# Combinatoria

# Combinatoria

La combinatoria se ocupa de contar los diferentes modos en que se pueden agrupar ciertos objetos siguiendo algunas reglas; o los diferentes caminos por los que se puede ir de un sitio a otro pasando, o no, por lugares intermedios; o las distintas formas de plegar una tira de sellos; o un mapa desplegable, etc.

De todos estos problemas y otros muchos en los cuales entra esta ciencia, algunos están resueltos, es decir, se conoce un procedimiento para realizar la contabilidad deseada, cualesquiera que sean las condiciones concretas. Otros como el de los sellos, no están resueltos. Es decir, no existe, no se conoce, no se ha sabido crear un procedimiento para obtener el número de posibles “plegamientos” a partir del número de sellos. En este sentido la combinatoria es una ciencia muy abierta.

# Estrategias basadas en el producto

## La estrategia del casillero

**Ejemplo: Un botellero tiene 5 filas y 8 columnas. ¿Cuántas botellas caben en él?**

$$5 \cdot 8 = 40 \text{ botellas}$$

**Ejemplo: Irene tiene 4 pantalones y 6 camisetas. ¿Cuántas indumentarias puede elegir? ¿Y si tiene además 3 pares de zapatos?**

$$4 \cdot 6 = 24 \text{ indumentarias posibles}$$

$$4 \cdot 6 \cdot 3 = 72 \text{ indumentarias posibles}$$

**Ejemplo: Hay conversaciones bilaterales entre la C.E. y Japón. Los europeos acuden con 8 representantes, los japoneses con 11. Al encontrarse cada miembro de una delegación saluda, estrechando la mano, a cada miembro de la otra. ¿Cuántos apretones de mano se dan?**

$$8 \cdot 11 = 88 \text{ apretones}$$

**Ejemplo: Lanzamos un dado y extraemos una carta de una baraja. ¿Cuántos resultados distintos podemos obtener? ¿Cuántos resultados distintos podemos obtener al lanzar 3 dados?**

$$6 \cdot 40 = 240 \text{ resultados distintos}$$

$$6 \cdot 6 \cdot 6 = 216 \text{ resultados distintos}$$

Podríamos considerar que Irene, además de blusas, pantalones y zapatos, tiene varias gorras y varios cinturones; que en lugar de lanzar tres dados, lanzamos n dados, etc. En todos estos casos, ***para obtener el número total de posibilidades, multiplicamos el número de opciones que se dan en cada uno de los componentes.***

## El diagrama en árbol

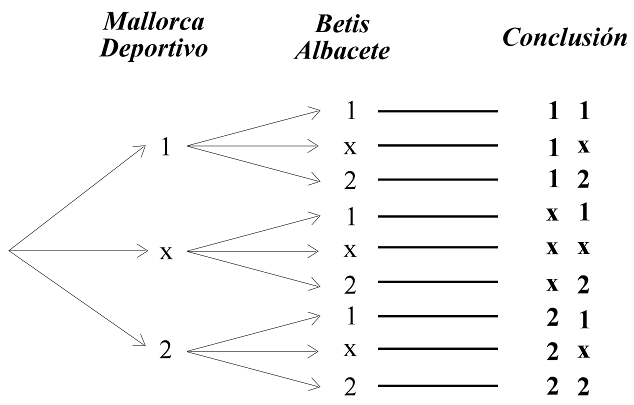
La “estrategia del casillero” nos ha resultado útil para pensar en determinados problemas. Veamos otros problemas para los que no resulta tan eficaz.

**Ejemplo:** **Se juegan los partidos de ida de las semifinales de la Copa del Rey de fútbol. Son Mallorca-Deportivo y Betis-Albacete. Los chicos y chicas de 1º H son muy dados a hacer apuestas. Confeccionan una quiniela con los dos partidos y, en cada uno de ellos, hay que poner 1, X ó 2. Para ganar hay que acertar los dos resultados. Con el dinero recogido compran libros y se reparten entre todos los ganadores.**

**a) ¿Cuántas quinielas tuvo que rellenar Mario, el forofo, que quería tener la seguridad de ganar?**

**b) ¿Cuántas quinielas tendría que haber hecho Mario la semana pasada para acertar los 4 partidos de vuelta de los cuartos de final de la Copa del Rey?**

