Probabilidad

Espacio Muestral. Sucesos
Frecuencia y Probabilidad
Ley de Laplace
Experimentos compuestos
Tablas de contingencia
Diagramas en árbol
Sucesos dependientes
Combinatoria

Experimentos deterministas y experimentos aleatorios

*Los **experimentos deterministas** son aquellos que se caracterizan porque al repetirlos bajo análogas condiciones se obtiene siempre el mismo resultado*. En dichos experimentos podemos estar seguros del resultado de una experiencia aún antes de realizarla. Por ejemplo:

- Arrojar una piedra al vacío y medir su aceleración.
- Hacer reaccionar ácido sulfúrico con Cinc.
- Medir la longitud de una circunferencia de radio 5 m.
- Abrir las compuertas de un estanque lleno de agua.

Frente a esta clase de fenómenos, son frecuentes otros en los que la concurrencia de unas circunstancias fijas no permite prever cuál será el efecto producido. Por ejemplo:

1. Si se colocan 49 bolas numeradas, iguales en peso, tamaño, textura, etc., en una bolsa y se extrae una bola a ciegas, la bola extraída llevará, necesariamente, uno de los 49 números, pero es imposible predecir cuál será.
2. Si, todos los días, a la misma hora, se hace un trayecto entre dos puntos alejados de una ciudad, nunca se tardará el mismo tiempo y, lo que es peor, éste no puede predecirse de antemano. La duración del trayecto está gobernada por demasiados “imponderables" para que su valor esté determinado por un conjunto cuantificado de causas.
3. Si una moneda cae al suelo de una habitación, no se puede prever el punto al que irá a parar. Aunque se lanzaran diversas monedas idénticas, poniendo cuidado en hacerlo de igual manera en todas las ocasiones, no acabarían todas en el mismo punto.

En estos casos, se dice que el resultado del fenómeno es consecuencia del **azar.**

*El **azar** es la supuesta causa de los hechos o sucesos cuya causa real se desconoce, que produce un resultado imprevisible*, es decir, es la causa a la que se hace responsable del resultado de una infinidad de experiencias. Los experimentos o fenómenos cuyo resultado se atribuye el azar, se denominan ***aleatorios***. *Los **experimentos aleatorios** son aquellos que se caracterizan porque al repetirlos bajo análogas condiciones es imposible predecir el resultado***.** En dichos experimentos nunca podemos estar seguros del resultado de una experiencia antes de realizarla. Son ejemplos de experimentos aleatorios, además de los anteriores, los siguientes:

- Extraer una carta de una baraja.
- Lanzar un dado y anotar el símbolo que aparece en la cara superior.
- Lanzar una moneda y anotar el símbolo que aparece en la cara superior.
- Extraer una bola de la lotería.

Hoy en día las calculadoras y los ordenadores disponen de una función para generar números aleatorios. Por ejemplo, se pueden obtener simulaciones de lanzamientos de moneda, dados, extracciones de cartas de una baraja, etc. con la misma exactitud que si realizamos las pruebas y con la ventaja de obtener el resultado en un intervalo de tiempo muy corto.

- ➢ Utilizando la calculadora simula el lanzamiento de una moneda 50 veces y haz una tabla con los resultados obtenidos. Haz lo mismo para un dado.
- ➢ Simula un sorteo de 10 premios entre 150 personas.
- ➢ Con una moneda puedes efectuar sorteos de “cara o cruz”. ¿Y con una ruleta? ¿Y con una urna con papelitos o bolas? Describe como procederías en estos casos.

Espacio Muestral y Sucesos

*Llamaremos **espacio muestral** de un experimento aleatorio al conjunto de todos los resultados posibles del experimento***.** También se llama espacio de resultados o universo de resultados. Al espacio muestral de un experimento aleatorio lo designaremos por **E**. Cada uno de los elementos que forman el espacio muestral se llama ***punto muestral***. A continuación se presentan ejemplos de espacios muestrales.

- Para el caso del lanzamiento de un dado tenemos $E=\{1,2,3,4,5,6\}$.
- Para el lanzamiento de una moneda $E=\{C,X\}$.
- Para el lanzamiento de dos monedas podemos suponer que las monedas son distinguibles, bien porque son distintas, bien porque se lanzan por separado, etc.

$$E=\{CC,CX,XC,XX\}$$

- Para el lanzamiento de dos dados, al igual que para las monedas, no hay inconveniente en suponer que los distinguimos.

$$E=\{(1,1),(1,2),\ldots..,(2,1),(2,2),\ldots..,(3,1),(3,2),\ldots..,(6,6)\}$$

- Al sacar una bola de una bolsa que contiene 5 bolas blancas y tres bolas negras, todas ellas iguales en tamaño y textura, supondremos que son distinguibles, pero no al tacto . Da igual que estén numeradas o no.

$$E=\{B_1,B_2,B_3,B_4,B_5,N_1,N_2,N_3\}$$

- Para el lanzamiento de dos dados y anotar la suma de los números que aparecen en las caras superiores:

$$E=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

Se llama ***suceso*** de un experimento aleatorio, ***a cada uno de los subconjuntos del espacio muestral E.*** El conjunto de todos los sucesos de un experimento aleatorio se denomina **espacio de sucesos** y se designa por **S**. A continuación se presentan ejemplos de sucesos.

- Un suceso puede tener nombres peculiares. Así, en el experimento aleatorio consistente en el lanzamiento de un dado tenemos como posibles sucesos:

$$\text{Impar}=\{1,3,5\}\quad \text{Primo}=\{2,3,5\}\quad \text{Menor que }4=\{1,2,3\}\quad \text{Múltiplo de }3=\{3,6\}$$

- En el experimento aleatorio consistente en lanzar una moneda y anotar el resultado tenemos:

$$\text{Espacio muestral}\longrightarrow E=\{C,X\}$$
$$\text{Espacio de sucesos}\longrightarrow S=\{\phi,\{C\},\{X\},\{C,X\}\}$$

- En el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado de quinielas y anotar el símbolo que aparece en la cara superior tenemos:

$$\text{Espacio muestral} \longrightarrow E = \{1, X, 2\}$$
$$\text{Espacio de sucesos} \longrightarrow S = \{\phi, \{1\}, \{X\}, \{2\}, \{1, X\}, \{1,2\}, \{X,2\}, \{1, X,2\}\}$$

Obsérvese la estrecha relación entre el número de elementos del espacio muestral y el número de elementos del espacio de sucesos.

En el primer ejemplo E tiene 2 elementos y S tiene $2^2 = 4$ elementos. En el segundo ejemplo, E tiene 3 elementos y S tiene $2^3 = 8$ elementos. *Si E es un conjunto finito con n-elementos, hay* $\mathbf{2^n}$ *sucesos posibles.*

Diremos que *un suceso* **A** *se verifica, se realiza o se presenta, si al efectuar una prueba del experimento aleatorio obtenemos como resultado uno de los puntos muestrales que componen el suceso A.* En el ejemplo del dado, si el resultado es 3, ocurren los sucesos Impar, Primo, Menor que 4 y Múltiplo de 3, es decir, todos los sucesos a los que pertenece el número 3.

