Otras Funciones

Función de proporcionalidad inversa
Función Exponencial
Funciones Irracionales
Inecuaciones polinómicas y racionales
Sistemas de inecuaciones lineales

Allá donde miremos....Funciones

Función de proporcionalidad Inversa

Una función de proporcionalidad inversa relaciona dos magnitudes inversamente proporcionales. Su expresión es de la forma $\mathbf{y}=\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{x}}$ *con* $k \neq 0$.

Ejemplo

Un chorro de agua llena una piscina en 8h. ¿Cuánto tardarían en llenarla dos chorros? ¿Y tres?

a) Haz una tabla de valores y representa la gráfica t/n donde t es el tiempo que tarda en llenarse y n el número de chorros.
b) ¿Cuál es la relación entre el tiempo y el número de chorros?
c) ¿Cuántos chorros necesitaríamos para llenarla en 15 minutos?

Función Exponencial

La función exponencial se presenta en multitud de fenómenos de crecimiento animal, vegetal, económico, etc. o de decrecimiento. En todos ellos la variable es el tiempo y su expresión más frecuente es:

$$\mathbf{y}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}^{\mathbf{t}} \quad \textit{con} \quad \mathbf{a}>\mathbf{0} \ \ \textit{y} \ \ \mathbf{a}\neq\mathbf{1}$$

donde $\mathbf{k}$ *expresa la cantidad de unidades que hay en el instante inicial e* $\mathbf{y}$ *la cantidad que hay en cualquier instante. Si* $a>1$ *la función es creciente y si* $a<1$ *la función es decreciente.*

Ejemplos

- La gráfica de una función exponencial del tipo $y=k\,a^x$ pasa por los puntos $(0,3)$ y $(1,3'6)$.
  a) Calcular k y a y deducir si es creciente o decreciente.
  b) Representa gráficamente la función.
- La gráfica de una función exponencial del tipo $y=k\,a^x$ pasa por los puntos $(0,2)$ y $(2,1'28)$.
  a) Calcular k y a y deducir si es creciente o decreciente.
  b) Representa gráficamente la función.

Ejemplos con $a>1$

1) Las amebas son seres unicelulares que se reproducen partiéndose en dos, fenómeno conocido como bipartición. La bipartición se produce más o menos rápida según las condiciones del medio en el que se encuentren. Supongamos que inicialmente tenemos 20 amebas y que la bipartición se produce cada hora.
a) Haz una tabla y calcula el número de amebas que se van reproduciendo.
b) Encuentra la fórmula que relaciona el número de amebas en función del tiempo transcurrido.

2) Abrimos dos libretas en una caja de ahorros, una a interés simple y otra a interés compuesto, las dos con un capital inicial de 6.000 € y a interés anual del 4%.

a) Con la ayuda del profesor encuentra las expresiones que dan el capital acumulado por cada libreta en función del tiempo.
b) Representa en un gráfico la evolución del capital en función de los años. ¿Hay diferencia?

3) Sabemos que la superficie cubierta por los nenúfares en un lago se duplica gradualmente cada día. En un pequeño lago plantamos un nenúfar cuyas hojas ocupan $1\,m^2$ de superficie.

a) Haz una tabla de valores que represente la superficie total ocupada por el nenúfar en función de los días que van pasando.
b) Representa en una gráfica los datos de la tabla.
c) ¿Qué superficie tenía el lago si se tardaron 6 días en llenarlo?
d) Encuentra la relación entre la superficie ocupada y los días que van pasando.
e) Si el parque municipal tiene $4096\ m^2$, cuántos días tardará en cubrirlo un nenúfar parecido al nuestro?

4) *Las poblaciones de seres vivos comienzan creciendo según la curva exponencial, pero, si no hay catástrofes (incendios, epidemias, poderosos depredadores, etc.), llegan a invadir su espacio vital y su crecimiento se va amortiguando. La curva matemática ideal que se ajusta a esta situación se llama logística o también* ***sigmoide****, a causa de su forma de s inclinada y viene dada por la fórmula*:

$$y(t)=\frac{k}{1+a\cdot e^{-bt}}$$

Ejemplo

Supongamos una imaginaria población de moscas en la que $k=10^6, a=999$, $b=0'02$, $t=\text{tiempo en días}$ e $y=\text{nº de moscas en el día t}$.

La función logística es: $y=\dfrac{1.000.000}{1+999\cdot e^{-0'02\,t}}$ y la función exponencial $y=1000\cdot e^{0'02\,t}$.

a) Con la ayuda de la calculadora gráfica, elabora una tabla de valores para las dos funciones y encuentra el valor aproximado de t para el que dejan de coincidir la función logística y la exponencial.

Tiempo (días)	Modelo Exponencial	Modelo Logístico	Diferencia
10			
100			
150			
200			
250			
300			
400			

b) Haz una representación aproximada de las dos funciones y explica las diferencias entre ellas.

Ejemplos con $a < 1$

5) Supongamos que tenemos 20 kg. de uranio que se desintegra reduciéndose a la mitad cada año. El resto de la sustancia no desaparece sino que se transforma en otra sustancia química distinta.

a) Haz una tabla y calcula la cantidad de Uranio que va quedando al cabo del tiempo.
b) Encuentra la fórmula que relaciona la cantidad de Uranio en función del tiempo transcurrido.

Funciones Irracionales

Son aquellas cuya expresión matemática presenta un radical $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ *, donde* $g(x)$ *es una función polinómica o una función racional.*

Ejemplo

Juan utiliza el compresor de la nevera vieja que tiene para llenar las ruedas de su moto. La bufada del compresor es de $\frac{32}{3}\pi \frac{cm^3}{seg}$.

a) Si está llenando con el compresor un globo esférico, expresar el radio en función del tiempo.
b) Representar gráficamente la función haciendo una tabla de valores.
c) Si el globo explota cuando el radio es de 10 cm ¿en qué instante explotará?

Ejemplo

La relación entre la velocidad del sonido en el aire y la temperatura viene dada por la fórmula $\nu = 340\sqrt{\frac{T+273}{273}}$ donde T es la temperatura en grados centígrados y ν la velocidad en m/s.

a) Representa en una gráfica la función ν / T.
b) Haz un estudio de dicha función.

