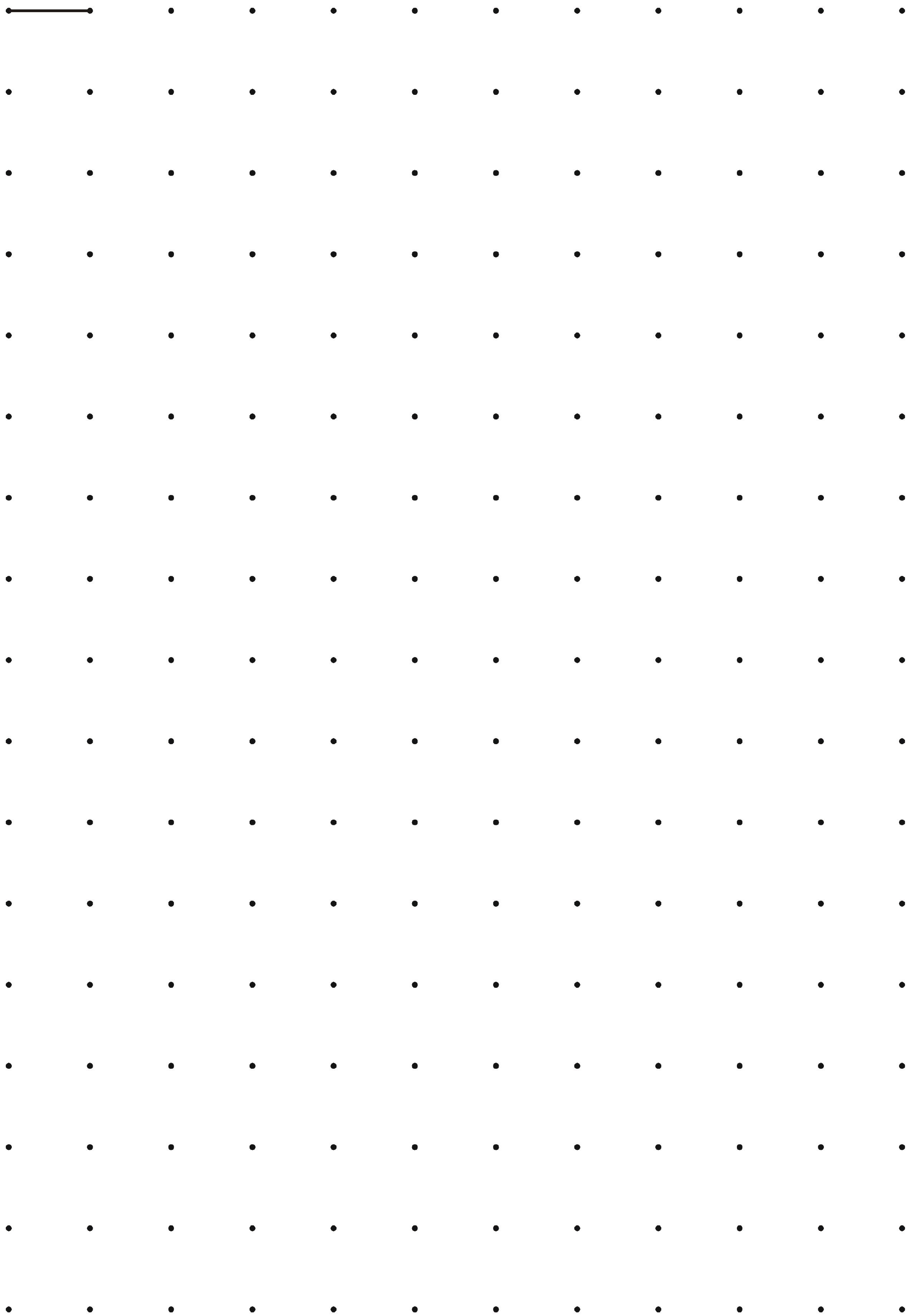
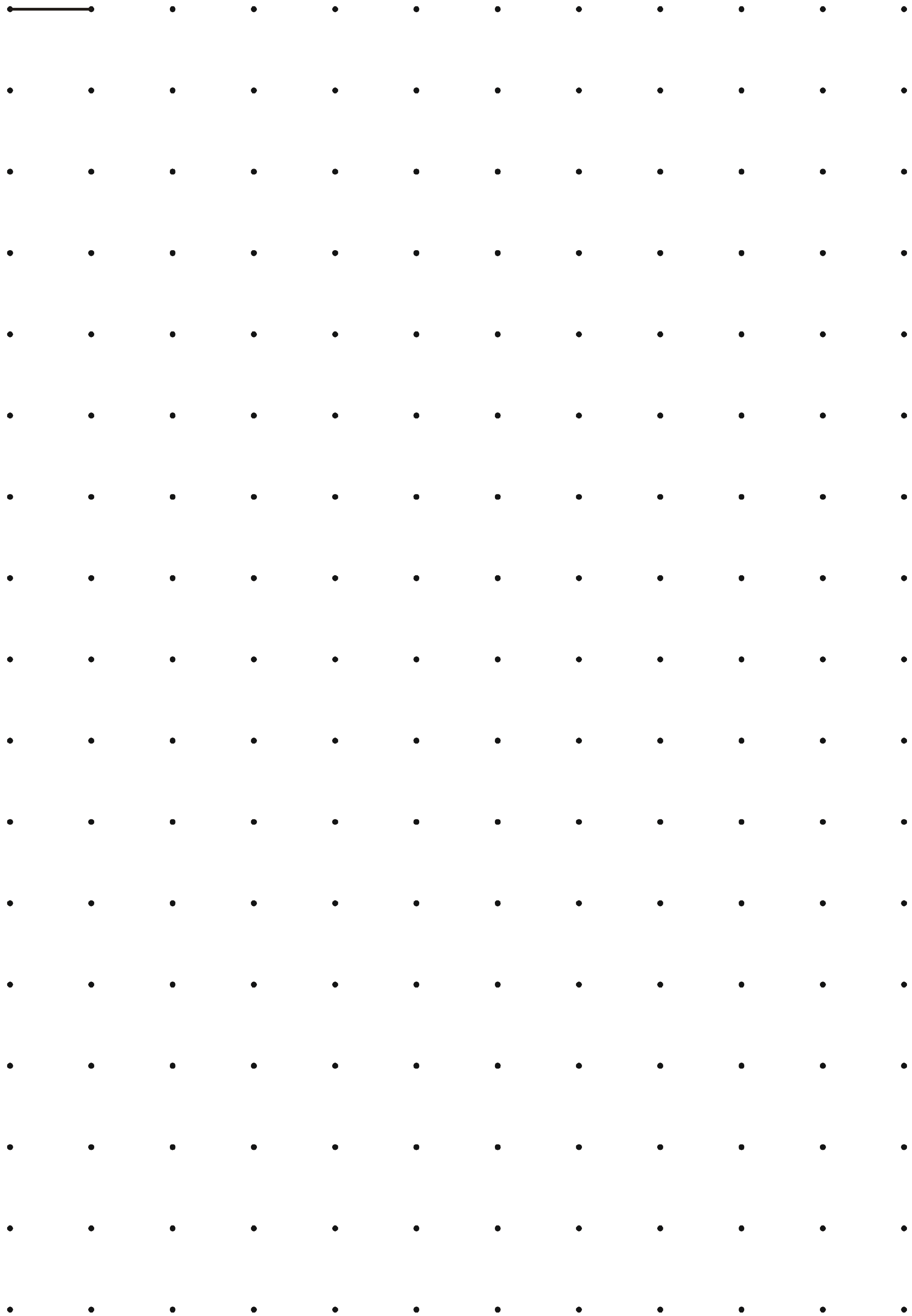
Trigonometría

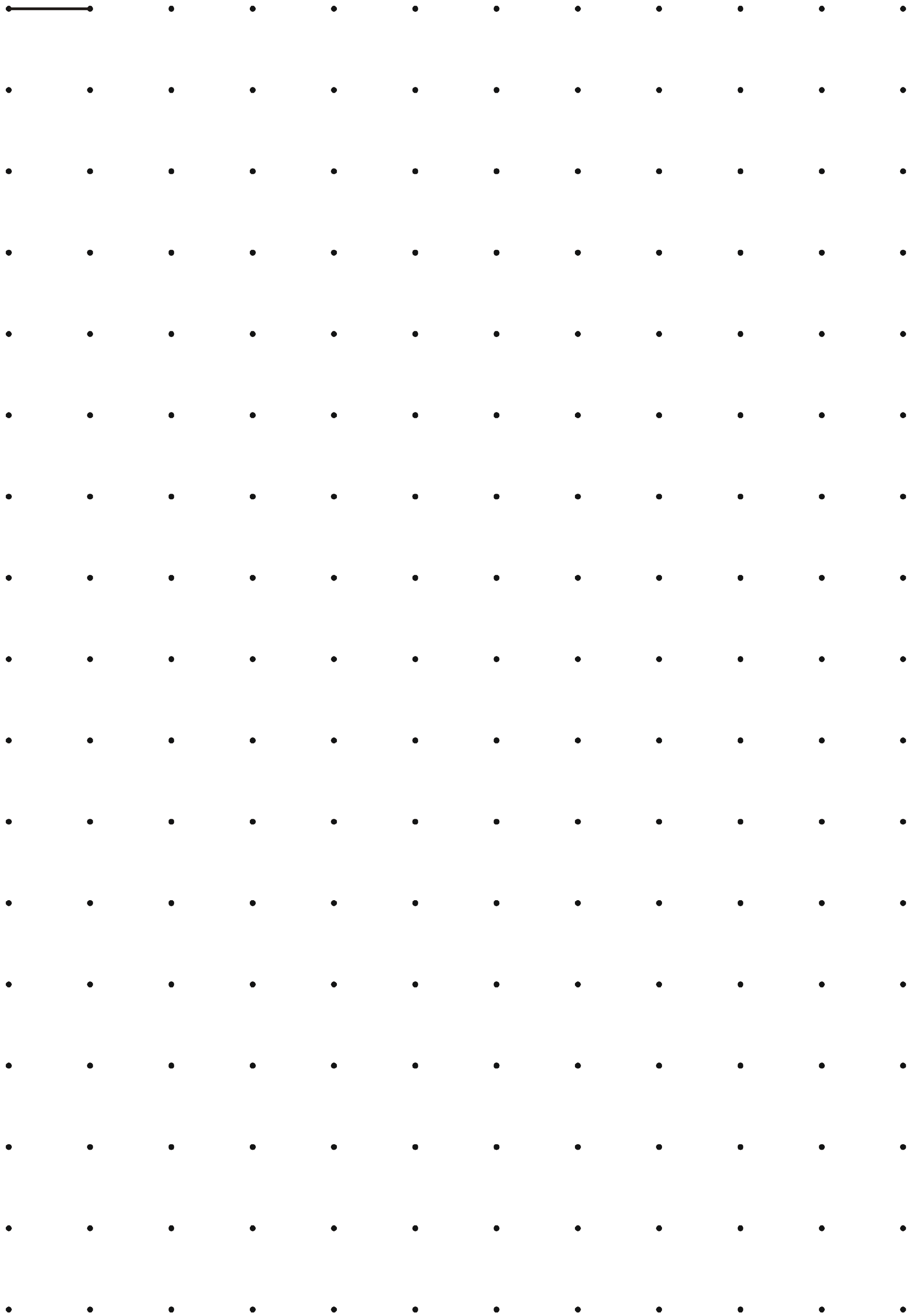
Trama de puntos
Teorema de Pitágoras
Semejanza
Triángulos rectángulos
Medidas angulares

Teorema de Pitágoras

1) Calcula longitudes de segmentos cuyos extremos estén en la trama de puntos de la ficha adjunta, siendo la unidad de medida el segmento indicado en la hoja.
2) En la trama de puntos de la siguiente hoja, dibuja *todos los cuadrados cuya área sea distinta* y ordénalos según la longitud del lado, escribiendo su valor encima de un lado. Utiliza el siguiente proceso:
   a) En una hoja con la trama de puntos comienza dibujando todos los cuadrados rectos, *uno de cuyos vértices siempre permanece fijo* en el primer punto de la primera línea de la primera columna de la trama de puntos.
   b) En otra hoja distinta, dibuja todos los cuadrados distintos entre sí y a los del apartado anterior, *uno de cuyos vértices siempre permanece fijo* en el punto situado en la segunda línea y primera columna.
   c) En otra hoja distinta, dibuja todos los cuadrados distintos entre sí y a los de los apartados anteriores, *uno de cuyos vértices siempre permanece fijo* en el punto situado en la tercera línea y primera columna.
   d) Sigue este proceso hasta conseguir todos los cuadrados posibles distintos que caben en la trama de puntos, utilizando en cada proceso una hoja distinta.
   e) ¿Cuántos cuadrados distintos son posibles?

