# Polinomios

*Operaciones*
*Regla de Ruffini*
*Raíces o ceros*
*Descomposición*
*Fracciones algebraicas*
*Ecuaciones racionales*

# Repaso de polinomios

<u>*Ejercicios*</u> **Dados los polinomios** $\mathbf{P(x)=2x^3-5x^2+2x-1}$**,** $\mathbf{Q(x)=-x+1}$ **y** $\mathbf{R(x)=x^4-3x^3+6x-1}$ **calcular:**

**a)** $\mathbf{P(x)\cdot Q(x)}$ **b)** $\mathbf{Q(x)\cdot R(x)}$ **c)** $\mathbf{P(x)\cdot Q(x)-R(x)}$ **d)** $\mathbf{P(x)\cdot Q^2(x)}$

**e)** $\mathbf{P^2(x)-Q(x)\cdot R(x)}$ **f)** $\mathbf{\dfrac{P(x)}{Q(x)}}$ **g)** $\mathbf{\dfrac{R(x)}{Q(x)}}$

<u>Soluciones</u>:

a) $-2x^4+7x^3-7x^2+3x-1$ b) $-x^5+4x^4-3x^3-6x^2+7x-1$

c) $-3x^4+10x^3-7x^2-3x$ d) $2x^5-9x^4+14x^3-10x^2+4x-1$

e) $4x^6-19x^5+29x^4-21x^3+20x^2-11x+2$ f) $C(x)=-2x^2+3x+1 \quad R(x)=-2$

g) $C(x)=-x^3+2x^2+2x-4 \quad R(x)=3$

<u>*Ejercicios*</u> **Desarrollar las siguientes expresiones:**

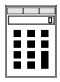
**a)** $\mathbf{(2x+1)^2}$ **b)** $\mathbf{(x-2a)^2}$ **c)** $\mathbf{(2x^3-6x)^2}$ **d)** $\mathbf{(2a+9b)^2}$

**e)** $\mathbf{\left(\dfrac{1}{3}-3t\right)^2}$ **f)** $\mathbf{\left(\dfrac{2}{3}-2\sqrt{3}\right)^2}$ **g)** $\mathbf{(x+y)^2-(x-y)^2-2xy}$

<u>Soluciones</u>

a) $4x^2+4x+1$ b) $x^2-4ax+4a^2$ c) $4x^6-24x^4+36x^2$ d) $4a^2+36ab+81b^2$

e) $9t^2-2t+\dfrac{1}{9}$ f) $7'825642290$ g) $2xy$

# Valor numérico de un polinomio utilizando la 

*Si tenemos que calcular el valor numérico de una expresión para un cierto valor de la variable, el primer paso es introducir el número en la memoria de la calculadora y posteriormente traer a la pantalla dicho valor cada vez que tengamos que sustituir la variable.*

<u>*Ejercicios*</u> **a) Calcular el valor del polinomio** $\mathbf{P(x)=2x^3-3x^2+5x-7}$ **cuando** $\mathbf{x=4}$.

(*Sol: 93*)

**b) Calcular** $\mathbf{P(-0'58)}$ **si** $\mathbf{P(x)=-7x^5+\dfrac{4}{3}x^4-\sqrt{3}x^3+\dfrac{1}{2}x+1}$.

*(Sol: $1'658280248$)*

# La regla de Ruffini

Con frecuencia, tendremos que hacer divisiones cuyo divisor es de la forma $\mathbf{x-a}$, donde la letra **a** representa un número. Son binomios de este tipo:

$$x-4 \;\rightarrow\; a=4 \qquad x+2=x-(-2) \;\rightarrow\; a=-2 \qquad x-\frac{1}{3} \;\rightarrow\; a=\frac{1}{3}$$

Estas divisiones se pueden hacer en la forma habitual, pero es más sencillo y rápido usar la **Regla de Ruffini**, que utiliza sólo los coeficientes.

Veamos en la práctica cómo se realiza esta división, primero en la forma habitual y luego usando la regla de Ruffini para el siguiente ejemplo: $(x^4 - 8x^2 + 2x - 5):(x - 2)$

*La regla de Ruffini resume el método de obtención de los coeficientes del cociente y del resto, al hacer la división de un polinomio por* $x - a$. Podemos describirla así:

**1)** *Se ordena el dividendo en forma decreciente y se colocan ordenados sus coeficientes. Si en el polinomio dividendo faltan términos, como en este caso que es incompleto, se ponen ceros en los lugares de los términos que faltan. Debajo, y desplazado a la izquierda, se coloca el término independiente del divisor cambiado de signo.*

**2)** *El primer coeficiente del cociente es igual al primer coeficiente del dividendo.*

**3)** *Cada uno de los demás coeficientes del cociente se obtiene multiplicando el coeficiente anterior por **a** y sumando este producto al coeficiente siguiente del dividendo.*

**4)** *El resto es igual al producto del último coeficiente del cociente por **a** más el término independiente del dividendo*

**5)** *El grado del cociente es una unidad menos que el grado del dividendo.*

Estos apartados, para el ejemplo de la división anterior, quedan reflejados en los siguientes pasos:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & -8 & 2 & -5 \\ 2 & \downarrow & & & & \\ \hline & \mathbf{1} & & & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & -8 & 2 & -5 \\ 2 & & 1\cdot 2 & & & \\ \hline & 1 & \mathbf{2} & & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & -8 & 2 & -5 \\ 2 & & 2 & 2\cdot 2 & & \\ \hline & 1 & 2 & \mathbf{-4} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & -8 & 2 & -5 \\ 2 & & 2 & 4 & -4\cdot 2 & \\ \hline & 1 & 2 & -4 & \mathbf{-6} & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 0 & -8 & 2 & -5 \\ 2 & & 2 & 4 & -8 & -6\cdot 2 \\ \hline & \multicolumn{4}{c|}{\underbrace{1 \quad 2 \quad -4 \quad -6}_{\text{coeficientes del cociente}}} & \underbrace{\mathbf{-17}}_{\text{resto}} \end{array}$$

Una vez se obtienen los coeficientes del cociente, como sabemos que es de un grado menor que el dividendo tenemos:

$$c(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 6$$

El resto es el último número obtenido:

$$r(x) = -17$$

*Ejemplo* **Calcular el resto y el cociente de la división $x^3 + 1$ entre $x + 1$ utilizando la regla de Ruffini.**

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & +1 \\ -1 & & -1 & +1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & +1 & \boxed{0} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{cociente} \rightarrow c(x) = x^2 - x + 1 \\ \\ \text{resto} \rightarrow r(x) = 0 \end{array}$$

*Ejercicios* **Utiliza la regla de Ruffini para dividir los polinomios D entre d:**

**a)** $\mathbf{D = x^4 - 23x^2 - 30}$ **y** $\mathbf{d = x - 5}$ **b)** $\mathbf{D = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8}$ **y** $\mathbf{d = x - 1}$

**c)** $\mathbf{D = 8x^2 - 10x + 18}$ **y** $\mathbf{d = 2x - 4}$ **d)** $\mathbf{D = x^3 + 2x^2 - 5x + 1}$ **y** $\mathbf{d = 2x + 3}$

<u>*Soluciones*</u>:

a) $c(x) = x^3 + 5x^2 + 2x + 10$ y $r(x) = 20$

b) $c(x) = x^3 - x^2 + 3x - 3$ y $r(x) = 5$

c) $c(x) = 4x + 3$ y $r(x) = 30$ d) $c(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4} - \frac{23}{8}$ y $r(x) = \frac{77}{8}$

## Teorema del resto

***El valor que toma un polinomio $P(x)$ cuando hacemos $x = a$ es decir $P(a)$, coincide con el resto de dividir $P(x)$ entre $x - a$.***

### <u>Demostración</u>

Al hacer la división del polinomio $P(x)$ entre $x - a$ el cociente es $C(x)$ y el resto es R, que por ser de grado cero es un número.

$$\begin{array}{l|l} P(x) & x-a \\ \cline{2-2} R & C(x) \end{array} \qquad\qquad P(x) = (x-a)\cdot C(x) + R$$

Si hacemos $x = a$ queda:

$$P(a) = (a-a)\cdot C(a) + R = 0\cdot C(a) + R = R$$

Por lo tanto, para hallar el valor numérico de un polinomio, basta aplicar la regla de Ruffini y tomar el resto.

***El valor numérico de un polinomio para $x = a$, es igual al resto que se obtiene al dividir ese polinomio por $x - a$. Decir que $P(x)$ es divisible por $x - a$ es lo mismo que decir que $P(a) = 0$***

<u>*Ejemplo*</u> **¿Es exacta la división de $x^5 - 1$ por $x - 1$? Halla el resto de la división por dos procedimientos y comprueba que obtienes el mismo resultado.**

1) Haciendo la división.

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

El resto es cero, por lo tanto la división es exacta.

2) Hallamos el valor de $x^5 - 1$ para $x = 1$

$$1^5 - 1 = 1 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Resto} = 0$$

En este caso, ha sido más sencillo este último camino.

*Ejemplo* **Dado el polinomio $x^3 - 4x^2 + 5x + k$ queremos calcular el valor de k para que el valor numérico del polinomio para $x = 3$ sea 8.**

$$3^3 - 4\cdot 3^2 + 5\cdot 3 + k = 8 \quad \Rightarrow \quad k = 2$$

## Raíces o ceros de un de un polinomio

*Diremos que el número a es una raíz o cero del polinomio* $P(x)$ *si el valor numérico del polinomio para* $x = a$ *es cero, es decir* $P(a) = 0$.

- *Si un número a es una raíz entera del polinomio* $P(x) = a_n x^n + \dots\dots\dots\dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, *entonces a es un divisor del término independiente. Si el valor "a" es un cero del polinomio* $P(x)$, *también es un cero de todos los polinomios obtenidos al multiplicar* $P(x)$ *por un número.*
- *Si el número* $a$ *es una raíz del polinomio* $P(x)$, *éste es divisible por* $x - a$

*Ejemplo* **Calcula las raíces enteras del polinomio $x^3 + 2x^2 - x - 2$**

Las posibles raíces enteras son los divisores de $-2$, es decir $\pm 1$ y $\pm 2$
Comprobamos directamente cuál de estos números es raíz:

Para $x = 1 \quad \rightarrow \quad 1^3 + 2\cdot 1^2 - 1 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$ es una raíz.