Otras funciones

Ejemplo

La fuerza con la que se atraen o se repelen dos cargas viene dada por la ley de Coulomb $F = K\frac{Q_1 \cdot Q_2}{d^2}$ donde K es una constante que depende del medio, Q_1 y Q_2 son las cargas y d es la distancia que las separa.

a) Escribe la fórmula de la ley para $K = 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}, Q_1 = 50\,\mu C$ y $Q_2 = 30\,\mu C$.
b) Elabora una tabla de valores y representa la función. ¿Qué observas en el gráfico?
c) ¿A qué distancia pondremos las cargas para que la fuerza sea de 4 N?

Desigualdades

Dadas dos rectas que se cortan, llamadas **ejes** (rectangulares si son perpendiculares, y oblicuos en caso contrario), un punto puede situarse conociendo las distancias del mismo a los ejes, tomadas a lo largo de paralelas a ellos a partir del punto. Se acostumbra a designar los ejes por **x** e **y** y las distancias a ellos por **ordenada** y **abscisa** respectivamente. La ordenada y la abscisa son las **coordenadas cartesianas** del punto.

Al establecer un sistema cartesiano en el plano y fijar la escala, ya sea horizontal, ya vertical, estamos teniendo en cuenta los criterios de ordenación de números. Recuérdese que los números reales no nulos se dividen en dos clases: los **positivos** que forman el conjunto $\mathbf{R}^+$, y los **negativos** que forman el conjunto $\mathbf{R}^-$. Se suele escribir:

$\mathbf{a} > \mathbf{0}$ para expresar que el número a es positivo

$\mathbf{a} < \mathbf{0}$ para expresar que el número a es negativo

En general se escribe:

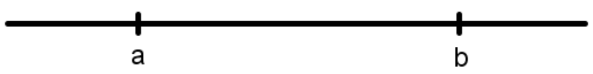
$\mathbf{a} < \mathbf{b}$ y se lee "**a es menor que b**" (desigualdad estricta)

$\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ y se lee "**a es menor o igual que b**" (desigualdad amplia)

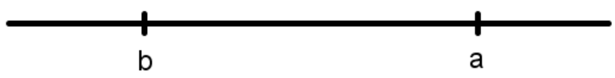
$\mathbf{a} > \mathbf{b}$ y se lee "**a es mayor que b**" (desigualdad estricta)

$\mathbf{a} \geq \mathbf{b}$ y se lee "**a es mayor o igual que b**" (desigualdad amplia)

Se llama **desigualdad** a cualquiera de las cuatro expresiones anteriores. Gráficamente, la desigualdad $a < b$ significa que el punto representativo de "a" en la recta real se halla a la izquierda del que representa "b", y la desigualdad $a > b$ significa que el punto representativo de "a" en la recta real se halla a la derecha del que representa "b".



Desigualdad $\mathbf{a} < \mathbf{b}$



Desigualdad $\mathbf{a} > \mathbf{b}$

Propiedades de las desigualdades

Cuando se utilizan desigualdades o inecuaciones, deben tenerse en cuenta fundamentalmente las siguientes reglas (aunque las enunciamos sólo con el símbolo <, se cumplen propiedades análogas con los otros tres símbolos >, ≤, y ≥):

I. ***Si a los dos miembros de una desigualdad se les suma o resta un mismo número se obtiene otra desigualdad del mismo sentido.***

$$\mathbf{a} < \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} + \mathbf{c} < \mathbf{b} + \mathbf{c} \qquad \forall \mathbf{c} \in \mathbf{R}$$

Debido a esta propiedad, *se pueden transponer términos como en las ecuaciones*, o sea, los elementos que están en un miembro sumando pasan al otro restando.

Ejemplo Si se cumple que $-3<5$ entonces $-3+4<5+4$ ó $1<9$

II. ***Si los dos miembros de una desigualdad se multiplican o dividen por un número positivo se obtiene otra desigualdad equivalente a la primera.***

$$\mathbf{a<b \quad y \quad c>0 \;\Rightarrow\; a\,c<b\,c \qquad y \qquad \frac{a}{c}<\frac{b}{c}}$$

Ejemplo Si $-2<8 \;\Rightarrow\; -2\cdot 3<8\cdot 3 \;\Rightarrow\; -6<24$

III. ***Si los dos miembros de una desigualdad se multiplican o dividen por un número negativo la desigualdad cambia de sentido.***

$$\mathbf{a<b \quad y \quad c<0 \;\Rightarrow\; a\,c>b\,c \qquad y \qquad \frac{a}{c}>\frac{b}{c}}$$

Ejemplo Si $-10<1 \;\Rightarrow\; -10(-2)>1(-2) \;\Rightarrow\; 20>-2$

El sentido de una desigualdad se conserva al multiplicar (o dividir) sus dos miembros por un mismo número positivo, y se invierte si dicho número es negativo.

Aplicando las propiedades anteriores a las inecuaciones tenemos los siguientes ejemplos:

Ejemplo La desigualdad $2x<x+5$ equivale a $2x-x<5$, pues basta sumar $-x$ a los dos miembros de la primera

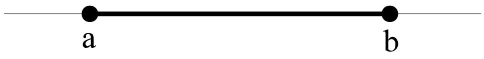
$$2x<x+5 \;\Rightarrow\; 2x+(-x)<x+5+(-x) \;\Rightarrow\; 2x-x<5 \;\Rightarrow\; x<5$$

Ejemplo De la expresión $3x<5$ podemos deducir $x<\frac{5}{3}$, porque para despejar x hemos de dividir por 3 (positivo) los dos miembros de la primera desigualdad.

Ejemplo De la expresión $-3x<5$ podemos deducir $x>-\frac{5}{3}$, porque para despejar x hemos de dividir por -3 (negativo) los dos miembros de la primera desigualdad.

Intervalos en ℝ

La relación de orden en los números reales permite definir algunos subconjuntos de números reales que tienen una interpretación geométrica sencilla en la recta real y que se utilizan en las inecuaciones y funciones.

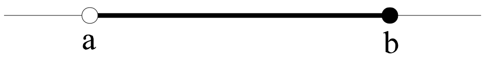


$\left[\,\mathbf{a},\mathbf{b}\,\right] = \mathbf{a} \le \mathbf{x} \le \mathbf{b}$

Este intervalo representa todos los números comprendidos entre a y b incluidos a y b. El intervalo se llama ***cerrado***.