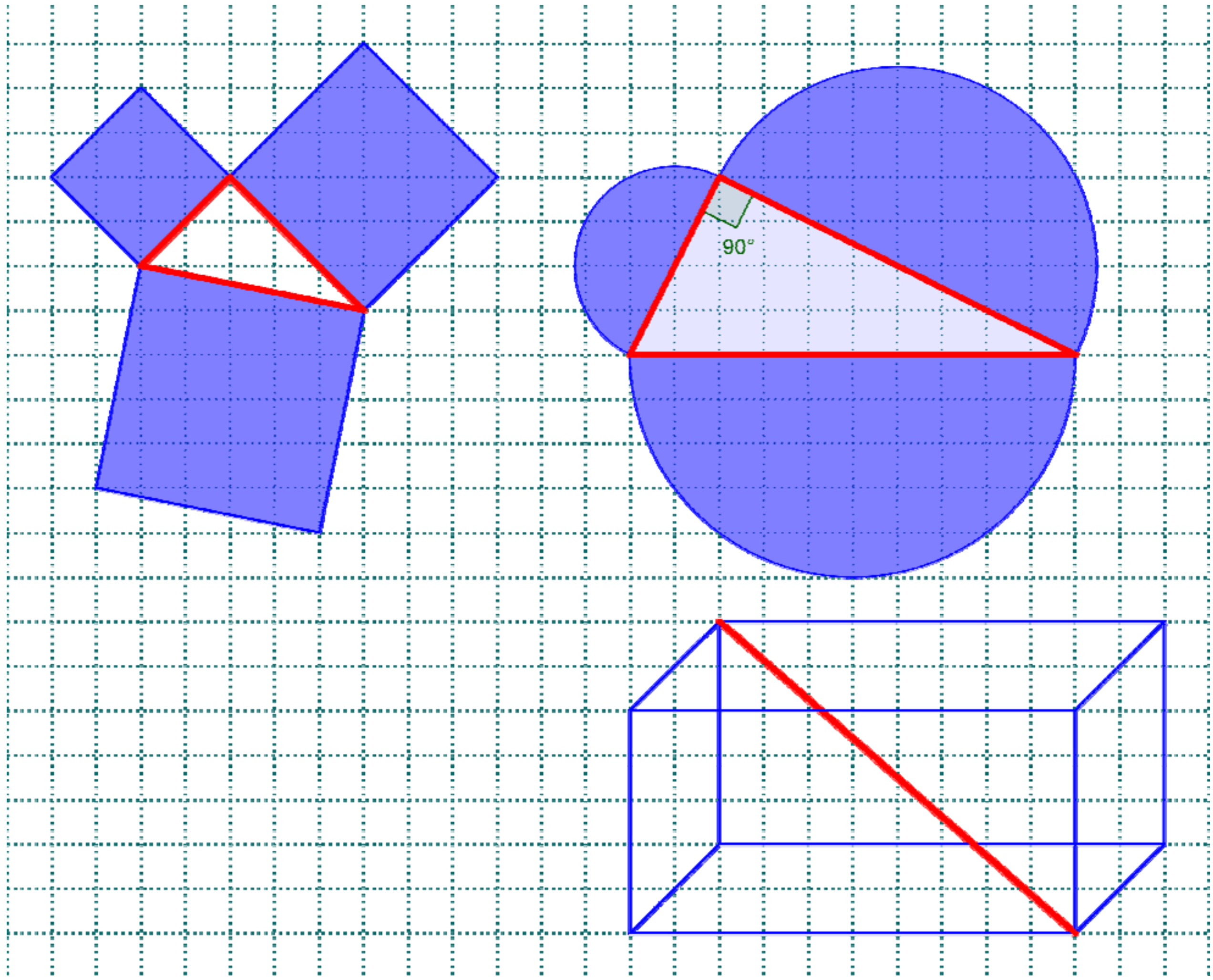






Teorema de Pitágoras

1) Comprueba que en las dos primeras figuras se verifica que la suma de las áreas de las figuras sombreadas dibujadas sobre los catetos del triángulo rectángulo coincide con el área de la figura sombreada dibujada sobre la hipotenusa del triángulo.
2) Según lo anterior, enuncia el Teorema de Pitágoras y aplícalo para calcular la diagonal del paralelepípedo de la tercera figura.
3) En la misma trama de puntos dibuja otro triángulo rectángulo distinto de los anteriores y haz la comprobación del teorema de Pitágoras.



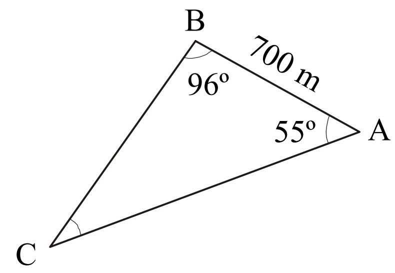
Construir triángulos

Si los ángulos de un triángulo los representamos por las letras mayúsculas A, B y C y los lados opuestos a dichos ángulos por las letras minúsculas a, b y c respectivamente, construir los siguientes triángulos utilizando la regla, el compás y el transportador de ángulos:

a) Dados los tres lados cuyos valores son de 5, 6 y 8 cm.
b) Dados dos lados de 4 y 7 cm y el ángulo comprendido entre ellos de 60º.
c) Dado el lado $a = 6\,\text{cm}$ y los ángulos $B = 45^{\circ}$ y $C = 105^{\circ}$.
d) Dado los lados $b = 7\,\text{cm}$ y $c = 4\,\text{cm}$ y el ángulo $C = 25^{\circ}$. ¿Cuántas soluciones hay?
e) Dados los tres lados cuyos valores son de 9, 6 y 3 cm. ¿Qué conclusión sacas?
f) Construye un triángulo a escala cuyos lados miden 750 m, 880 m y 930 m.

Distancia a un punto no accesible

a) Estamos en A y queremos saber la distancia desde A hasta C, pero no podemos medir directamente la distancia deseada ya que nuestro rumbo es en la dirección de B. Podemos construir un triángulo como el que indica la figura y así saber cuantos metros hay de A hasta C.

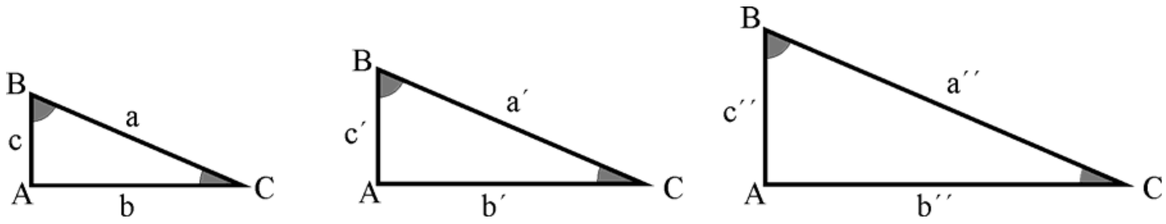


b) Calcula la distancia AB entre dos puntos situados a ambos lados de un río, sabiendo que un tercer punto C está en la misma orilla que B y que se conocen las siguientes medidas: $BC = 67\,\text{m}$ $ABC = 99^{\circ}$ y $ACB = 20^{\circ}$.

c) Desde la terraza del edificio más alto de Ondara vemos Pedreguer y Denia bajo un ángulo de 80º. Si la distancia que hay en línea recta de Ondara a Denia es de 7'6 km y de Ondara a Pedreguer es de 3'8 km, calcula la distancia que hay entre Denia y Pedreguer.

Triángulos semejantes. Seno, coseno y tangente de un ángulo

a) Dos triángulos son semejantes si sus ángulos son, respectivamente, iguales y sus lados homólogos proporcionales. Los ángulos de un triángulo se representan con letras mayúsculas y los lados opuestos a dichos ángulos se representan con la misma letra pero minúscula. En los triángulos siguientes calcula, utilizando la regla y el semicírculo graduado, la longitud de los lados y el valor de los ángulos.



Sustituye el valor de los datos obtenidos anteriormente en las tres tablas siguientes, donde T1 es el primer triángulo, T2 el segundo y T3 el tercero.

T1	**a**	**b**	**c**
a			
b	$\frac{b}{a} = \frac{2'9}{3'1} = 0'9354$		$\frac{b}{c} =$
c	$\frac{c}{a} =$	$\frac{c}{b} =$	

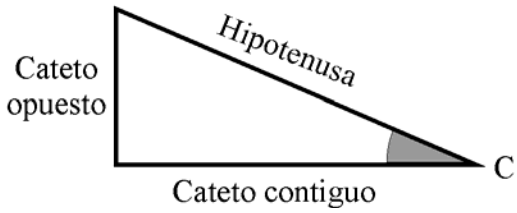
T2	**a′**	**b′**	**c′**
a′			
b′	$\frac{b'}{a'} =$		$\frac{b'}{c'} =$
c′	$\frac{c'}{a'} =$	$\frac{c'}{b'} =$	

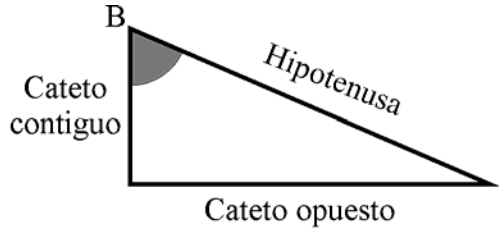
T3	**a″**	**b″**	**c″**
a″			
b″	$\frac{b''}{a''} =$		$\frac{b''}{c''} =$
c″	$\frac{c''}{a''} =$	$\frac{c''}{b''} =$	

b) Puesta en común en la pizarra de los resultados obtenidos en las tablas anteriores por todos los alumnos. ¿A qué conclusiones se puede llegar?

c) Comprueba que tu calculadora está en MODE DEG (grados sexagesimales). Pulsa la tecla SIN, a continuación escribe uno de los ángulos agudos de los triángulo rectángulos y finaliza con =. Haz lo mismo con las teclas COS y TAN para el mismo ángulo. ¿Ves alguna relación entre los resultados obtenidos con la calculadora y los obtenidos en la tabla? Haz el mismo proceso con el otro ángulo agudo del triángulo rectángulo. ¿Ves alguna relación entre estos resultados y los obtenidos en la tabla?

d) Según lo anterior, *en todo triángulo rectángulo* se verifica:





$$\text{Seno de un ángulo} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \text{Tangente de un ángulo} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$$

$$\text{Coseno de un ángulo} = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}$$

Teorema de Pitágoras $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$

Aplicando estas definiciones a los triángulos dibujados al comienzo de la página anterior obtenemos:

$$\operatorname{sen} C = \frac{c}{a} \qquad \cos C = \frac{b}{a} \qquad \tan C = \frac{c}{b} \qquad \operatorname{sen} B = \frac{b}{a} \qquad \cos B = \frac{c}{a} \qquad \tan B = \frac{b}{c}$$

e) *<u>¿Cómo calcular el valor del ángulo conocido su seno, coseno o tangente?</u>*
Si conocemos el valor numérico del seno, coseno o tangente de un ángulo y queremos conocer dicho ángulo pulsamos en la calculadora la tecla $\sin^{-1}, \cos^{-1}$ ó $\tan^{-1}$ según que el valor conocido sea el seno, coseno o tangente y a continuación introducimos el número correspondiente.

<u>Ejemplo</u> Supongamos que $\cos\alpha = 0'74$ y queremos saber cuánto vale el ángulo α. Con la calculadora en MODE DEG pulsamos la tecla $\cos^{-1}$, a continuación introducimos el número $0'74$ y finalizamos con =.

El valor que nos devuelve la calculadora es $42'268584^{\circ}$. Si queremos conocer los grados minutos y segundos correspondientes a este ángulo pulsamos la tecla ° ’ ” y la calculadora nos devuelve el valor $42^{\circ}\,16'\,6.904''$ que se lee 42 grados, 16 minutos y 6’904 segundos.

Problemas resueltos

1) Si sen$\alpha = \frac{3}{5}$, calcula cosα y tanα utilizando la calculadora ($\alpha < 90^o$).