Para $x = -1 \quad \rightarrow \quad (-1)^3 + 2(-1)^2 - (-1) - 2 = -1 + 2 + 1 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$ también es raíz.

Para $x = 2 \quad \rightarrow \quad 2^3 + 2\cdot 2^2 - 2 - 2 = 12 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$ no es raíz.

Para $x = -2 \quad \rightarrow \quad (-2)^3 + 2(-2)^2 - (-2) - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2$ es raíz.

*Ejemplo* **Calcula las raíces enteras del polinomio $x^4 + 3x^3 - x^2 - 3x$**

- Se saca factor común $x \quad \rightarrow \quad x\left(x^3 + 3x^2 - x - 3\right)$.
  Una raíz es $x = 0$
- Se calculan ahora las raíces del polinomio $x^3 + 3x^2 - x - 3$.

  Las posibles raíces enteras son los números $\pm 1$ y $\pm 3$
- Comprobamos directamente cuál de estos números es raíz:

  Para $x = 1 \quad \rightarrow \quad 1^3 + 3\cdot 1^2 - 1 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$ es raíz

  Para $x = -1 \quad \rightarrow \quad (-1)^3 + 3(-1)^2 - (-1) - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$ es raíz

  Para $x = 3 \quad \rightarrow \quad 3^3 + 3\cdot 3^2 - 3 - 3 = 48 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$ no es raíz

Para $x = -3 \rightarrow (-3)^3 + 3(-3)^2 - (-3) - 3 = 0 \Rightarrow x = -3$ es raíz.

*Ejemplo* **Calcular las raíces enteras del polinomio** $\mathbf{2x^5 + 7x^4 + 8x^3 + 3x^2 - 8x - 12}$

Dado que el término independiente es 12, las posibles raíces enteras son:

$$\pm 1 \ , \pm 2 \ , \pm 3 \ , \pm 4 \ , \pm 6 \ , \pm 12$$

Para $x = 1 \rightarrow 2 \cdot 1^5 + 7 \cdot 1^4 + 8 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 - 12 = 0 \Rightarrow x = 1$ es raíz.

Para $x = -2 \rightarrow 2(-2)^5 + 7(-2)^4 + 8(-2)^3 + 3(-2)^2 - 8(-2) - 12 = 0 \Rightarrow x = -2$ es raíz.

## Descomposición factorial

*Dado un polinomio de grado n:* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + .......... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ *que tiene n raíces reales distintas* $r_1, r_2, ............., r_n$, *se puede demostrar que:*

- *El polinomio se puede descomponer en forma única en el producto de su coeficiente principal* $a_n$ *por* $n$ *factores que resultan de restar a x cada una de las n raíces.*

$$p(x) = a_n (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)...........(x - r_n)$$

- *El producto* $a_n r_1 r_2 r_3 ..........r_n$ *es igual al término independiente del polinomio.*

- *Las raíces enteras son divisores del término independiente* $(a_0 \text{ entero})$.

- *Si un número a es una raíz entera del polinomio* $P(x) = a_n x^n + ...... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, *entonces a es un divisor del término independiente.*

*Ejemplo* **Factorizar el polinomio** $\mathbf{q(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6}$

Las posibles raíces enteras son: $\pm 1 \ , \pm 2 \ , \pm 3$ y $\pm 6$. Tanteamos para ver cuál de ellas es:

Para $x = 1 \rightarrow q(1) = 1^4 + 1^3 - 5 \cdot 1^2 + 1 - 6 = -8 \neq 0$
Para $x = -1 \rightarrow q(-1) = (-1)^4 + (-1)^3 - 5(-1)^2 + (-1) - 6 = -12 \neq 0$
Para $x = 2 \rightarrow q(2) = 2^4 + 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 2 - 6 = 0$

Como 2 es una raíz, el polinomio es divisible por $x - 2$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 1 & -5 & 1 & -6 \\ 2 & & 2 & 6 & 2 & 6 \\ \hline & 1 & 3 & 1 & 3 & \boxed{0} \end{array} \qquad x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6 = (x - 2)(x^3 + 3x^2 + x + 3)$$

Como $x - 2$ ya es un factor de 1[er] grado, tratamos de descomponer en factores el polinomio cociente $x^3 + 3x^2 + x + 3$, para lo cual hemos de encontrar una raíz del mismo.

Los divisores del 3 son $\pm 1$ y $\pm 3$. Los números $1$ y $-1$ no pueden serlo porque tampoco lo eran de $q(x)$.

Para $x = 3$ $\rightarrow$ $3^3 + 3 \cdot 3^2 + 3 + 3 = 60 \neq 0$
Para $x = -3$ $\rightarrow$ $(-3)^3 + 3(-3)^2 - 3 + 3 = 0$ $\Rightarrow$ $-3$ es una raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & 1 & 3 \\ -3 & & -3 & 0 & -3 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} \end{array} \qquad x^3 + 3x^2 + x + 3 = (x+3)(x^2+1)$$

De manera que el polinomio primitivo queda factorizado así:

$$x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)(x^2+1)$$

Podemos intentar repetir el proceso con $x^2 + 1$, pero es inútil. La ecuación $x^2 + 1 = 0$ carece de raíces, porque ningún número al cuadrado más 1 puede dar 0.

Prácticamente se disponen los cálculos así:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & -5 & 1 & -6 \\ 2 & & 2 & 6 & 2 & 6 \\ \hline & 1 & 3 & 1 & 3 & \boxed{0} \\ -3 & & -3 & 0 & -3 & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} & \end{array} \qquad x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)(x^2+1)$$

*Ejercicios* **Descomponer utilizando la regla de Ruffini $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2x - 1$**

Las posibles raíces enteras son: $-1$ y $+1$. Tanteamos para ver cuál de ellas es:

Para $x = 1$ $\rightarrow$ $P(1) = 2 \cdot 1^3 - 5 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 1 = -2 \neq 0$
Para $x = -1$ $\rightarrow$ $P(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 5 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 1 = -10 \neq 0$

El polinomio $P(x)$ no se puede descomponer.

*Ejercicios* **Descomponer utilizando la regla de Ruffini $R(x) = x^4 - 4x^3 - 5x^2$**

El primer paso en este tipo de expresiones en las que no existe el término independiente es sacar factor común y descomponer la expresión resultante.

$$R(x) = x^2(x^2 - 4x - 5)$$

Descomponemos $x^2 - 4x - 5$. Las posibles raíces enteras son: $\pm 1$ y $\pm 5$. Tanteamos para ver cuál de ellas es:

Para $x=1 \;\rightarrow\; 1^2-4\cdot1-5=-8\neq 0$

Para $x=-1 \;\rightarrow\; (-1)\;-4\cdot(-1)-5=0 \;\Rightarrow\; -1$ es una raíz.

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -4 & -5 \\ -1 & & -1 & 5 \\ \hline & 1 & -5 & 0 \end{array} \qquad\qquad x^2-4x-5=(x+1)(x-5)$$

$$R(x)=x^2(x+1)(x-5)$$

*Ejercicios* **Factorizar el polinomio $Q(x)=x^4-1$.**

En este caso, si nos damos cuenta que la expresión $x^4-1$ se puede descomponer en una suma de dos términos por la diferencia de los mismos términos no tendremos necesidad de aplicar la regla de Ruffini.

$$Q(x)=x^4-1=(x^2+1)(x^2-1)=(x^2+1)(x+1)(x-1)$$

*Ejemplo* **Factorizar los polinomios: a) $x^3+3x^2-4x$ b) $x^4-4x^3-5x^2$**

a) Como x es factor común $\rightarrow\; x^3+3x^2-4x = x\left(x^2+3x-4\right)$

Si ahora factorizamos el polinomio de 2º grado del paréntesis (cuyas raíces son: $1$ y $-4$) tenemos:

$$x^3+3x^2-4x = x\left(x^2+3x-4\right) = x(x-1)(x+4)$$

b) Como $x^2$ es factor común $\rightarrow\; x^4-4x^3-5x^2 = x^2(x^2-4x-5)$

Las raíces del polinomio de 2º grado del paréntesis son: $-1$ y $5$, por lo que:

$$x^4-4x^3-5x^2 = x^2(x+1)(x-5)$$

*Ejemplo* **Factorizar los polinomios:**

**a) $x^2-10x+25$ b) $64x^2+16x+1$ c) $x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}$**

a) $(x-5)^2=(x-5)(x-5)$ b) $\left(8x+1\right)^2=(8x+1)(8x+1)$

c) $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2=\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$

*Ejemplo* **Factorizar los polinomios: a) $25x^2-16$ b) $\frac{9}{25}x^2-4$ c) $x^6-1$**

a) $25x^2-16=\left(5x\right)^2-4^2=(5x+4)(5x-4)$

b) $\frac{9}{25}x^2-4=\left(\frac{3}{5}x\right)^2-2^2=\left(\frac{3}{5}x+2\right)\left(\frac{3}{5}x-2\right)$

c) $x^6-1=\left(x^3\right)^2-1=\left(x^3+1\right)\left(x^3-1\right)=(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$

## *Problemas propuestos con soluciones*

**Factoriza los siguientes polinomios calculando previamente sus raíces:**

**a)** $x^3+2x^2-x-2$ **b)** $x^5+x^4-16x-16$ **c)** $x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$

**d)** $10x^3-23x^2+10x+3$ **e)** $8x^3+6x^2-5x-3$ **f)** $\frac{4}{49}x^2-\frac{1}{81}$ **g)** $x^4-25x^2$

**h)** $6x^4-x^3-17x^2+16x-4$ **i)** $2x^3+3x^2-2x$

Soluciones:

a) $1,-1$ y $-2 \rightarrow x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x+1)(x+2)$

b) $-1,2$ y $-2 \rightarrow x^5+x^4-16x-16=(x+1)(x-2)(x+2)(x^2+4)$

c) $2 \rightarrow x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8=(x-2)^3(x^2+x+1)$

d) $1,\frac{3}{2},-\frac{1}{5} \rightarrow 10x^3-23x^2+10x+3=10(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{5}\right)$

e) $-1,-\frac{1}{2},\frac{3}{4} \rightarrow 8x^3+6x^2-5x-3=8(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)$

f) $-\frac{7}{18},\frac{7}{18} \rightarrow \frac{4}{49}x^2-\frac{1}{81}=\frac{4}{49}\left(x+\frac{7}{18}\right)\left(x-\frac{7}{18}\right)$

g) $-5,5 \rightarrow x^4-25x^2=x^2(x-5)(x+5)$

h) $1,-2,\frac{1}{2},\frac{2}{3} \rightarrow 6x^4-x^3-17x^2+16x-4=6(x-1)(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)$

i) $0,-2,\frac{1}{2} \rightarrow 2x^3+3x^2-2x=2x(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

## Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

Las definiciones de máximo común divisor (m.c.d.) y mínimo común múltiplo (m.c.m.) de polinomios son similares a las dadas para los números, lo mismo que el proceso para calcularlos.