Sucesos elementales o simples

Son los sucesos formados por un sólo punto muestral; es decir, por un sólo resultado del experimento aleatorio.

- En $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ los sucesos elementales son: $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$

Sucesos compuestos

Son los sucesos formados por dos o más puntos muestrales; es decir, por más de un resultado del experimento.

- Al lanzar dos monedas los sucesos: obtener *una sola cara* $\{CX, XC\}$ y obtener *al menos una cara* $\{CC, CX, XC\}$.

Suceso seguro

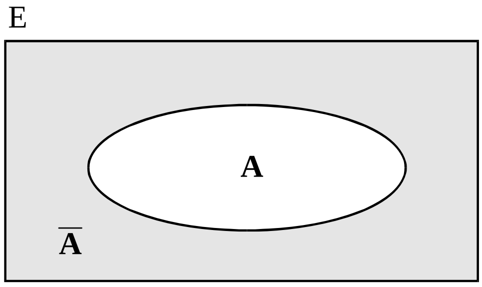
Suceso seguro o cierto es el que siempre se realiza. Coincide con el espacio muestral y lo representaremos por E.

Suceso imposible

Es el suceso que nunca se realiza. Lo representaremos por ϕ. Cuando se forma el espacio de sucesos de un experimento aleatorio siempre aparece el suceso imposible.

Ejemplo Cuando tiramos dos dados, el suceso "suman 15" es claramente el suceso imposible, ya que ningún resultado lo verifica.

Sucesos Contrarios



Sea A un suceso. El subconjunto formado por los elementos de E que no están en A es el conjunto complementario de A y se denota por $\overline{\mathbf{A}}$, $\mathbf{A}'$ *o incluso* $\mathbf{A}^c$. *Este conjunto se denomina contrario de A.*

El contrario del suceso imposible ϕ ***es el suceso seguro E y el contrario de E es*** ϕ.

Se observa que los sucesos contrarios son siempre incompatibles, pero el recíproco no es cierto. De la definición se deduce que:

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$A \cup \overline{A} = E \quad \text{(suceso seguro)}$$

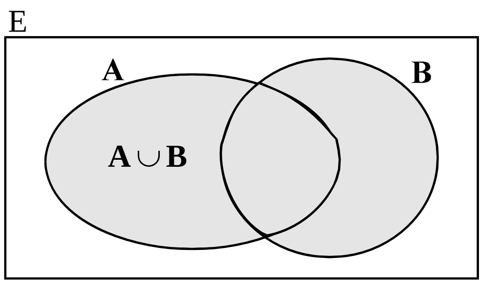
$$A \cap \overline{A} = \phi \quad \text{(suceso imposible)}$$

<u>*Ejemplo*</u> En el experimento consistente en el lanzamiento de un dado, el espacio muestral es $E = \{1,2,3,4,5,6\}$. Tenemos los siguientes sucesos contrarios:

$$A = \{1,2,5\} \longrightarrow \overline{A} = \{3,4,6\} \qquad E = \{1,2,3,4,5,6\} \longrightarrow \overline{E} = \phi$$

$$B = \{\phi\} \longrightarrow \overline{B} = \{1,2,3,4,5,6\} \qquad C = \{1\} \longrightarrow \overline{C} = \{2,3,4,5,6\}$$

Unión de Sucesos



Dados dos sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio, se llama suceso unión de A y B al suceso que se realiza cuando se verifica al menos uno de los sucesos A o B.

Se representa por $\mathbf{A \cup B}$ ***y está formado por los puntos muestrales de A o B.***

Se observan, inmediatamente, las siguientes relaciones en la unión de sucesos:

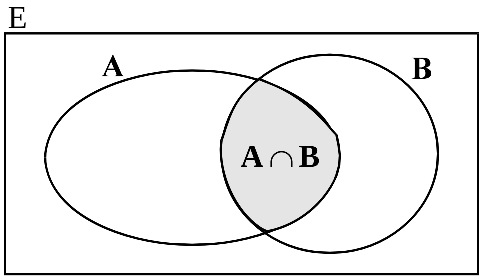
$$A \cup E = E \qquad A \cup \phi = A \qquad A \cup \overline{A} = E$$

<u>*Ejemplo*</u> Consideremos el experimento aleatorio del lanzamiento de un dado cuyo espacio muestral es $E = \{1,2,3,4,5,6\}$, y sean los siguientes sucesos:

$$A = \text{"salir número par"} = \{2,4,6\} \quad \text{y} \quad B = \text{"salir número primo"} = \{2,3,5\}$$

Formar el suceso C = "Salir número par o número primo" $\rightarrow$ $C = \{2,3,4,5,6\}$

Intersección de Sucesos



Dados dos sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio, se llama suceso intersección de A y B al suceso que se realiza cuando se verifican simultáneamente los sucesos A y B.

Se representa por $\mathbf{A \cap B}$ ***y está formado por los puntos muestrales de A y B.***

Se observan, inmediatamente, las siguientes relaciones en la intersección de sucesos:

$$A \cap E = A \qquad A \cap \phi = \phi \qquad A \cap \overline{A} = \phi$$

Ejemplo Considerando el ejemplo anterior, formar el suceso C = "Salir par y número primo".

$$C = \{2\}$$

Sucesos Incompatibles. Sucesos Compatibles

Dos sucesos A y B se dicen ***incompatibles*** *o disjuntos si su intersección es el suceso imposible, es decir si* $\mathbf{A \cap B} = \phi$. *Si* $\mathbf{A \cap B} \neq \phi$ *entonces A y B son* ***compatibles****.*

Cuando es imposible que dos sucesos se realicen simultáneamente decimos que dichos sucesos son incompatibles.

$$\mathbf{A \cap B = \phi \;\Leftrightarrow\; A \text{ y } B \text{ son incompatibles} \qquad A \cap B \neq \phi \;\Leftrightarrow\; A \text{ y } B \text{ son compatibles}}$$

Ejemplo Al lanzar un dado, los sucesos $A = \{2, 4, 6\}$ y $B\{3, 5\}$ son incompatibles, pues $A \cap B = \phi$.

Los sucesos $A = \{2, 4, 6\}$ y $B = \{3, 6\}$ son compatibles ya que $A \cap B = 6$

Frecuencia y probabilidad de un suceso

Se llama ***frecuencia absoluta*** *de un suceso A, al número de veces que se verificó A al realizar el experimento un número determinado de veces.* Se representa por la notación **f(A)** .

Si una persona nos asegura que lanzando una moneda, por ejemplo, obtuvo 57 veces el resultado “cara", no podemos afirmar que dicho suceso sea muy frecuente o poco frecuente, pues necesitamos comparar con la cantidad de veces que se lanzó la moneda. Por esto se introduce la noción de frecuencia relativa.