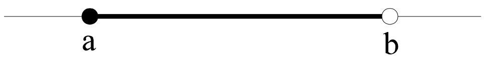
$\left]\,\mathbf{a},\mathbf{b}\,\right[= \mathbf{a} < \mathbf{x} < \mathbf{b}$

Este intervalo representa todos los números comprendidos entre a y b excluidos a y b. El intervalo se llama ***abierto***.



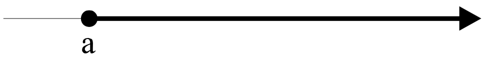
$\left]\,\mathbf{a},\mathbf{b}\,\right] = \mathbf{a} < \mathbf{x} \le \mathbf{b}$

Este intervalo representa todos los números comprendidos entre a y b excluido a e incluido b. El intervalo se llama ***abierto a la izquierda***.



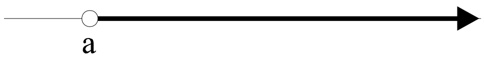
$\left[\,\mathbf{a},\mathbf{b}\,\right[= \mathbf{a} \le \mathbf{x} < \mathbf{b}$

Este intervalo representa todos los números comprendidos entre a y b incluido a y excluido b. El intervalo se llama ***abierto a la derecha***.



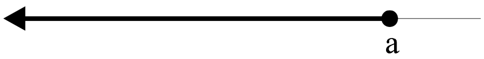
$\left[\,\mathbf{a},\infty\,\right[= \mathbf{x} \ge \mathbf{a}$

Este intervalo representa todos los números mayores o iguales que a y determina un conjunto de puntos que se llama semirrecta cerrada.



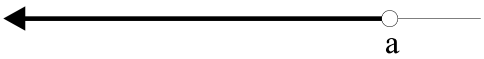
$\left]\,\mathbf{a},\infty\,\right[= \mathbf{x} > \mathbf{a}$

Este intervalo representa todos los números mayores que a y determina un conjunto de puntos que se llama semirrecta abierta.



$\left]\,-\infty,\mathbf{a}\,\right] = \mathbf{x} \le \mathbf{a}$

Este intervalo representa todos los números menores o iguales que a y determina un conjunto de puntos que se llama semirrecta cerrada.



$\left]\,-\infty,\mathbf{a}\,\right[= \mathbf{x} < \mathbf{a}$

Este intervalo representa todos los números menores que a y determina un conjunto de puntos que se llama semirrecta abierta.

Inecuaciones Lineales

Inecuaciones lineales con una incógnita

Si a, b son dos números reales dados $(a \neq 0)$, cualquiera de las cuatro expresiones siguientes se llama **inecuación lineal de una variable**. La letra **x** se llama **variable** (o **incógnita**).

$$\mathbf{ax < b} \qquad \mathbf{ax > b} \qquad \mathbf{ax \le b} \qquad \mathbf{ax \ge b}$$

Resolver la inecuación es hallar los valores de la incógnita para los que se satisface la desigualdad. La inecuación posee infinitas soluciones que se pueden representar geométricamente por medio de los puntos de una semirecta.

Resolución

Primero se aísla la incógnita en un miembro, quedando en el otro miembro un número. Para ello debe tenerse en cuenta las propiedades de las desigualdades; en lo demás se procede como se hace para resolver ecuaciones lineales con una incógnita.

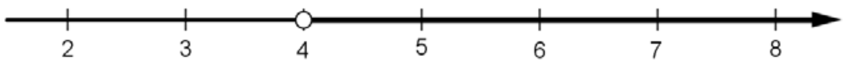
Ejemplo **Resolver analíticamente e interpretar geométricamente la inecuación**

$$\mathbf{3x+1>2x+5}$$

Solución

Dejamos en un miembro los términos con x y en el otro los términos independientes.

$$3x-2x>5-1 \quad \Rightarrow \quad x>4$$



Ejemplo **Resolver analíticamente e interpretar geométricamente la inecuación**

$$\mathbf{\frac{2x-3}{4}\geq 3x+8}$$

Solución

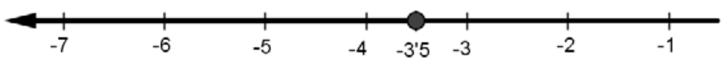
Quitamos denominadores tenemos: $2x-3\geq 12x+32$

Pasando las incógnitas a un miembro y los números al otro: $-10x\geq 35$

Para obtener la solución hay que dividir por -10, luego se invertirá el sentido de la desigualdad.

Despejando la incógnita: $10x\leq -35 \quad \Rightarrow \quad x\leq \frac{-35}{10} \quad \Rightarrow \quad x\leq -3'5$

Gráficamente los números situados a la izquierda de $-3'5$, incluido él mismo, son soluciones de la inecuación.



Ejemplo **Resolver analíticamente e interpretar geométricamente la inecuación**

$$\mathbf{\frac{x}{2}+\frac{x+1}{7}-x+2<0}$$

Sacamos denominador común:

$$\frac{7x+2x+2-14x+28}{14}<0 \quad \to \quad 7x+2x+2-14x+28<0$$

$$-5x<-28-2 \quad \to \quad -5x<-30 \quad \to \quad 5x>30 \quad \Rightarrow \quad x>6$$

La representación gráfica es similar al caso a).

Sistemas de inecuaciones de primer grado con una incógnita

Cuando un mismo número x tiene que verificar dos o más inecuaciones, decimos que se trata de un sistema de inecuaciones. Consideraremos sólo casos muy sencillos, y vamos a buscar su solución y a representarla gráficamente.

Para resolver un sistema de inecuaciones de primer grado con una incógnita se siguen los siguientes pasos:

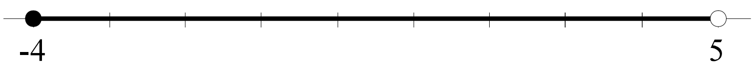
- Se calculan por separado las soluciones de todas las inecuaciones del sistema.
- La parte común a todas las inecuaciones es la solución

Ejemplo **Resolver el sistema** $\left.\begin{matrix} \mathbf{3x-1\le 5x+7} \\ \mathbf{x+4>2x-1} \end{matrix}\right\}$

$$\left.\begin{matrix} 3x-5x\le 7+1 \\ x-2x>-1-4 \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} -2x\le 8 \\ -x>-5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x\ge -4 \\ x<5 \end{matrix}\right.$$