*El m.c.d. de varios polinomios es el polinomio de mayor grado divisor de todos ellos que se obtiene multiplicando los factores comunes elevados al menor exponente.*

*El m.c.m. de varios polinomios es el polinomio de menor grado múltiplo de todos ellos que se obtiene multiplicando los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente.*

***Para el cálculo del m.c.d. y del m.c.m. de dos polinomios $\mathbf{p(x)}$ y $\mathbf{q(x)}$ siempre se verifica que:***

$$p(x)\cdot q(x) = \text{m.c.d.}\left[p(x)\,,\,q(x)\right]\cdot \text{m.c.m.}\left[p(x)\,,\,q(x)\right]$$

*Ejemplo* **Calcular el m.c.d. y el m.c.m. de los números 50** y **360**

$$\begin{array}{r|l} 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad 50 = 2\cdot 5^2 \qquad \begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad 360 = 2^3\cdot 3^2\cdot 5$$

$$\begin{cases} \text{m.c.d.}(50\,,360) = 2\cdot 5 = 10 \\ \text{m.c.m.}(50\,,360) = 2^3\cdot 3^2\cdot 5^2 = 1800 \end{cases}$$

*Ejemplo* **Calcular el m.c.d. y el m.c.m. de los polinomios $\mathbf{x^3 - 3x - 2}$** y **$\mathbf{x^3 - 4x^2 + 4x}$** .

*En los polinomios, la descomposición en productos de factores primos se realiza mediante la regla de Ruffini.*

$$\begin{array}{c|c} x^3-3x-2 & x-2 \\ x^2+2x+1 & x+1 \\ x+1 & x+1 \\ 1 & \end{array} \qquad x^3-3x-2 = (x-2)(x+1)^2$$

$$\begin{array}{c|c} x^3-4x^2+4x & x \\ x^2-4x+4 & x-2 \\ x-2 & x-2 \\ 1 & \end{array} \qquad x^3-4x^2+4x = x\,(x-2)^2$$

$$\begin{cases} \text{m.c.d.}(x^3-3x-2\,,x^3-4x^2+4x) = x-2 \\ \text{m.c.m.}(x^3-3x-2\,,x^3-4x^2+4x) = x\,(x+1)^2(x-2)^2 \end{cases}$$

*Ejemplo* **Calcular el m.c.d. y el m.c.m. de los polinomios $x^4-9x^2$ y $x^3+x^2-12x$**

$$x^4-9x^2=x^2(x^2-9)=x^2(x+3)(x-3)$$

$$x^3+x^2-12x=x(x^2+x-12)=x(x-3)(x+4)$$

$$\begin{cases} \text{m.c.d.}= x(x-3)=x^2-3x \\ \text{m.c.m.}= x^2(x+3)(x+4)(x-3)=x^5+4x^4-9x^3-36x^2 \end{cases}$$

## *Problemas propuestos con soluciones*

**1. Opera y simplifica en las expresiones siguientes:**

**a)** $2-(b^2-c^2)+b^2-(a^2+c^2)-c^2-(a^2-b^2)$

**b)** $(a+b)x+(b+c)y-\left[(a-b)x-(b-c)y\right]$

**c)** $7ab^2c^3\,2a^2bc\,5a^4b^5c^2$ **d)** $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)$ **e)** $\left(-7x^2+2x+\frac{3}{2}\right)^2$

Sol: a) $2-2a^2+b^2-c^2$ b) $2bx+2by$ c) $70a^7b^8c^6$

d) $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7$ e) $\frac{9}{4}+6x-17x^2-28x^3+49x^4$

**2. En las siguientes relaciones hay errores muy graves en la utilización de los signos, ¿cuáles son?**

**a)** $-(x^2+x-2)=-x^2+x-2$ **b)** $-\frac{3x^2-9x}{3x}=-x-3$ **c)** $(-x-1)^2=-x^2-2x-1$

**3. En las siguientes relaciones hay errores muy graves en la utilización de la propiedad distributiva, ¿cuáles son?**

**a)** $x(x+y)=x^2+y$ **b)** $(3a+2)(1-b)=3a-2b$ **c)** $(a+b)\cdot(a+b)=a^2+b^2$

**4. Completa las siguientes expresiones para que sean cuadrados perfectos y escribe a continuación su relación:**

**a)** $9x^2+24x+$………. **b)** $x^2-6x$………. **c)** $9x^2+$……….$+16$

**5. Sacar factor común en las siguientes expresiones algebraicas:**

**a)** $5x-25x^2y$ **b)** $a^2+ab+ac+bc$ **c)** $ax-ay-bx+by$ **d)** $a^2c^2+acd+abc+bd$

Sol: a) $5x(1-5xy)$ b) $(a+b)(a+c)$ c) $(x-y)(a-b)$ d) $(b+ac)(d+ac)$

**6. Factoriza las siguientes expresiones algebraicas con los términos que se pueda:**

**a)** $a^2+2ab+b^2-c^2$ **b)** $a^2-b^2-2bc-c^2$

Sol: a) $(a+b+c)(a+b-c)$ b) $(a+b+c)(a-b-c)$

**7. Escribe un polinomio cuyas raíces sean $-1, 2$ y $3$.**

**8. ¿Cuáles de los siguientes polinomios son irreducibles?**

**a)** $x^2-9$ **b)** $x^2-5$ **c)** $x^2+6$ **d)** $x^2+4x+4$ **e)** $2x^2-4x+3$

**9.**

a) ¿Existe algún polinomio c(x) tal que su producto por $q(x)=x+3$ sea el polinomio $p(x)=x^2-x-12$

b) Encuentra el polinomio p(x) que, al ser dividido por $q(x)=x+3$, da lugar al cociente $c(x)=x^2-3x+8$ y al resto $r(x)=-14$.

Sol: a) $c(x)=x-4$ b) $x^3-x+10$

**10.** De los números $0, 1, \sqrt{2}, 2, -1$ y $-3$ di cuáles son raíces y cuáles no, de cada uno de los polinomios:

a) $p(x)=x^4+4x^3+3x^2$ b) $q(x)=2x^2+10x-28$ c) $t(x)=x$

d) $r(x)=x^2+\left(1-\sqrt{2}\right)x-\sqrt{2}$ e) $s(x)=x^3+\left(1-\sqrt{2}\right)x^2+\sqrt{2}\,x$

Sol: a) Son raíces $0, -1$ y $-3$ b) Sólo hay una raíz, el 2 c) Sólo hay el 0

d) Son raíces $-1$ y $\sqrt{2}$ e) Sólo el cero

**11.** Efectúa las divisiones entre los siguientes polinomios:

a) $p(x)=6x^4+5x^3-7x^2+3x+2$ y $q(x)=2x^2+3x-1$

b) $p(x)=x^3-3x^2-x-1$ y $q(x)=3x^2-2x+1$

Sol: a) $c(x)=3x^2-2x+1$ y $r(x)=-2x+3$

b) $c(x)=\frac{1}{3}x-\frac{7}{9}$ y $r(x)=-\frac{26}{9}x-\frac{2}{9}$

**12.** Utiliza la regla de Ruffini para dividir los siguientes polinomios D y d:

a) $D=x^4-23x^2-30$ y $d=x-5$ b) $D=x^4-2x^3+4x^2-6x+8$ y $d=x-1$

c) $D=8x^2-10x+18$ y $d=2x-4$ d) $D=x^3+2x^2-5x+1$ y $d=2x+3$

Sol: a) $c(x)=x^3+5x^2+2x+10$ y $r(x)=20$

b) $c(x)=x^3-x^2+3x-3$ y $r(x)=5$

c) $c(x)=4x+3$ y $r(x)=30$ d) $c(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{x}{4}-\frac{23}{8}$ y $r(x)=\frac{77}{8}$