Se llama ***frecuencia relativa*** *de un suceso al cociente entre la frecuencia absoluta del mismo y el número total de veces que se hace el experimento.*

$$\mathbf{f_r(A) = \frac{f(A)}{N}}$$

<u>Propiedades de la frecuencia relativa</u>

1) $\mathbf{0 \leq f_r \leq 1}$ **cualquiera que sea el suceso A**.
2) $\mathbf{f_r(E) = 1}$ **(E suceso seguro)**
3) **Si A y B son sucesos incompatibles**: $\mathbf{f_r(A \cup B) = f_r(A) + f_r(B)}$

La frecuencia relativa de un suceso S, tiende a estabilizarse en torno a un número a medida que el número de pruebas del experimento crece indefinidamente. A ese número se le llama ***probabilidad del suceso S***.

Ley de Laplace

*La probabilidad de un suceso S, que representaremos por p(S), es el cociente entre el número de casos favorables a dicho suceso y el número de casos posibles***.**

$$\mathbf{p(S)=\frac{Número\ de\ casos\ favorables\ al\ suceso\ S}{Número\ de\ casos\ posibles}}$$

A la hora de aplicar esta definición hay que tener en cuenta que ***los sucesos elementales tienen que ser igualmente probables (equiprobables)***.

Los casos favorables son los elementos que componen el suceso S, y los casos posibles son todos los resultados del experimento, es decir, todos los elementos del espacio muestral.

Ejemplo **Se considera un experimento consistente en lanzar un dado. Se pide la probabilidad de obtener:**
a) Número impar
b) Número primo
c) Múltiplo de 3
d) Múltiplo de 5

El espacio muestral del experimento es $E=\{1,2,3,4,5,6\}$, luego el número de casos posibles es 6.

a) A = "Obtener impar" = $\{1,3,5\}$ $\Rightarrow$ $p(A)=\frac{3}{6}=0'5$

b) B = "Número primo" = $\{2,3,5\}$ $\Rightarrow$ $p(B)=\frac{3}{6}=0'5$

c) C = "Múltiplo de tres" = $\{3,6\}$ $\Rightarrow$ $p(C)=\frac{2}{6}=0'\widehat{3}$

d) D = "Múltiplo de 5" = $\{5\}$ $\Rightarrow$ $p(D)=\frac{1}{6}=0'1\widehat{6}$

Propiedades de la probabilidad

- *La probabilidad del suceso imposible es 0*, es decir, $p(\phi)=0$
- *La probabilidad del suceso seguro es 1*, es decir, $p(E)=1$
- *La probabilidad de un suceso cualquiera es un número comprendido entre 0 y 1*, es decir, $0\le p(S)\le 1$

Ejemplo **Se realiza un experimento consistente en lanzar dos monedas. Hallar las siguientes probabilidades:**
a) Obtener dos caras
b) Obtener dos cruces
c) Obtener una cara y una cruz.
d) Obtener al menos una cruz.

El espacio muestral es $E = \{CC, CX, XC, XX\}$, por tanto el número de casos posibles es 4.

a) A = "Obtener dos caras" = $\{CC\}$ $\Rightarrow$ $p(A) = \frac{1}{4} = 0'25$

b) B = "Obtener dos cruces" = $\{XX\}$ = $\Rightarrow$ $p(B) = \frac{1}{4} = 0'25$

c) C = "Obtener una cara y una cruz" = $\{CX, XC\}$ $\Rightarrow$ $p(C) = \frac{2}{4} = 0'5$

d) D = "Obtener al menos una cruz" = $\{CX, XC, XX\}$ $\Rightarrow$ $p(D) = \frac{3}{4} = 0'75$

Ejemplo **Se realiza el experimento consistente en la extracción de una carta de una baraja española. Se pide hallar las siguientes probabilidades:**
a) Obtener un oro
b) Obtener un as
c) Obtener la sota de espadas.

El espacio muestral del experimento está formado por los 40 resultados posibles correspondientes a cada una de las cartas de la baraja.

a) O = "Obtener un oro" = $\{1,2,3,4,5,6,7,S,C,R\}$ $\Rightarrow$ $p(O) = \frac{10}{40} = 0'25$

b) A = "Obtener un as" = $\{1_E, 1_C, 1_B, 1_O\}$ $\Rightarrow$ $p(A) = \frac{4}{40} = 0'1$

c) B = "Obtener la sota de espadas" = $\{S_E\}$ $\Rightarrow$ $p(B) = \frac{1}{40} = 0'025$

Ejemplo **Consideremos el experimento consistente en lanzar dos dados y anotar la suma de los puntos de las caras superiores. Hallar la probabilidad de los siguientes sucesos:**
a) Obtener suma igual a 11.
b) Obtener suma igual a 8.
c) Obtener suma menor o igual a 4.

Los posibles resultados se indican en la siguiente tabla:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

$$E = \{(1,1), (1,2), (1,3), \ldots, (2,1), (2,2), \ldots, (3,1), (3,2), \ldots\ldots, (6,1), \ldots, (6,6)\}$$

a) A = "Suma igual a 11" = $\{(5,6), (6,5)\}$ $\Rightarrow$ $p(A) = \frac{2}{36} = 0'055$

b) B = "Suma igual a 8" = $\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\} \Rightarrow p(B)=\frac{5}{36}=0'138$

c) C = "Obtener suma menor o igual a 4" = $\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1)\}$

Probabilidad de la Unión de Sucesos

Ejemplo **Calcular la probabilidad de que al elegir al azar una carta de una baraja española sea un as o una copa**.

Solución

Si llamamos A al suceso sacar un as y C al suceso sacar una copa tenemos:

$$p(A)=\frac{4}{40} \qquad p(C)=\frac{10}{40}$$

Pero estos dos sucesos tienen un elemento en común, el as de copas, y no podemos contarlo dos veces a la hora de calcular la probabilidad de su unión, por eso, a la probabilidad de la unión hay que restarle la probabilidad de la intersección.

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=\frac{4}{40}+\frac{10}{40}-\frac{1}{40}=0'375$$

En general, si A y B son dos sucesos cualesquiera, se verifica:

$$\mathbf{p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)}$$

Probabilidad del Suceso contrario

Ejemplo **Una caja que tiene 50 DVDs contiene 3 defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir uno al azar no sea defectuoso?**

Solución

Sea A el suceso “estar estropeado” y $\overline{A}$ el suceso contrario, es decir, “no estar estropeado”. Según el apartado anterior tenemos:

$$p(A\cup\overline{A})=p(A)+p(\overline{A})-p(A\cap\overline{A})$$

Como A y $\overline{A}$ son incompatibles, se verifica que $p(A\cap\overline{A})=0$, por tanto:

$$p(A\cup\overline{A})=p(A)+p(\overline{A})=p(E)=1 \quad\Rightarrow\quad p(A)+p(\overline{A})=1$$

En nuestro ejemplo: $p(\overline{A})=1-p(A)=1-\frac{3}{50}=0'94 \quad\to\quad p(\overline{A})=94\%$

En general, si A es un suceso cualquiera se verifica:

$$\mathbf{p(A)+p(\overline{A})=1 \quad\Rightarrow\quad p(\overline{A})=1-p(A)}$$

Experimentos compuestos

- *Dos o más experiencias aleatorias se llaman* ***Independientes*** *cuando el resultado de cada una de ellas no depende de las demás.*

  - El lanzamiento de dos dados puede considerarse como composición de dos pruebas independientes (un dado y otro dado), pues el resultado de cada dado no influye en el otro.
  - El lanzamiento de un dado y una moneda son pruebas independientes pues el resultado del dado no influye en el resultado de la moneda.