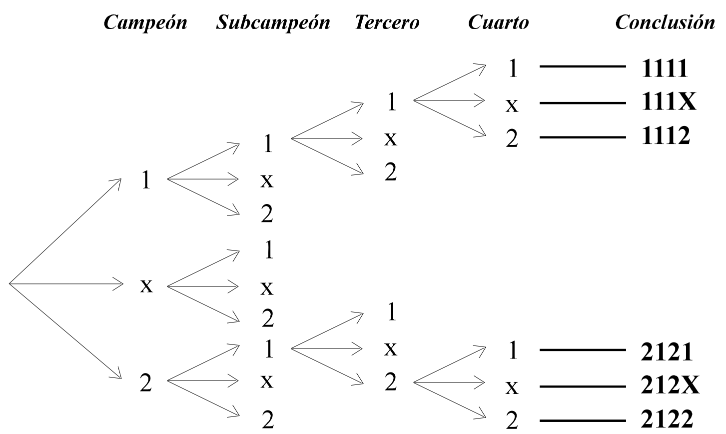
a) Lo podemos resolver mediante el siguiente *diagrama en árbol*:




3 posibilidades para acertar el primer partido. A cada una de esas tres posibilidades le corresponden las tres que se necesitan acertar el otro partido.

$$3 \cdot 3 = 9$$

b) Lo podemos resolver mediante el siguiente *diagrama en árbol*:




En cada paso, el número de posibilidades se multiplica por 3, pues el resultado de cada partido no depende de los anteriores. El número de quinielas posibles es:

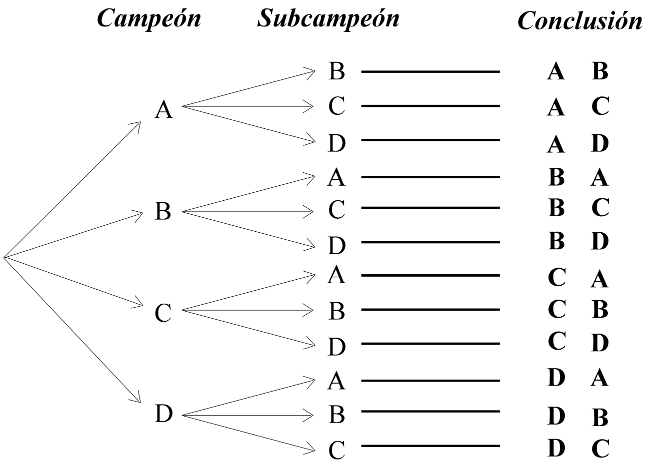
$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$$

**Ejemplo: Antonio, Beatriz, Carmen y Darío juegan la fase final de un campeonato de pimpón. Hay una copa para el campeón y una placa para el subcampeón.**

**a) De cuántas formas pueden adjudicarse los trofeos?**

**b) ¿Cuántas posibles clasificaciones finales puede haber?**

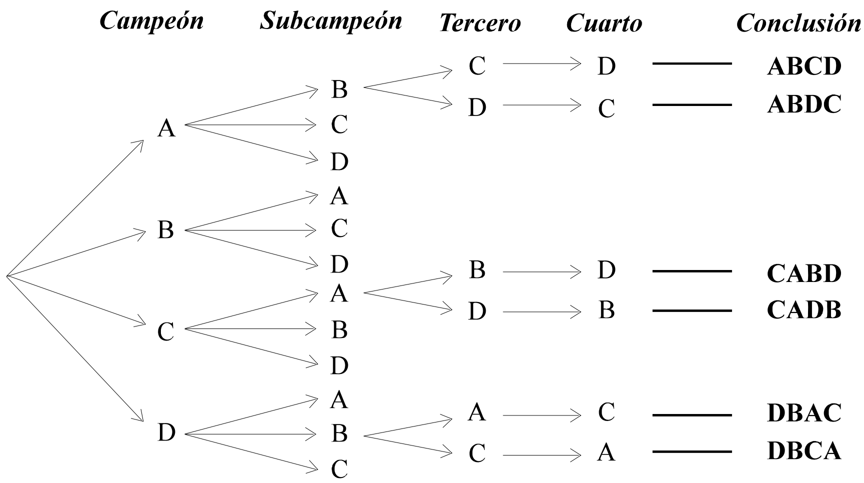
a) Lo podemos resolver mediante el siguiente *diagrama en árbol*:




Hay 4 posibilidades para el puesto de campeón. Cada una de ellas se puede completar con 3 opciones para el subcampeón

$4 \cdot 3 = 12$ posibilidades

b) Lo podemos resolver mediante el siguiente *diagrama en árbol*:




Hay 4 posibles campeones pero, una vez fijado el campeón, sólo puede haber 3 subcampeones. Y si fijamos al $1^0$ y al $2^0$, sólo quedan 2 aspirantes para el $3^{er}$ lugar. Conocidos los $1^0$, $2^0$ y $3^0$, para el $4^0$ lugar sólo queda un candidato. El número de posibilidades es:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ posibilidades}$$

*El diagrama en árbol no tiene por qué estar completo para poder proceder a la contabilidad. En realidad, ni siquiera tendríamos que representar nada.*

**Ejemplo:** **Hay 12 candidatos a ocupar los tres premios de un certamen literario. ¿Cuántas posibilidades hay?**

Para resolverlo *imaginamos* un diagrama en árbol con 12 ramas (12 posibilidades para el $1^0$). Una vez fijado el $1^0$, hay 11 posibilidades para el $2^0$. Y fijados el $1^0$ y el $2^0$ hay 10 posibilidades para el $3^0$.