**13.** Factoriza los siguientes polinomios calculando previamente sus raíces:

a) $x^3+2x^2-x-2$ b) $x^5+x^4-16x-16$ c) $x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$

d) $10x^3-23x^2+10x+3$ e) $8x^3+6x^2-5x-3$ f) $\frac{4}{49}x^2-\frac{1}{81}$ g) $x^4-25x^2$

h) $6x^4-x^3-17x^2+16x-4$ i) $2x^3+3x^2-2x$

Sol: a) $1, -1$ y $-2$ $\rightarrow$ $x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x+1)(x+2)$

b) $-1, 2$ y $-2$ $\rightarrow$ $x^5+x^4-16x-16=(x+1)(x-2)(x+2)(x^2+4)$

c) 2 $\rightarrow$ $x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8=(x-2)^3(x^2+x+1)$

d) $1, \frac{3}{2}$ y $-\frac{1}{5}$ $\rightarrow$ $10x^3-23x^2+10x+3=10(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{5}\right)$

e) $-1, -\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ $\rightarrow$ $8x^3+6x^2-5x-3=8(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)$

f) $\frac{7}{18}$ y $-\frac{7}{18}$ $\rightarrow$ $\frac{4}{49}x^2-\frac{1}{81}=\left(\frac{2}{7}x\right)^2-\left(\frac{1}{9}\right)^2=\left(\frac{2}{7}x+\frac{1}{9}\right)\left(\frac{2}{7}x-\frac{1}{9}\right)=$

$$\frac{2}{7}\left(x+\frac{\frac{1}{9}}{\frac{2}{7}}\right)\frac{2}{7}\left(x-\frac{\frac{1}{9}}{\frac{2}{7}}\right)=\frac{4}{28}\left(x+\frac{7}{18}\right)\left(x-\frac{7}{18}\right)$$

g) $0{,}5$ y $-5 \;\rightarrow\; x^4-25x^2 = x^2(x-5)(x+5)$

h) $1,-2,\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3} \;\rightarrow\; (x-1)(x+2)(2x-1)(3x-2) =$

$$(x-1)(x+2)2\left(x-\frac{1}{2}\right)3\left(x-\frac{2}{3}\right)=6(x-1)(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)$$

i) $0,-2$ y $\frac{1}{2} \;\rightarrow\; 2x^3+3x^2-2x = x(x+2)(2x-1) = 2x(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

**14. Halla el m.c.d. y el m.c.m. de los polinomios:**

**a)** $P=x^3+5x^2-x-5$ **y** $Q=x^3-2x^2-x+2$

**b)** $P=x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1$ **y** $Q=x^4-9x^3-11x^2+9x+10$

**c)** $P=8x^6y^4z^5$ ; $Q=4x^2yz^6$ ; $R=2x^3y^6$ **d)** $P=x^4-8x^2-65$ **y** $Q=x^2+5$

**e)** $P=x^4-7x^3+12x^2$ **y** $Q=x^5-3x^4-4x^3$ **f)** $P=x^{35}+1$ **y** $x^{15}+1$

**g)** $P=(x+2)^2(x-1)^3(x+4)$ **y** $Q=(x+2)(x-1)^2(x+4)^4(x-5)$

Sol: a) $\text{m.c.d.}(P,Q)=(x-1)(x+1)$ $\quad \text{m.c.m.}(P,Q)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+5)$

b) $\text{m.c.d.}(P,Q)=(x+1)^2(x-1)$ $\quad \text{m.c.m.}(P,Q)=(x+1)^3(x-1)^2(x-10)$

c) $\text{m.c.d.}(P,Q)=2x^2y$ $\quad \text{m.c.m.}(P,Q)=8x^6y^6z^6$

d) $\text{m.c.d.}(P,Q)=x^2+5$ $\quad \text{m.c.m.}(P,Q)=(x^2+5)(x^2-13)$

e) $\text{m.c.d.}(P,Q)=x^2(x-4)$ $\quad \text{m.c.m.}(P,Q)=x^3(x-4)(x-3)(x+1)$

f) $\text{m.c.d.}(P,Q)=x^5+1$ $\quad \text{m.c.m.}(P,Q)=x^{45}-x^{40}+x^{35}+x^{10}-x^5+1$

g) $\text{m.c.d.}(P,Q)=(x+4)(x+2)(x-1)^2$

$\text{m.c.m.}(P,Q)=(x+4)^2(x+2)(x-1)^3(x-5)$

**15.**

**a) Halla el valor numérico del polinomio** $P(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{3}x^2+\frac{7}{3}x+1$ **para** $x=\frac{1}{3}$

**b) Calcula el valor de m sabiendo que el polinomio** $5x^4+mx^3+2x-3$ **es divisible por** $x-3$**.**

Sol: a) $\frac{143}{81}$ $\quad$ b) $m=-15'\widehat{1}$

**16. Prueba que las siguientes divisiones son exactas sin hacer la división:**

**a)** $(x^2-9x+18):(x-3)$ **b)** $(x^4-625):(x-5)$ **c)** $(x^3+343):(x+7)$

**17. Prueba sin hacer las divisiones que:**

**a) El polinomio** $x^2-5x+6$ **es múltiplo de** $x-2$

**b) El binomio** $x-1$ **es divisor del polinomio** $x^2-6x+5$

**c) El polinomio** $P(x)=x^3+x+2$ **es múltiplo de** $x+1$**, pero no de** $x-1$

**18. Halla el valor de k y m para que:**

**a) El polinomio** $x^4-5x^3+6x^2+2x+k$ **sea divisible por** $x-3$

**b) El polinomio** $x^3+mx^2+kx+4$ **sea divisible por** $x+2$ **y** $x-2$

Sol: a) $k=-6$ b) $k=-4$ y $m=-1$

**19. Calcula m, n y p en el polinomio $mx^2+nx+p$ sabiendo que**

$$(x-2)(mx^2+nx+p) = 2x^3-9x^2+14x-8$$

Sol: $m=2, n=-5$ y $p=4$

**20. Siendo $(x+1)(x+2)(x+3)=x^3+6x^2+11x+6$, ¿puedes decir sin hacer cálculos para qué valores de x el valor numérico de dicho polinomio es 0? Razona la respuesta.**

Sol: $x=-1, x=-2$ y $x=-3$

**21.**

**a) Halla un polinomio de primer grado que dividido por $x-1$ y $x+3$ da de resto 6 y 2 respectivamente.**

**b) Halla el valor de m para que el polinomio $5x^4-7x^3+2x^2+4x+m$ tenga resto 130 al dividirlo por $x+2$.**

**c) Un polinomio de segundo grado tiene por primer coeficiente 1, se anula para $x=3$ y toma el valor 4 para $x=5$. Hállalo.**

**d) ¿Qué número m se ha de añadir al polinomio $x^3+2x^2$ para que sea divisible por $x+4$?**

**e) Determina un polinomio $ax^2+bx+4$ sabiendo que es divisible por $x+2$ y que los restos obtenidos al dividirlo por $x+1$ y $x+3$ son iguales.**

**f) Determina los coeficientes a y b para que el polinomio $x^3+ax^2+bx+5$ sea divisible por $x^2+x+1$.**

**g) Sea el binomio $P(x)=ax+b$. Los valores numéricos de $P(x)$ para $x=1$ y $x=2$ son, respectivamente, 5 y 7. Hallar a y b.**

Sol: a) $x+5$ b) $m=-6$ c) $x^2-6x+9$ d) 32 e) $a=1$ y $b=4$

f) $a=6$ y $b=6$ g) $a=2$ y $b=3$

**22.**

**a) Escribe un polinomio de grado 3 que tenga por raíces $2, -2$ y $\frac{1}{2}$ y cuyo coeficiente de $x^3$ sea 5.**

**b) Escribe un polinomio $p(x)$ tal que: $p(0)=p(5)=0$, $p(-2)=6$ y grado 2.**

Sol: a) $5(x-2)(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)$ b) $\frac{3}{7}x^2-\frac{15}{7}x$

**23. Determina el polinomio de segundo grado que satisface las condiciones siguientes:**

**a) Su coeficiente principal es 1**

**b) El término independiente es 5**

**c) Al dividirlo por los binomios $x-1$ y $x-2$ se obtiene el mismo resto.**

Sol: $x^2-3x+5$

## Fracciones algebraicas

***La expresión formada por la división de dos polinomios recibe el nombre de fracción algebraica, siendo el denominador un polinomio no nulo. Simbolizaremos las fracciones algebraicas en la forma*** $\mathbf{\dfrac{P(x)}{Q(x)}}$. Dado que un polinomio $P(x)$ puede escribirse en la forma $\dfrac{P(x)}{1}$, los polinomios también se consideran fracciones algebraicas.

*Ejemplo* Son fracciones algebraicas las siguientes expresiones algebraicas:

$$\frac{3x^2 - x + 1}{4x - 5} \quad ; \quad \frac{x + 2}{x^2 - 3} \quad ; \quad \frac{x^2 - 2x + 4}{5} \quad ; \quad \frac{3x - 4y}{x^2 + 1} \quad ; \quad \frac{t}{4x^2 + t^3} \quad ; \quad \frac{x^2 + x + y}{x^2 - y^2}$$

Las fracciones numéricas son un caso particular de las fracciones algebraicas.

## Fracciones equivalentes

***Se dice que dos fracciones algebraicas*** $\mathbf{\dfrac{A}{B}}$ **y** $\mathbf{\dfrac{C}{D}}$ ***son equivalentes, y se escribe*** $\mathbf{\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D}}$***, si los polinomios*** $\mathbf{AD}$ **y** $\mathbf{BC}$ ***son iguales.***

*Ejemplo* Las fracciones $\dfrac{x - 1}{x}$ y $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x}$ son equivalentes porque, como en el caso de las fracciones numéricas, los productos cruzados son iguales:

$$(x - 1)(x^2 + x) = x(x^2 - 1)$$

*Ejemplo* Las fracciones $\dfrac{x}{x^2 - x}$ y $\dfrac{2}{2x - 2}$ son equivalentes ya que $x(2x - 2) = 2(x^2 - x)$

## Propiedad fundamental

***Si se multiplican o dividen el numerador y el denominador de una fracción algebraica por un denominador distinto de 0, la fracción resultante es equivalente a la dada.***

En efecto, las fracciones $\dfrac{A}{B}$ y $\dfrac{AP}{BP}$ son equivalentes, ya que $A(BP) = B(AP)$ por las propiedades conmutativa y asociativa del producto de polinomios.

