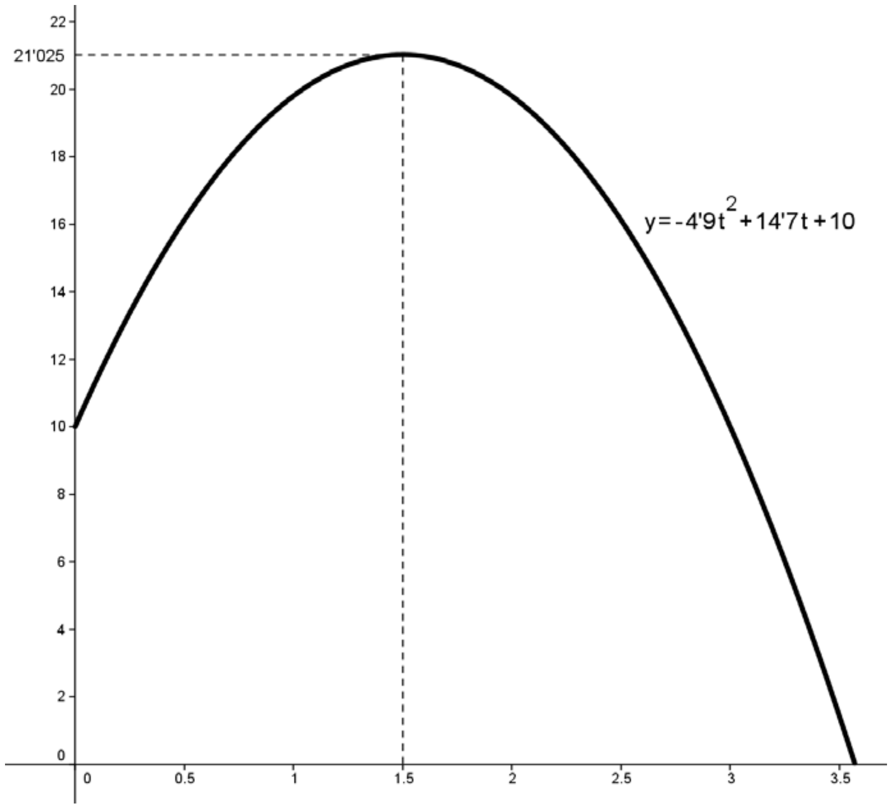
Hacemos $y = 0$ y resolvemos la ecuación resultante $-4'9t^2 + 14'7t + 10 = 0$

$$t = \frac{-14'7 \pm \sqrt{(14'7)^2 - 4\cdot(-4'9)\cdot(10)}}{2\cdot(-4'9)} = \frac{-14'7 \pm 20'3}{-9'8} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t_1 = -0'57 \\ t_2 = 3'57 \end{cases}$$

Como el tiempo no puede ser negativo el único punto de corte con el eje de abscisas es $(3'57, 0)$.

Corte con el eje de ordenadas:

$$t = 0 \;\rightarrow\; y = 10 \qquad \Rightarrow \qquad \text{El punto de corte es el } (0, 10)$$



b) La altura máxima la alcanza al cabo de $1'5\,\text{seg}$ y es de $21'025\,\text{m}$.

c) En la ecuación de la parábola sustituimos $y = 15$

$$15 = -4'9\,t^2 + 14'7\,t + 10 \qquad -4'9\,t^2 + 14'7\,t - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t_1 = 0'39 \\ t_2 = 2'60 \end{cases}$$

Entre los $0'39\,\text{seg}$ y $2'60\,\text{seg}$

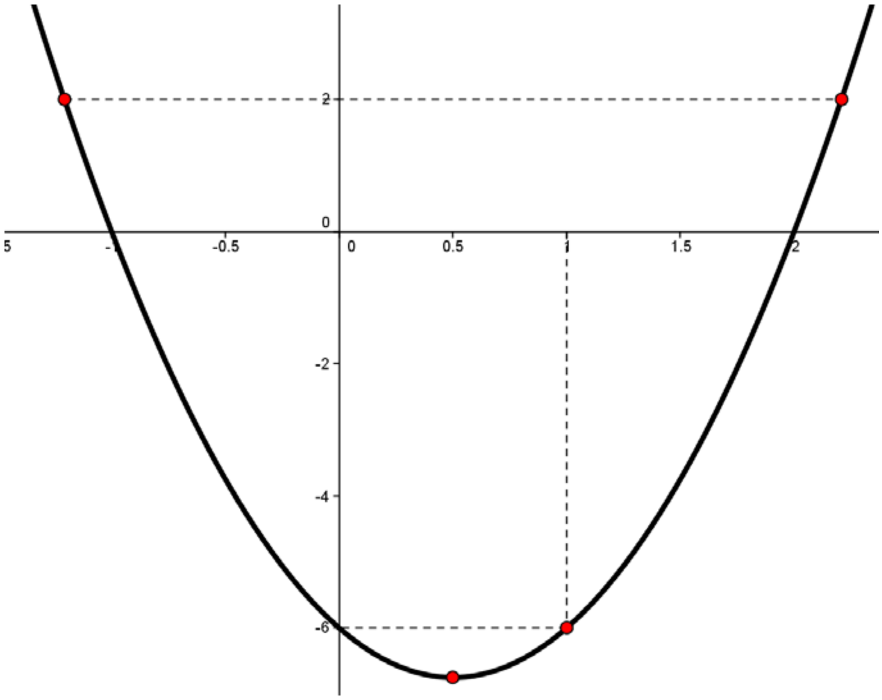
d) El cuerpo llegará al suelo al cabo de $3'57\,\text{seg}$

7) La parábola $y = ax^2 + bx + c$ pasa por el origen de coordenadas.
a) ¿Cuánto valdrá c?
b) Si además sabemos que pasa por los puntos $(1,3)$ y $(4,6)$. ¿Cuánto valdrán a y b?
c) Representa gráficamente la parábola.
Sol: a) $c = 0$ b) $a = -0'5$ y $b = 3'5$

8) Tenemos 200 kg. de naranjas que hoy se venden a 0'40 €/kg. Cada día que pasa se estropea 1 kg. y el precio aumenta 0'01 €/kg.
a) ¿Cuándo hemos de vender las naranjas para obtener el máximo beneficio?
b) ¿Cuál será ese beneficio?
Sol: a) Al cabo de 80 días b) 144 €

9) Los gastos anuales de una empresa por la fabricación de x ordenadores son $G(x) = 20000 + 250x$ en euros, y los ingresos que se obtienen por las ventas son $I(x) = 600x - 0'1x^2$ en euros. ¿Cuántos ordenadores deben fabricarse para que el beneficio (ingresos menos gastos) sea máximo?
Sol: 1750 ordenadores

10) Determina la ecuación de la parábola y calcula las coordenadas de los puntos situados sobre ella.