- *Dos o más experiencias aleatorias se llaman* ***Dependientes*** *cuando el resultado de cada una de ellas influye en las probabilidades de las siguientes.*

  - La extracción de dos cartas de una baraja (una seguida de la otra) es la composición de dos pruebas dependientes, pues el resultado de la primera influye en las probabilidades de los sucesos de la segunda.

Extracciones con y sin reemplazamiento

Supongamos el experimento compuesto de sacar dos bolas de una bolsa. Se pueden dar dos situaciones:

- Sacamos la primera bola, la miramos y la devolvemos a la bolsa. Removemos y volvemos a sacar una bola. Hemos sacado dos bolas ***con reemplazamiento***. En este caso los experimentos son ***Independientes***.

- Sacamos la primera bola, la miramos y la dejamos fuera. A continuación sacamos otra bola. Hemos sacado dos bolas ***sin reemplazamiento***. En este caso los experimentos son ***Dependientes***.

Tablas de contingencia

Son tablas que se utilizan para organizar datos en el cálculo de probabilidades.

En las tablas figuran todas las posibilidades o contingencias de los sucesos compuestos que pueden darse, esto es, A, B, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$ y $\overline{A} \cap \overline{B}$.

	A	$\overline{\mathbf{A}}$	**Totales**
B	$p(A \cap B)$	$p(\overline{A} \cap B)$	$\mathbf{p(B)}$
$\overline{\mathbf{B}}$	$p(A \cap \overline{B})$	$p(\overline{A} \cap \overline{B})$	$\mathbf{p(\overline{B})}$
Totales	$\mathbf{p(A)}$	$\mathbf{p(\overline{A})}$	**1**

Ejemplo **En unas jornadas deportivas en Denia participan 225 chicos y 275 chicas. En ciclismo se han apuntado 125 chicos y en atletismo 25 chicos. Tanto en baloncesto como en atletismo se han apuntado 75 chicas en cada una.**
a) Organiza toda la información disponible mediante una tabla.
b) Si elegimos un atleta al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una ciclista?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea un jugador de baloncesto?

Solución

a)

	Chicos	**Chicas**	Total
Ciclismo	125	125	250
Atletismo	25	75	100
Baloncesto	75	75	150
Total	225	275	**500**

b) $p=\frac{125}{500}=0'25$ c) $p=\frac{75}{500}=0'15$

Diagramas en árbol

Composición de experiencias Independientes

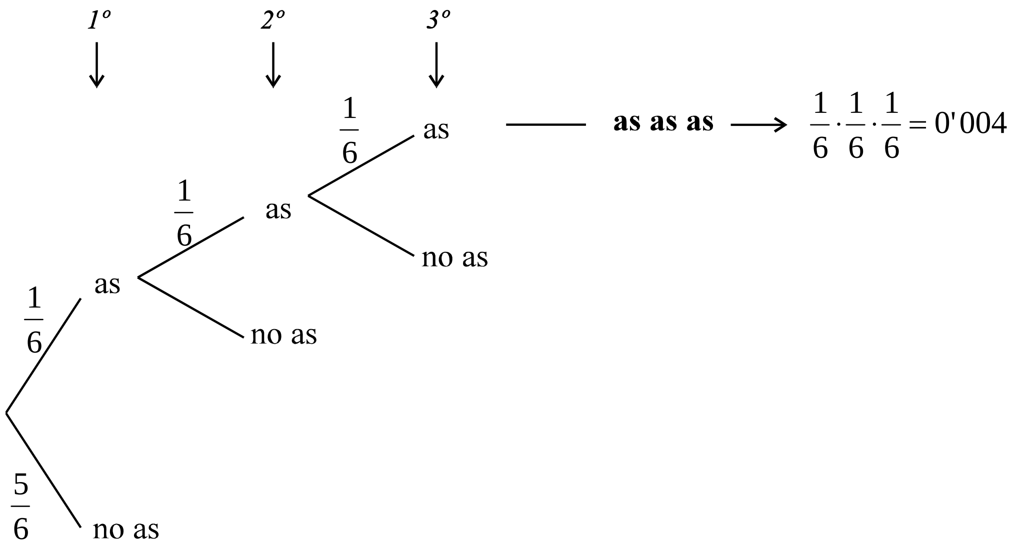
Lo más sencillo es calcular las probabilidades de los sucesos compuestos descomponiéndolos en sucesos simples. Cuando varias experiencias aleatorias son independientes, la probabilidad de que ocurra S_1 en la primera, S_2 en la segunda, etc. es:

$$\mathbf{p(S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap ......) = p(S_1)\cdot p(S_2)\cdot p(S_3)\cdot ....}$$

Ejemplo **Calcular la probabilidad de obtener tres ases al lanzar tres dados**.

Solución

Las tres pruebas son independientes, pues no influye el resultado de un dado en lo que pueda salir en los otros dos. Si resolvemos directamente el problema, descomponiéndolo en los tres lanzamientos y lo representamos mediante un diagrama en árbol obtenemos:



$$p(3 \text{ ases}) = p(\text{As en el } 1^{o}) \cdot p(\text{As en el } 2^{o}) \cdot p(\text{As en el } 3^{o}) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = 0'004$$

Composición de experiencias Dependientes

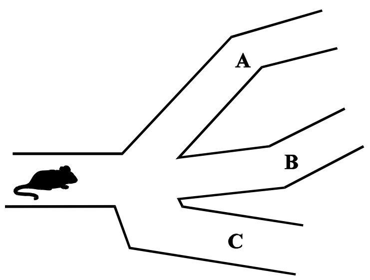
En una experiencia compuesta por varias dependientes, el resultado de cada una influye en el resultado de la siguiente. Si dos sucesos S_1 y S_2 corresponden a pruebas dependientes, la probabilidad de que ocurra S_1 en la primera y S_2 en la segunda es:

$$\mathbf{p(S_1 \cap S_2) = p(S_1) \cdot p(S_2/S_1)}$$

Para tres sucesos dependientes se verifica:

$$\mathbf{p(S_1 \cap S_2 \cap S_3) = p(S_1) \cdot p(S_2/S_1) \cdot p(S_3) \cdot p(S_3/S_1 \cap S_2)}$$

Ejemplo **Un ratón huye de un gato. Puede entrar por cada uno de los callejones A, B ó C. En cada uno de ellos el gato puede alcanzarlo o no**.