*Ejemplo* Las fracciones $\dfrac{2x}{x + 1}$ y $\dfrac{2x(x - 1)}{x^2 - 1}$ son equivalentes, pues la segunda se obtiene multiplicando el numerador y denominador de la primera por el polinomio $x - 1$

## Simplificación de fracciones

***Simplificar una fracción es dividir el numerador y denominador por un mismo factor no nulo. Una fracción es irreducible cuando no puede simplificarse más. En este caso se dice que el numerador y denominador son primos entre sí.***

*Para simplificar una fracción, se descomponen en factores el numerador y el denominador y luego se suprimen los factores comunes.*

*Ejemplo* **Simplificar las fracciones:**

**a)** $\frac{x^2-9}{(x+3)^2}$ **b)** $\frac{x+2}{x^2-4}$ **c)** $\frac{x-2}{x^2+x-6}$ **d)** $\frac{x^2+25-10x}{x^2-25}$

a) $\frac{x^2-9}{(x+3)^2}=\frac{(x+3)(x-3)}{(x+3)(x+3)}=\frac{x-3}{x+3}$ b) $\frac{x+2}{x^2-4}=\frac{x+2}{(x+2)(x-2)}=\frac{1}{x-2}$

c) $\frac{x-2}{x^2+x-6}=\frac{x-2}{(x-2)(x+3)}=\frac{1}{x+3}$ d) $\frac{x^2-10x+25}{x^2-25}=\frac{(x-5)^2}{(x+5)(x-5)}=\frac{x-5}{x+5}$

*Ejemplo* **Simplificar las fracciones:**

**a)** $\frac{x^2-x}{x^2-2x+1}$ **b)** $\frac{x}{x^2+x}$ **c)** $\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^3-2x^2-4x+8}$ **d)** $\frac{x^2+2ax+a^2}{mx+ma}$

a) $\frac{x^2-x}{x^2-2x+1}=\frac{x(x-1)}{(x-1)(x-1)}=\frac{x}{x-1}$ b) $\frac{x}{x^2+x}=\frac{x}{x(x+1)}=\frac{1}{x+1}$

c) $\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^3-2x^2-4x+8}=\frac{(x-1)(x+1)(x+2)}{(x-2)^2(x+2)}=\frac{x^2-1}{(x-2)^2}$

d) $\frac{x^2+2ax+a^2}{mx+ma}=\frac{(x+a)(x+a)}{m(x+a)}=\frac{x+a}{m}$

*Ejemplo* **Simplificar las fracciones:**

**a)** $\frac{5xy-2y^2}{4xy^2+5y}$ **b)** $\frac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}$ **c)** $\frac{a^2+2ab+b^2-c^2}{a^2-b^2-2bc-c^2}$ **d)** $\frac{x^4-3x^3}{x^2-x-2}$

a) $\frac{5xy-2y^2}{4xy^2+5y}=\frac{y(5x-2y)}{y(4xy+5)}=\frac{5x-2y}{4xy+5}$

b) $\frac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}=\frac{(x+y)(x-y)}{(x+y)^2}=\frac{x-y}{x+y}$

c) $\frac{a^2+2ab+b^2-c^2}{a^2-b^2-2bc-c^2}=\frac{(a+b)^2-c^2}{a^2-(b+c)^2}=\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b+c)(a-b-c)}=\frac{a+b-c}{a-b-c}$

$$\text{d) } \frac{x^4-3x^3}{x^2-x-2} = \frac{x^3(x-3)}{(x-2)(x+1)} \quad \rightarrow \quad \text{Es irreducible}$$

## Reducción de fracciones a común denominador

***Reducir dos o más fracciones algebraicas a común denominador es hallar otras fracciones, equivalentes a las primeras, que tengan todas ellas el mismo denominador.***

*Para reducir varias fracciones a común denominador, se suele tomar como denominador común el mínimo común múltiplo de los denominadores. Después, se multiplica el numerador de cada fracción por el cociente de dividir el m.c.m. por el denominador de cada fracción.*

*Ejemplo* **Reducir a común denominador las fracciones:** $\mathbf{\frac{x}{x-1}\ ;\ \frac{x+1}{x^2-x}\ ;\ \frac{x-1}{x}}$

Factorizamos los denominadores para hallar el m.c.m.

$$\left.\begin{array}{r} x-1 = x-1 \\ x^2-x = x(x-1) \\ x = x \end{array}\right\} \quad \text{m.c.m.}(x-1, x^2-x, x) = x(x-1)$$

$$\frac{x}{x-1} = \frac{x\cdot x}{x(x-1)} = \frac{x^2}{x(x-1)} \qquad \frac{x+1}{x(x-1)} \qquad \frac{x-1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x(x-1)}$$

*Ejemplo* **Reducir a común denominador las fracciones:** $\mathbf{\frac{x-1}{x^2-4}\ ;\ \frac{x^2+x-5}{x^2+x-2}}$

Factorizamos los denominadores para hallar el m.c.m.

$$\left.\begin{array}{r} x^2-4 = (x+2)(x-2) \\ x^2+x-2 = (x-1)(x+2) \end{array}\right\} \quad \text{m.c.m.}(x^2-4, x^2+x-2) = (x-1)(x-2)(x+2)$$

$$\frac{x-1}{x^2-4} = \frac{x-1}{(x+2)(x-2)} = \frac{(x-1)(x-1)}{(x-1)(x+2)(x-2)} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+2)(x-2)}$$

$$\frac{x^2+x-5}{x^2+x-2} = \frac{x^2+x-5}{(x-1)(x+2)} = \frac{(x-2)(x^2+x-5)}{(x-1)(x-2)(x+2)}$$

## Suma y resta de fracciones algebraicas

***La suma o diferencia de dos fracciones que tienen igual denominador es otra fracción que tiene por numerador la suma o diferencia de los numeradores y por denominador el denominador común.***

$$\mathbf{\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C} \qquad \frac{A}{C}-\frac{B}{C}=\frac{A-B}{C}}$$

*Si las fracciones no tienen el mismo denominador, para poder sumarlas o restarlas hay que reducirlas previamente a común denominador, y luego se procede como antes.*

La suma o diferencia no depende de las fracciones particulares elegidas para la adición o sustracción; por eso, si es posible conviene ***simplificarlas*** antes de operar.

*Ejemplo* **Calcular la suma de las siguientes fracciones algebraicas** $\mathbf{\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}$

El $\text{m.c.m.}(x, x^2) = x^2$, por tanto multiplicamos el numerador y denominador de cada una de las fracciones por un factor tal que los denominadores coincidan con el m.c.m.

$$\frac{2x}{x\cdot x}+\frac{3}{x^2}=\frac{2x}{x^2}+\frac{3}{x^2}=\frac{2x+3}{x^2}$$

*Ejemplo* **Calcular la suma de las siguientes fracciones algebraicas** $\mathbf{\frac{x}{2}+\frac{3}{x}-1}$

El $\text{m.c.m.}(2, x) = 2x$, por tanto multiplicamos el numerador y denominador de cada una de las fracciones por un factor tal que los denominadores coincidan con el m.c.m.

$$\frac{x\cdot x}{2x}+\frac{3\cdot 2}{2x}-\frac{2x}{2x}=\frac{x^2+6-2x}{2x}$$

*Ejemplo* **Calcular la suma de las siguientes fracciones algebraicas** $\mathbf{\frac{x-3}{x+1}-\frac{x}{x+3}}$

El $\text{m.c.m.}(x+1, x+3) = (x+1)(x+3)$.

$$\frac{x-3}{x+1}-\frac{x}{x+3}=\frac{(x-3)(x+3)}{(x+1)(x+3)}-\frac{x(x+1)}{(x+3)(x+1)}=\frac{(x-3)(x+3)-x(x+1)}{(x+3)(x+1)}=$$

$$\frac{x^2-9-x^2-x}{(x+3)(x+1)}=\frac{-9-x}{(x+3)(x+1)}$$

*Ejemplo* **Calcular la suma de las siguientes fracciones algebraicas** $\mathbf{\frac{x}{x+2}+\frac{4x}{x-6}}$

El $\text{m.c.m.}(x+2, x-6) = (x+2)(x-6)$.

$$\frac{x(x-6)}{(x+2)(x-6)}+\frac{4x(x+2)}{(x-6)(x+2)}=\frac{x(x-6)+4x(x+2)}{(x-6)(x+2)}=\frac{x^2-6x+4x^2+8x}{(x-6)(x+2)}=\frac{5x^2+2x}{(x-6)(x+2)}$$

*Ejemplo* **Calcular la suma de las siguientes fracciones algebraicas** $\mathbf{\frac{x-1}{x^2+5x+6}-\frac{5}{x+3}}$

Primero se descomponen en factores los denominadores.

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$$

El m.c.m.$(x^2+5x+6\,,x+3)=$ m.c.m.$\big((x+2)(x+3)\,,(x+3)\big)=(x+2)(x+3)$

$$\frac{x-1}{(x+2)(x+3)}-\frac{5}{x+3}=\frac{x-1}{(x+2)(x+3)}-\frac{5(x+2)}{(x+3)(x+2)}=\frac{x-1-5(x+2)}{(x+3)(x+2)}=$$

$$\frac{x-1-5x-10}{(x+3)(x+2)}=\frac{-4x-11}{(x+3)(x+2)}$$

*Ejemplo* **Calcular la suma de las siguientes fracciones algebraicas:**

**a)** $\mathbf{\frac{x+2y}{x^2-y^2}+\frac{2x-5y}{x^2-y^2}}$ **b)** $\mathbf{\frac{x+7}{x}+\frac{x-2}{x^2+x}-\frac{2x-1}{x+1}}$ **c)** $\mathbf{\frac{a^2-4}{a+2}-\frac{5}{a-2}}$

a) $\frac{x+2y}{x^2-y^2}+\frac{2x-5y}{x^2-y^2}=\frac{x+2y+2x-5y}{x^2-y^2}=\frac{3x-3y}{x^2-y^2}=\frac{3(x-y)}{(x+y)(x-y)}=\frac{3}{x+y}$

b) El m.c.m.$(x\,,x^2+x\,,x+1)=$ m.c.m.$\big(x\,,x(x+1)\,,(x+1)\big)=x(x+1)$

$$\frac{x+7}{x}+\frac{x-2}{x^2+x}-\frac{2x-1}{x+1}=\frac{x+7}{x}+\frac{x-2}{x(x+1)}-\frac{2x-1}{x+1}=$$

$$\frac{(x+7)(x+1)}{x(x+1)}+\frac{x-2}{x(x+1)}-\frac{(2x-1)x}{(x+1)x}=$$

$$\frac{x^2+x+7x+7+x-2-(2x^2-x)}{x(x+1)}=\frac{x^2+9x+5-2x^2+x}{x(x+1)}=\frac{-x^2+10x+5}{x^2+x}$$

c) Antes de calcular el m.c.m. observamos que la primera fracción se puede simplificar.