Sol: $y = 3x^2 - 3x - 6$ Los puntos son: $(-1'2, 2)$; $(0'5, -6'75)$; $(1, -6)$; $(2'2, 2)$

Sistemas de ecuaciones no lineales

Sistemas de ecuaciones no lineales con dos incógnitas

Un sistema de ecuaciones es no lineal cuando al menos una de sus ecuaciones no es de primer grado. La resolución de estos sistemas se suele hacer por el método de sustitución.

5) *Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones, preferentemente en la de primer grado.*
6) *Se sustituye el valor de la incógnita despejada en la otra ecuación.*
7) *Se resuelve la ecuación resultante.*
8) *Cada uno de los valores obtenidos se sustituye en la otra ecuación. Se obtienen así los valores correspondientes de la otra incógnita*
9) *Comprobamos los resultados sustituyendo los valores de x e y en las dos ecuaciones para ver si se cumplen.*

Ejemplo $\left.\begin{array}{r}\mathbf{x+y=5}\\ \mathbf{x\,y=4}\end{array}\right\}$

1) Despejamos "x" en la primera ecuación $x=5-y$
2) Sustituimos el valor de "x" en la segunda ecuación. $(5-y)\,y=4$
3) Resolvemos la ecuación resultante

$$5y-y^2=4 \qquad -y^2+5y-4=0 \qquad y^2-5y+4=0$$

$$y=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4(1)(4)}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm 3}{2} \qquad \begin{array}{l} y_1=\dfrac{5+3}{2}=4 \\ y_2=\dfrac{5-3}{2}=1\end{array}$$

4) Sustituimos estos valores en la primera ecuación.

$$\begin{array}{lll} y_1=4 & \to \quad x_1=5-4=1 & \Rightarrow \quad (1,4) \\ y_2=1 & \to \quad x_2=5-1=4 & \Rightarrow \quad (4,1)\end{array}$$

5) *Comprobación*: $(1,4) \to \left.\begin{array}{r}1+4=5\\ 1\cdot 4=4\end{array}\right\}$ $\qquad (4,1) \to \left.\begin{array}{r}4+1=5\\ 4\cdot 1=4\end{array}\right\}$

Ejemplo $\left.\begin{array}{r}\mathbf{x+y=5}\\ \mathbf{x^2+y^2=13}\end{array}\right\}$

$$y=5-x \qquad x^2+(5-x)^2=13 \qquad x^2+5^2+(-x)^2+2(5)(-x)=13 \qquad 2x^2-10x+12=0$$

Simplificando $x^2-5x+6=0$

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4(1)(6)}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}\qquad \begin{array}{l} x_1=\dfrac{5+1}{2}=3 \\ x_2=\dfrac{5-1}{2}=2 \end{array}$$

$$x_1=3 \;\rightarrow\; y_1=5-3=2 \;\Rightarrow\; (3,2)$$
$$x_2=2 \;\rightarrow\; y_2=5-2=3 \;\Rightarrow\; (2,3)$$

Comprobación: $(3,2)\;\rightarrow\;\left.\begin{array}{r} 3+2=5 \\ 3^2+2^2=13 \end{array}\right\}\qquad (2,3)\;\rightarrow\;\left.\begin{array}{r} 2+3=5 \\ 2^2+3^2=13 \end{array}\right\}$

Ejemplo $\left.\begin{array}{r} \mathbf{(5+x)(3y-2)=154} \\ \mathbf{2x+3y=28} \end{array}\right\}$

Eliminamos los paréntesis $\left.\begin{array}{r} 15y-10+3xy-2x=154 \\ 2x+3y=28 \end{array}\right\}\qquad \left.\begin{array}{r} 15y+3xy-2x=164 \\ 2x+3y=28 \end{array}\right\}$

$$y=\frac{28-2x}{3}\qquad 15\cdot\frac{28-2x}{3}+3x\cdot\frac{28-2x}{3}-2x=164\qquad 5(28-2x)+x(28-2x)-2x=164$$

$$140-10x+28x-2x^2-2x=164\qquad -2x^2+16x-24=0\qquad x^2-8x+12=0$$

$$x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4(1)(12)}}{2\cdot 1}=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{2}=\frac{8\pm 4}{2}\qquad \begin{array}{l} x_1=\dfrac{8+4}{2}=6 \\ x_2=\dfrac{8-4}{2}=2 \end{array}$$

$$x_1=6 \;\rightarrow\; y_1=\frac{28-2\cdot 6}{3}=\frac{16}{3}\;\Rightarrow\;\left(6,\frac{16}{3}\right)$$
$$x_2=2 \;\rightarrow\; y_2=\frac{28-2\cdot 2}{3}=\frac{24}{3}=8\;\Rightarrow\;(2,8)$$

Comprobación:

$$\left(6,\frac{16}{3}\right)\;\rightarrow\;\left.\begin{array}{r} (5+6)\left(3\cdot\dfrac{16}{3}-2\right)=154 \\ 2\cdot 6+3\cdot\dfrac{16}{3}=28 \end{array}\right\}\qquad \left.\begin{array}{r} 11\cdot 14=154 \\ 12+16=28 \end{array}\right\}$$

$$(2,8)\;\rightarrow\;\left.\begin{array}{r} (5+2)(3\cdot 8-2)=154 \\ 2\cdot 2+3\cdot 8=28 \end{array}\right\}\qquad \left.\begin{array}{r} 7\cdot 22=154 \\ 4+24=28 \end{array}\right\}$$

Ejemplo $\left.\begin{array}{r} \mathbf{x+y=2} \\ \mathbf{x^2+y^2-5xy=25} \end{array}\right\}$

$$y=2-x\qquad x^2+(2-x)^2-5x(2-x)=25\qquad x^2+2^2+(-x)^2+2\cdot 2(-x)-10x+5x^2=25$$

$$7x^2-14x-21=0 \qquad x^2-2x-3=0$$

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(-3)}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm 4}{2} \qquad \begin{array}{l} x_1=\frac{2+4}{2}=3 \\ x_2=\frac{2-4}{2}=-1 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} x_1=3 & \rightarrow \quad y_1=2-3=-1 & \Rightarrow & (3,-1) \\ x_2=-1 & \rightarrow \quad y_2=2-(-1)=3 & \Rightarrow & (-1,3) \end{array}$$

Comprobación:

$$(3,-1) \quad \rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} 3-1=2 \\ 3^2+(-1)^2-5\cdot 3\cdot(-1)=25 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2=2 \\ 25=25 \end{array}\right\}$$

$$(-1,3) \quad \rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} -1+3=2 \\ (-1)^2+3^2-5(-1)\cdot 3=25 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2=2 \\ 25=25 \end{array}\right\}$$