Solución

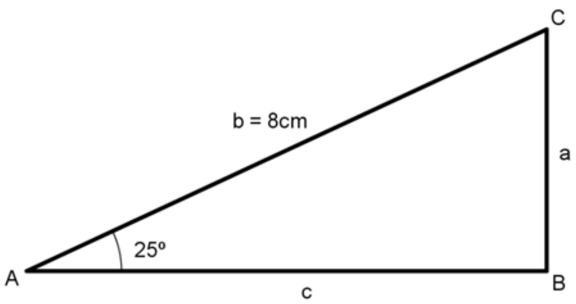
$$\text{sen}\alpha = \frac{3}{5} \qquad \alpha = \text{arcsen}\frac{3}{5} = 36'8698^o \qquad \cos 36'8698^o = 0'8 \qquad \tan 36'8698^o = 0'75$$

2) En un triángulo rectángulo se sabe que la hipotenusa mide 8 cm y que uno de sus ángulos es de 25º. Calcula los dos catetos y el ángulo que falta. Comprueba los resultados obtenidos midiendo directamente.

Solución

$$\sin 25^o = \frac{a}{8} \quad \Rightarrow \quad a = 8 \cdot \sin 25^o = 3'38\,\text{cm}$$

$$\cos 25^o = \frac{c}{8} \quad \Rightarrow \quad c = 8 \cdot \cos 25^o = 7'25\,\text{cm}$$

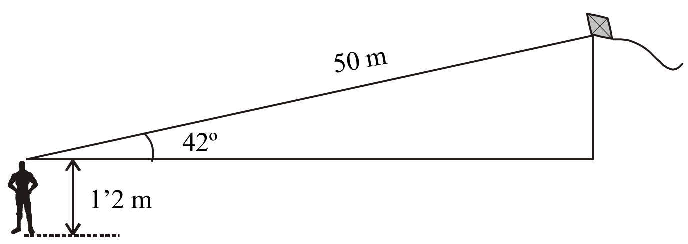


Otra manera de calcular "c" es por el T^a de Pitágoras:

$$b^2 = a^2 + c^2 \qquad 8^2 = 3'38^2 + c^2 \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{8^2 - 3'38^2} = 7'25\,\text{cm}$$

El ángulo que falta es $C = 180^o - 90^o - 25^o = 65^o$

3) ¿A qué altura del suelo se encuentra la cometa?



Solución

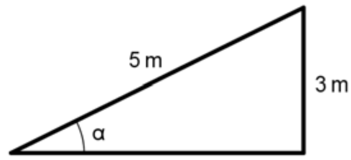
$$\text{sen}42^o = \frac{x}{50} \qquad x = 50 \cdot \text{sen}42^o = 33'45\,\text{m} \quad \Rightarrow \quad h = 33'45\,\text{m} + 1'2\,\text{m} = 34'65\,\text{m}$$

4) **Un tobogán tiene una altura máxima de 3 m y una longitud de 5 m. ¿Cuál es su inclinación?**

Solución

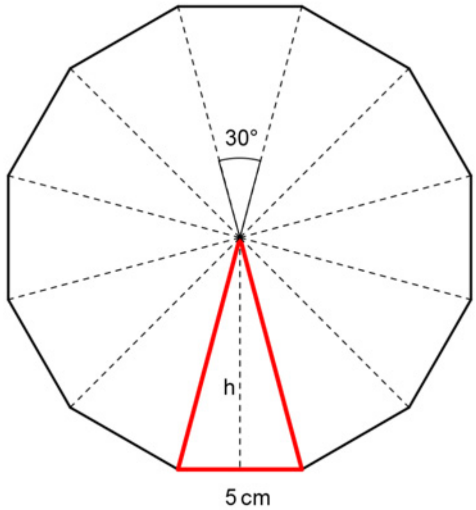
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$$

$$\alpha = \arcsin\frac{3}{5} = 36'87^{\circ}$$

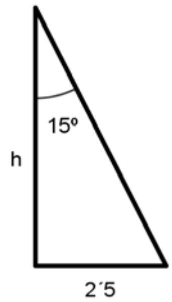


5) **Calcula el área de un dodecágono regular de 5 cm de lado.**

Solución



$$\frac{360^{\circ}}{12} = 30^{\circ} \qquad \tan 15^{\circ} = \frac{2'5}{h} \qquad h = \frac{2'5}{\tan 15^{\circ}} = 9'33\,\text{cm}$$



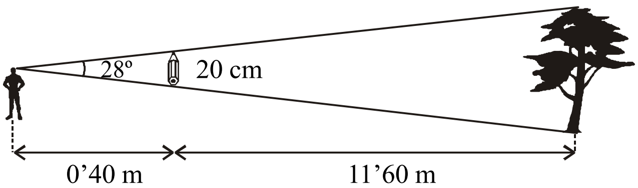
Área del triángulo isósceles:

$$A_T = \frac{5\,\text{cm}\cdot 9'33\,\text{cm}}{2} = 23'325\,\text{cm}^2$$

Área del Dodecágono:

$$A_D = 12\cdot A_T = 12\cdot 23'32 = 279'84\,\text{cm}^2$$

6) **Calcula la altura del árbol de la figura**



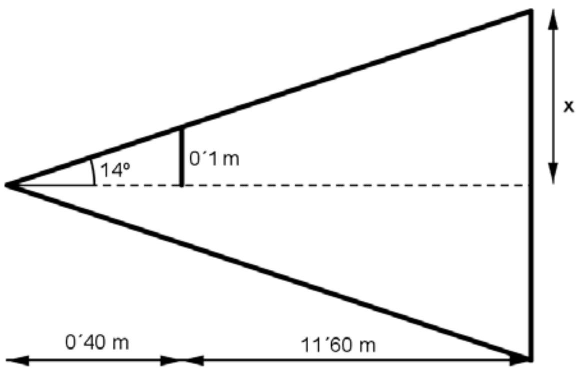
Solución

$$\tan 14^{\circ} = \frac{x}{11'60 + 0'40} = \frac{x}{12}$$

$$x = 12\cdot\tan 14^{\circ} = 2'991\,\text{m}$$

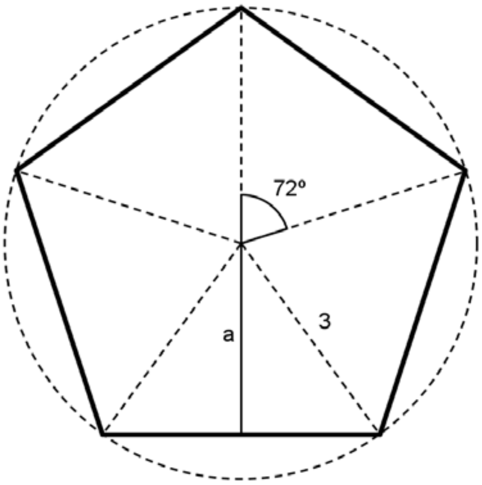
$$2x = 2\cdot 2'991 = 5'982\,\text{m}$$

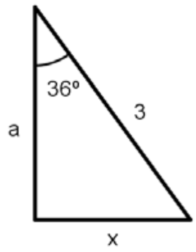
Observamos que el lápiz no es relevante para resolver el problema.



7) Un pentágono se inscribe en un círculo de radio 3 cm. Hallar su lado y su apotema.

Solución





$$\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

$$\frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$$

$$\cos 36^\circ = \frac{a}{3} \quad \Rightarrow \quad a = 3 \cdot \cos 36^\circ = 2'427 \text{ cm}$$

$$\text{sen} 36^\circ = \frac{x}{3} \quad \Rightarrow \quad x = 3 \cdot \text{sen} 36^\circ = 1'763 \text{ cm}$$

El lado "x" también lo podemos calcular aplicando el Teorema de Pitágoras.

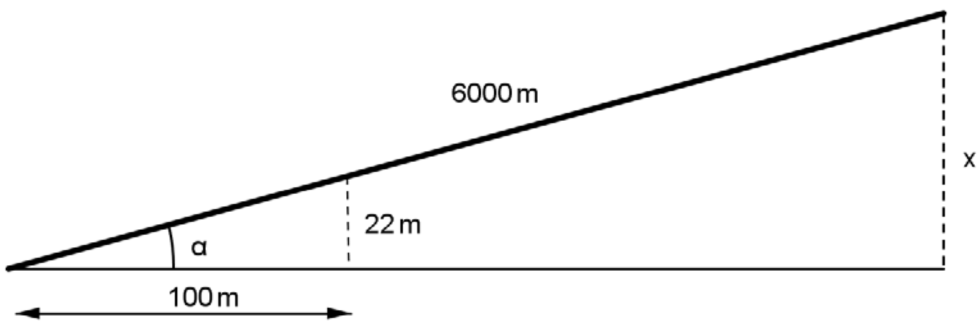
$$3^2 = a^2 + x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{3^2 - a^2} = \sqrt{9 - 2'427^2} = 1'763 \, \text{cm}$$

El lado del pentágono mide $2x = 2 \cdot 1'763 = 3'526 \, \text{cm}$

La apotema del pentágono mide $a = 2'427 \, \text{cm}$

8) Subimos con una bicicleta un puerto de montaña cuya ladera permite que el trazado de la carretera sea recto. Si la pendiente de la carretera es del 22% ¿a qué altura nos encontraremos cuando el cuentakilómetros marque 6 km?

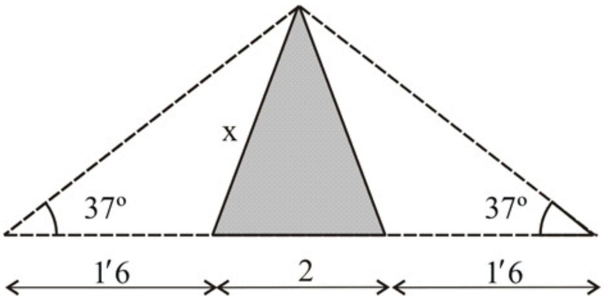
Solución



$$\tan \alpha = \frac{22}{100} = 0'22 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan 0'22 = \tan^{-1} 0'22 = 12'407^\circ$$

$$\text{sen}\, 12'407^\circ = \frac{x}{6000} \quad \Rightarrow \quad x = 6000 \cdot \text{sen} 12'407^\circ = 1289'12 \, \text{m} = 1'289 \, \text{km}$$

9) Hallar la longitud de los vientos que sujetan la tienda de campaña y la longitud del lado x.

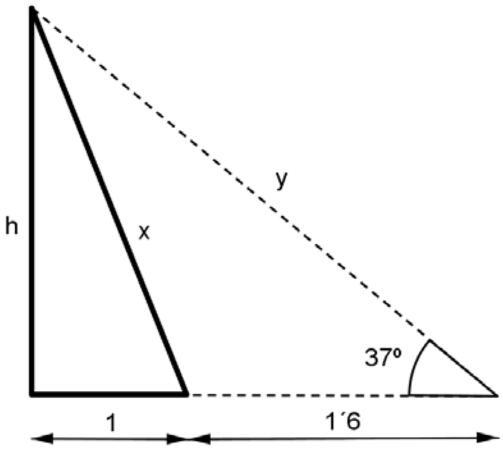


Solución

$$\tan 37^{\circ}=\frac{h}{1'6} \quad \Rightarrow \quad h=1'6\cdot\tan 37^{\circ}=1'205\,\text{m}$$

$$x^2=h^2+1^2 \quad \Rightarrow \quad x=\sqrt{1'205^2+1}=1'565\,\text{m}$$

$$y^2=h^2+2'6^2 \quad \Rightarrow \quad y=\sqrt{1'205^2+2'6^2}=2'865\,\text{m}$$

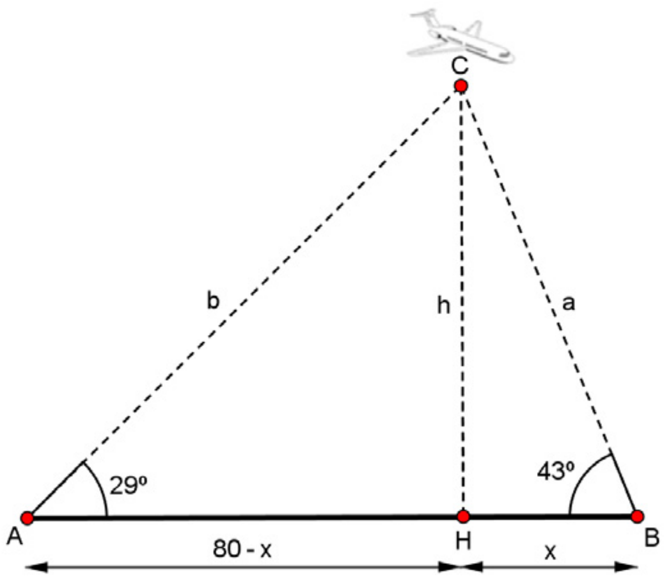


10) Desde dos ciudades A y B que distan 80 km. se observa un avión. Las visuales desde el avión a A y a B forman ángulos de 29º y 43º con la horizontal, respectivamente. ¿A qué altura está el avión? ¿A qué distancia se encuentra de cada ciudad?