$$\frac{a^2-4}{a+2}=\frac{(a+2)(a-2)}{a+2}=a-2$$

El m.c.m.$(a+2\,,a-2)=(a+2)(a-2)$

$$a-2-\frac{5}{a-2}=\frac{(a-2)(a-2)}{a-2}-\frac{5}{a-2}=\frac{a^2-4a+4}{a-2}-\frac{5}{a-2}=\frac{a^2-4a+4-5}{a-2}=\frac{a^2-4a-1}{a-2}$$

*Ejemplo* **Realizar las siguientes operaciones y simplificar el resultado:**

**a)** $\mathbf{\frac{1}{x-\frac{1}{x}}+\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}$ **b)** $\mathbf{\frac{1+x}{1-x}+\frac{1-x}{1+x}-\frac{x^2}{1-x^2}+1}$ **c)** $\mathbf{\frac{x+2y}{x^2-4y^2}+\frac{3x+y}{x-2y}+\frac{y-x}{x+2y}}$

a) $\frac{1}{x-\frac{1}{x}}+\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{\frac{x^2-1}{x}}+\frac{1}{\frac{x-1}{x}}=\frac{x}{x^2-1}+\frac{x}{x-1}=\frac{x+x(x+1)}{x^2-1}=\frac{x^2+2x}{x^2-1}$

b) $\frac{1+x}{1-x}+\frac{1-x}{1+x}-\frac{x^2}{1-x^2}+1=\frac{(1+x)^2}{1-x^2}+\frac{(1-x)^2}{1-x^2}-\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{1-x^2}{1-x^2}=$

$$\frac{1+2x+x^2+1-2x+x^2-x^2+1-x^2}{1-x^2}=\frac{3}{1-x^2}$$

c) $\frac{x+2y}{x^2-4y^2}+\frac{3x+y}{x-2y}+\frac{y-x}{x+2y}=\frac{x+2y}{x^2-4y^2}+\frac{(3x+y)(x+2y)}{x^2-4y^2}+\frac{(y-x)(x-2y)}{x^2-4y^2}=$

$$\frac{x+2y+3x^2+6xy+xy+2y^2+yx-2y^2-x^2+2xy}{x^2-4y^2}=\frac{2x^2+10xy+x+2y}{x^2-4y^2}$$

## Producto y cociente de fracciones algebraicas

***El producto de dos fracciones es otra fracción que tiene por numerador el producto de los numeradores y por denominador el producto de los denominadores.***

***El cociente de dos fracciones es otra fracción que se obtiene multiplicando la primera por la inversa de la segunda***

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD} \qquad\qquad \frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}$$

*En ocasiones, puede ser útil descomponer ambos términos de las fracciones, con objeto de facilitar la simplificación.*

*Ejemplo* **Calcular los productos y cocientes que se indican:**

**a)** $\frac{x}{3}\cdot\frac{2x+1}{x-1}$ **b)** $\frac{2}{x-1}\cdot\frac{x}{x+1}$ **c)** $\frac{1}{x-1}:\frac{x+1}{3x}$ **d)** $\frac{2x}{2x-3}:\frac{x+1}{2x+3}$

a) $\frac{x(2x+1)}{3(x-1)}=\frac{2x^2+x}{3x-3}$ b) $\frac{2x}{(x-1)(x+1)}=\frac{2x}{x^2-1}$ c) $\frac{1\cdot 3x}{(x-1)(x+1)}=\frac{3x}{x^2-1}$

d) $\frac{2x(2x+3)}{(x+1)(2x-3)}=\frac{4x^2+6x}{2x^2-x-3}$

*Ejemplo* **Calcular los productos y cocientes que se indican:**

**a)** $\frac{a}{5}\cdot\frac{2a}{7}\cdot\frac{5a}{2}\cdot\frac{7}{a^2}$ **b)** $6x^2y\cdot\frac{2}{x^2y}\cdot\frac{x}{3}$ **c)** $\frac{2x}{3y}:\frac{x}{9y^2}$ **d)** $\frac{x+y}{x-y}:(x+y)$

a) $\frac{a\cdot 2a\cdot 5a\cdot 7}{70a^2}=a$ b) $\frac{6x^2y\cdot 2\cdot x}{x^2y\cdot 3}=4x$ c) $\frac{2x\cdot 9y^2}{3y\cdot x}=6y$ d) $\frac{x+y}{(x+y)(x-y)}=\frac{1}{x-y}$

*Ejemplo* **Calcular los productos que se indican:**

$$\mathbf{a)}\ \frac{x}{x-1}\cdot\frac{1}{x+2} \qquad \mathbf{b)}\ \frac{2x+2}{x^2-1}\cdot\frac{1}{x+1} \qquad \mathbf{c)}\ \frac{x^3-3x^2+2x}{x^4-x}\cdot\frac{3x^3-6x^2}{x^3-4x^2+4x}$$

$$\text{a)}\ \frac{x}{x^2+x-2} \qquad \text{b)}\ \frac{2(x+1)}{(x^2-1)(x+1)}=\frac{2}{x^2-1}$$

$$\text{c)}\ \frac{x(x-1)(x-2)}{x(x-1)(x^2+x+1)}\cdot\frac{3x^2(x-2)}{x(x-2)^2}=\frac{x-2}{x^2+x+1}\cdot\frac{3x}{(x-2)}=\frac{3x}{x^2+x+1}$$

*Ejemplo* **Calcular los productos y cocientes que se indican:**

$$\mathbf{a)}\ \frac{x+2}{x^2-1}\cdot\frac{x^2+3}{3x+1} \qquad \mathbf{b)}\ \frac{x+3}{x}\cdot\frac{x^2}{x^2-9} \qquad \mathbf{c)}\ \frac{x}{3x+3}\cdot\frac{x^2-1}{x^3+2x^2} \qquad \mathbf{d)}\ \frac{4}{x^2-1}:\frac{2}{x-1}$$

$$\mathbf{e)}\ \frac{x+5}{x^2}:\frac{x^2-25}{x} \qquad \mathbf{f)}\ \left(2x-\frac{2}{x^2}\right):\frac{2}{x^2} \qquad \mathbf{g)}\ \frac{2x}{x+1}:\frac{3x^3}{x^5+2}$$

$$\text{a)}\ \frac{x+2}{x^2-1}\cdot\frac{x^2+3}{3x+1}=\frac{x^3+2x^2+3x+6}{3x^3+x^2-3x-1}$$

$$\text{b)}\ \frac{x+3}{x}\cdot\frac{x^2}{x^2-9}=\frac{x+3}{x}\cdot\frac{x^2}{(x+3)(x-3)}=\frac{x}{x-3}$$

$$\text{c)}\ \frac{x}{3x+3}\cdot\frac{x^2-1}{x^3+2x^2}=\frac{x}{3(x+1)}\cdot\frac{(x+1)(x-1)}{x^2(x+2)}=\frac{x-1}{3x(x+2)}=\frac{x-1}{3x^2+6x}$$

$$\text{d)}\ \frac{4}{x^2-1}:\frac{2}{x-1}=\frac{4(x-1)}{2(x^2-1)}=\frac{4(x-1)}{2(x+1)(x-1)}=\frac{2}{x+1}$$

$$\text{e)}\ \frac{x+5}{x^2}:\frac{x^2-25}{x}=\frac{x+5}{x^2}\cdot\frac{x}{x^2-25}=\frac{x+5}{x^2}\cdot\frac{x}{(x+5)(x-5)}=\frac{1}{x(x-5)}=\frac{1}{x^2-5x}$$

$$\text{f)}\ \left(2x-\frac{2}{x^2}\right):\frac{2}{x^2}=\frac{2x^3-2}{x^2}\cdot\frac{x^2}{2}=\frac{2\cdot(x^3-1)}{x^2}\cdot\frac{x^2}{2}=x^3-1$$

$$\text{g)}\ \frac{2x}{x+1}:\frac{3x^3}{x^5+2}=\frac{2x}{x+1}\cdot\frac{x^5+2}{3x^3}=\frac{2x^5+4}{3x^3+3x^2}$$

*Ejemplo* **Calcular los productos y cocientes que se indican:**

$$\mathbf{a)}\ (5x-1):\frac{x+2}{x-3} \qquad \mathbf{b)}\ \left(\frac{2xy}{3ab}-\frac{3ab}{2xy}\right):\left(\frac{1}{3ab}-\frac{1}{2xy}\right)$$

$$\mathbf{c)}\ \frac{3x}{y}\cdot\left(\frac{x+2}{y+1}-\frac{y-1}{2x}\right) \qquad \mathbf{d)}\ \left(\frac{x+y}{y-x}-\frac{y-x}{x+y}\right):\left(\frac{2y-1}{xy-y^2}-\frac{2y+1}{x^2-xy}\right)$$

a) $(5x-1):\dfrac{x+2}{x-3}=(5x-1)\cdot\dfrac{x-3}{x+2}=\dfrac{5x^2-16x+3}{x+2}$

b) $\left(\dfrac{2xy}{3ab}-\dfrac{3ab}{2xy}\right):\left(\dfrac{1}{3ab}-\dfrac{1}{2xy}\right)=\dfrac{4x^2y^2-9a^2b^2}{6abxy}:\dfrac{2xy-3ab}{6abxy}=$

$$\frac{(2xy+3ab)\cdot(2xy-3ab)}{6abxy}\cdot\frac{6abxy}{2xy-3ab}=2xy+3ab$$

c) $\dfrac{3x}{y}\cdot\left(\dfrac{x+2}{y+1}-\dfrac{y-1}{2x}\right)=\dfrac{3x}{y}\cdot\dfrac{(x+2)\cdot 2x-(y^2-1)}{(y+1)\,2x}=\dfrac{3}{y}\cdot\dfrac{2x^2+4x-y^2-1}{2y+2}=$

$$\frac{6x^2+12x-3y^2-3}{2y^2+2y}$$

d) $\left(\dfrac{x+y}{y-x}-\dfrac{y-x}{x+y}\right):\left(\dfrac{2y-1}{xy-y^2}-\dfrac{2y+1}{x^2-xy}\right)=$

$$\frac{(x+y)^2-(y-x)^2}{(y+x)(y-x)}:\left(\frac{2y-1}{y(x-y)}-\frac{2y+1}{x(x-y)}\right)=$$

$$\frac{(x+y)^2-(y-x)^2}{(y+x)(y-x)}:\left(\frac{2xy-x-2y^2-y}{xy(x-y)}\right)=\frac{4xy}{(y+x)(y-x)}\cdot\frac{xy(x-y)}{2xy-x-2y^2-y}=$$