Ejemplo $\left.\begin{array}{r} \mathbf{x\,y=24} \\ \mathbf{\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=1} \end{array}\right\}$

$$y=\frac{24}{x} \qquad \frac{3}{x}+\frac{2}{\frac{24}{x}}=1 \qquad \frac{3}{x}+\frac{2x}{24}=1 \qquad \frac{72+2x^2}{24x}=1 \qquad 72+2x^2=24x$$

$$2x^2-24x+72=0 \qquad x^2-12x+36=0$$

$$x=\frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4(1)(36)}}{2\cdot 1}=\frac{12\pm\sqrt{144-144}}{2}=\frac{12}{2} \qquad \begin{array}{l} x=6 \\ y=4 \end{array} \quad \Rightarrow \quad (6,4)$$

Comprobación: $(6,4) \rightarrow \left.\begin{array}{r} 6\cdot 4=24 \\ \frac{3}{6}+\frac{2}{4}=1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 24=24 \\ \frac{6+6}{12}=1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 24=24 \\ 1=1 \end{array}\right\}$

Ejemplo $\left.\begin{array}{r} \mathbf{(2x-1)^2-3x(2y+3)=-21} \\ \mathbf{x+y=3} \end{array}\right\}$

Eliminamos los paréntesis

$$\left.\begin{array}{r} (2x)^2+(-1)^2+2(2x)(-1)-6xy-9x=-21 \\ x+y=3 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 4x^2+1-4x-6xy-9x=-21 \\ x+y=3 \end{array}\right\}$$

$$y=3-x \qquad 4x^2+1-4x-6x(3-x)-9x=-21 \qquad 4x^2+1-4x-18x+6x^2-9x=-21$$

$$10x^2-31x+22=0$$

$$x=\frac{-(-31)\pm\sqrt{(-31)^2-4(10)(22)}}{2\cdot 10}=\frac{31\pm\sqrt{961-880}}{20}=\frac{31\pm 9}{20}\qquad\begin{cases}x_1=\dfrac{31+9}{20}=2\\[2mm] x_2=\dfrac{31-9}{20}=\dfrac{22}{20}=\dfrac{11}{10}\end{cases}$$

$$x_1=2\quad\rightarrow\quad y_1=3-2=1\quad\Rightarrow\quad(2,1)$$

$$x_2=\frac{11}{10}\quad\rightarrow\quad y_2=3-\frac{11}{10}=\frac{19}{10}\quad\Rightarrow\quad\left(\frac{11}{10},\frac{19}{10}\right)$$

Comprobación:

$$(2,1)\quad\rightarrow\quad\left.\begin{array}{r}(2\cdot 2-1)^2-3\cdot 2(2\cdot 1+3)=-21\\ 2+1=3\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{r}9-30=-21\\ 3=3\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{r}-21=-21\\ 3=3\end{array}\right\}$$

$$\left(\frac{11}{10},\frac{19}{10}\right)\quad\rightarrow\quad\left.\begin{array}{r}\left(2\cdot\dfrac{11}{10}-1\right)^2-3\cdot\dfrac{11}{10}\left(2\cdot\dfrac{19}{10}+3\right)=-21\\[2mm] \dfrac{11}{10}+\dfrac{19}{10}=3\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{r}\left(\dfrac{12}{10}\right)^2-\dfrac{33}{10}\left(\dfrac{38}{10}+3\right)=-21\\[2mm] \dfrac{11}{10}+\dfrac{19}{10}=3\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{144}{100}-\dfrac{33}{10}\cdot\dfrac{68}{10}=-21\\[2mm] \dfrac{11+19}{10}=3\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{r}-\dfrac{2100}{100}=-21\\[2mm] \dfrac{30}{10}=3\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{r}-21=-21\\ 3=3\end{array}\right\}$$

Problemas propuestos con soluciones

a) $\left.\begin{array}{r}x+y=8\\ y=x^2-4x-2\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r}y=3x+2\\ y=x^2-2\end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r}y=x^2-4x\\ x-2y=10\end{array}\right\}$ d) $\left.\begin{array}{r}y=x^2+6x+10\\ 4x-y=-9\end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r}3x^2-y=-2\\ -x+y=3\end{array}\right\}$ f) $\left.\begin{array}{r}y=-1\\ y+x^2=2x+5\end{array}\right\}$ g) $\left.\begin{array}{r}y+2=x^2\\ 4y-x^2=4\end{array}\right\}$ h) $\left.\begin{array}{r}y-1=x^2\\ 4(y-1)=x^2\end{array}\right\}$

i) $\left.\begin{array}{r}4x+y=x^2+1\\ y+2x=-x^2+5\end{array}\right\}$ j) $\left.\begin{array}{r}y+4x=x^2+4\\ y=-x^2-4x+2\end{array}\right\}$ k) $\left.\begin{array}{r}y+4x=x^2+4\\ y+6x=-x^2+9\end{array}\right\}$ l) $\left.\begin{array}{r}y=x^2-6x+8\\ y=x^2+6x+8\end{array}\right\}$

m) $\left.\begin{array}{r}2x+y=4\\ x^2+y=7\end{array}\right\}$ n) $\left.\begin{array}{r}x+y=1\\ 2x^2-y^2=2\end{array}\right\}$ o) $\left.\begin{array}{r}3x+2y=15\\ xy=9\end{array}\right\}$ p) $\left.\begin{array}{r}2x^2+y^2=9\\ xy=-2\end{array}\right\}$

q) $\left.\begin{array}{r}(x+2y)^2-5x+3y=26\\ x+3y=7\end{array}\right\}$ r) $\left.\begin{array}{r}x^2-y^2=8\\ xy=-3\end{array}\right\}$ s) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{3x+y}{2}-\dfrac{3y+x}{x}=2\\ \dfrac{x}{5}-\dfrac{y+1}{2}=-4\end{array}\right\}$

Soluciones

a) $\begin{cases}(-2,10)\\(5,3)\end{cases}$ b) $\begin{cases}(-1,-1)\\(4,14)\end{cases}$ c) $\begin{cases}(2,-4)\\\left(\dfrac{5}{2},-\dfrac{15}{4}\right)\end{cases}$ d) $(-1,5)$ e) $\begin{cases}(0'76,3'76)\\(-0'43,2'56)\end{cases}$ f) $\begin{cases}(3'46,-1)\\(-1'64,-1)\end{cases}$

g) $\begin{cases}(2,2)\\(-2,2)\end{cases}$ h) $\{(0,1)$ i) $\begin{cases}(-1,6)\\(2,-3)\end{cases}$ j) no tiene k) $\begin{cases}(1'15,0'70)\\(-2'15,17'29)\end{cases}$ l) $\{(0,8)$

m) $(3,-2)$ y $(-1,6)$ n) $(1,0)$ y $(-3,4)$ o) $(3,3)$ y $(2,4'5)$

p) $(-2,1),(2,-1),\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},-2\sqrt{2}\right),\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2},2\sqrt{2}\right)$ q) $(1,2)$ y $(25,-6)$ r) $(3,-1)$ y $(-3,1)$

s) $(5,9)$ y $\left(-\dfrac{70}{17},\dfrac{91}{17}\right)$

Resolución de problemas

1) ***¿Cuál es el área de un rectángulo sabiendo que su perímetro mide 16 cm y que su base es el triple de su altura?***