Las soluciones son todos los números comprendidos entre el 4, incluido, y el 5 excluido. Se utiliza la notación $[-4,5[$ o bien $-4\le x<5$. Al conjunto de todos estos números se le denomina intervalo semiabierto o semicerrado. El corchete hacia adentro indica que el número correspondiente a ese extremo está incluido y el corchete hacia afuera indica que el número está excluido. Las soluciones se expresan de una de las dos maneras siguientes:

$$x\in[-4,5[\qquad ó \qquad -4\le x<5$$

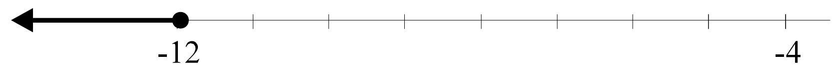


Ejemplo **Resolver el sistema** $\left.\begin{matrix} \mathbf{3(2-5x)>18-12x} \\ \mathbf{x-2\ge 2x+10} \end{matrix}\right\}$

$$\left.\begin{matrix} 6-15x>18-12x \\ x-2\ge 2x+10 \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} -15x+12x>18-6 \\ x-2x\ge 10+2 \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} -3x>12 \\ -x\ge 12 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x<-4 \\ x\le -12 \end{matrix}\right.$$

Según el apartado a) las soluciones son todos los números menores o iguales que -12, luego:

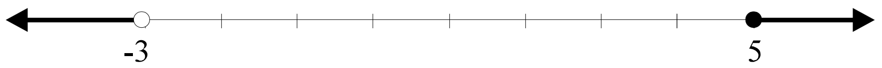
$$x\in]-\infty,-12] \qquad ó \qquad -\infty<x\le -12$$



Ejemplo **Resolver el sistema** $\left.\begin{array}{r}\mathbf{3x \geq 15} \\ \mathbf{-2x > 6}\end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{r}x \geq 5 \\ 2x < -6\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}x \geq 5 \\ x < -3\end{array}\right.$$

El sistema no tiene solución, es decir, no hay números x que verifiquen a la vez las dos inecuaciones.



Ejemplo **Resolver el sistema** $\mathbf{2 \leq 2x - 3 \leq 5}$

La expresión la podemos dividir en dos partes:

$$\left.\begin{array}{r}2 \leq 2x - 3 \\ 2x - 3 \leq 5\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r}5 \leq 2x \\ 2x \leq 8\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}x \geq \frac{5}{2} \\ x \leq 4\end{array}\right.$$

Por tanto, las soluciones son todos los números comprendidos entre $\frac{5}{2}$, incluido, y 4, incluido que podemos expresarlo de la siguiente manera:

$$x \in \left[\frac{5}{2}, 4\right] \quad \text{ó} \quad \frac{5}{2} \leq x \leq 4$$

Inecuaciones Polinómicas con una incógnita

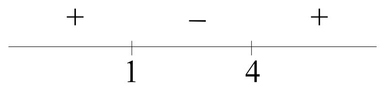
Para resolver este tipo de inecuaciones es conveniente realizar los siguientes pasos:

1) Pasar todos los términos al primer miembro (para que en el otro quede cero) y reducir factores.
2) Calcular las soluciones (o raíces) del polinomio resultante.
3) Representar sobre la recta real las soluciones obtenidas. Se forman de esta manera todos los intervalos posibles desde $-\infty$ hasta $+\infty$, siendo los extremos de los intervalos las raíces del polinomio.
4) Se escoge un valor del interior de cada uno de los intervalos y se sustituye en la inecuación. Si ésta se verifica quiere decir que dicho intervalo es solución de la inecuación.
5) Los extremos de los intervalos están incluidos (salvo $+\infty$ y $-\infty$) si en la inecuación polinómica está incluido el signo =.

Ejemplo **Resolver la inecuación** $\mathbf{x^2 - 5x + 4 > 0}$

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\text{Para } x = 0 \;\rightarrow\; 0^2 - 5\cdot 0 + 4 = 4 > 0 \\ &\text{Para } x = 2 \;\rightarrow\; 2^2 - 5\cdot 2 + 4 = 4 < 0 \\ &\text{Para } x = 5 \;\rightarrow\; 5^2 - 5\cdot 5 + 4 = 4 > 0 \end{aligned}$$



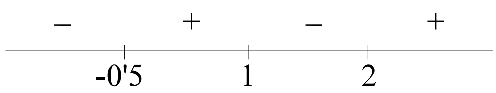
De todo lo anterior se deduce que la solución de la inecuación es:

$$x \in \left]-\infty, 1\right[\cup \left]4, \infty\right[$$

Ejemplo **Resolver la inecuación** $\mathbf{4x^3 - 10x^2 + 2x + 4 \le 0}$

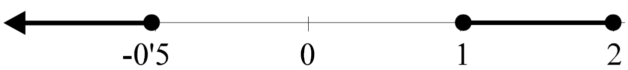
$$4x^3 - 10x^2 + 2x + 4 \le 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -0'5 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\text{Para } x = -1 \;\rightarrow\; -12 < 0 \\ &\text{Para } x = 0 \;\rightarrow\; 4 > 0 \\ &\text{Para } x = 1'5 \;\rightarrow\; -2 < 0 \\ &\text{Para } x = 3 \;\rightarrow\; 28 > 0 \end{aligned}$$



De todo lo anterior se deduce que la solución de la inecuación es:

$$x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [1, 2]$$



Inecuaciones Racionales con una incógnita

Para resolver este tipo de inecuaciones es conveniente realizar los siguientes pasos:

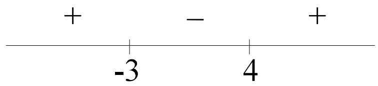
1) Pasar todos los términos al primer miembro (para que en el otro quede cero) y reducir factores hasta obtener un cociente de dos polinomios.
2) Calcular por separado las soluciones (o raíces) de los polinomios numerador y denominador.
3) Representar sobre la recta real todas las soluciones obtenidas. Se forman de esta manera todos los intervalos posibles desde $-\infty$ hasta $+\infty$, siendo los extremos de los intervalos las raíces de los polinomios.

4) Se escoge un valor del interior de cada uno de los intervalos y se sustituye en la inecuación racional. Si ésta se verifica quiere decir que dicho intervalo es solución de la inecuación.
5) Los extremos de los intervalos están incluidos (salvo $+\infty$ y $-\infty$) si en la inecuación racional está incluido el signo = y el extremo corresponde a una raíz del numerador, nunca del denominador.