En total hay: $12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$ posibilidades

# Variaciones

## Variaciones con repetición

Vamos a recuperar un problema resuelto en el apartado anterior y que ahora nos va a servir de modelo.

**Ejemplo:** **Se juegan dos partidos. ¿Cuántas quinielas hemos de hacer para acertar los dos? ¿Y para acertar cuatro partidos?**

Disponemos de los tres signos 1, X y 2. Con ellos hemos de llenar dos lugares. Podemos poner el mismo signo en los dos lugares (es decir, pueden repetirse). El número de posibilidades es:

$$3 \cdot 3 = 3^2 .$$

Análogamente, con los tres signos 1, X y 2, hemos de llenar cuatro lugares, pudiendo repetirse una o más veces los signos utilizados. El número de posibilidades es:

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$$

Vamos a generalizar esta idea:

***Variaciones con repetición de m elementos tomados n a n son los distintos grupos que se pueden formar con los m elementos, de manera que:***

- ***En cada grupo entren n elementos repetidos o no.***
- ***Dos grupos son distintos si se diferencian en algún elemento o en el orden de colocación de los mismos.***

***El número de variaciones con repetición de m elementos tomados n a n se representa con el símbolo*** $\mathbf{VR_{m,n}}$.

Si descomponemos el recuento del número de estos grupos en cada uno de sus elementos observamos el número de posibilidades siguiente, que resume el diagrama de árbol correspondiente:

$\xrightarrow{m}$ $\boxed{1^o \text{ elemento}}$ $\xrightarrow{m}$ $\boxed{2^o \text{ elemento}}$ $\xrightarrow{m}$ $\boxed{3^o \text{ elemento}}$ ................ $\xrightarrow{m}$ $\boxed{\text{último elemento}}$

Así, según el principio fundamental que hemos expuesto, tenemos que:

$$\mathbf{VR}_{\mathbf{m},\mathbf{n}} = \overbrace{\mathbf{m}\cdot\mathbf{m}\cdot\mathbf{m}\ldots\ldots\mathbf{m}}^{\mathbf{n}} = \mathbf{m}^{\mathbf{n}}$$

***Observaciones***

- *La base de esta potencia es el número de elementos del conjunto con el que trabajamos, es decir, el tipo de signos o elementos que pueden formar parte de las listas.*
- *El exponente de la potencia es el tamaño o longitud de las listas.*
- *En el recuento de las variaciones con posible repetición se cuentan todas las listas de m elementos que se pueden formar: tanto las listas con elementos repetidos como, si las hay, aquellas cuyos elementos son todos distintos. No hay restricción alguna en este sentido. Cada lugar de la lista puede ser ocupado por cualquier elemento del conjunto.*

**Ejemplo: ¿Cuántas quinielas distintas pueden hacerse?**

Debemos contar el número de listas ordenadas de tamaño 14, cuyos elementos pertenecen todos al conjunto $\{1, X, 2\}$.

$$VR_{3,14} = 3^{14} = 4.782.969$$

Este es, claramente, un caso en el que todas las listas posibles tendrán uno o varios signos repetidos.

**Ejemplo: ¿Cuántos números de 4 cifras pueden escribirse con cifras impares?**

Un número es una lista ordenada. En este caso, se trata de determinar cuántas listas de tamaño 4 pueden elaborarse con los dígitos del conjunto $\{1,3,5,7,9\}$.

$$VR_{5,4} = 5^4 = 625$$

En este caso, entre los 625 números se encuentran tanto $3579, 1537, 9371, \ldots\ldots\ldots$ (con todas las cifras distintas) como $3357, 1775, 3333, 9977, \ldots\ldots\ldots$ (con cifras repetidas). Esto está ya contemplado en el enunciado, que no pone ninguna restricción.