Sea "x" la base del rectángulo e "y" la altura.

$$\left.\begin{array}{r} 2x+2y=16 \\ x=3y \end{array}\right\} \quad 2(3y)+2y=16 \quad 8y=16 \quad y=2 \;\Rightarrow\; x=3\cdot 2=6$$

Comprobación: $(6,2) \;\rightarrow\; \left.\begin{array}{r} 2\cdot 6+2\cdot 2=16 \\ 6=3\cdot 2 \end{array}\right\}$

El área del rectángulo es: $6\,\text{cm}\cdot 2\,\text{cm}=12\,\text{cm}^2$

2) ***La diagonal de un rectángulo mide 10 cm y su área 48 $\mathbf{cm^2}$. Calcular sus dimensiones.***

Sea "x" la base del rectángulo e "y" la altura.

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=100 \\ xy=48 \end{array}\right\} \rightarrow y=\frac{48}{x} \rightarrow x^2+\left(\frac{48}{x}\right)^2=100 \rightarrow x^2+\frac{2304}{x^2}=100$$

$$x^4-100x^2+2304=0 \rightarrow x^2=z \rightarrow z^2-100z+2304=0$$

$$z=\frac{-(-100)\pm\sqrt{(-100)^2-4(1)(2304)}}{2\cdot 1}=\frac{100\pm 28}{2} \qquad \begin{array}{l} z_1=\dfrac{100+28}{2}=64 \\ z_2=\dfrac{100-28}{2}=36 \end{array}$$

$$z_1=64 \rightarrow x_1=\sqrt{64}=8 \rightarrow y_1=\frac{48}{8}=6 \Rightarrow (8,6)$$

$$z_2=36 \rightarrow x_2=\sqrt{36}=6 \rightarrow y_2=\frac{48}{6}=8 \Rightarrow (6,8)$$

Comprobación: $(6,8) \rightarrow \left.\begin{array}{r} 6^2+8^2=100 \\ 6\cdot 8=48 \end{array}\right\} \qquad (8,6) \rightarrow \left.\begin{array}{r} 8+6=14 \\ 8\cdot 6=48 \end{array}\right\}$

Las dimensiones del rectángulo pueden ser 8 cm de base y 6 cm de altura ó 6 cm de base y 8 cm de altura.

3) ***Las diagonales de un rombo se diferencian en 6 cm y su área es 56 cm². Calcula la medida de las diagonales.***

Sean "x" e "y" las diagonales del rombo. Sabemos que la fórmula que da el área del rombo es $A=\dfrac{D\cdot d}{2}$, donde D es la diagonal mayor y d la diagonal menor.

$$\left.\begin{array}{r} x-y=6 \\ \dfrac{x\cdot y}{2}=56 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x-y=6 \\ x\,y=112 \end{array}\right\} \qquad x=y+6 \qquad (y+6)\,y=112 \qquad y^2+6y-112=0$$

$$y=\frac{-6\pm\sqrt{(6^2)-4\,(1)\,(-112)}}{2\cdot 1}=\frac{-6\pm\sqrt{36+448}}{2} \qquad y_1=\frac{-6+22}{2}=8 \qquad y_2=\frac{-6-22}{2}=-14$$

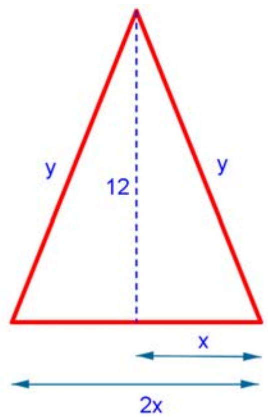
Evidentemente, la solución negativa no es válida. Las dimensiones de las diagonales son

$$y_1=8 \quad\rightarrow\quad x_1=8+6=14 \quad\Rightarrow\quad (14,8)$$

Las dimensiones de las diagonales son 8 cm y 14 cm.

4) ***El perímetro de un triángulo isósceles es 36 m. Las altura relativa al lado desigual mide 12 cm. Calcula la medida de los lados iguales.***

Sea “y” el valor de los lados iguales y “x” la mitad del lado que forma la base.



$$\left.\begin{array}{r} 2x+2y=36 \\ y^2=12^2+x^2 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x+y=18 \\ y^2=12^2+x^2 \end{array}\right\}$$

$$x=18-y \qquad y^2=144+(18-y)^2$$

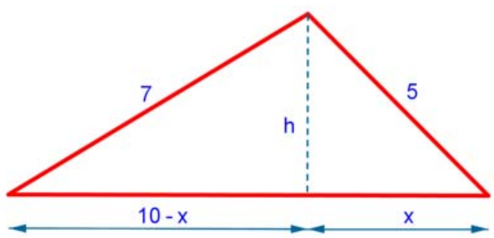
$$y^2=144+324-36y+y^2 \qquad 36y=468$$

$$y=\frac{468}{36}=13 \quad\Rightarrow\quad x=18-13=5$$

Los lados desiguales miden 13 cm.

5) ***Los lados de un triángulo miden 5 cm, 7 cm y 10 cm, respectivamente. Calcula la altura relativa al lado más largo y halla el área del triángulo.***

Aplicamos el Teorema de Pitágoras a cada uno de los dos triángulos rectángulos.



$$\left.\begin{array}{l} 5^2=h^2+x^2 \\ 7^2=h^2+(10-x)^2 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} h^2=25-x^2 \\ h^2=49-(10-x)^2 \end{array}\right\}$$

Igualando los segundos miembros tenemos:

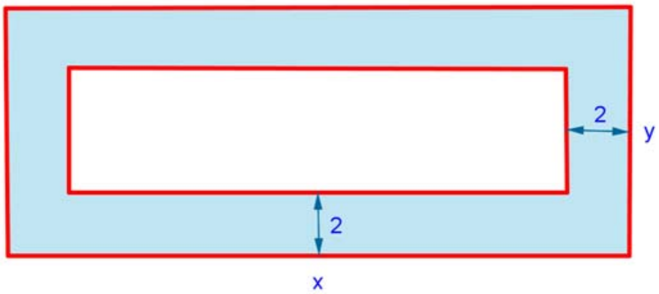
$$25-x^2=49-(10-x)^2 \qquad 25-x^2=49-\left[10^2+2\,(10)\,(-x)+(-x)^2\right]$$

$$25-x^2=49-\left[100-20x+x^2\right] \qquad 25-x^2=49-100+20x-x^2$$

$$20x = 76 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{76}{20} = 3'8\,\text{cm} \qquad h^2 = 25 - 3'8^2 = 10'56$$

$$h = \sqrt{10'56} = 3'25\ \text{cm} \qquad A = \frac{10 \cdot 3'25}{2} = 16'25\,\text{cm}^2$$