<u>*Ejemplo*</u> **Resolver la inecuación** $\mathbf{\dfrac{2x-8}{3x+9} \geq 0}$

$$2x-8=0 \Rightarrow x=4 \qquad 3x+9=0 \Rightarrow x=-3$$

$$\text{Para } x=-4 \rightarrow \frac{2(-4)-8}{3(-4)+9}=\frac{16}{3}>0$$

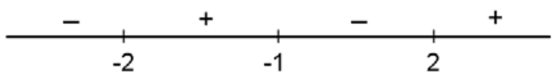


$$\text{Para } x=0 \rightarrow \frac{2\cdot 0-8}{3\cdot 0+9}=\frac{-8}{9}<0 \qquad \text{Para } x=5 \rightarrow \frac{2\cdot 5-8}{3\cdot 5+9}=\frac{2}{24}>0$$

La solución de la inecuación es: $x \in \left]-\infty,-3\right[\cup \left[4,\infty\right[$

<u>*Ejemplo*</u> **Resolver la inecuación** $\mathbf{\dfrac{x^2-4}{x+1} < 0}$

$$x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2 \qquad x+1=0 \Rightarrow x=-1$$



$$\text{Para } x=-3 \rightarrow \frac{(-3)^2-4}{(-3)+1}=-2'5<0 \qquad \text{Para } x=-1'5 \rightarrow \frac{(-1'5)^2-4}{(-1'5)+1}=3'5>0$$

$$\text{Para } x=0 \rightarrow \frac{0^2-4}{0+1}=-4<0 \qquad \text{Para } x=3 \rightarrow \frac{(3)^2-4}{(3)+1}=1'25>0$$

La solución de la inecuación es: $x \in \left]-\infty,-2\right[\cup \left]-1,2\right[$

<u>*Ejemplo*</u> **Resolver la inecuación** $\mathbf{\dfrac{x-1}{x+1} < \dfrac{x+1}{x-1}}$

Resolvemos la inecuación $\dfrac{x-1}{x+1} < \dfrac{x+1}{x-1}$

$$\frac{x-1}{x+1}-\frac{x+1}{x-1}<0 \rightarrow \frac{(x-1)^2-(x+1)^2}{x^2-1}<0 \rightarrow \frac{-4x}{x^2-1}<0$$

$$\frac{-4x}{(x-1)(x+1)} < 0$$

Las raíces del numerador y del denominador son:

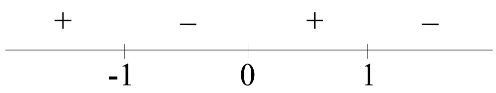
$$-4x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \qquad\qquad (x-1)(x+1) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Para } x = -2 \quad \rightarrow \quad 2'\widehat{6} > 0$$

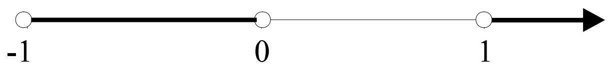
$$\text{Para } x = -0'5 \quad \rightarrow \quad -2'\widehat{6} < 0$$

$$\text{Para } x = 0'5 \quad \rightarrow \quad 2'\widehat{6} > 0$$

$$\text{Para } x = 2 \quad \rightarrow \quad -2'6 < 0$$



La solución de la inecuación es: $x \in \left]-1, 0\right[\cup \left]1, \infty\right[$



Inecuaciones lineales con dos incógnitas

Si a, b, c son números reales dados, cualquiera de las siguientes desigualdades se llama **inecuación lineal de dos incógnitas**. (Las letras x, y se llaman **variables**, o **incógnitas**)

$$\mathbf{ax+by>c} \qquad \mathbf{ax+by\geq c} \qquad \mathbf{ax+by<c} \qquad \mathbf{ax+by\leq c}$$

En los cuatro casos, la solución puede obtenerse despejando una variable y suponiendo luego que a la otra se le puede asignar cualquier valor. Sin embargo, suele resultar muy conveniente representar en el plano las soluciones.

Resolución gráfica

Si representamos gráficamente la recta $ax+by+c=0$ observamos que ésta divide al plano en tres zonas. En una de ellas es $ax+by+c>0$; en otra $ax+by+c<0$ y, por fin, en los puntos de la recta es $ax+by+c=0$. Se trata de averiguar cuál de esas zonas (incluida o no la recta, según la desigualdad sea o no estricta) constituye el conjunto de soluciones de la inecuación.

En la práctica, para representar gráficamente el semiplano de las soluciones de una inecuación con dos incógnitas se siguen los siguientes pasos:

1. Se representa gráficamente la recta $ax+by+c=0$

2. Se elige un punto cualquiera que no pertenezca a la recta anterior. Si la recta no pasa por el origen el más cómodo de elegir es el $(0,0)$. Se sustituyen las coordenadas de dicho punto en la inecuación. Si la satisfacen, entonces el semiplano de las soluciones es aquel que contiene a dicho punto. Si no la satisfacen, entonces el semiplano de las soluciones es el que no contiene a dicho punto.

   Si la recta pasa por el origen, los puntos más cómodos de elegir son el $(1,0)$ ó el $(0,1)$.

3. Si la desigualdad es estricta (< ó >), entonces los puntos de la recta no pertenecen al semiplano de las soluciones y se dice que éste es un semiplano abierto. En caso contrario ($\leq$ ó $\geq$) el semiplano de las soluciones contiene los puntos de la recta y se llama semiplano cerrado. Una forma de indicar gráficamente que los puntos de la recta pertenecen a la solución de la inecuación es dibujarlos con trazo más grueso que el resto.

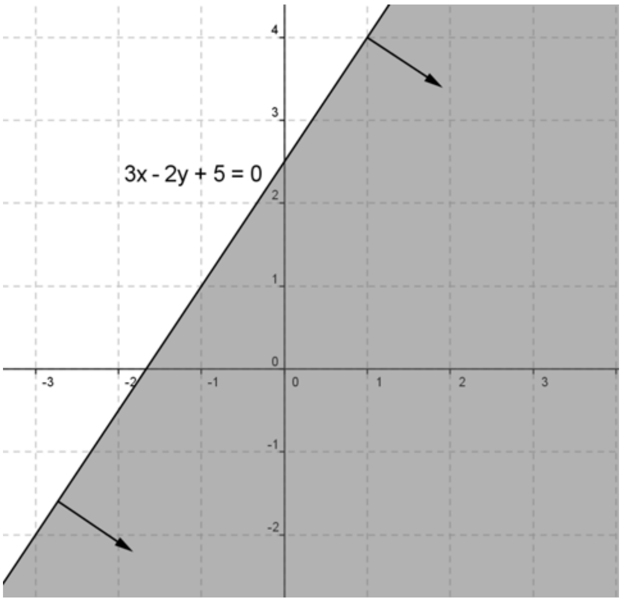
Si rayáramos el semiplano solución para cada inecuación, obtendríamos dibujos demasiado confusos. Por eso, en vez de rayarlos totalmente, los señalaremos con dos flechas perpendiculares a la recta en los extremos de esta para indicar a qué lado de la recta se encuentra el semiplano de las soluciones.