Se dan las siguientes probabilidades:

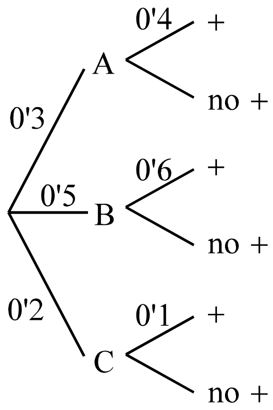
$$\mathbf{p(A) = 0'3 \;,\; p(B) = 0'5 \;\; y \;\; p(C) = 0'2}$$

La probabilidad de que el gato cace al ratón si éste ha entrado por el callejón A es de 0’4, la de que lo cace si ha entrado por B es de 0’6 y la de que lo cace si ha entrado por C es de 0’1

Calcular la probabilidad de que el gato cace al ratón.

Solución

Si se observa el diagrama en árbol, tenemos de manera natural la fórmula de la probabilidad total sin más que sumar las probabilidades de las ramas correspondientes:



$\longrightarrow \quad p(A\cap +) = p(A)\cdot p(+/A) = 0'3\cdot 0'4 = 0'12$

$\longrightarrow \quad p(B\cap +) = p(B)\cdot p(+/B) = 0'5\cdot 0'6 = 0'30$

$\longrightarrow \quad p(C\cap +) = p(C)\cdot p(+/C) = 0'2\cdot 0'1 = 0'02$

$$p(+) = p(A\cap +) + p(B\cap +) + p(C\cap +) = 0'12 + 0'30 + 0'02 = 0'44$$

Ejemplo **Sean dos urnas A y B. La urna A contiene dentro 3 bolas negras, 2 rojas y 2 blancas mientras que la urna B contiene 3 bolas blancas y 2 negras, como se indica en la figura (las bolas son indistinguibles al tacto).**

Se saca una bola de A, se observa el color y se introduce en B. Por último sacamos una bola de B.

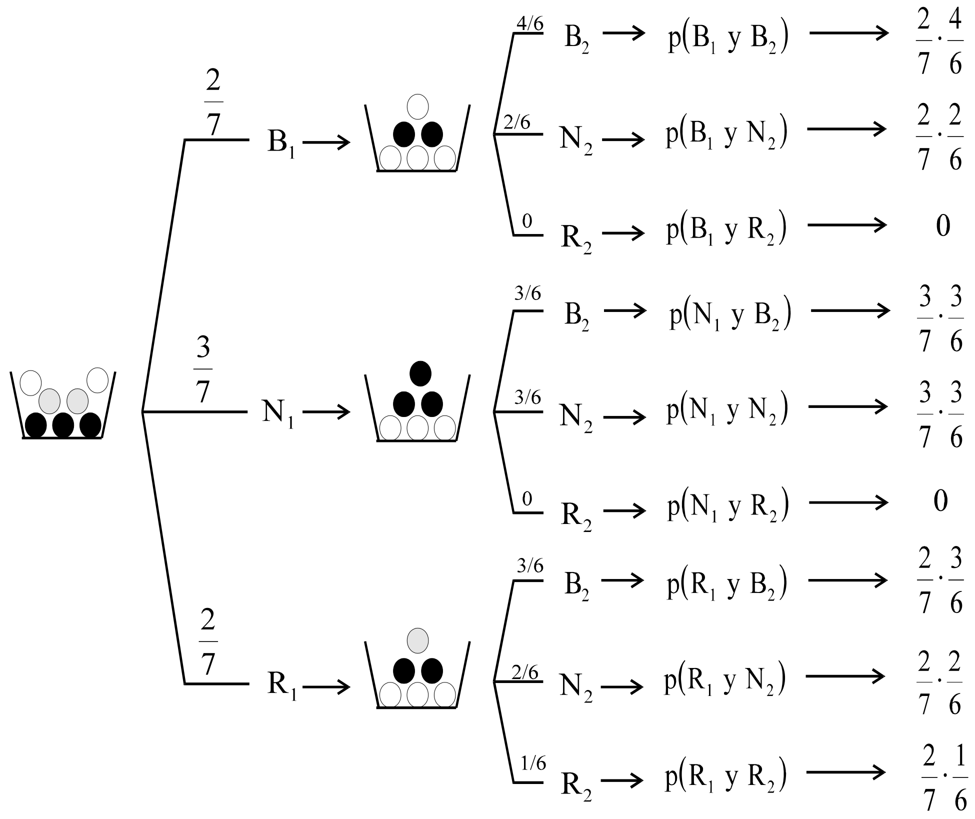
a) Hacer el diagrama en árbol que refleja esta situación.
b) Calcular la probabilidad de que la bola extraída de la urna B sea negra si la bola pasada de la urna A fue negra.
c) Calcular la probabilidad de que la bola extraída de la urna B sea roja si la bola pasada de la urna A fue negra.
d) Calcular la probabilidad de que la bola extraída de la urna B sea blanca.
e) Calcular la probabilidad de que las dos bolas no sean rojas.

Solución

Hay dos experimentos: sacar una bola de cada urna. El resultado del primer experimento determina la probabilidad asignada en el segundo.

Si escribimos el subíndice 1 para indicar que la bola extraída corresponde a la urna A y el subíndice 2 para indicar que la bola extraída corresponde a la urna B, el esquema en árbol es:

a)



b) $p(N_1 \cap N_2) = p(N_1) \cdot p(N_2 / N_1) = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{6} = 0'2142 \quad \to \quad 21'42\%$

c) $p(N_1 \cap R_2) = p(N_1) \cdot p(R_2 / N_1) = \frac{3}{7} \cdot 0 = 0 \quad \to \quad 0\%$

d) $p(B_2) = p(B_1 \text{ y } B_2) + p(N_1 \text{ y } B_2) + p(R_1 \text{ y } B_2) =$

$$p(B_1) \cdot p(B_2 / B_1) + p(N_1) \cdot p(B_2 / N_1) + p(R_1) \cdot p(B_2 / R_1) =$$

$$\frac{2}{7} \cdot \frac{4}{6} + \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{6} = 0'5476 \quad \to \quad 54'76\%$$

e) Sabemos que $p(\overline{R}_1 \cap \overline{R}_2) = 1 - p(R_1 \cap R_2) 1 - \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = 0'4761 \quad \to \quad 47'61\%$

Problemas sobre Probabilidad

1) **Lanzamos 2 monedas al aire. Representa mediante un diagrama en árbol los posibles resultados.**
   a) Calcula la probabilidad de que el resultado sea dos caras.
   b) Calcula la probabilidad de que el resultado sea dos cruces.
   c) Calcula la probabilidad de que el resultado sea cara y cruz.

2) **Haz el diagrama en árbol del lanzamiento de 3 monedas y calcula la probabilidad de obtener:**
   a) Tres caras. b) Tres cruces. c) Dos caras y una cruz. d) Una cara y dos cruces.

3) **De una baraja española de 40 cartas extraemos dos cartas. Calcula la probabilidad de que sean:**
   a) Dos oros. b) Dos ases. c) Una copa y una espada.