6) ***En una parcela rectangular de 60 m de perímetro se hace un jardín rectangular bordeado por un camino de 2 m de ancho. Calcula las dimensiones de la parcela sabiendo que el área del jardín es de 112 m²***.



$$\left.\begin{array}{r} 2x + 2y = 60 \\ (x-4)(y-4) = 112 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x + y = 30 \\ (x-4)(y-4) = 112 \end{array}\right\}$$

Eliminamos los paréntesis:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 30 \\ xy - 4x - 4y + 16 = 112 \end{array}\right\} \qquad y = 30 - x \qquad x(30-x) - 4x - 4(30-x) + 16 = 112$$

$$30x - x^2 - 4x - 120 + 4x + 16 = 112 \qquad -x^2 + 30x - 216 = 0 \qquad x^2 - 30x + 216 = 0$$

$$x = \frac{-(-30) \pm \sqrt{(-30)^2 - 4(1)(216)}}{2 \cdot 1} = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 864}}{2} \qquad \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{30+6}{2} = 18 \\ x_2 = \dfrac{30-6}{2} = 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} x_1 = 18 & \rightarrow & y_1 = 30 - 18 = 12 \\ x_2 = 12 & \rightarrow & y_2 = 30 - 12 = 18 \end{array}$$

Las dimensiones de la parcela son de 18 m y 12 m.

7) ***Varios amigos van a repartir un premio de 800 € a partes iguales. Dos de ellos deciden renunciar a su parte y de esta forma los demás reciben 20 € más cada uno. ¿Cuántos amigos son? ¿Cuánto recibe cada uno?***

Sean “x” los amigos e “y” el dinero que reciben cada uno.

$$\left.\begin{array}{r} xy = 800 \\ (x-2)(y+20) = 800 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} xy = 800 \\ xy + 20x - 2y - 40 = 800 \end{array}\right\} \qquad y = \frac{800}{x}$$

$$x\cdot\frac{800}{x}+20x-2\cdot\frac{800}{x}-40=800 \qquad 800+20x-\frac{1600}{x}=840$$

$$800x+20x^2-1600=840x \qquad 20x^2-40x-1600=0 \qquad x^2-2x-80=0$$

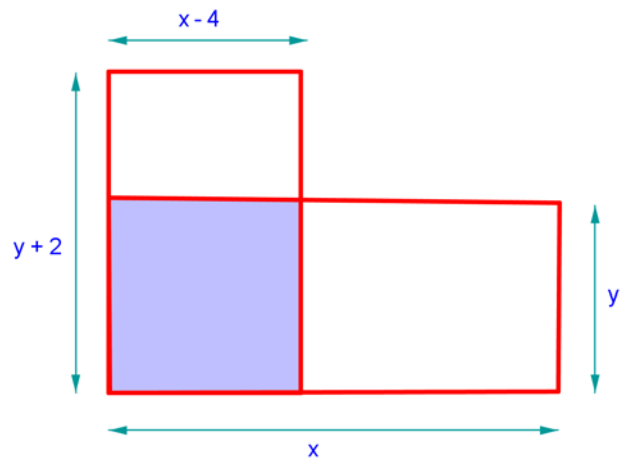
$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(-80)}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm\sqrt{4+320}}{2} \qquad x_1=\frac{2+18}{2}=10 \qquad x_2=\frac{2-18}{2}=-8$$

La solución válida es $x=10 \Rightarrow y=\frac{800}{10}=80$

Hay 10 amigos. Como 2 de ellos renuncian a su parte, el resto, es decir 8, reciben $80+20=100$ € cada uno.

8) ***Si la base de un rectángulo disminuye 2 cm y la altura aumenta 4 cm, se convierte en un cuadrado. Si la base disminuye 4 cm y la altura aumenta 2 cm, su área disminuye 12 cm².*** ***Calcula los lados del rectángulo.***

$$\left.\begin{array}{r} x-2=y+4 \\ (x-4)(y+2)=xy-12 \end{array}\right\}$$



Eliminamos los paréntesis.

$$\left.\begin{array}{r} x-2=y+4 \\ xy+2x-4y-8=xy-12 \end{array}\right\}$$

$$x=y+6$$

$$(y+6)\,y+2\,(y+6)-4y-8=(y+6)\,y-12$$

$$y^2+6y+2y+12-4y-8=y^2+6y-12 \qquad -2y=-16 \rightarrow y=\frac{-16}{-2}=8 \Rightarrow x=8+6=14$$

Los lados del rectángulo miden 8 cm y 14 cm.

9) ***La suma de dos números enteros positivos es 36. El producto del primero aumentado en 3 unidades por el segundo aumentado en 2 unidades es 408. Encuentra los dos números.***

Sean “x” e “y” los números que buscamos.

$$\left.\begin{array}{r} x+y=36 \\ (x+3)(y+2)=408 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x+y=36 \\ xy+2x+3y+6=408 \end{array}\right\} \qquad y=36-x$$

$$x\cdot(36-x)+2x+3\cdot(36-x)+6=408 \qquad 36x-x^2+2x+108-3x+6=408$$

$$-x^2+35x-294=0 \qquad x^2-35x+294=0$$

$$x=\frac{-(-35)\pm\sqrt{(-35)^2-4(1)(294)}}{2\cdot 1}=\frac{35\pm\sqrt{1225-1176}}{2}\qquad x_1=\frac{35+7}{2}=21\qquad x_2=\frac{35-7}{2}=14$$

$$x_1=21 \quad\rightarrow\quad y_1=36-21=15$$
$$x_2=14 \quad\rightarrow\quad y_2=36-14=22$$

Comprobación:

$$(21,15)\quad\rightarrow\quad \left.\begin{array}{r}21+15=36\\(21+3)(15+2)=408\end{array}\right\}\qquad \left.\begin{array}{r}36=36\\24\cdot 17=408\end{array}\right\}\qquad \left.\begin{array}{r}36=36\\408=408\end{array}\right\}$$

$$(14,22)\quad\rightarrow\quad \left.\begin{array}{r}14+22=36\\(14+3)(22+2)=408\end{array}\right\}\qquad \left.\begin{array}{r}36=36\\17\cdot 24=408\end{array}\right\}\qquad \left.\begin{array}{r}36=36\\408=408\end{array}\right\}$$

Hay dos parejas de números que cumplen las condiciones del problema, $(21,15)$ y $(14,22)$.