Solución

El problema tiene dos posibles soluciones: a) que el avión se encuentre entre las dos ciudades y b) que las dos ciudades se encuentren a un mismo lado del avión.

a) Si el avión está situado entre las dos ciudades.



Tenemos dos triángulos rectángulos: el ACH y el BCH.

En el triángulo ACH se verifica:

$$\tan 29^o = \frac{h}{80-x} \quad \Rightarrow \quad h = \tan 29^o (80-x) = 0'554(80-x) = 44'32 - 0'554\,x$$

En el triángulo BCH se verifica:

$$\tan 43^o = \frac{h}{x} \quad \Rightarrow \quad h = \tan 43^o \cdot x = 0'932\,x$$

Igualando las dos expresiones tenemos una ecuación cuya incógnita es “x”.

$$44'32 - 0'554\,x = 0'932\,x \qquad\qquad 44'32 = 0'932\,x + 0'554\,x$$

$$44'32 = 1'486\,x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{44'32}{1'486} = 29'82\,\text{m}$$

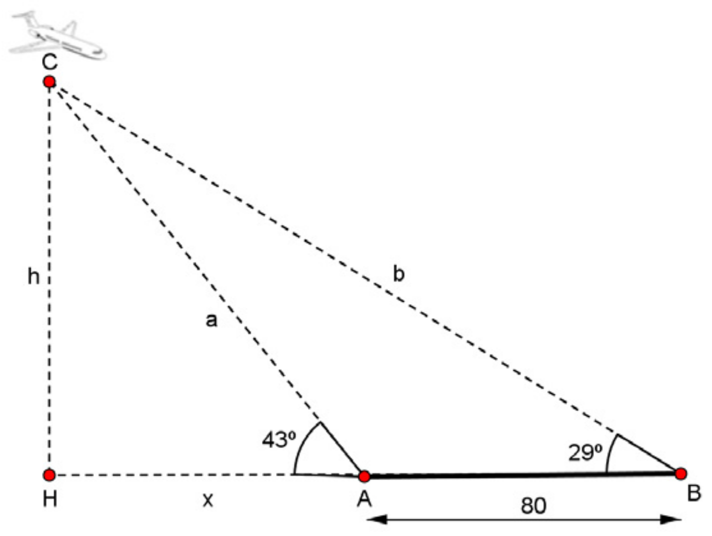
Sustituyendo este valor en la expresión de la altura obtenemos h.

$$h = 0'932 \cdot 29'82 = 27'792\,\text{m}$$

$$\text{sen}29^o = \frac{h}{b} = \frac{27'792}{b} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{27'792}{\text{sen}29^o} = \frac{27'792}{0'484} = 57'421\,\text{m}$$

$$\text{sen}43^o = \frac{h}{a} = \frac{27'792}{a} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{27'792}{\text{sen}43^o} = \frac{27'792}{0'681} = 40'81\,\text{m}$$

b) Si las dos ciudades se encuentran a un mismo lado del avión.



Tenemos dos triángulos rectángulos: el ACH y el BCH.

En el triángulo ACH se verifica:

$$\tan 43^o = \frac{h}{x} \quad \Rightarrow \quad h = \tan 43^o \cdot x = 0'932 \cdot x$$

En el triángulo BCH se verifica:

$$\tan 29^{o} = \frac{h}{80+x} \quad \Rightarrow \quad h = \tan 29^{o}(80+x) = 0'554\cdot(80+x) = 44'32 + 0'554\,x$$

Igualando las dos expresiones tenemos una ecuación cuya incógnita es “x”.

$$0'932\,x = 44'32 + 0'554\,x \qquad 0'932\,x - 0'554\,x = 44'32$$

$$0'378\,x = 44'32 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{44'32}{0'378} = 117'248\,m$$

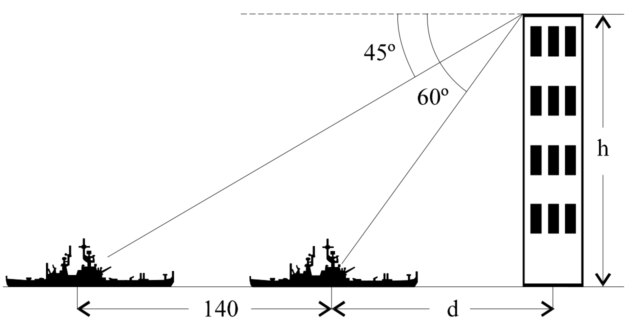
Sustituyendo este valor en la expresión de la altura obtenemos h.

$$h = 0'932\cdot 117'248 = 109'275\,m$$

$$sen29^{o} = \frac{h}{b} = \frac{109'275}{b} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{109'275}{sen29^{o}} = \frac{109'275}{0'484} = 225'77\,m$$

$$sen43^{o} = \frac{h}{a} = \frac{109'275}{a} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{109'275}{sen43^{o}} = \frac{109'275}{0'681} = 160'46\,m$$

11) El ángulo bajo el cual se ve un barco desde un rascacielos mide 45º. Cuando el barco ha recorrido 140 m dicho ángulo es de 60º. Calcula la altura del rascacielos sobre el nivel del mar y la distancia del barco a la vertical del rascacielos en el momento de la segunda observación.

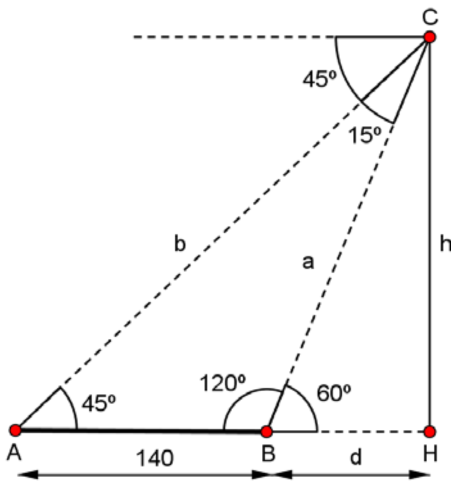


Solución

En el triángulo rectángulo ACH se verifica:

$$\tan 45^{o} = \frac{h}{140+d}$$

$$h = \tan 45^{o}(140+d) = 140 + d$$



En el triángulo rectángulo BCH se verifica:

$$\tan 60^{o} = \frac{h}{d} \quad \Rightarrow \quad h = \tan 60^{o}\cdot d = 1'732\,d$$

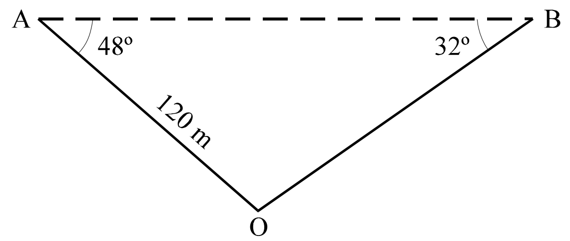
Igualando las dos expresiones:

$$140 + d = 1'732\,d \qquad 140 = 1'732\,d - d$$

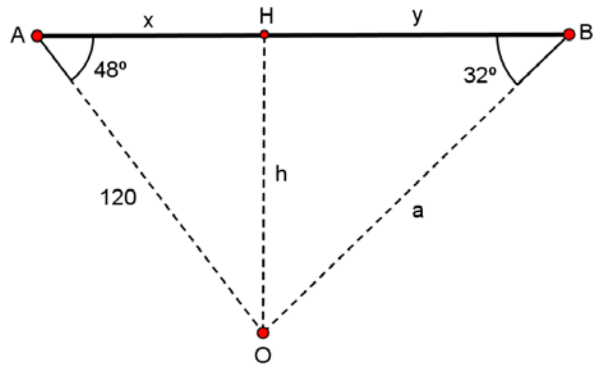
$$140 = 1'732\,d - d \qquad 0'732\,d = 140 \quad \Rightarrow \quad d = \frac{140}{0'732} = 191'25\,m$$

$$h = 140 + 191'25 = 331'25\,m$$

12) Calcula la longitud del puente que se quiere construir entre los puntos A y B, para lo cual se sabe que los ángulos ABO y OAB miden 32º y 48º respectivamente y que la distancia entre A y O, medida en línea recta es 120 m.



Solución



La longitud del puente es la suma de las longitudes x e y.

En el triángulo rectángulo AHO se verifica:

$$\text{sen}48^{\circ} = \frac{h}{120}$$

$$h = \text{sen}48^{\circ} \cdot 120 = 89'177\,\text{m}$$

En el triángulo rectángulo AHO se verifica:

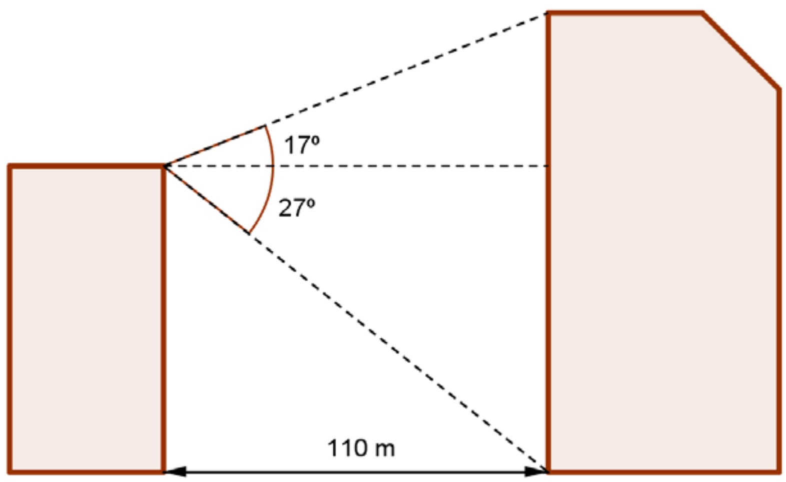
$$\tan 48^{\circ} = \frac{h}{x} = \frac{89'177}{x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{89'177}{\tan 48^{\circ}} = \frac{89'177}{1'11} = 80'34\,\text{m}$$

En el triángulo rectángulo BHO se verifica:

$$\tan 32^{\circ} = \frac{h}{y} = \frac{89'177}{y} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{89'177}{\tan 32^{\circ}} = \frac{89'177}{0'624} = 142'91\,\text{m}$$

La longitud del puente es $x + y = 80'34 + 142'91 = 223'25\,\text{m}$

13) Calcular la altura de ambos edificios.



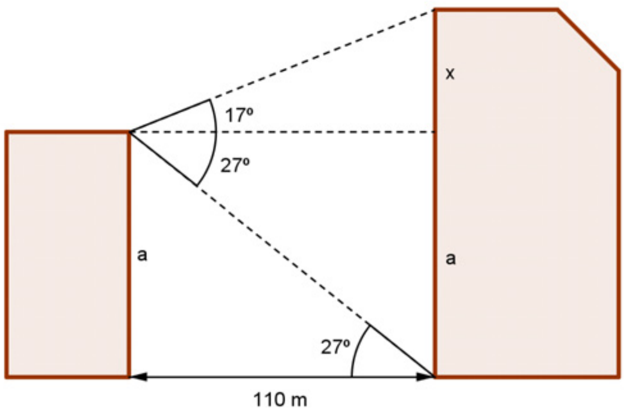
Solución

$$\tan 27^\circ = \frac{a}{110} \Rightarrow a = \tan 27^\circ \cdot 110 = 56'04\,\text{m}$$

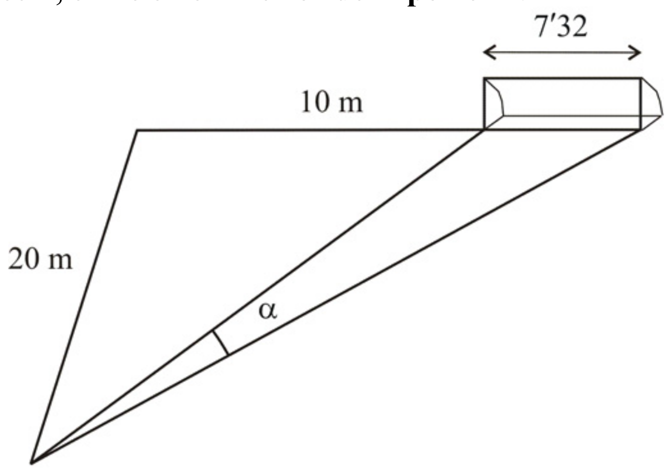
$$\tan 17^\circ = \frac{x}{110} \qquad x = \tan 17^\circ \cdot 110 = 33'63\,\text{m}$$

Las alturas de los edificios son $56'04\,\text{m}$ y

$$a + x = 56'04 + 33'63 = 89'67\,\text{m}$$



14) La figura adjunta representa una parte de un campo de fútbol. Si la distancia de la portería a la esquina del campo (corner) es de 10 m y desde esta esquina caminamos por la banda lateral del campo 20 m, calcula el valor que tiene que tener α para que al golpear al balón, en línea recta, entre en el interior de la portería.