Ejemplo **Representar gráficamente las soluciones de la inecuación $\mathbf{3x-2y+5>0}$**

Representamos gráficamente la recta $3x-2y+5=0$. Como no pasa por el origen, escogemos el punto $(0,0)$ y lo sustituimos en la inecuación:

$$3\cdot 0-2\cdot 0+5=5>0 \quad \Rightarrow \quad 5>0$$

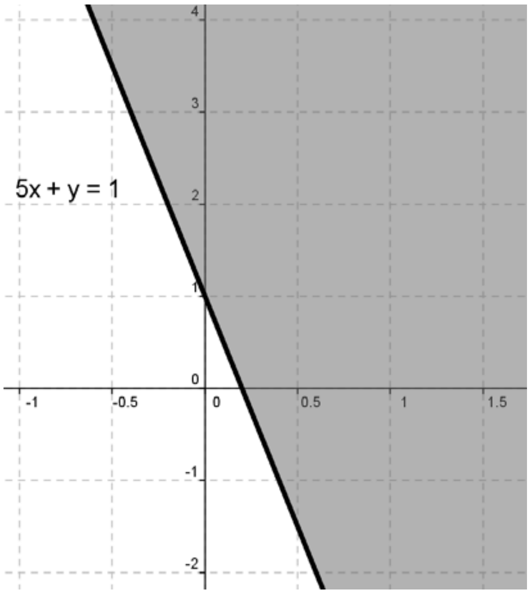
luego el semiplano que contiene a dicho punto, excluyendo los puntos de la recta (por ser una desigualdad estricta) es la solución del sistema**.**



Ejemplo **Representar gráficamente las soluciones de la inecuación $5x + y \le 1$**

Representamos gráficamente la recta $5x + y = 1$. Como no pasa por el origen, escogemos el punto $(0,0)$ y lo sustituimos en la inecuación: $5 \cdot 0 + 0 = 0 \le 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \le 1$

luego el semiplano que contiene a dicho punto, incluyendo los puntos de la recta (por ser una desigualdad amplia) es la solución del sistema**.**



Sistemas de Inecuaciones lineales con dos incógnitas

Resolver un sistema lineal de varias inecuaciones con dos incógnitas es encontrar la región del plano tal que las coordenadas de sus puntos satisfacen todas las inecuaciones. Para ello, se representan las rectas asociadas a cada inecuación lineal, eligiendo posteriormente el semiplano solución de cada inecuación, por lo que la intersección de todos ellos será la solución del sistema. *Teniendo en cuenta que los semiplanos pueden ser abiertos o cerrados, hay que especificar en cada caso si los puntos frontera de la región de las soluciones le pertenecen o no.*

Ejemplo **Representar gráficamente las soluciones del sistema de inecuaciones** $\left.\begin{matrix} \mathbf{x-y\geq 0} \\ \mathbf{3x-y\leq 4} \\ \mathbf{3x+4y\leq 9} \end{matrix}\right\}$

Representamos la recta $x-y=0$. Como pasa por el origen, escogemos el punto $(1,0)$ y lo sustituimos en la inecuación $x-y\geq 0$: $1-0=1\geq 0$

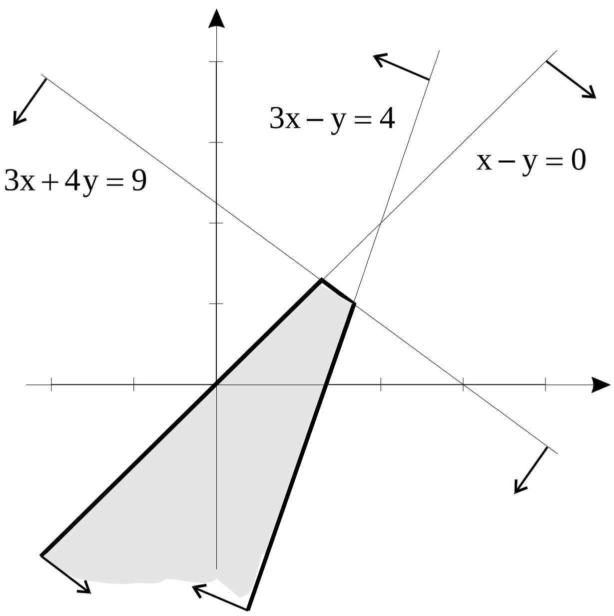
Como se verifica la desigualdad, la solución de la inecuación es el semiplano que contiene a dicho punto, incluidos los puntos de la recta, por ser la desigualdad amplia.

Representamos la recta $3x-y=4$. Como no pasa por el origen, escogemos el punto $(0,0)$ y lo sustituimos en la inecuación $3x-y\leq 4$: $3\cdot 0-0=0\leq 4$

Como se verifica la desigualdad, la solución de la inecuación es el semiplano que contiene a dicho punto, incluidos los puntos de la recta, por ser la desigualdad amplia.

Representamos la recta $3x+4y=9$. Como no pasa por el origen, escogemos el punto $(0,0)$ y lo sustituimos en la inecuación $3x+4y\leq 9$: $3\cdot 0+4\cdot 0=0\leq 9$

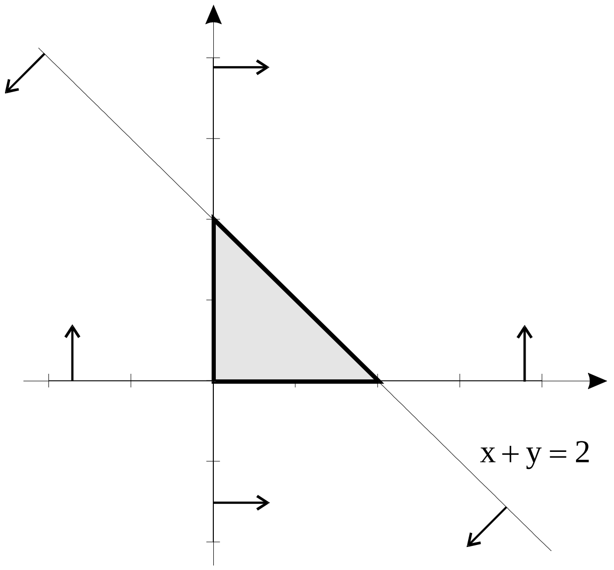
Como se verifica la desigualdad, la solución de la inecuación es el semiplano que contiene a dicho punto, incluidos los puntos de la recta, por ser la desigualdad amplia.