10) ***La diferencia de los cuadrados de dos números positivos es 56 y el mayor tiene dos unidades más que el pequeño. Encuentra los dos números***

Sea "x" mayor de los dos números e "y" el menor.

$$\left.\begin{array}{r}x^2-y^2=56\\x=y+2\end{array}\right\}\qquad (y+2)^2-y^2=56\qquad y^2+2^2+2(y)(2)-y^2x=56$$

$$y^2+4+4y-y^2=56\qquad 4y=52\ \Rightarrow\ y=\frac{52}{4}=13\ \Rightarrow\ x=13+2=15$$

Comprobación:

$$(15,13)\quad\rightarrow\quad \left.\begin{array}{r}15^2-13^2=56\\15=13+2\end{array}\right\}\qquad \left.\begin{array}{r}225-169=56\\15=15\end{array}\right\}$$

Los dos números son el 15 y el 13

11) ***Los lados de dos cuadrados suman 30 cm. Con sus diagonales se forma un rectángulo de 288 cm^2. Encuentra el valor de los lados de estos cuadrados.***

Sean "x" e "y" los lados de los cuadrados.

La diagonal del primer cuadrado de lado x se obtiene mediante el teorema de Pitágoras:

$$d_1=\sqrt{x^2+x^2}=\sqrt{2x^2}=x\sqrt{2}$$

La diagonal del segundo cuadrado de lado y se obtiene mediante el teorema de Pitágoras:

$$d_2=\sqrt{y^2+y^2}=\sqrt{2y^2}=y\sqrt{2}$$

Con estas diagonales formamos un cuadrado de área 288 cm^2.

Podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=30 \\ x\sqrt{2}\cdot y\sqrt{2}=288 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x+y=30 \\ 2x\cdot y=288 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x+y=30 \\ x\,y=144 \end{array}\right\} \qquad y=30-x$$

$$x\,(30-x)=144 \qquad 30x-x^2-144=0 \qquad x^2-30x+144=0$$

$$x=\frac{-(-30)\pm\sqrt{(-30)^2-4\,(1)\,(144)}}{2\cdot 1}=\frac{30\pm\sqrt{900-576}}{2} \qquad \begin{array}{l} x_1=\dfrac{30+18}{2}=24 \\ x_2=\dfrac{30-18}{2}=6 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} x_1=24 & \rightarrow & y_1=30-24=6 \\ x_2=6 & \rightarrow & y_2=30-6=24 \end{array}$$

Comprobación:

$$(24,6)\ \rightarrow\ \left.\begin{array}{r} 24+6=30 \\ 24\sqrt{2}\cdot 6\sqrt{2}=288 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 30=30 \\ 288=288 \end{array}\right\}$$

$$(6,24)\ \rightarrow\ \left.\begin{array}{r} 6+24=30 \\ 6\sqrt{2}\cdot 24\sqrt{2}=288 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 30=30 \\ 288=288 \end{array}\right\}$$

Los lados de los cuadrados son 24 cm y 6 cm

Solución y representación gráfica de un sistema de ecuaciones no lineal

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{y = x^2 - 2x - 8}\\ \mathbf{y = 2x - 8}\end{array}\right\}$$

<u>Solución del sistema</u>

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones. El método más rápido es el de igualación. *<u>Despejamos la "y" en las dos ecuaciones e igualamos los resultados</u>*.

En nuestro ejemplo las "y" ya están despejadas. Igualando las "y" tenemos:

$$x^2 - 2x - 8 = 2x - 8 \quad \rightarrow \quad x^2 - 4x = 0$$

La ecuación de segundo grado la podemos resolver de dos maneras:

Sacando factor común

$$x^2 - 4x = 0 \qquad x(x-4) = 0 \qquad \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; y = -8 \\ x = 4 \;\rightarrow\; y = 0 \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $(0,-8)$ y $(4,0)$

Resolviendo la ecuación con la fórmula

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot 1\cdot 0}}{2\cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{4 \pm 4}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{4+4}{2} = 4 \\ x_2 = \dfrac{4-4}{2} = 0 \end{cases}$$

<u>Representación gráfica del sistema</u>

Para representar gráficamente la función $y = 2x - 8$ (recta) basta con dar dos valores a la x, si bien para asegurarnos podemos dar tres valores y así comprobar que están alineados.

x	y
0	−8
4	0
3	−2

Para representar gráficamente $y = x^2 - 2x - 8$ (parábola) calculamos el vértice y los puntos de corte.

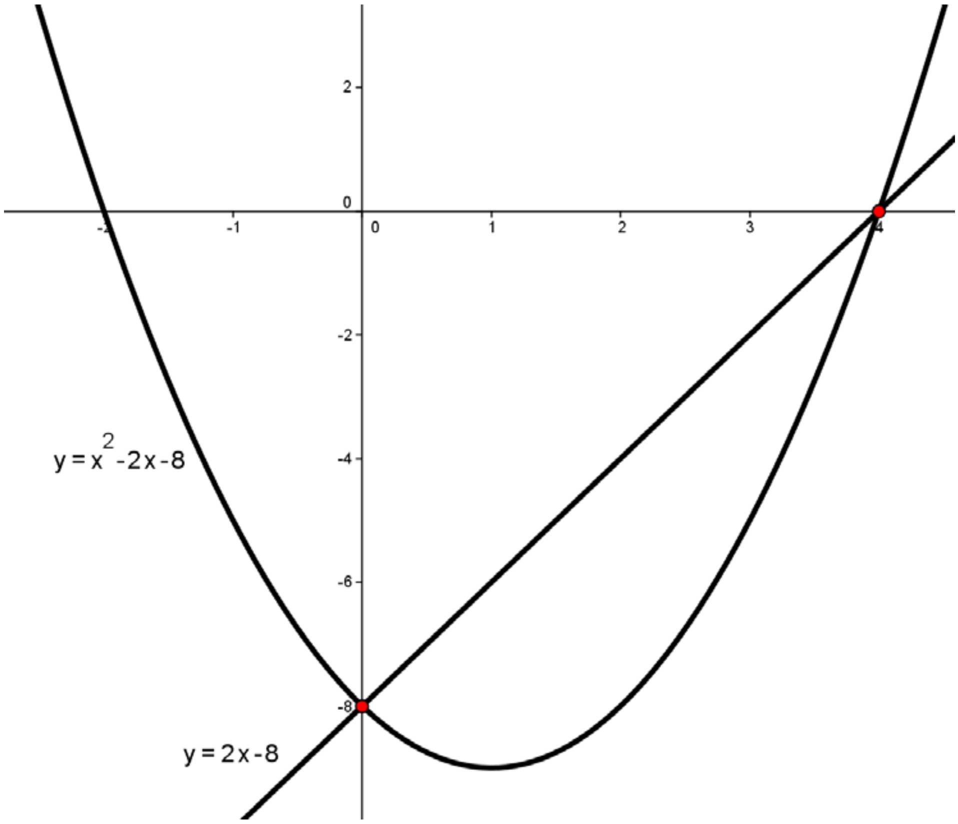
<u>Vértice</u> $\begin{cases} x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-2}{2\cdot 1} = 1 \\ y_v = 1^2 - 2\cdot 1 - 8 = -9 \end{cases}$ $\qquad V(1,-9)$