Solución

$$\alpha = \theta - \beta$$

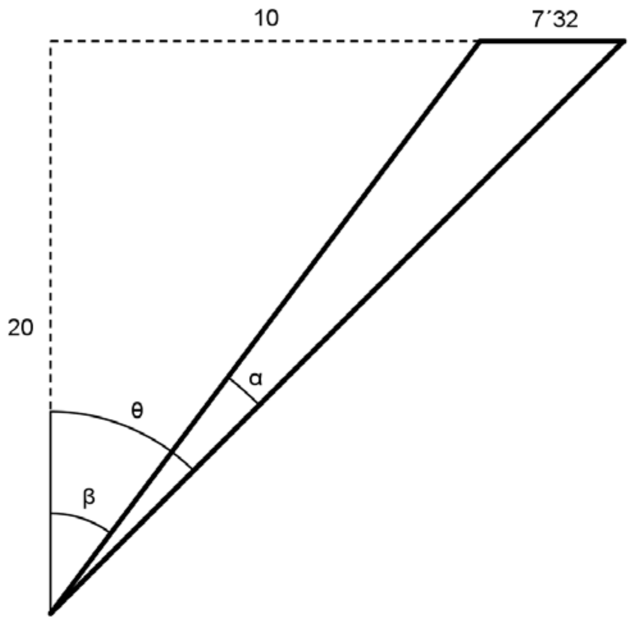
$$\tan\theta = \frac{10 + 7'32}{20} = \frac{17'32}{20} = 0'866$$

$$\theta = \arctan 0'866 = 40'892^\circ$$

$$\tan\beta = \frac{10}{20} = 0'5$$

$$\beta = \arctan 0'5 = 26'565^\circ$$

$$\alpha = \theta - \beta = 40'892^\circ - 26'565^\circ = 14'327^\circ$$

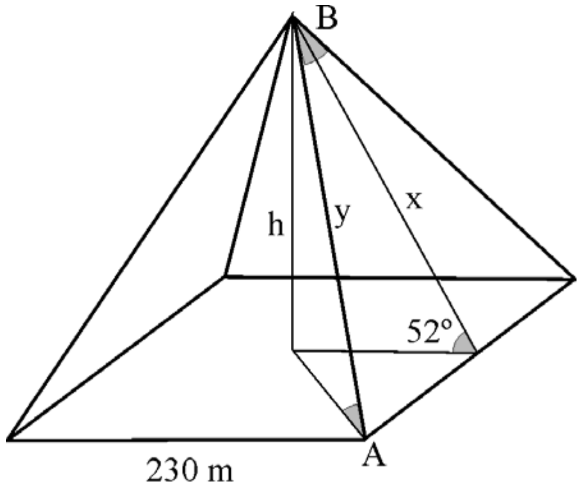


15) **En la pirámide de Keops de base cuadrada, el lado de la base mide 230 m y el ángulo que forma una cara con la base es de 52º. Calcula:**

a) **La altura de la pirámide (h), la altura de la cara (x) y la arista (y).**

b) **Ángulo de la arista con la base (A) y ángulo de la cara en la cúspide de la pirámide (B).**

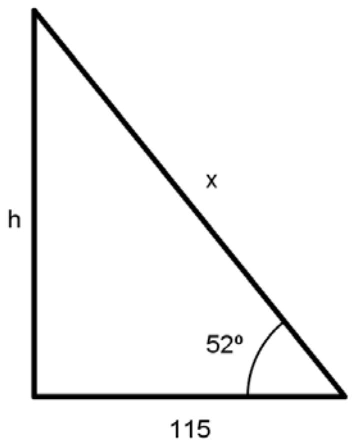
c) **Área y volumen de la pirámide. (busca en el último tema de los apuntes llamado Miscelánea las fórmulas de la pirámide)**



Solución

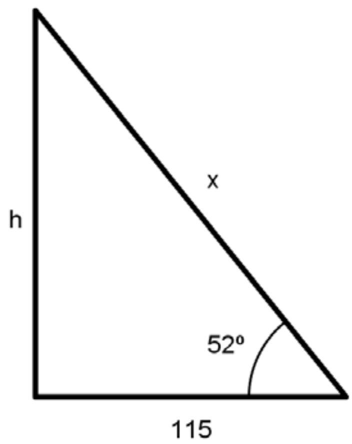
a) Calculamos primero la diagonal del cuadrado que forma la base de la pirámide.

$$d^2 = 230^2 + 230^2 = 105800 \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{105800} = 325'27\,\text{m} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{2} = \frac{325'27}{2} = 162'635\,\text{m}$$



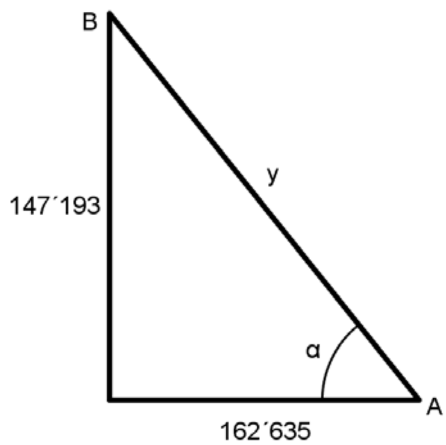
$$\tan 52^\circ = \frac{h}{115}$$

$$h = \tan 52^\circ \cdot 115 = 147'193\,\text{m}$$



$$\cos 52^\circ = \frac{115}{x}$$

$$x = \frac{115}{\cos 52^\circ} = 186'79\,\text{m}$$



$$y^2 = 147'193^2 + 162'635^2$$

$$y = 219'353\,\text{m}$$

b) El ángulo que forma la arista de la pirámide con la base es:

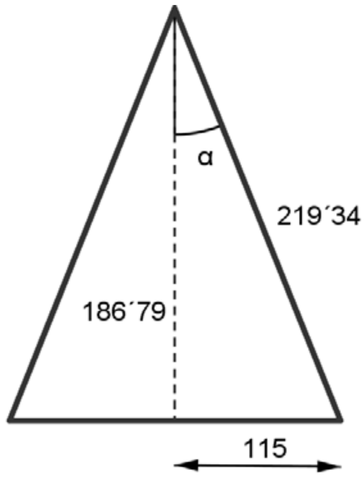
$$\tan\alpha = \frac{147'193}{162'635} = 0'905 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan 0'905 = 42'147^\circ$$

El ángulo de la cara en la cúspide de la pirámide es:

$$\tan\alpha = \frac{115}{186'79} = 0'6156$$

$$\alpha = \arctan 0'6156 = 31'6191^{\circ}$$

$$2\alpha = 63'2382^{\circ}$$

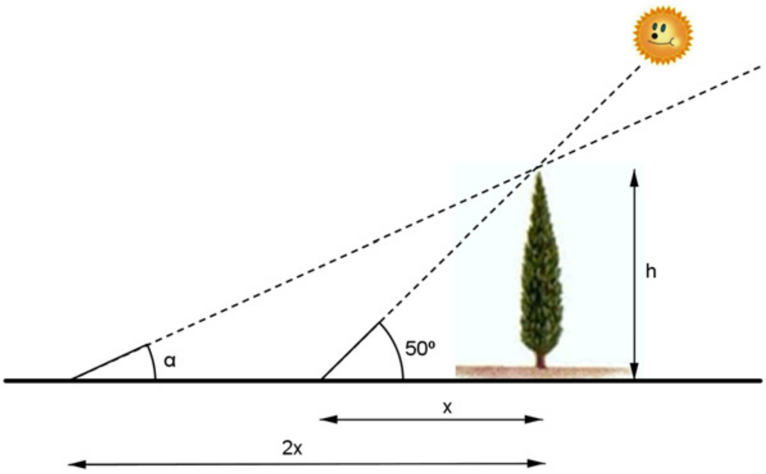


c) $A = \text{Área de la base} + 4\ \text{Área del triángulo que forman las caras}$

$$A = 230^2 + 4\cdot\frac{230\cdot x}{2} = 230^2 + 4\cdot\frac{230\cdot 186'79}{2} = 138823'4\,m^2$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot \text{Área de base} \times \text{Altura} = \frac{1}{3}\cdot 230^2\cdot 147'19 = 17682'39667\,m^3$$

16) Un árbol tiene determinada sombra cuando el sol se observa bajo un ángulo de elevación de 50º. ¿Bajo qué ángulo proyectará una sombra el doble que la anterior?



Solución

Como se observa en el dibujo adjunto, hay 2 triángulos rectángulos, el ADC y el BDC.

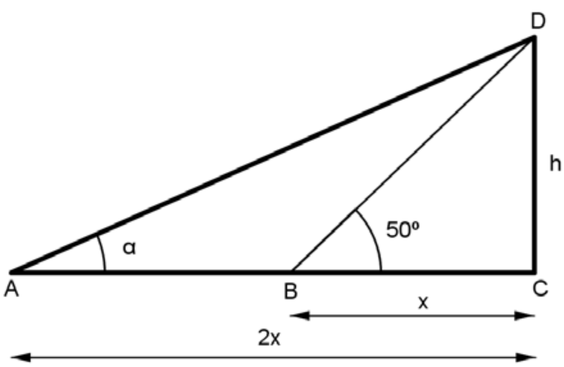
En ADC se verifica:

$$\tan\alpha = \frac{h}{2x} \quad\Rightarrow\quad h = 2x\tan\alpha$$

En ADC se verifica:

$$\tan 50^{\circ} = \frac{h}{x} \quad\Rightarrow\quad h = x\tan 50^{\circ} = 1'191\,x$$

Igualando las dos expresiones:

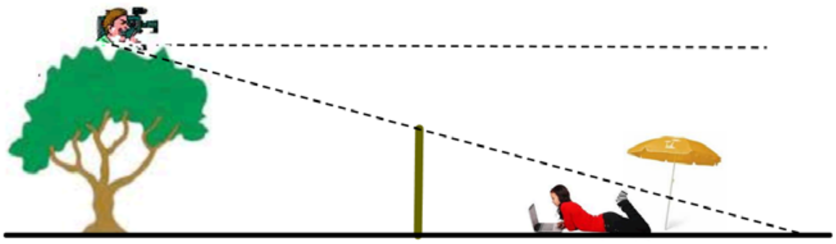


$$2x\tan\alpha = 1'191x \qquad \tan\alpha = \frac{1'191\cancel{x}}{2\cancel{x}} = \frac{1'191}{2} = 0'595 \qquad \alpha = \arctan 0'595 = 30'752^{\circ}$$

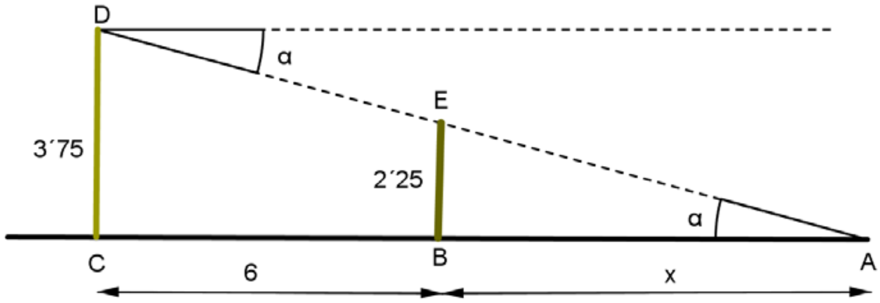
17) Un paparazzi pretende fotografiar a una actriz que se encuentra trabajando en el jardín de su casa, y para ello se sube a un árbol de 3’75 m de altura. Si la distancia desde el árbol a la tapia del jardín es de 6 m y la altura de la tapia es de 2’25 m calcular:

a) Bajo qué ángulo observará la propiedad del actor?

b) ¿Cuál es la máxima separación del muro a la que podrá tumbarse la actriz si no desea ver turbada su intimidad?