4) **Se efectúan tres disparos a un blanco. Sean A, B y C los sucesos que se verifican cuando el disparo primero, segundo y tercero, respectivamente, da en el blanco. Describir los siguientes sucesos mediante un diagrama en árbol: a)** $A \cap B \cap C$ **b)** $A \cap B \cap \overline{C}$ **c)** $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

5) **Antonio y Basilio son los finalistas de un torneo de ajedrez. Gana el torneo quien gane dos juegos seguidos o tres alternativos. Sea A el suceso "gana Antonio" y B el suceso "gana Basilio". Hallar el espacio muestral o conjunto de los resultados posibles mediante un diagrama en árbol.**

6) **Un aficionado a los casinos tiene tiempo de jugar a la ruleta cinco veces a lo sumo. Cada apuesta es de 1000 €. Empieza con 1000 € y deja de jugar cuando pierda los 1000 € o cuando gane 4000 €. Si 1, 2, 3, 4 y 0 expresan el dinero que tiene en cada momento en miles de euros, hallar el espacio muestral mediante un diagrama en árbol.**

7) **En una residencia hay 1085 ancianos, de los que 519 fuman y 226 tienen afecciones pulmonares. Pero sólo hay 31 que, aunque no fumen, tienen afecciones pulmonares. Haz una tabla de contingencia y averigua:**
   a) ¿Cuántos hay que fumen y tengan afecciones pulmonares?
   b) ¿Qué proporción de fumadores tienen afecciones pulmonares?
   c) ¿Qué proporción de no fumadores tienen afecciones pulmonares?
   d) ¿Qué proporción de enfermos de pulmón son fumadores?

8) **Una urna contiene 2 bolas rojas, 3 blancas y 5 negras**
   a) Se extrae una bola. Calcula las probabilidades de que sea roja, de que sea blanca y de que sea negra.
   b) Se extraen simultáneamente dos bolas de la urna. Calcula la probabilidad de que ambas sean rojas. Calcula la probabilidad de que ambas sean negras.
   c) Probabilidad de que las dos sean rojas o las dos negras.
   d) Probabilidad de que ni las dos sean rojas ni las dos sean negras.
   e) Probabilidad de que la primera bola extraída sea roja y la segunda negra.

9) **Una urna contiene 5 bolas blancas y 2 negras. Se extraen 3 bolas, sin fijarnos en el color, y se dejan aparte. ¿Cuál es la probabilidad de que la siguiente que se extraiga sea blanca?**

Combinatoria

La combinatoria se ocupa de contar los diferentes modos en que se pueden agrupar ciertos objetos siguiendo algunas reglas; o los diferentes caminos por los que se puede ir de un sitio a otro pasando, o no, por lugares intermedios; o las distintas formas de plegar una tira de sellos; o un mapa desplegable, etc.

Estrategias basadas en el producto

La estrategia del casillero

Ejemplo **Un botellero tiene 5 filas y 8 columnas. ¿Cuántas botellas caben en él?**

$$5 \cdot 8 = 40 \text{ botellas}$$

Ejemplo **Irene tiene 4 pantalones y 6 camisetas. ¿Cuántas indumentarias puede elegir? ¿Y si tiene además 3 pares de zapatos?**

$$4 \cdot 6 = 24 \text{ indumentarias posibles}$$

$$4 \cdot 6 \cdot 3 = 72 \text{ indumentarias posibles}$$

Ejemplo **Hay conversaciones bilaterales entre la C.E. y Japón. Los europeos acuden con 8 representantes, los japoneses con 11. Al encontrarse cada miembro de una delegación saluda, estrechando la mano, a cada miembro de la otra. ¿Cuántos apretones de mano se dan?**

$$8 \cdot 11 = 88 \text{ apretones}$$

Ejemplo **Lanzamos un dado y extraemos una carta de una baraja. ¿Cuántos resultados distintos podemos obtener? ¿Cuántos resultados distintos podemos obtener al lanzar 3 dados?**

$$6 \cdot 40 = 240 \text{ resultados distintos} \qquad 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216 \text{ resultados distintos}$$

Podríamos considerar que Irene, además de blusas, pantalones y zapatos, tiene varias gorras y varios cinturones; que en lugar de lanzar tres dados, lanzamos n dados, etc. En todos estos casos, ***para obtener el número total de posibilidades, multiplicamos el número de opciones que se dan en cada uno de los componentes.***

El diagrama en árbol

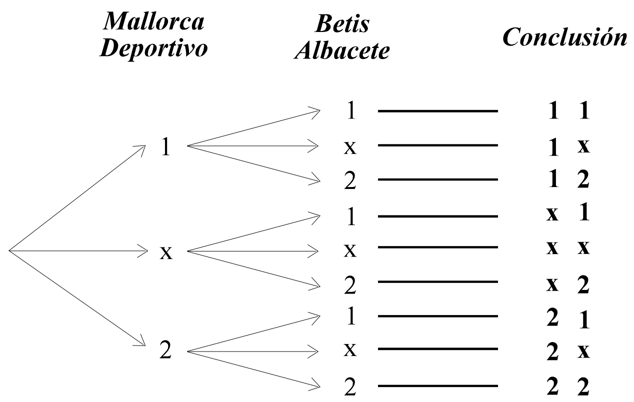
La “estrategia del casillero” nos ha resultado útil para pensar en determinados problemas. Veamos otros problemas para los que no resulta tan eficaz.

Ejemplo **Se juegan los partidos de ida de las semifinales de la Copa del Rey de fútbol. Son Mallorca-Deportivo y Betis-Albacete. Los chicos y chicas de 1º H son muy dados a hacer apuestas. Confeccionan una quiniela con los dos partidos y, en cada uno de ellos, hay que poner 1, X ó 2. Para ganar hay que acertar los dos resultados. Con el dinero recogido compran libros y se reparten entre todos los ganadores.**

a) ¿Cuántas quinielas tuvo que rellenar Mario, el forofo, que quería tener la seguridad de ganar?

b) ¿Cuántas quinielas tendría que haber hecho Mario la semana pasada para acertar los 4 partidos de vuelta de los cuartos de final de la Copa del Rey?

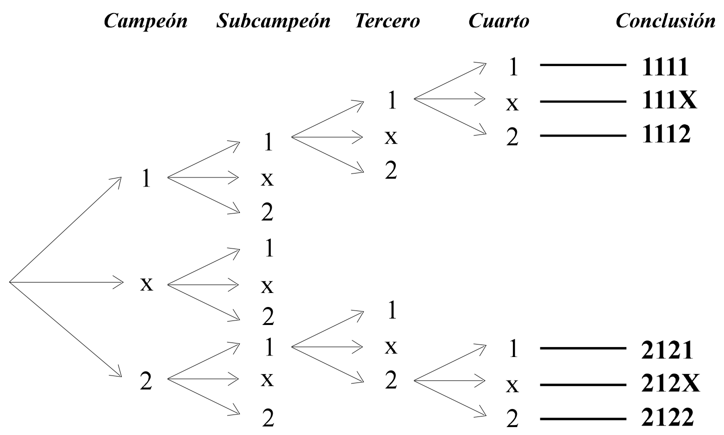
a) Lo podemos resolver mediante el siguiente *diagrama en árbol*:



3 posibilidades para acertar el primer partido. A cada una de esas tres posibilidades le corresponden las tres que se necesitan acertar el otro partido.