<u>Cortes con OX</u> $\quad y = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 2x - 8 = 0$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 6}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Los puntos de corte son $(-2,0)$ y $(4,0)$

<u>Corte con OY</u> $x = 0 \rightarrow y = -8 \Rightarrow$ Corta en el punto $(0,-8)$



<u>Ejemplo</u> ***Solución y representación gráfica del sistema de ecuaciones:***

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{y = x^2 - 2x - 8} \\ \mathbf{y + 2x^2 + 4x = 0} \end{array}\right\}$$

<u>Solución del sistema</u>

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones. El método más rápido es el de igualación. *<u>Despejamos la “y” en las dos ecuaciones e igualamos los resultados</u>*.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 2x - 8 \\ y = -2x^2 - 4x \end{array}\right\}$$

$$x^2 - 2x - 8 = -2x^2 - 4x \quad \rightarrow \quad 3x^2 + 2x - 8 = 0$$

Resolviendo la ecuación con la fórmula

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{(2)^2-4\cdot 3\cdot(-8)}}{2\cdot 3}=\frac{-2\pm\sqrt{100}}{6}=\frac{-2\pm 10}{6} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x_1=\dfrac{-2+10}{6}=\dfrac{4}{3} \\ x_2=\dfrac{-2-10}{6}=-2 \end{cases}$$

Si $x=\frac{4}{3} \;\rightarrow\; y=\left(\frac{4}{3}\right)^2-2\left(\frac{4}{3}\right)-8=-8'88$

Si $x=-2 \;\rightarrow\; y=(-2)^2-2(-2)-8=0$

Hay dos soluciones: $\left(\frac{4}{3},-8'88\right)$ y $(-2,0)$

Representación gráfica del sistema

Para representar gráficamente $y=x^2-2x-8$ (parábola) calculamos el vértice y los puntos de corte.

Vértice $\begin{cases} x_v=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-2}{2\cdot 1}=1 \\ y_v=1^2-2\cdot 1-8=-9 \end{cases}$ $\quad V(1,-9)$

Cortes con OX $\quad y=0 \;\rightarrow\; x^2-2x-8=0$

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-8)}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm 6}{2} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x_1=4 \\ x_2=-2 \end{cases}$$

Los puntos de corte son $(-2,0)$ y $(4,0)$

Corte con OY $\quad x=0 \;\rightarrow\; y=-8 \quad\Rightarrow\quad$ Corta en el punto $(0,-8)$

Para representar gráficamente $y=-2x^2-4x$ (parábola) calculamos el vértice y los puntos de corte.

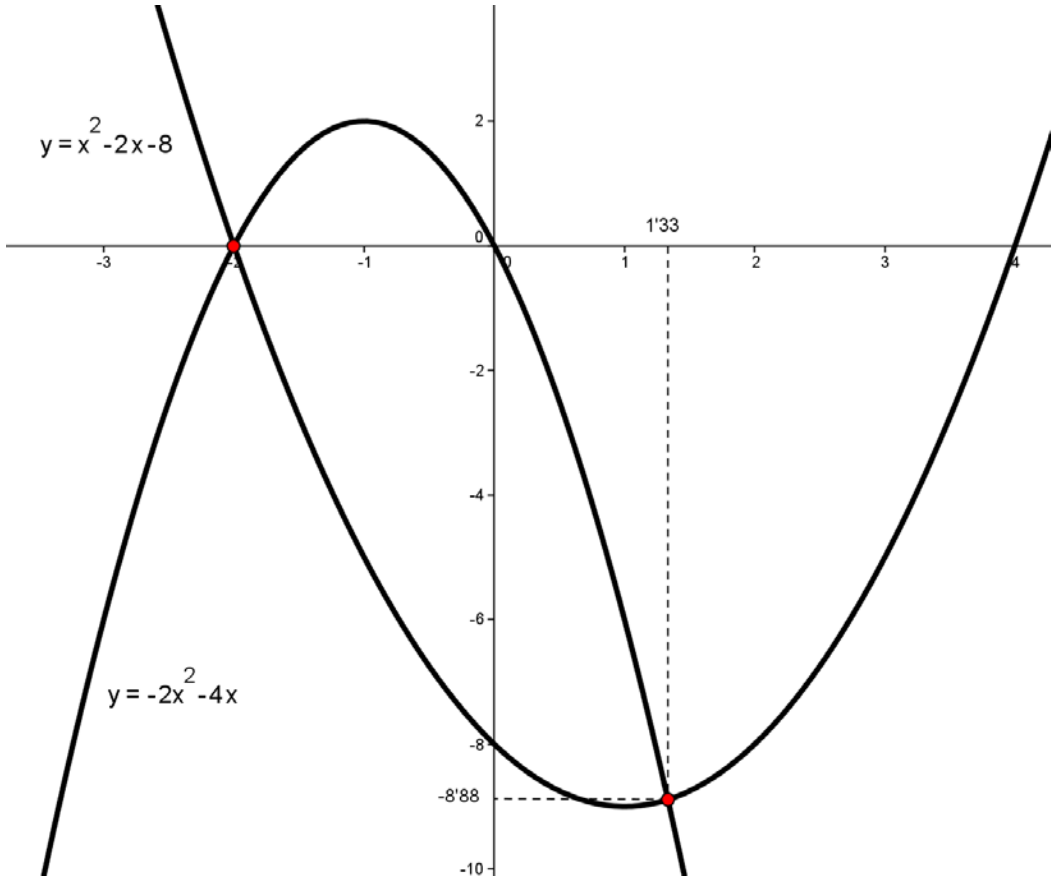
Vértice $\begin{cases} x_v=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-(-4)}{2(-2)}=-1 \\ y_v=-2(-1)^2-4(-1)=2 \end{cases}$ $\quad V(-1,2)$

Cortes con OX $\quad y=0 \;\rightarrow\; -2x^2-4x=0$

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(-2)(0)}}{2(-2)}=\frac{4\pm 4}{-4} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=0 \end{cases}$$

Los puntos de corte son $(-2,0)$ y $(0,0)$

Corte con OY $\quad x=0 \ \rightarrow \ y=0 \quad \Rightarrow \quad$ Corta en el punto $(0,0)$



Ejemplo **Una persona dispara desde el suelo un proyectil que describe una trayectoria dada por la función $e=-t^2+102t-200$. Mientras que el proyectil permanece en el aire, otra persona pilota un avión teledirigido que sigue una trayectoria definida por la función $e=21'4t+2$ (e en metros y t en segundos).**

a) Representa en unos mismos ejes ambas trayectorias.

b) ¿Desde qué punto se ha disparado el proyectil? ¿Desde qué punto ha salido el avión?