<u>*Solución*</u>



a) Como se observa en el dibujo hay dos triángulos rectángulos, el ABE y el ACD.

En el triángulo ABE se verifica: $\tan\alpha = \dfrac{2'25}{x}$

En el triángulo ACD se verifica: $\tan\alpha = \dfrac{3'75}{6+x}$

Igualando los segundos miembros de las dos expresiones calculamos el valor de “x”.

$$\frac{2'25}{x} = \frac{3'75}{6+x} \qquad 2'25(6+x) = 3'75x \qquad 13'5 + 2'25x = 3'75x$$

$$13'5 = 1'5x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{13'5}{1'5} = 9\,\text{m}$$

$$\tan\alpha = \frac{2'25}{9} = 0'25 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan 0'25 = 14'036^{\circ}$$

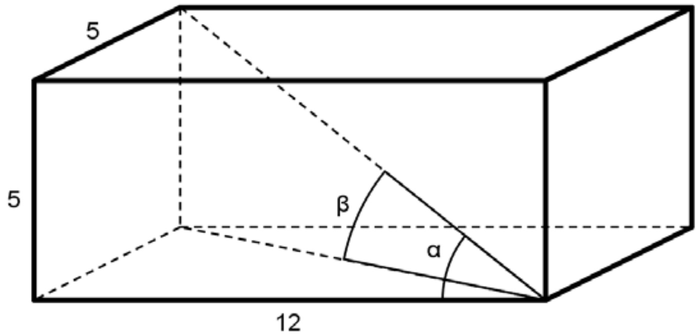
El ángulo bajo el que el paparazzi observa la propiedad de la actriz es de $14'036^{\circ}$

b) La máxima distancia del muro a la que puede tumbarse la actriz sin ser vista por el paparazzi es de 9 m.

18)

a) Hallar el valor del ángulo α que forma la arista de la base con la diagonal del paralelepído.

b) Hallar el valor del ángulo β que forma la diagonal del paralelepído con la diagonal de la base.

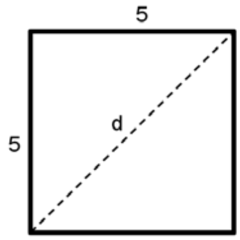


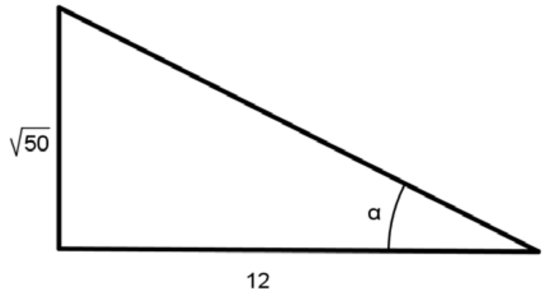
Solución

a) $d^2 = 5^2 + 5^2 \qquad d = \sqrt{50}$

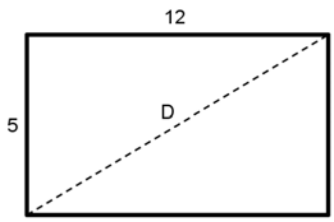
$$\tan\alpha = \frac{d}{12} = \frac{\sqrt{50}}{12}$$

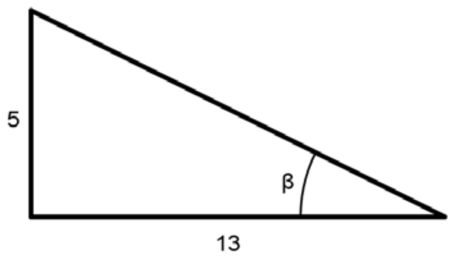
$$\alpha = \arctan\frac{\sqrt{50}}{12} = 30'498^{\circ}$$





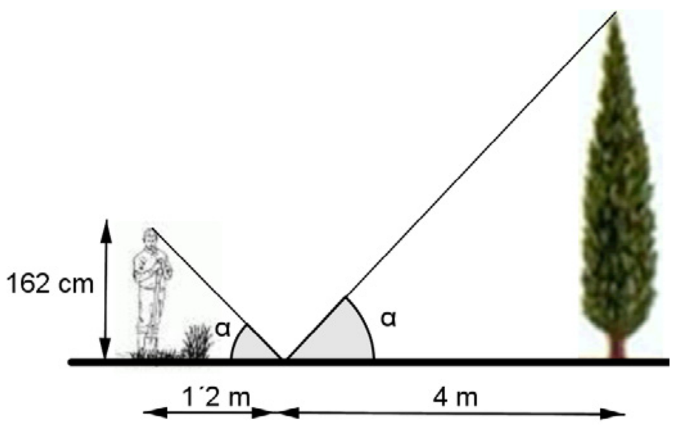
b)





$$D^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow \quad D = 13 \qquad \tan\beta = \frac{D}{13} = \frac{5}{13} \Rightarrow \beta = \arctan\frac{5}{13} = 21'03^{\circ}$$

19) Para calcular la altura de un árbol, Eduardo ve la copa reflejada en un charco y toma las medidas que indica el dibujo. ¿Cuál es la altura del árbol?



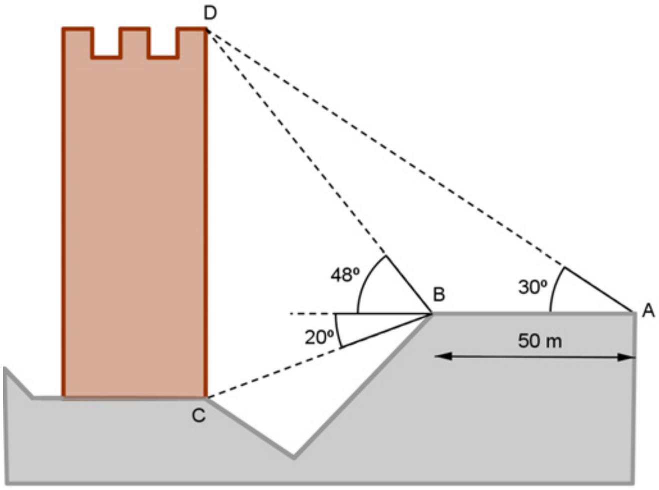
Solución

Según las leyes de la óptica geométrica se verifica que, el rayo de luz que incide en una superficie, el rayo reflejado y la normal a la superficie están todos en un mismo plano y además se verifica que el ángulo de incidencia y el de reflexión son iguales.

$$\tan \alpha = \frac{1'62}{1'2} = 1'35 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan 1'35 = 53'4711^o$$

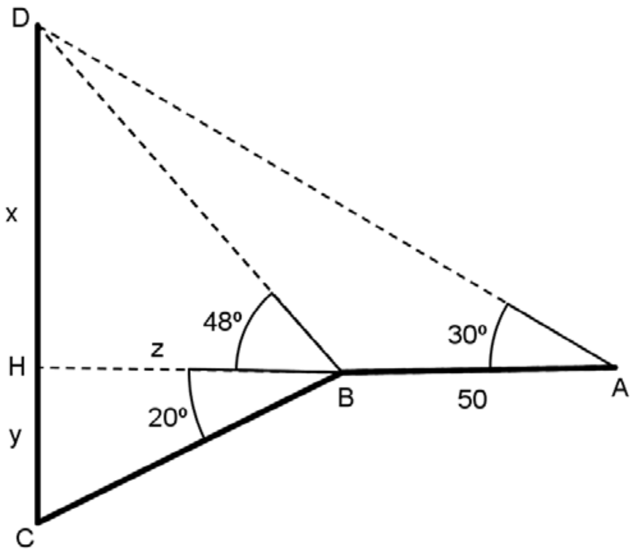
$$\tan 53'4711^o = \frac{h}{4} \quad \Rightarrow \quad h = 4 \cdot \tan 53'4711^o = 5'4\,m$$

20) Halla la altura CD de la torre de pie inaccesible y más bajo que el punto de observación, con los datos de la figura.



Solución

Como se observa en el dibujo hay 3 triángulos rectángulos: ADH, BDH y BHC. La altura de la torre será la suma de las distancias $\overline{DH} + \overline{HC} = x + y$.



En el triángulo BDH se verifica:

$$\tan 48^o = \frac{x}{z} \quad \Rightarrow \quad x = z \cdot \tan 48^o$$

En el triángulo ADH se verifica:

$$\tan 30^o = \frac{x}{50+z} \quad \Rightarrow \quad x = (50+z)\tan 30^o$$

Igualando las expresiones resultantes:

$$z \cdot \tan 48^o = (50+z)\tan 30^o \qquad 1'11z = 50\tan 30^o + z\tan 30^o \qquad 1'11z = 28'86 + 0'577z$$

$$1'11z - 0'577z = 28'86 \qquad 0'533z = 28'86 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{28'86}{0'533} = 54'146\,m$$

$$x = z \cdot \tan 48^o = 54'146 \cdot \tan 48^o = 60'135\,m$$

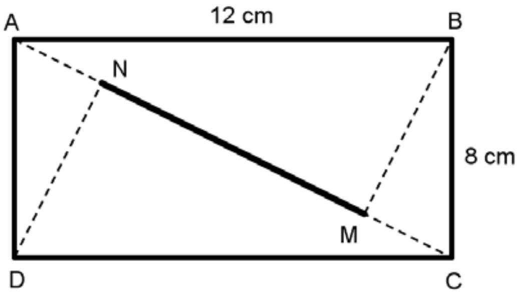
En el triángulo BHC se verifica:

$$\tan 20^{\circ} = \frac{y}{z} = \frac{y}{54'146} \quad \Rightarrow \quad y = 54'146 \cdot \tan 20^{\circ} = 19'70\,\text{m}$$

La altura de la torre es $x + y = 60'135 + 19'70 = 79'835\,\text{m}$

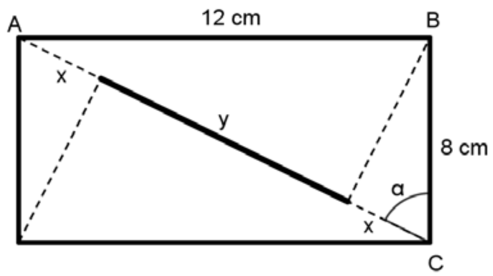
21)

En un rectángulo ABCD de lados 8 y 12 cm se traza desde B una perpendicular a la diagonal AC, y desde D, otra perpendicular a la misma diagonal. Hallar la longitud del segmento de diagonal que determinan las dos perpendiculares.



<u>*Solución*</u>

Calculamos la diagonal del rectángulo aplicando el teorema de Pitágoras.



$$\overline{AC}^2 = 12^2 + 8^2 = 208 \qquad \overline{AC} = 14'422$$

$$\overline{AC} = 2x + y = 14'422$$

En el triángulo rectángulo ABC se verifica: $\tan\alpha = \dfrac{12}{8} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan\dfrac{12}{8} = 56'31^{\circ}$

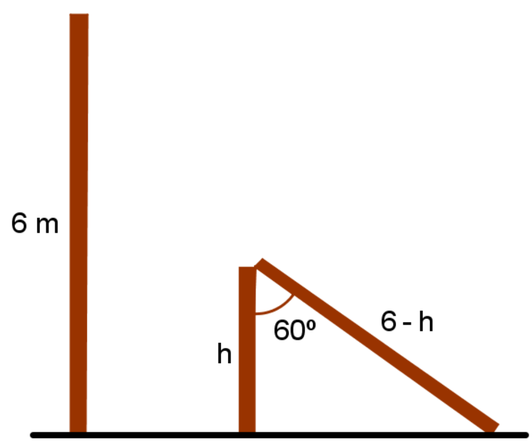
En el triángulo rectángulo BCM se verifica:

$$\cos\alpha = \frac{x}{8} \qquad \cos 56'31^{\circ} = \frac{x}{8} \quad \Rightarrow \quad x = 8 \cdot \cos 56'31^{\circ} = 4'437\,\text{cm}$$

$$2x + y = 14'422 \qquad 2 \cdot 4'437 + y = 14'422 \qquad y = 14'422 - 2 \cdot 4'437 = 5'548\,\text{cm}$$

22) Un poste de 6 m de altura es alcanzado por un rayo partiéndolo a una altura "h" del suelo. La parte superior se desploma quedando unida a la parte inferior formando un ángulo de 60º con ella. ¿Cuánto mide la parte rota más larga del poste? Redondea a un decimal la respuesta.