$$3 \cdot 3 = 9$$

b) Lo podemos resolver mediante el siguiente *diagrama en árbol*:



En cada paso, el número de posibilidades se multiplica por 3, pues el resultado de cada partido no depende de los anteriores. El número de quinielas posibles es:

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$$

Ejemplo **Hay 12 candidatos a ocupar los tres premios de un certamen literario. ¿Cuántas posibilidades hay?**

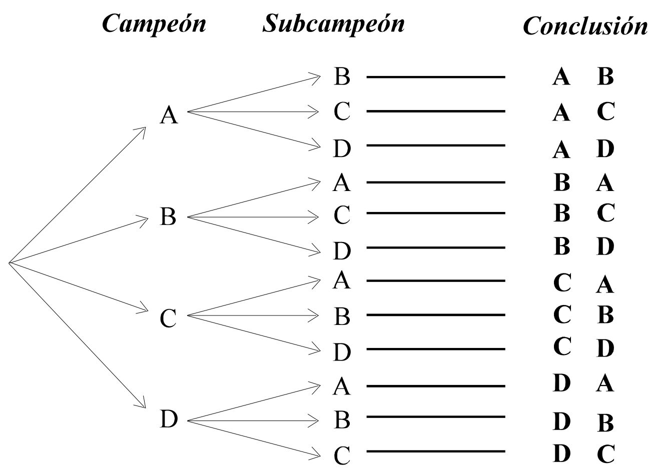
Para resolverlo *imaginamos* un diagrama en árbol con 12 ramas (12 posibilidades para el 1^0). Una vez fijado el 1^0, hay 11 posibilidades para el 2^0. Y fijados el 1^0 y el 2^0 hay 10 posibilidades para el 3^0.

En total hay:

$$12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320 \text{ posibilidades}$$

Ejemplo **Antonio, Beatriz, Carmen y Darío juegan la fase final de un campeonato de pimpón. Hay una copa para el campeón y una placa para el subcampeón.**
a) De cuántas formas pueden adjudicarse los trofeos?
b) ¿Cuántas posibles clasificaciones finales puede haber?

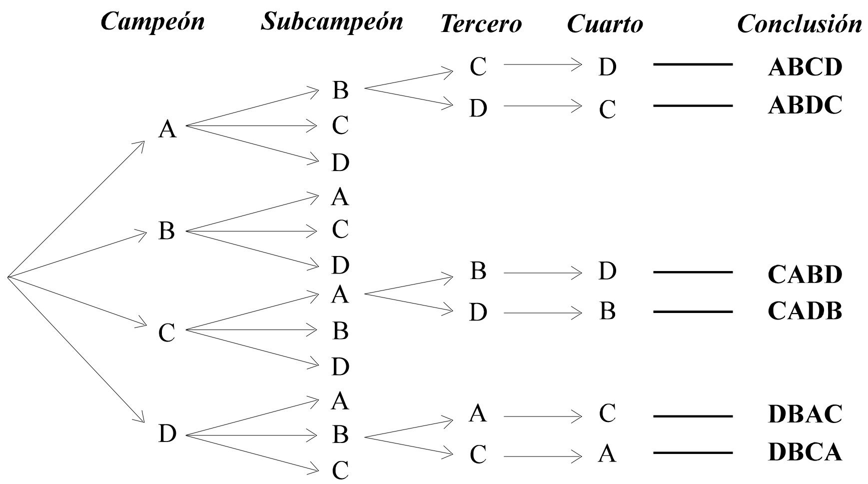
a) Lo podemos resolver mediante el siguiente *diagrama en árbol*:



Hay 4 posibilidades para el puesto de campeón. Cada una de ellas se puede completar con 3 opciones para el subcampeón

$$4 \cdot 3 = 12 \text{ posibilidades}$$

b) Lo podemos resolver mediante el siguiente *diagrama en árbol*:



Hay 4 posibles campeones pero, una vez fijado el campeón, sólo puede haber 3 subcampeones. Y si fijamos al 1^0 y al 2^0, sólo quedan 2 aspirantes para el 3er lugar. Conocidos los 1^0, 2^0 y 3^0, para el 4^0 lugar sólo queda un candidato. El número de posibilidades es:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ posibilidades}$$

El diagrama en árbol no tiene porqué estar completo para poder proceder a la contabilidad. En realidad, ni siquiera tendríamos que representar nada.

Variaciones

Variaciones con repetición

Vamos a recuperar un problema resuelto en el apartado anterior y que ahora nos va a servir de modelo.

Ejemplo **Se juegan dos partidos. ¿Cuántas quinielas hemos de hacer para acertar los dos? ¿Y para acertar cuatro partidos?**

Disponemos de los tres signos 1, X y 2. Con ellos hemos de llenar dos lugares. Podemos poner el mismo signo en los dos lugares (es decir, pueden repetirse). El número de posibilidades es:

$$3\cdot 3 = 3^2 .$$

Análogamente, con los tres signos 1, X y 2, hemos de llenar cuatro lugares, pudiendo repetirse una o más veces los signos utilizados. El número de posibilidades es:

$$3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = 3^4$$

Vamos a generalizar esta idea:

Variaciones con repetición de m elementos tomados n a n son los distintos grupos que se pueden formar con los m elementos, de manera que:

- *En cada grupo entren n elementos repetidos o no.*
- *Dos grupos son distintos si se diferencian en algún elemento o en el orden de colocación de los mismos.*

El número de variaciones con repetición de m elementos tomados n a n se representa con el símbolo $\mathbf{VR}_{\mathbf{m,n}}$.

Si descomponemos el recuento del número de estos grupos en cada uno de sus elementos observamos el número de posibilidades siguiente, que resume el diagrama de árbol correspondiente:

$\xrightarrow{m}$ $\boxed{\text{1º elemento}}$ $\xrightarrow{m}$ $\boxed{\text{2º elemento}}$ $\xrightarrow{m}$ $\boxed{\text{3º elemento}}$ .... $\xrightarrow{m}$ $\boxed{\text{último elemento}}$

Así, según el principio fundamental que hemos expuesto, tenemos que:

$$\mathbf{VR}_{\mathbf{m,n}} = \overbrace{\mathbf{m}\cdot\mathbf{m}\cdot\mathbf{m}\cdot\ldots\ldots\cdot\mathbf{m}}^{\mathbf{n}} = \mathbf{m}^{\mathbf{n}}$$

Observaciones

— *La base de esta potencia es el número de elementos del conjunto con el que trabajamos, es decir, el tipo de signos o elementos que pueden formar parte de las listas.*

— *El exponente de la potencia es el tamaño o longitud de las listas.*

— *En el recuento de las variaciones con posible repetición se cuentan todas las listas de m elementos que se pueden formar: tanto las listas con elementos repetidos como, si las hay, aque-*

llas cuyos elementos son todos distintos. No hay restricción alguna en este sentido. Cada lugar de la lista puede ser ocupado por cualquier elemento del conjunto.