Multiplicando el numerador y denominador por $-1$, podemos simplificar $x-y$

$$\frac{-4xy}{(y+x)(-y+x)}\cdot\frac{xy(x-y)}{2xy-x-2y^2-y}=$$

$$\frac{-4x^2y^2}{2xy^2-yx-2y^3-y^2+2x^2y-x^2-2xy^2-xy}=\frac{-4x^2y^2}{-2y^3-y^2+2x^2y-2xy-x^2}$$

## *Problemas propuestos con soluciones*

**1. Calcula las siguientes operaciones y simplifica el resultado si es posible:**

a) $\frac{1}{t}+\frac{1-t}{t^2+2t}-\frac{2}{t+2}$  b) $\frac{1}{x+a}-\frac{1}{(x+a)^2}-\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x^2-a^2}$  c) $\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+h}}{h}$

Sol: a) $\frac{3-2t}{t^2+2t}$  b) $\frac{2a(x+a-1)}{(a-x)(a+x)^2}$  c) $\frac{1}{x^2+xh}$

**2. Determina el valor de h y k para que** $\frac{3x^2+hx+3}{2x^2+5x+k}=\frac{3x+1}{2x-1}$

Sol: $k=-3$ y $h=10$

**3. Determina para qué valor, o valores de m se puede simplificar la fracción:** $\frac{x^2+x+m}{x^2-7x+6}$

Sol: $m=-42$ y $m=-2$

**4. a) Efectúa la siguiente operación** $\frac{3x+2}{x^2-3x+2}+\frac{3x^2+x+1}{2x-3}$

**b) Calcula el valor de la expresión resultante para** $x=-2$ **y** $x=\frac{3}{2}$

Sol: a) $\frac{3x^4-8x^3+10x^2-6x-4}{2x^3-9x^2+13x-6}$  b) Para $x=-2\rightarrow-\frac{40}{21}$ y para $x=\frac{3}{2}$ Imposible

**5. Efectuar las siguientes operaciones:**

a) $\frac{y}{2y+4}+\frac{2y}{y^2-4}+\frac{y^2+1}{y^2+2y}$  b) $-\frac{2}{x+1}+2x-(x^2-1)\cdot\frac{x^2+x}{x-1}+\frac{1}{2x+1}$

Sol: a) $\frac{3y^3-2y^2+2y-4}{2y^3-8y}$  b) $\frac{-2x^5-7x^4-5x^3+x^2-2x-1}{2x^2+3x+1}$

**6. Si** $A=\frac{x-1}{x+1}$ , $B=\frac{3}{x^2-1}$ **y** $C=\frac{(x-1)^2}{x}$**, calcular: a)** $A-BC$ **b)** $\frac{AC}{B}$ **c)** $(A+2B-C)^2$

Sol: a) $\frac{x^2-4x+3}{x^2+x}$  b) $\frac{(x-1)^4}{3x}$  c) $\frac{(x^4-3x^3+2x^2-5x-1)^2}{(x-1)^2x^2(x+1)^2}$

**7. Escribe la siguiente fracción como suma de un polinomio más otra fracción cuyo numerador sea de menor grado que el denominador:** $\frac{8x^3+2x^2-x-1}{4x^2-x+1}$

Sol: $1+2x-\frac{2+2x}{4x^2-x+1}$

**8. En las siguientes relaciones hay errores muy graves, ¿cuáles son?**

a) $\frac{x^2+1}{x}=x+1$  b) $\frac{x^2+x+1}{x+1}=x^2$  c) $\frac{x^2-1}{x^2+x-2}=\frac{-1}{x-2}$  d) $x+\frac{1}{x}=x^2+1$

**e)** $\dfrac{\mathbf{x-2}}{\mathbf{x^2-4}}=\mathbf{x+2}$ **f)** $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{x+1}}(\mathbf{x-1})=\dfrac{\mathbf{x-1}}{\mathbf{(x+1)(x-1)}}$ **g)** $\dfrac{\mathbf{x^2+x}}{\mathbf{x}}=\mathbf{x^2}$

**h)** $-\dfrac{\mathbf{x^2-x}}{\mathbf{x}}=\mathbf{-x-1}$

Sol: Lo correcto es lo siguiente:

a) $\dfrac{x^2+1}{x}$ b) $\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ c) $\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{x+1}{x+2}$ d) $\dfrac{x^2+1}{x}$ f) $\dfrac{x-1}{x+1}$

e) $\dfrac{x-2}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{1}{x+2}$ g) $\dfrac{x(x+1)}{x}=x+1$ h) $-\dfrac{x(x-1)}{x}=-x+1$

**9. Opera y simplifica a)** $\left(\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}\right)(x^4+x^3)$ **b)** $\dfrac{x^3+x}{x^2-8x+16}\left(\dfrac{3x^2+x-1}{x^2+1}-3\right)$

Sol: a) $x^3+1$ b) $\dfrac{x}{x-4}$

**10. Simplifica las fracciones:**

**a)** $\dfrac{(x+2)(2x-1)-(x+2)(x+2)}{x^2-5x+6}$ **b)** $\left(\dfrac{2x}{1+x^2}-\dfrac{x}{x-1}\right):\left(\dfrac{2x}{1+x^2}-\dfrac{x^2-1}{x^3}\right)$

**c)** $\dfrac{(2x^2+x-1)(x-5)+13x+1}{2x^3-3x^2-8x-3}$ **d)** $\dfrac{9x^2+x+\dfrac{1}{36}}{3x^3+\dfrac{x}{36}}$ **e)** $\dfrac{x^4+x^3+x^2}{3x^2+3x+3}$

Sol: a) $\dfrac{x+2}{x-2}$ b) $\dfrac{x^6-2x^5+3x^4}{-x^5+x^4-x+1}$ c) $\dfrac{x-2}{x+1}$ d) $\dfrac{(18x+1)^2}{108x^3+x}$ e) $\dfrac{x^2}{3}$

**11. Simplifica la siguiente fracción sabiendo que** $\mathbf{x=\dfrac{1}{2}}$ **es raíz de ambos términos:**

$$\dfrac{8x^3+4x^2-10x+3}{8x^3+20x^2+6x-9}$$

Sol: $\dfrac{2x-1}{2x+3}$

**12. Descomponer la fracción** $\dfrac{\mathbf{x+1}}{\mathbf{x^3-4x}}$ **en suma de tres fracciones con denominador de primer grado.**

Sol: $\dfrac{3}{8x-16}-\dfrac{1}{4x}-\dfrac{1}{8x+16}$

**13. Opera y simplifica cuando sea posible:**

**a)** $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x+y} : \dfrac{x^2-y^2}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$ **b)** $(x^2-6x+9) : \dfrac{x^4-81}{x^2+9}$ **c)** $\left(\dfrac{2x^2-x}{x^2-x-2}-2\right)\dfrac{x-2}{x-1}$

**d)** $\left(\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{x+y}{x-y}\right)\left(\dfrac{x^2+y^2}{2xy}+1\right)\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

Sol: a) $-\dfrac{1}{xy}$ b) $\dfrac{x-3}{x+3}$ c) $\dfrac{x+4}{x^2-1}$ d) $\dfrac{x+y}{x-y}$

## Ecuaciones Racionales

*Es muy importante comprobar que las soluciones que se obtienen verifican la ecuación original.*

*Ejemplo* **Resolver la ecuación** $\mathbf{\frac{3}{x}=\frac{2}{x-1}}$

Multiplicando en cruz se obtiene $3(x-1)=2x \qquad 3x-3=2x \quad \Rightarrow \quad x=3$

*Comprobación*: $x=3 \quad \to \quad \frac{3}{3}=\frac{2}{3-1} \qquad 1=1$

*Ejemplo* **Resolver la ecuación** $\mathbf{\frac{a}{a-5}=3+\frac{5}{a-5}}$

Multiplicamos todos los términos por $a-5$ que es el m.c.m.

$$(a-5)\left(\frac{a}{a-5}\right)=(a-5)\left(3+\frac{5}{a-5}\right) \qquad a=3(a-5)+5 \qquad a=3a-10 \quad \Rightarrow \quad a=5$$

*Comprobación*: $a=5 \quad \to \quad \frac{5}{0}=3+\frac{5}{0}$ La ecuación no tiene solución

*Ejemplo* **Resolver la ecuación** $\mathbf{\frac{6}{x^2}-\frac{5}{x}=1}$

$$\text{m.c.m.}(x^2,x)=x^2 \qquad x^2\left(\frac{6}{x^2}-\frac{5}{x}\right)=1\cdot x^2 \qquad 6-5x=x^2 \qquad x^2+5x-6=0$$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1}=\frac{-5\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{-5\pm 7}{2} \qquad x_1=\frac{-5+7}{2}=1 \qquad x_2=\frac{-5-7}{2}=-6$$

*Comprobación*:

$x_1=1 \quad \to \quad \frac{6}{1^2}-\frac{5}{1}=1 \qquad 6-5=1$

$x_2=-6 \quad \to \quad \frac{6}{(-6)^2}-\frac{5}{(-6)}=1 \qquad \frac{6}{36}+\frac{5}{6}=1 \qquad \frac{1}{6}+\frac{5}{6}=1 \qquad \frac{6}{6}=1$