<u>*Solución*</u>



$$\cos 60^{\circ} = \frac{h}{6-h} \qquad h = \cos 60^{\circ}(6-h)$$

$$h = 6 \cdot \cos 60^{\circ} - h \cdot \cos 60^{\circ}$$

$$h + h \cdot \cos 60^{\circ} = 6 \cdot \cos 60^{\circ}$$

$$h + 0'5\,h = 3 \qquad 1'5h = 3$$

$$h = \frac{3}{1'5} = 2\,\text{m}$$

El trozo que se ha partido mide $6 - 2 = 4\,\text{m}$

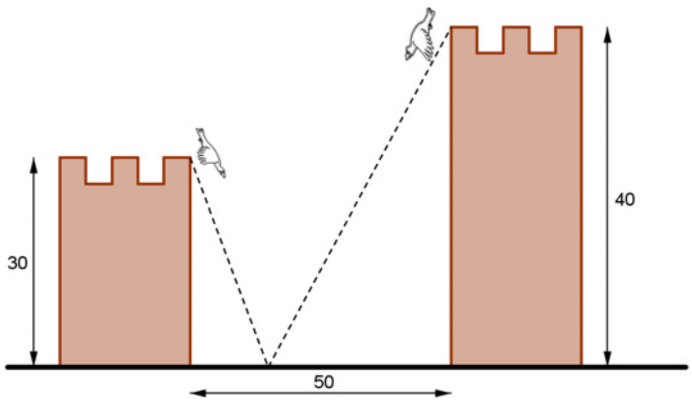
Problemas propuestos

1) **Dos edificios distan entre sí 150 metros. Desde un punto que está entre los dos edificios, vemos que las visuales a los puntos más altos de estos forman con la horizontal ángulos de 35° y 20°. ¿Cuál es la altura de los edificios, si sabemos que los dos miden lo mismo?**

2) **Calcula el área de un rombo cuyo lado mide 6 cm. y uno de sus ángulos 150°.**

3) **Una estatua de 2,5 m está colocada sobre un pedestal. Desde un punto del suelo se ve el pedestal bajo un ángulo de 15º y la estatua bajo un ángulo de 40º. Calcula la altura del pedestal.**

4) **Dos torres, una de 30 pasos y otra de 40 pasos están separadas 50 pasos. Entre las dos torres se encuentra una fuente hacia la que descienden dos pájaros que están en las almenas de las torres. Yendo a igual velocidad llegan al mismo tiempo. ¿A qué distancia de las torres se encuentra la fuente?**



5) **Dibuja un triángulo rectángulo cualquiera y construye sobre sus lados un polígono regular cualquiera. ¿Se verifica el teorema de Pitágoras? Demuéstralo con un ejemplo y haz los cálculos.**

6) **Desde una llanura hay que levantar la vista 20º para dirigirla hacia la bandera en lo alto de la torre de un castillo. Si avanzamos en línea recta 200 m, tenemos que levantar la vista 30º. ¿A qué altura está la bandera?**

7) **Desde un chiringuito en una playa se observa un barco en altamar y un faro en la costa bajo un ángulo de 60º. El faro está a 500 m. del chiringuito y también se observa desde allí el barco. El ángulo bajo el cuál se observan el barco y el chiringuito es de 40º. ¿A qué distancia está el barco del faro?**

8) **Se desean construir unas gradas para una piscina olímpica. Las gradas deben estar inclinadas 45º y tener una longitud (desde la primera fila hasta la última, allá en lo alto) de 50 m. Como no hay terreno suficiente se ha pensado en colocar las últimas vigas (las que soportarán la última fila) inclinadas "hacia dentro" en vez de verticales, pero vigas de las características adecuadas para tan especial disposición sólo las hay de 55 m.**
a) ¿A qué altura quedará la última fila?
b) ¿Cuánto se "mete hacia dentro" el pie de la última viga?
c) ¿Qué inclinación respecto a la vertical tendrá esa viga?

9) **Un globo está sujeto al suelo mediante un cable de 100 m de longitud. El viento es tan intenso que el cable, tenso, se desvía 15º de la vertical. Desde un punto algo alejado del de sujeción hay que levantar la vista 60º desde la horizontal para dirigir la mirada al globo.**

a) ¿Qué distancia hay en vertical del globo al suelo?
b) ¿Qué distancia hay desde el punto algo alejado hasta el globo?
c) ¿Qué distancia hay entre el punto anterior y el de sujeción?

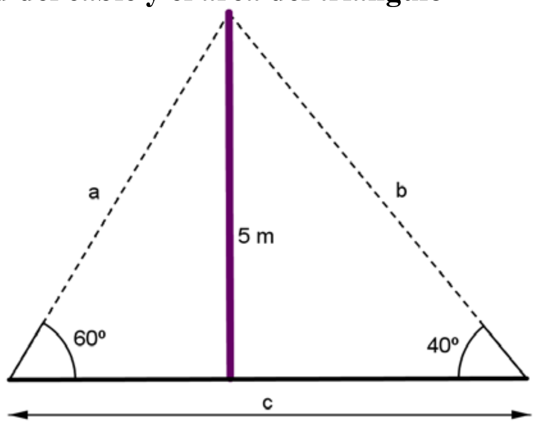
10) Las tangentes a una circunferencia de centro *O*, trazadas desde un punto exterior *P*, forman un ángulo de 50°. Halla la distancia *PO* sabiendo que el radio de la circunferencia es 12,4 cm.

11) En una ruta de montaña una señal indica una altitud de 785 m. Tres kilómetros más adelante (suponemos que la carretera es recta), la altitud es de 1065 m. Halla la pendiente media de esa ruta y el ángulo que forma con la horizontal.

12) Desde la orilla de un río, observamos la copa de un árbol situado en la otra orilla, bajo un ángulo de 60º. Si nos retiramos 10 m. de la orilla, el ángulo de observación es de 45º. Calcular la altura del árbol y la anchura del río.

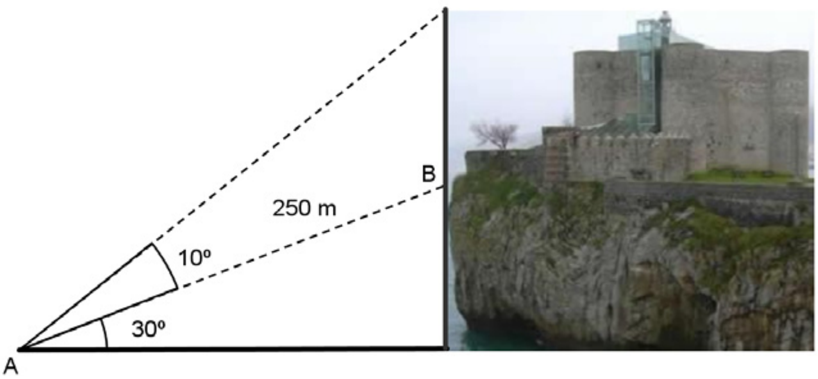
13) Calcula los ángulos de un rombo cuyas diagonales miden 12 cm y 8 cm. ¿Cuánto mide el lado del rombo?

14) Un mástil de 5 m se ha sujetado al suelo con un cable como muestra la figura. Halla el valor de "c", la longitud del cable y el área del triángulo



15) En un triángulo rectángulo uno de los catetos mide el doble que el otro.
a) Llama *x* al cateto menor y expresa en función de *x* el otro cateto y la hipotenusa.
b) Halla las razones trigonométricas del ángulo menor.
c) ¿Cuánto miden los ángulos de ese triángulo?

16) Para calcular la altura de un castillo hemos medido los ángulos que se indican en la figura. Sabemos que hay un funicular para ir de A a B cuya longitud es de 250 m. Halla la altura del castillo.

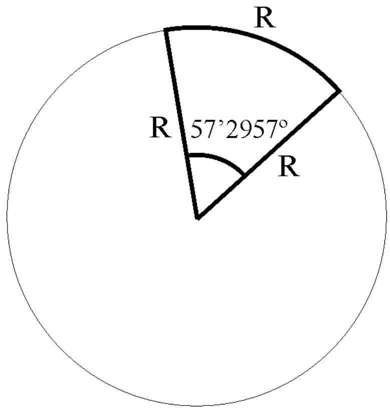


Medidas angulares 1

1)
   a) Dibuja un punto en el papel y coloca un semicírculo graduado centrado en dicho punto.
   b) Traza una línea con el lápiz alrededor del semicírculo y mide la longitud de su radio, por ejemplo con el compás.
   c) Lleva esta medida sobre un hilo, cordón de zapatos o algo similar (que el cordón sea más bien fino que grueso) haciendo dos marcas sobre él o cortando el trozo con unas tijeras.
   d) Haz una marca en el arco que has dibujado (por ejemplo en la mitad) que tomaremos como origen. Haz coincidir una de las marcas del cordón con la que acabas de hacer en el arco y bordea con el cordón el semicírculo. Haz otra marca en el arco que coincida con la segunda marca del cordón.
   e) Mide el ángulo central que abarca dicho arco utilizando el transportador de ángulos.
   f) Hacer una tabla con los distintos ángulos obtenidos en la clase y calcular la media aritmética.
   g) Comparar este valor con el obtenido al dividir 360º entre 2π.

2)

Definición de ***Radián***:
Un radián es la medida del ángulo central que abarca un arco cuya longitud es igual al radio con el que se ha trazado dicho arco.



Conocemos por definición que π *es el cociente de dividir la longitud de una circunferencia cualquiera entre su diámetro*, entonces

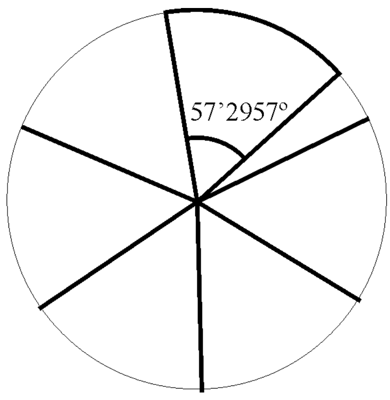
$$\pi = \frac{L}{2R} \rightarrow L = 2\pi R \Rightarrow R = \frac{L}{2\pi}$$

El valor de 1 radián es $\frac{360^o}{2\pi} = 57'2957^o = 57^o17'45''$

3)
   a) ¿Cuántas veces está contenida la longitud del arco en la circunferencia?

   Como 360º equivale a 2π radianes y la longitud de la circunferencia es $2\pi R$, el nº de veces que la longitud del arco está contenido en la circunferencia es

$$\frac{2\pi R}{R} = 2\pi = 6'2831 \text{ veces}$$



   b) Explicación en la calculadora de los modos DEG y RAD.
   c) ¿Cuántos grados es 1 radián? ¿cuántos radianes es un grado?
   d) Convierte $68'32^o$ en radianes y $8'56$ radianes en grados.