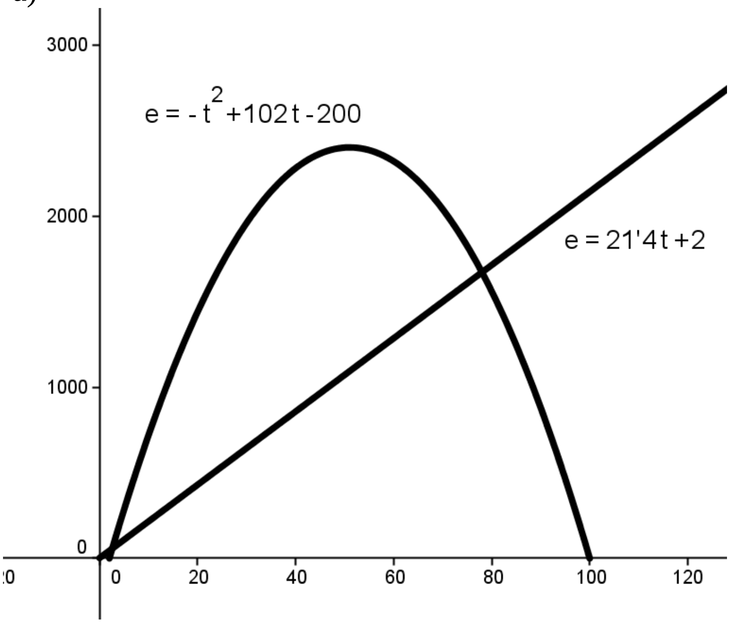
c) ¿Cuál es el alcance máximo del proyectil si no impacta con el avión? ¿Cúanto tiempo tarda?

d) ¿A qué alturas se encuentra el proyectil en $t=10$ segundos? Encuentra parejas de valores de t para los que el proyectil esté a la misma altura? ¿Cuántas podrás encontrar?

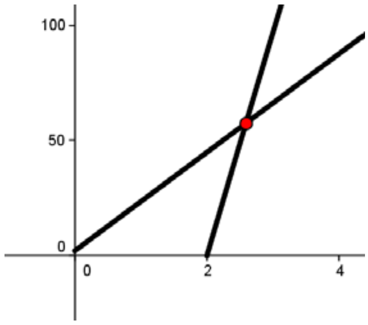
e) Da las coordenadas de los puntos donde coinciden las dos las trayectorias.

Solución

a)



Puntos desde donde se ha disparado el proyectil y desde donde ha salido el avión teledirigido.



b) Para calcular analíticamente desde donde se ha disparado el proyectil y desde donde ha salido el avión calculamos los puntos de corte de las gráficas con los ejes.

Cortes de $e=-t^2+102t-200$

Eje de abscisas $e=0 \quad \rightarrow \quad -t^2+102t-200=0$

$$t=\frac{-102\pm\sqrt{(102)^2-4(-1)(-200)}}{2(-1)}=\frac{-102\pm 98}{-2} \Rightarrow \begin{cases} t_1=\dfrac{-102+98}{-2}=2 \\ t_2=\dfrac{-102-98}{-2}=100 \end{cases}$$

Los puntos de corte son $(2,0)$ y $(100,0)$

Eje de ordenadas $t=0 \rightarrow e=-200 \Rightarrow (0,-200)$

Cortes de $e=21'4t+2$

Eje de abscisas $e=0 \rightarrow 21'4t+2=0 \qquad t=\dfrac{-2}{21'4}=-0'093$

El punto de corte es $(-0'093,0)$, como se observa en el zoom del gráfico de la parte superior.

Eje de ordenadas $t=0 \rightarrow e=2 \Rightarrow (0,2)$

Dado que ni el tiempo ni el espacio pueden ser negativos, el proyectil se ha disparado desde el punto $(2,0)$ y el avión ha salido desde el punto $(0,2)$.

c) El alcance máximo del proyectil viene dado por el punto más alto de su trayectoria que coincide con el vértice de la parábola.

$$\begin{cases} x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-102}{2(-1)} = 51 \\ y_v = -(51)^2 + 102 \cdot 51 + 200 = 2801 \end{cases} \qquad V(51, 2801)$$

Es decir, el alcance máximo del proyectil son 2801 m y tarda en llegar 51 seg.

d) Si $t = 10$ seg $\Rightarrow$ $e = -(10)^2 + 102 \cdot 10 - 200 = -100 + 1020 - 200 = 720\,\text{m}$

El proyectil se encuentra a 720 m de altura al cabo de 10seg del lanzamiento. Como todavía no ha llegado al punto más alto (vértice de la parábola) quiere decir que al descender vuelve a pasar por la misma altura. Para conocer al cabo de cuánto tiempo resolvemos la ecuación:

$$720 = -t^2 + 102\,t - 200 \qquad t^2 - 102\,t + 920 = 0$$

$$t = \frac{-(-102) \pm \sqrt{(-102)^2 - 4(1)(920)}}{2 \cdot 1} = \frac{102 \pm 82}{2} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{102+82}{2} = 92\,\text{seg} \\ t_2 = \dfrac{102-82}{2} = 10\,\text{seg} \end{cases}$$

El proyectil se encuentra a 720 m de altura al cabo de 10 seg y al cabo de 92 seg.

Podemos encontrar infinitas parejas de valores de t que estén comprendidas en el intervalo entre 0 y 100 seg.

e) Para dar las coordenadas de los puntos en los que coinciden las dos trayectorias resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones cuyas soluciones corresponden a los puntos de corte de las dos gráficas.

$$\left.\begin{array}{l} e = -t^2 + 102t - 200 \\ e = 21'4\,t + 2 \end{array}\right\} \qquad -t^2 + 102t - 200 = 21'4\,t + 2 \qquad t^2 - 80'6t + 202 = 0$$

$$t = \frac{-(-80'6) \pm \sqrt{(-80'6)^2 - 4(1)(202)}}{2 \cdot 1} = \frac{80'6 \pm 75'42}{2} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{80'6 + 75'42}{2} = 78'01 \\ t_2 = \dfrac{80'6 - 75'42}{2} = 2'59 \end{cases}$$

$$\text{Si } t_1 = 78'01\,\text{seg} \Rightarrow e_1 = 21'4 \cdot 78'01 + 2 = 1671'414\,\text{m}$$
$$\text{Si } t_2 = 2'59\,\text{seg} \Rightarrow e_2 = 21'4 \cdot 78'01 + 2 = 57'426\,\text{m}$$

Las coordenadas de los puntos donde coinciden las dos trayectorias son:

$$(2'59, 57'426) \quad \text{y} \quad (78'01, 1671'41)$$