Ejemplo: **Resolver el sistema** $\left.\begin{array}{r} \mathbf{x \geq 0} \\ \mathbf{y \geq 0} \\ \mathbf{x + y \leq 2} \end{array}\right\}$

Representamos la recta $x + y = 2$. Como no pasa por el origen, escogemos el punto $(0, 0)$ y lo sustituimos en la inecuación $x + y \leq 2$: $0 + 0 = 0 \leq 2$

Como se verifica la desigualdad, la solución de la inecuación es el semiplano que contiene a dicho punto, incluidos los puntos de la recta, por ser la desigualdad amplia.



Ejemplo: **Resolver el sistema** $\left.\begin{array}{r} \mathbf{-x + y \leq 1} \\ \mathbf{x + 2y \leq 6} \\ \mathbf{2x + 3y > 3} \\ \mathbf{-3x + 8y > 4} \end{array}\right\}$

Representamos la recta $-x + y = 1$. Como no pasa por el origen, escogemos el punto $(0, 0)$ y lo sustituimos en la inecuación $-x + y \leq 1$: $-0 + 0 = 0 \leq 1$

Como se verifica la desigualdad, la solución de la inecuación es el semiplano que contiene a dicho punto, incluidos los puntos de la recta, por ser la desigualdad amplia.

Representamos la recta $x + 2y = 6$. Como no pasa por el origen, escogemos el punto $(0, 0)$ y lo sustituimos en la inecuación $x + 2y \leq 6$: $0 + 2 \cdot 0 = 0 \leq 6$

Como se verifica la desigualdad, la solución de la inecuación es el semiplano que contiene a dicho punto, incluidos los puntos de la recta, por ser la desigualdad amplia.

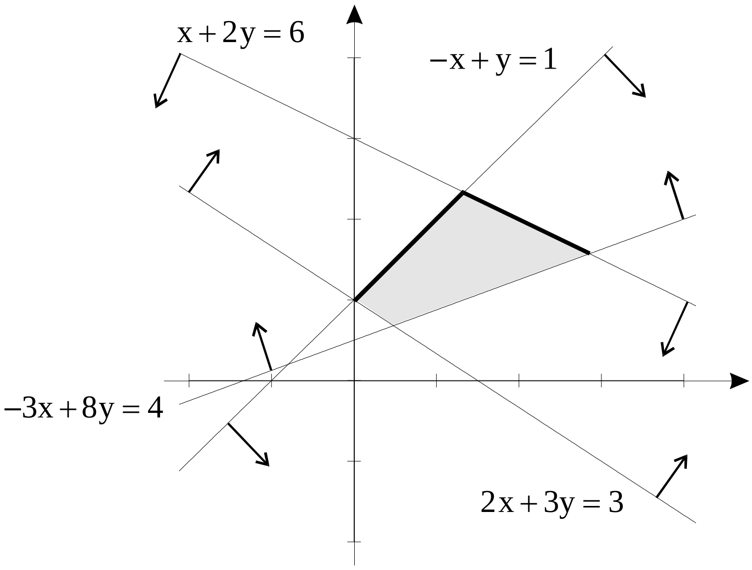
Representamos la recta $2x + 3y = 3$. Como no pasa por el origen, escogemos el punto $(0, 0)$ y lo sustituimos en la inecuación $2x + 3y > 3$:

$$2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0 \not> 3$$

Como no se verifica la desigualdad, la solución de la inecuación es el semiplano que no contiene a dicho punto, excluidos los puntos de la recta, por ser la desigualdad estricta.

Representamos la recta $-3x+8y=4$. Como no pasa por el origen, escogemos el punto $(0,0)$ y lo sustituimos en la inecuación $-3x+8y>4$: $-3\cdot 0+8\cdot 0=0\not>4$

Como no se verifica la desigualdad, la solución de la inecuación es el semiplano que no contiene a dicho punto, excluidos los puntos de la recta, por ser la desigualdad estricta.



Obsérvese en la gráfica que el punto $(0,1)$ no es solución del sistema ya que no satisface la tercera inecuación: $2\cdot 0+3\cdot 1=3\not>3$, mientras que el punto $\left(\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right)$ es solución del sistema porque es el punto de corte de dos rectas dibujadas con trazo grueso, lo que significa que corresponde a desigualdades amplias, y por tanto, determinan semiplanos cerrados

$$-\frac{4}{3}+\frac{7}{3}=1\leq 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{4}{3}+2\cdot\frac{7}{3}=6\leq 6$$

Ejemplo: Resolver el sistema $\left.\begin{aligned} \mathbf{x-y} &\leq \mathbf{0} \\ \mathbf{x-3y} &> \mathbf{-12} \\ \mathbf{x-y} &\geq \mathbf{-5} \\ \mathbf{x-3y} &< \mathbf{4} \end{aligned}\right\}$

Representamos la recta $x-y=0$. Como pasa por el origen, escogemos el punto $(1,0)$ y lo sustituimos en la inecuación $x-y\leq 0$:

$$1-0=1\not\leq 0$$

Como no se verifica la desigualdad, la solución de la inecuación es el semiplano que no contiene a dicho punto, incluidos los puntos de la recta, por ser la desigualdad amplia.