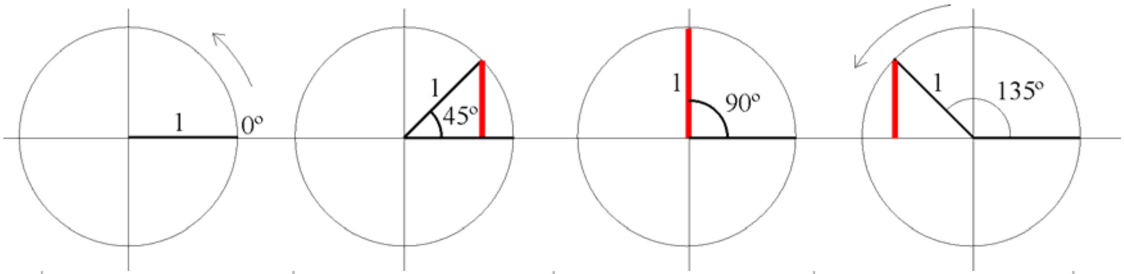
4)

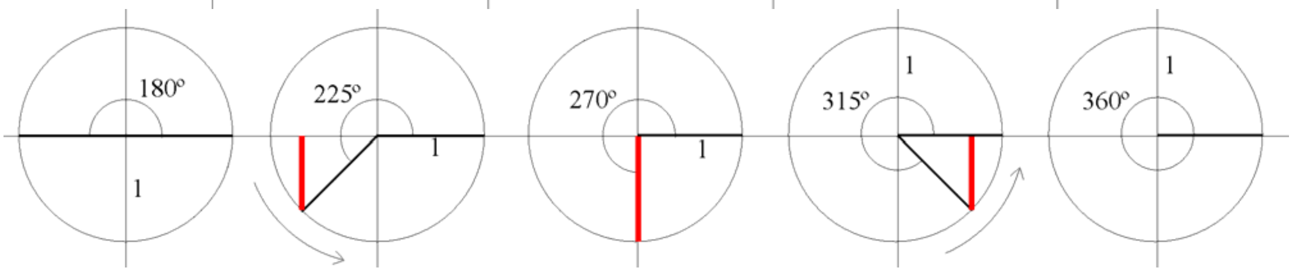
a) Calcula el seno de 30º y el coseno de 60º con la calculadora. Calcula el seno de 20º y busca otro ángulo cuyo coseno tenga el mismo valor que seno de 20º.

b) Busca otros pares de ángulos que cumplan la misma condición. Generaliza tus observaciones.

c) ¿Qué relación existe entre los senos de dos ángulos opuestos? ¿Y entre sus cosenos?

5) Vamos a considerar una circunferencia de radio unidad (denominada *goniométrica*). Dibujamos en su interior un triángulo rectángulo cuya hipotenusa coincida con el radio y uno de sus catetos se encuentre sobre el eje de abscisas (eje horizontal). Dado que en un triángulo rectángulo el seno de un ángulo agudo es el cateto opuesto dividido entra la hipotenusa, si ésta vale 1 el seno coincide con el cateto opuesto. Veamos entre qué valores varía el seno del ángulo central al aumentar el ángulo desde 0º hasta 360º.

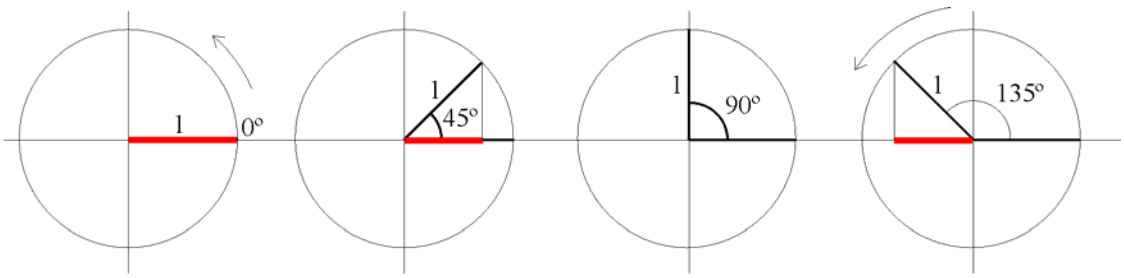


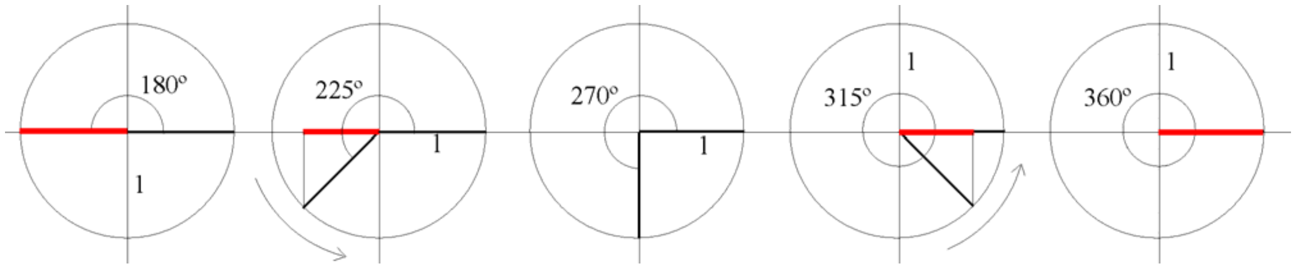


De los gráficos anteriores deducimos que el valor del seno de un ángulo está comprendido entre -1 y $+1$ como se refleja en siguiente tabla.

	0º / 0	90º / $\frac{\pi}{2}$	180º / π	270º / $\frac{3\pi}{2}$	360º / 2π
seno	0	1	0	-1	0

6) Partamos otra vez de la circunferencia goniométrica. Dado que en un triángulo rectángulo el coseno de un ángulo agudo es el cateto contiguo dividido entra la hipotenusa, si ésta vale 1 el coseno coincide con el cateto contiguo. Veamos entre qué valores varía el coseno del ángulo central al aumentar el ángulo desde 0º hasta 360º.



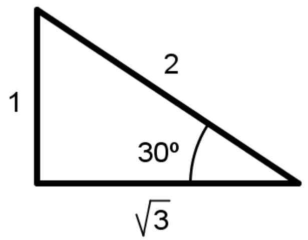
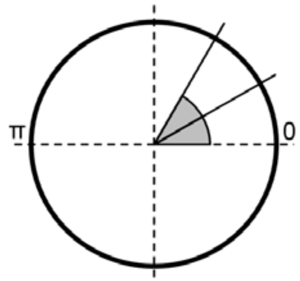
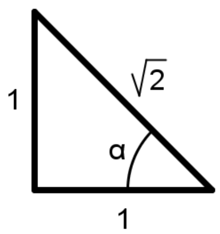


De los gráficos anteriores deducimos que el valor del coseno de un ángulo está comprendido entre -1 y $+1$ como se refleja en siguiente tabla.

	0º / 0	90º / $\frac{\pi}{2}$	180º / π	270º / $\frac{3\pi}{2}$	360º / 2π
coseno	1	0	-1	0	1

Medidas angulares 2

Completa la tabla siguiente:

<table>
<tr><td colspan="4"></td><td colspan="6">RAZÓN TRIGONOMÉTRICA</td></tr>
<tr><td>Triángulo Rectángulo</td><td>Circunferencia</td><td colspan="2">ÁNGULO</td><td colspan="3">Grados</td><td colspan="3">Radianes</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Grados</td><td>Radianes</td><td>sen</td><td>cos</td><td>tg</td><td>sen</td><td>cos</td><td>tg</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>30º</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

				RAZÓN TRIGONOMÉTRICA					
Triángulo Rectángulo	**Circunferencia**	**ÁNGULO**		**Grados**			**Radianes**		
		Grados	**Radianes**	**sen**	**cos**	**tg**	**sen**	**cos**	**tg**
			$\frac{\pi}{5}$						
					0’75				
				1’3					
							1		

Fórmulas fundamentales de la Trigonometría

1)

a) Introduce un ángulo cualquiera en la calculadora y divide el seno de dicho ángulo entre el coseno del mismo ángulo. Apunta el resultado.
b) Calcula la tangente del ángulo que has introducido anteriormente y compara este resultado con el del apartado a).
c) Repite este proceso con varios ángulos distintos tanto en grados como en radianes. ¿Qué conclusión obtienes? ¿Hay alguna fórmula que relacione el seno, coseno y tangente de un ángulo?

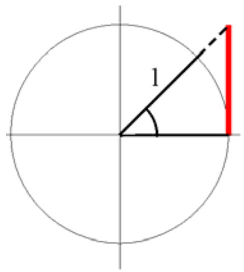
2) En el apartado anterior hemos obtenido una de las relaciones fundamentales de la trigonometría, es decir:

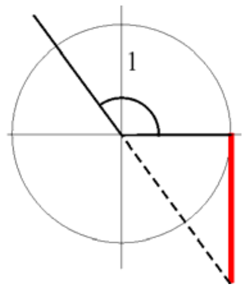
$$\mathbf{tan}\,\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha}}$$

Según esta fórmula podemos obtener una tabla de valores para la tangente al igual que hicimos anteriormente para el seno y para el coseno.

	0º / 0	90º / $\frac{\pi}{2}$	180º / π	270º / $\frac{3\pi}{2}$	360º / 2π
tangente	0	∞	0	$-\infty$	0

En la circunferencia goniométrica, la tangente coincide con la ordenada del punto de corte del otro lado del ángulo, o de su prolongación, con la recta tangente a la circunferencia goniométrica en el punto donde la circunferencia corta el eje de abscisas (origen de ángulos).





3)

a) Calcula el seno de una ángulo cualquiera y eleva al cuadrado el resultado obtenido. Ahora calcula el coseno del mismo ángulo y eleva al cuadrado el resultado obtenido. Suma estas dos cantidades. ¿Qué número obtienes?

b) Repite este proceso con varios ángulos distintos tanto en grados como en radianes. ¿Qué conclusión obtienes? ¿Hay alguna fórmula que relacione el seno al cuadrado de un ángulo y el coseno al cuadrado del mismo ángulo?

c) Acabas de obtener otra de las relaciones fundamentales de la trigonometría:

$$\mathbf{sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$$

4)

a) Si $\tan\alpha = 3'47$ y α es un ángulo agudo calcula $\text{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$

b) Si $\text{sen}\alpha = 0'95$ calcula $\cos\alpha$ y $\text{tg}\alpha$ de dos maneras distintas:

1) Utilizando la calculadora.
2) Utilizando las fórmulas fundamentales de la trigonometría.

5) Completa la siguiente tabla:

Grados	0º	30º	45º	60º	75º	90º	120º	150º	180º	225º	270º	300º
Radianes												
sin												
cos												
tan												

6) Si α es un ángulo agudo, calcula el valor exacto del ángulo y las razones trigonométricas que faltan:

$\text{sen}\alpha$	1/3		
$\cos\alpha$		$\sqrt{2}/3$	
$\tan\alpha$			2
α			

7)

a) Si $\tan\alpha = -9000$ y $\cos\alpha < 0$ ¿cuánto vale el ángulo y en qué cuadrante se encuentra?

b) Si $\text{sen}\,\alpha = 2'4$ y $\cos\alpha < 0$ ¿de qué ángulo estamos hablando?

c) Si $\text{sen}\,\alpha = -0'87$ y $\cos\alpha > 0$ calcula $\tan\alpha$.

d) Sin usar las teclas sin, cos y tan de la calculadora, si sabemos que $\tan\alpha = -5'17$ calcula $\text{sen}\,\alpha$ y $\cos\alpha$.

e) Si $\cos\alpha = -0'87$ y α está comprendido entre π y $\dfrac{3\pi}{2}$ calcula $\sin\alpha$ y $\tan\alpha$.

Google Maps

1) A 257 m de altura, el satélite nos envía una imagen del I.E.S. Historiador Chabás (hacer clic sobre el enlace que hay en la parte inferior), y que visualizamos en Google Maps (la referencia a la escala se encuentra en la parte inferior izquierda de la imagen). Calcula:
a) La escala a la que está hecha la fotografía.
b) El Perímetro y el Área real del instituto.
c) Busca en Internet la superficie real del IES Chabás y compárala con el resultado que has obtenido.

http://dl.dropbox.com/u/12420697/Geogebra%20y%20Google%20Maps/Triangulo%20IES%20Chabas%20resolver%20alumnos%20dropbox.pdf

Solución: $\mathcal{P} \cong 480'77\,m$ $\quad \mathcal{A} \cong 11814'4639\,m^2$

2) El satélite nos envía esta imagen donde localizamos las poblaciones de Denia, Ondara y Pedreguer (hacer clic sobre el enlace que hay en la parte inferior), y que visualizamos en Google Maps. Con la ayuda de una regla y el semicírculo graduado realiza todas las mediciones y cálculos que consideres convenientes y contesta a las siguientes preguntas:
a) La escala a la que está hecha la fotografía. b) El Perímetro y el Área real del triángulo.
c) Busca en Internet las distancias entre las poblaciones y compáralas con los resultados que has obtenido.

http://dl.dropbox.com/u/12420697/Geogebra%20y%20Google%20Maps/Triangulo%20DPO%20resolver%20alumnos%20dropbox.pdf

Solución: $\mathcal{D} - O = 7'89\,km$ $\quad O - \mathcal{P} = 3'86\,km$ $\quad \mathcal{D} - \mathcal{P} = 8'31\,km$ $\qquad$ *Perímetro* $= 20'06\,km$ $\qquad$ *Área* $= 1514'73\,Ha$