Variaciones sin repetición

Variaciones ordinarias o variaciones sin repetición de m elementos tomados n a n $(n \leq m)$ son los distintos grupos que se pueden formar con los m elementos, de manera que:

- *En cada grupo entren n elementos distintos.*
- *Dos grupos son distintos si se diferencian en algún elemento o en el orden de colocación de los mismos.*

El número de variaciones sin repetición de m elementos tomados n a n se representa por $\mathbf{V_{m,n}}$.

Si, como se hizo anteriormente, para calcular el número posible de posibles grupos hacemos el recuento para cada uno de sus elementos por separado, obtenemos el número de posibilidades siguiente, que resume el diagrama en árbol correspondiente:

$$\xrightarrow{m} \boxed{1^{\text{o}} \text{ elemento}} \xrightarrow{m-1} \boxed{2^{\text{o}} \text{ elemento}} \xrightarrow{m-2} \boxed{3^{\text{o}} \text{ elemento}} \cdots\cdots \xrightarrow{m-(n-1)} \boxed{\text{último elemento}}$$

de modo que:

$$\mathbf{V_{m,n}} = \overbrace{\mathbf{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots\ldots \cdot (m-n+1)}}^{\text{n factores decrecientes}}$$

<u>*Observación*</u>

Se debe efectuar un producto de n factores (tantos como el número de elementos de cada lista), el primero de los cuales es m (número total de elementos con que se trabaja) y que van disminuyendo de unidad en unidad.

Permutaciones

Permutaciones sin repetición

Permutaciones ordinarias de n elementos son los distintos grupos que se pueden formar de manera que:

- *En cada grupo estén los n elementos.*
- *Un grupo se diferencia de otro únicamente en el orden de colocación de los elementos.*

El número de permutaciones ordinarias de n elementos se representa por $\mathbf{P_n}$. En realidad, es un caso particular de las variaciones sin repetición cuando $m = n$.

$$P_n = V_{n,n} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots\ldots \cdot (n-n+1)$$

$$\mathbf{P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots\ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Factorial de un número

Sea n un número natural mayor que 1. Se llama factorial de n al producto de los n primeros números naturales. El factorial de n se representa por $\mathbf{n!}$.

$$\mathbf{n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} \qquad \begin{cases} \mathbf{Si\ \ n = 1\ \ definimos\ \ 1! = 1} \\ \mathbf{Si\ \ n = 0\ \ definimos\ \ 0! = 1} \end{cases}$$

<u>**Utilización del factorial para el cálculo de variaciones y permutaciones**</u>

$$V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdots \cdots (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!}}$$

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n! \qquad \Rightarrow \quad \mathbf{P_n = n!}$$

Permutaciones con repetición

Permutaciones con repetición de n elementos donde el primer elemento se repite a veces, el segundo b veces,....., el último k veces ($a+b+c+.........+k=n$), son los distintos grupos que se pueden formar, de manera que:

- *En cada grupo de n elementos el primer elemento está a veces; el segundo elemento está b veces;.....*
- *En grupo se diferencia de otro únicamente por el orden de colocación de sus elementos.*

El número de permutaciones con repetición de n elementos, donde el primer elemento se repite a veces, el segundo b veces,......., el último k veces, se representa por $\mathbf{P_n^{a,b,.......,k}}$

$$\mathbf{P_n^{a,b,.......,k} = \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot c! \cdots \cdots k!}}$$

Combinaciones

Combinaciones sin repetición

Combinaciones ordinarias o sin repetición de m elementos tomados n a n ($n \leq m$) son los distintos grupos que se pueden formar con los m elementos, de manera que:

- *En cada grupo entren n elementos distintos.*
- *Dos grupos son diferentes si se diferencian en algún elemento, pero no en el orden de colocación.*

El número de combinaciones de m elementos tomados n a n se representa por $\mathbf{C_{m,n}}$.

$$\mathbf{C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{\frac{m!}{(m-n)!}}{n!} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}}$$

Observación *A este cociente se le conoce como paréntesis de Euler o número combinatorio, y se escribe* $\binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{m!}}{\mathbf{n!\cdot(m-n)!}}$**,** por tanto $\mathbf{C}_{\mathbf{m},\mathbf{n}} = \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{m!}}{\mathbf{n!\cdot(m-n)!}}$

Combinaciones con repetición

Combinaciones con repetición de m elementos tomados n a n $(n \le m)$ son los distintos grupos que se pueden formar con los m elementos, de manera que:

- *En cada grupo entren n elementos repetidos o no.*
- *Dos grupos son diferentes si se diferencian en algún elemento, pero no en el orden de colocación.*

El número de combinaciones con repetición de m elementos tomados n a n se representa por $\mathbf{CR}_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$.

$$\mathbf{CR}_{\mathbf{m},\mathbf{n}} = \binom{\mathbf{m+n-1}}{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{(m+n-1)!}}{\mathbf{n!\cdot(m-1)!}}$$

Problema general

En una empresa hay 5 plazas vacantes, de las que 3 corresponden a hombres y 2 a mujeres. Se han presentado 10 hombres y 8 mujeres.

a) ¿De cuántas formas distintas se pueden cubrir las vacantes?

b) ¿Cuántas posibilidades habrá si las plazas de los hombres tienen todas distinta remuneración?

c) ¿Cuántas posibilidades habrá si tanto las plazas de los hombres como las de las mujeres tienen distinta remuneración?

d) ¿De cuántas maneras se pueden ordenar en fila los 10 hombres y las 8 mujeres?

e) ¿De cuántas maneras se pueden ordenar en fila los 10 hombres y las 8 mujeres si los hombres deben estar juntos y las mujeres también?

a) El número de formas distintas de elegir a los hombres es: $C_{10,3} = \frac{V_{10,3}}{P_3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 120$

El número de formas distintas de elegir a las mujeres: $C_{8,2} = \frac{V_{8,2}}{P_2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$

El número de formas distintas de cubrir las vacantes: $C_{10,3} \cdot C_{8,2} = 120 \cdot 28 = 3360$

b) El número de formas distintas de elegir a los hombres es: $V_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

El número de formas distintas de elegir a las mujeres: $C_{8,2} = \frac{V_{8,2}}{P_2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$

El número de formas distintas de cubrir las vacantes: $V_{10,3} \cdot C_{8,2} = 720 \cdot 28 = 20160$

c) El número de formas distintas de elegir a los hombres es: $V_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

El número de formas distintas de elegir a las mujeres: $V_{8,2} = 8 \cdot 7 = 56$

El número de formas distintas de cubrir las vacantes: $V_{10,3} \cdot V_{8,2} = 720 \cdot 28 = 40320$

d) Se pueden ordenar de: $P_{18} = 18! = 6.402.373.705.000.000$

e) Los hombres se pueden ordenar de: $P_{10} = 10! = 3.628.800$

Las mujeres se pueden ordenar de: $P_8 = 8! = 40.320$

El número de ordenaciones posibles, si los hombres deben estar juntos y las mujeres también es:

$$2 \cdot P_{10} \cdot P_8 = 292.626.432.000$$

El doble del producto, ya que los hombres pueden estar situados delante de las mujeres o detrás.