Representamos la recta $x-3y=-12$. Como no pasa por el origen, escogemos el punto $(0,0)$ y lo sustituimos en la inecuación $x-3y>-12$: $0-3\cdot 0=0>-12$

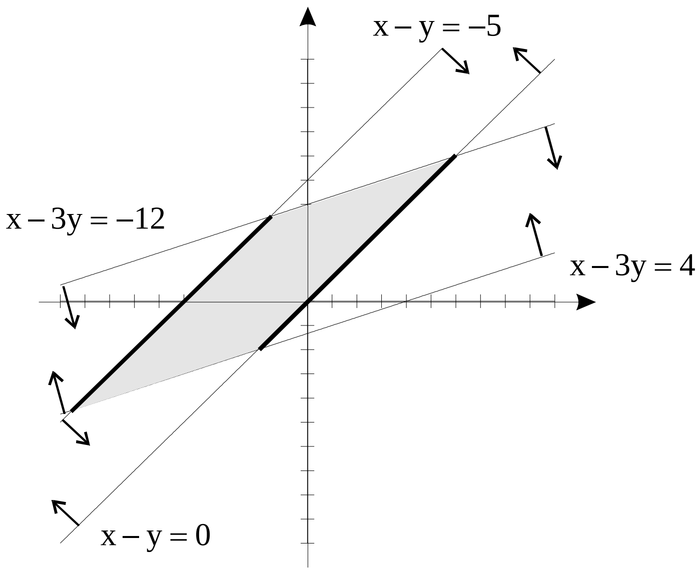
Como se verifica la desigualdad, la solución de la inecuación es el semiplano que contiene a dicho punto, incluidos los puntos de la recta, por ser la desigualdad amplia.

Representamos la recta $x - y = -5$. Como no pasa por el origen, escogemos el punto $(0, 0)$ y lo sustituimos en la inecuación $x - y \geq -5$: $0 - 0 = 0 \geq -5$

Como se verifica la desigualdad, la solución de la inecuación es el semiplano que contiene a dicho punto, incluidos los puntos de la recta, por ser la desigualdad amplia.

Representamos la recta $x - 3y = 4$. Como no pasa por el origen, escogemos el punto $(0, 0)$ y lo sustituimos en la inecuación $x - 3y < 4$: $0 - 3 \cdot 0 = 0 < 4$

Como se verifica la desigualdad, la solución de la inecuación es el semiplano que contiene a dicho punto, incluidos los puntos de la recta, por ser la desigualdad amplia.



Problemas propuestos con soluciones

1) **Resolver las siguientes inecuaciones:**

a) $5x-\frac{3}{4}\geq\frac{2}{5}$ b) $\frac{3x-1}{2}<\frac{x+2}{5}$ c) $\frac{4-5x}{2}\leq\frac{6-2x}{6}-\frac{3-4x}{3}$

d) $3-x+\frac{5(x+4)}{6}<1$ e) $\frac{3x-3}{5}-\frac{4x+8}{2}\leq\frac{x}{4}-3x$

Soluciones

a) $x\geq\frac{23}{100}$ b) $x<\frac{9}{13}$ c) $x\in\left[\frac{4}{7},\infty\right[$ d) $x\in\left]32,\infty\right[$ e) $x\leq\frac{92}{27}$

2) **Resolver los siguientes sistemas de inecuaciones:**

a) $\left.\begin{array}{l} x+5\geq 4x-4 \\ 2x-7<3x-3 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 3-5x<4+(3-x)\,2-6x \\ x+2\,(x-4)>5x-1 \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{c} 5\,(2-x)\geq 10-3\,(2-x) \\ \frac{x}{3}\geq 1 \end{array}\right\}$

Soluciones a) $x\in\left]-4,3\right]$ b) $x<-\frac{7}{2}$ c) No tiene solución

3) **Resolver la siguientes inecuaciones:**

a) $(3+x)(2-x)<0$ b) $7x^2-3x>0$ c) $-x^2+12x-20\leq 0$

d) $(x-1)^2\geq(2x+3)^2$ e) $x(x^2+x)-(x+1)(x^2-2)>-4$ f) $(2x-4)3x>0$

Soluciones

a) $x\in\left]-\infty,-3\right[\cup\left]2,\infty\right[$ b) $x\in\left]-\infty,0\right[\cup\left]\frac{3}{7},\infty\right[$ e) $x>-3$

c) $x\in\left]-\infty,2\right]\cup\left[10,\infty\right[$ d) $x\in\left]-4,-\frac{2}{3}\right]$ f) $x\in\left]-\infty,0\right[\cup\left]2,\infty\right[$

4) **Resolver las siguientes inecuaciones:**

a) $\frac{3x-2}{x-1}-1\geq\frac{2x-1}{x+1}$ b) $\frac{1}{x-3}>\frac{2}{x+3}$ c) $\frac{x\,(x-3)}{(x+1)\,(x+2)}\geq 0$ d) $\frac{x^2-1}{x^2+1}>0$

e) $\frac{4-x^2}{x^2-9}>0$ f) $\frac{x^2-1}{x^2-4x+7}\geq 0$ g) $\frac{x^2+8x+12}{x^2+10x+25}\geq 0$ h) $\frac{2x-1}{x-2}<\frac{1}{2}$

Soluciones

a) $x\in\left]-1,\frac{1}{2}\right]\cup\left]1,\infty\right[$ b) $x\in\left]-\infty,-3\right[\cup\left]3,9\right[$

c) $x\in\left]-\infty,-2\right[\cup\left]-1,0\right]\cup\left[3,\infty\right[$ d) $x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,\infty\right[$

e) $x \in \left]-3,-2\right[\cup \left]2,3\right[$ f) $x \in \left]-\infty,-1\right] \cup \left[1,\infty\right[$

g) $x \in \left]-\infty,-6\right] \cup \left[-2,\infty\right[$ h) $x \in \left]0,2\right[$

5) **Resolver las siguientes inecuaciones:**

a) $\mathbf{4+2x<3x-4<8+x}$ **b)** $\mathbf{2x-1 \le \frac{x}{2} \le x+2}$ **c)** $\mathbf{-4<8-3x<\frac{2}{5}}$

Soluciones

a) No tiene solución b) $-4 \le x \le \frac{2}{3}$ ó $x \in \left[-4, \frac{2}{3}\right]$ c) $\frac{38}{15} < x < 4$

6) **Resolver los siguientes sistemas de inecuaciones lineales:**

a) $\left.\begin{array}{r} -2x+3y \le -5 \\ x-5y \ge 7 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} -x+y>5 \\ 2x-3y<-1 \end{array}\right\}$ **c)** $\left.\begin{array}{l} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ 3x+4y \le 120 \\ x+y \le 70 \\ 60x+30y \le 1800 \end{array}\right\}$ **d)** $\left.\begin{array}{l} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ 200x+100y \ge 400 \\ 100x+200y \ge 500 \\ 400x+400y \ge 1400 \end{array}\right\}$