*Ejemplo* **Resolver la ecuación** $\mathbf{\frac{2}{x+2}+\frac{2}{x-4}=1}$

$$\text{m.c.m.}(x+2,x-4)=(x+2)(x-4) \qquad (x+2)(x-4)\left(\frac{2}{x+2}+\frac{2}{x-4}\right)=1\cdot(x+2)(x-4)$$

$$2(x-4)+2(x+2)=(x+2)(x-4) \qquad 2x-8+2x+4=x^2-4x+2x-8$$

$$4x-4=x^2-2x-8 \qquad x^2-6x-4=0$$

$$x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot 1\cdot(-4)}}{2\cdot 1}=\frac{6\pm\sqrt{36+16}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{52}}{2}\qquad \begin{array}{l} x_1=\dfrac{6+\sqrt{52}}{2} \\ x_2=\dfrac{6-\sqrt{52}}{2}\end{array}$$

*Comprobación*:

$$x_1=\frac{6+\sqrt{52}}{2}\quad\rightarrow\quad \frac{2}{\frac{6+\sqrt{52}}{2}+2}+\frac{2}{\frac{6+\sqrt{52}}{2}-4}=1\qquad \frac{2}{\frac{10+\sqrt{52}}{2}}+\frac{2}{\frac{-2+\sqrt{52}}{2}}=1$$

$$x_2=\frac{6-\sqrt{52}}{2}\quad\rightarrow\quad \frac{2}{\frac{6-\sqrt{52}}{2}+2}+\frac{2}{\frac{6-\sqrt{52}}{2}-4}=1\qquad \frac{2}{\frac{10-\sqrt{52}}{2}}+\frac{2}{\frac{-2-\sqrt{52}}{2}}=1$$

*Ejemplo* **Resolver la ecuación** $\mathbf{\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{6}{x^2-9}}$

$$\text{m.c.m.}(x+3,x-3,x^2-9)=(x+3)(x-3)$$

$$(x+3)(x-3)\left(\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x-3}\right)=(x+3)(x-3)\left(\frac{6}{x^2-9}\right)$$

$$(x-3)+(x+3)=6\qquad 2x=6\qquad x=3$$

*Comprobación*: $x=3\quad\rightarrow\quad \dfrac{1}{3+3}+\dfrac{1}{3-3}=\dfrac{6}{3^2-9}\quad\Rightarrow\quad \dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{0}=\dfrac{6}{0}$

La ecuación no tiene solución ya que para $x=3$ se anulan dos de los denominadores.

*Ejemplo* **Resolver la ecuación** $\mathbf{\dfrac{y-4}{y^2-5y}=\dfrac{2}{y^2-25}}$

Factorizando los denominadores y multiplicando en cruz se obtiene

$$(y-4)(y+5)(y-5)=2y(y-5)\qquad (y-4)(y+5)=2y$$

$$y^2+y-20=2y\qquad y^2-y-20=0$$

$$y=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-20)}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm\sqrt{1+80}}{2}=\frac{1\pm 9}{2}\qquad \begin{array}{l} y_1=\dfrac{1+9}{2}=5 \\ y_2=\dfrac{1-9}{2}=-4\end{array}$$

*Comprobación*:

$y_1=5\quad\rightarrow\quad \dfrac{5-4}{5^2-25}=\dfrac{2}{25-25}\qquad \dfrac{1}{0}=\dfrac{2}{0}\quad\Rightarrow$ No es solución

$$y_2=-4 \quad \rightarrow \quad \frac{-4-4}{(-4)^2-5(-4)}=\frac{2}{(-4)^2-25} \qquad \frac{-8}{36}=\frac{2}{-9} \quad (-8)(-9)=72 \quad \Rightarrow \quad 72=72$$

*Ejemplo* **Resolver la ecuación** $\mathbf{\dfrac{a}{2a-6}-\dfrac{3}{a^2-6a+9}=\dfrac{a-2}{3a-9}}$

Para calcular el denominador común descomponemos en factores cada uno de los denominadores.

$$2a-6=2(a-3) \qquad a^2-6a+9=(a-3)^2 \qquad 3a-9=3(a-3)$$

$$\text{m.c.m.}(2a-6\,,a^2-6a+9\,,3a-9)=6(a-3)^2$$

$$6(a-3)^2\left(\frac{a}{2(a-3)}-\frac{3}{(a-3)^2}\right)=6(a-3)^2\left(\frac{a-2}{3(a-3)}\right)$$

$$3a(a-3)-18=2(a-3)(a-2) \qquad 3a^2-9a-18=2a^2-10a+12$$

$$a^2+a-30=0 \quad a=\frac{-(1)\pm\sqrt{(1)^2-4\cdot1\cdot(-30)}}{2\cdot1}=\frac{-1\pm11}{2}= \begin{cases} a_1=\dfrac{-1+11}{2}=5 \\ a_2=\dfrac{-1-11}{2}=-6 \end{cases}$$

*Comprobación*:

$$a_1=5 \quad \rightarrow \quad \frac{5}{10-6}-\frac{3}{25-30+9}=\frac{3}{15-9} \qquad \frac{5}{4}-\frac{3}{4}=\frac{3}{6} \qquad \frac{2}{4}=\frac{3}{6} \quad \Rightarrow \quad 12=12$$

$$a_1=-6 \quad \rightarrow \quad \frac{-6}{-12-6}-\frac{3}{36+36+9}=\frac{-8}{-18-9} \qquad \frac{-6}{-18}-\frac{3}{81}=\frac{8}{27} \quad \Rightarrow \quad \frac{8}{27}=\frac{8}{27}$$

*Ejemplo* **Resolver la ecuación** $\mathbf{\dfrac{3}{x+\dfrac{1}{2+\dfrac{x+1}{x-2}}}=\dfrac{1}{x}}$

Operamos por partes, comenzando por el denominador.

$$2+\frac{x+1}{x-2}=\frac{2(x-2)+x+1}{x-2}=\frac{2x-4+x+1}{x-2}=\frac{3x-3}{x-2}=\frac{3(x-1)}{x-2}$$

La ecuación resultante es: $\dfrac{3}{x+\dfrac{1}{\dfrac{3(x-1)}{x-2}}}=\dfrac{1}{x} \qquad \dfrac{3}{x+\dfrac{x-2}{3(x-1)}}=\dfrac{1}{x}$

Volvemos a operar en el denominador del primer término para simplificar la expresión.

$$x+\frac{x-2}{3(x-1)}=\frac{3x(x-1)+x-2}{3(x-1)}=\frac{3x^2-3x+x-2}{3(x-1)}=\frac{3x^2-2x-2}{3(x-1)}$$

La ecuación resultante es: $\dfrac{3}{\dfrac{3x^2-2x-2}{3(x-1)}}=\dfrac{1}{x}$ $\quad \dfrac{9(x-1)}{3x^2-2x-2}=\dfrac{1}{x}$

Multiplicando en cruz se obtiene: $9x^2-9x=3x^2-2x-2 \qquad 6x^2-7x+2=0$

$$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot(6)\cdot(2)}}{2\cdot 6}=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{12}=\frac{7\pm 1}{12} \qquad x_1=\frac{8}{12}=\frac{2}{3} \quad x_2=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

*Comprobación*:

$$x_1=\frac{2}{3} \rightarrow \frac{3}{\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2+\dfrac{\frac{2}{3}+1}{\frac{2}{3}-2}}}=\frac{1}{\frac{2}{3}} \qquad \frac{3}{\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2+\dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{-4}{3}}}}=\frac{3}{2} \qquad \frac{3}{\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2+\dfrac{15}{-12}}}=\frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{\frac{-9}{-12}}}=\frac{3}{2} \qquad \frac{3}{\dfrac{2}{3}+\dfrac{-12}{-9}}=\frac{3}{2} \qquad \frac{3}{\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{3}}=\frac{3}{2} \qquad \frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

$$x_1=\frac{1}{2} \rightarrow \frac{3}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2+\dfrac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-2}}}=\frac{1}{\frac{1}{2}} \qquad \frac{3}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2+\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{-3}{2}}}}=2 \qquad \frac{3}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2+\dfrac{6}{-6}}}=2$$

$$\frac{3}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2-1}}=2 \qquad \frac{3}{\dfrac{1}{2}+1}=2 \qquad \frac{3}{\frac{3}{2}}=2 \qquad 2=2$$

## *Problemas propuestos con soluciones*

1. **Resolver las ecuaciones:** a) $x-\frac{1-x}{2}=\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{x^2-7x+10}=\frac{1}{x-2}$

   Sol: a) $x=\frac{1}{2}$ b) $x=6$

2. **Resolver las ecuaciones:**

   a) $\frac{3}{x+1}=\frac{x}{x-1}-1$ b) $\frac{x-1}{x+1}-\frac{3+x}{x}=2$ c) $\frac{2}{x+1}+\frac{3x-3}{x^2-1}=\frac{2}{x-1}+\frac{7}{x+1}$

   Sol: a) $x=2$ b) $x=-3$ y $x=-\frac{1}{2}$ c) $x=0$

3. **Resolver las ecuaciones:**

   a) $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}=\frac{1}{x^2-a^2}$ b) $\frac{1+\frac{x+1}{x-1}}{2-\frac{x-1}{x+1}}=2$ c) $\frac{\frac{x-3}{2}-\frac{x-3}{4}}{x-\frac{1}{1-\frac{x-1}{x+1}}}=-\frac{1}{x}$ d) $\frac{x^2+2}{x^2-4}=\frac{x}{x-2}$

   Sol: a) $x=\frac{1}{2}$ b) $x=3$ c) $x=2$ d) $x=1$

4. **Resolver las ecuaciones:**

   a) $\frac{5}{x-1}-\frac{3}{x+4}-\frac{3}{x^2+3x-4}=\frac{5}{x-1}$ b) $\frac{x^2+6x+5}{x+1}=0$ c) $-\frac{1}{1-x}=\frac{1}{x}+\frac{3}{x-x^2}$

   Sol: a) $x=0$ b) $x=-5$ c) No tiene solución