**Ejemplo: Supongamos que en una bolsa hay 8 bolas; 4 son blancas, numeradas del 1 al 4, y otras 4 son negras, numeradas del 5 al 8. Se repite 5 veces seguidas el experimento aleatorio de extraer una bola de la bolsa y devolverla. ¿Cuál es el número de casos posibles de este experimento compuesto?**

Observemos que algunos resultados posibles son: $53771, 64532, 12345, 12322, \ldots\ldots$. Se trata, pues, de elaborar listas ordenadas (las 5 extracciones se realizan una tras otra), y es obvio que pueden salir bolas repetidas (pero pueden no salir). La situación planteada corresponde a la de las variaciones con posible repetición.

$$VR_{8,5} = 8^5 = 32.768$$

**Ejemplo:** **Supongamos que tenemos una bolsa con muchas bolas blancas y muchas bolas negras. Repetimos cinco veces seguidas el experimento de extraer una bola de esta bolsa y observar su color. ¿Cuál es el número posible de resultados en este experimento?**

Algunos resultados posibles serán BBNBB, NNBBB, BNBNB,.....La situación planteada responde también a la idea de las variaciones con repetición, pero los elementos que configuran las listas son ahora los miembros del conjunto $\{B, N\}$. Analizando el experimento así, vemos que la respuesta es:

$$VR_{2,5} = 2^5 = 32$$

***<u>Observación</u>***

Observemos que los dos modos de concebir el experimento comportan una diferencia esencial si se quieren calcular las posibilidades: en el primer caso trabajamos en un universo equiprobable; en el segundo no podemos asegurarlo.

Cabe notar, que este segundo modo de describir los resultados es válido tanto si las extracciones se hacen con devolución como sin devolución. La diferencia entre estas formas de trabajo aparecerá , también al calcular las probabilidades de cada posible resultado.

## <u>Variaciones sin repetición</u>

***Variaciones ordinarias o variaciones sin repetición de m elementos tomados n a n*** $(\mathbf{n \leq m})$ ***son los distintos grupos que se pueden formar con los m elementos, de manera que:***

- ***En cada grupo entren n elementos distintos.***
- ***Dos grupos son distintos si se diferencian en algún elemento o en el orden de colocación de los mismos.***

***El número de variaciones con repetición de m elementos tomados n a n se representa por*** $\mathbf{V_{m,n}}$.

Si, como se hizo anteriormente, para calcular el número posible de posibles grupos hacemos el recuento para cada uno de sus elementos por separado, obtenemos el número de posibilidades siguiente, que resume el diagrama en árbol correspondiente:

$$\xrightarrow{m} \boxed{\begin{matrix}1^o \\ \text{elemento}\end{matrix}} \xrightarrow{m-1} \boxed{\begin{matrix}2^o \\ \text{elemento}\end{matrix}} \xrightarrow{m-2} \boxed{\begin{matrix}3^o \\ \text{elemento}\end{matrix}} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad \xrightarrow{m-(n-1)} \boxed{\begin{matrix}\text{último} \\ \text{elemento}\end{matrix}}$$

de modo que:

$$\mathbf{V_{m,n} = \overbrace{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots\dots\dots \cdot (m-n+1)}^{\text{n factores decrecientes}}}$$

***Observación***

*Se debe efectuar un producto de n factores (tantos como el número de elementos de cada lista), el primero de los cuales es m (número total de elementos con que se trabaja) y que van disminuyendo de unidad en unidad.*

**Ejemplo:** **En una final olímpica de los 100 m lisos participan 8 atletas. ¿De cuántas maneras puede configurarse a priori el podio de esta carrera?**

Se trata del recuento de las posibles listas de 3 atletas distintos, seleccionados de entre un conjunto de 8.

$$V_{8,3} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

**Ejemplo:** **Cinco amigos entran en una librería para comprar cada uno un libro de Astérix. Se encuentran con que hay 9 títulos para escoger y sólo un ejemplar de cada uno. ¿De cuántos modos distintos puede efectuarse la compra? (Dos compras se consideran distintas si difieren en los libros comprados o en quién es el comprador de cada libro).**

La aclaración final nos viene a decir que el orden de la compra es importante (entendiendo por "orden" qué libro corresponde a quién). En definitiva, pues, se trata de seleccionar una muestra ordenada de 5 elementos elegidos entre un conjunto de 9.

$$V_{9,5} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15.120$$

**Ejemplo:** **En una bolsa hay 12 bolas: 6 son blancas, numeradas del 1 al 6, y 6 son negras, numeradas del 7 al 12. Realizamos el experimento aleatorio de extraer al azar 5 bolas, una tras otra, sin devolución. ¿Cuál es el número de casos posibles de este experimento?**

En esta ocasión, todas las bolas que se extraigan en cada realización del experimento serán distintas.

$$V_{12,5} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 95.040$$

Si quisiéramos saber en cuántos casos todas las bolas extraídas serán negras, la respuesta sería $V_{6,5} = 720$.

# Permutaciones

## Permutaciones sin repetición

***Permutaciones ordinarias de n elementos son los distintos grupos que se pueden formar de manera que:***

- ***En cada grupo estén los n elementos***
- ***Un grupo se diferencia de otro únicamente en el orden de colocación de los elementos***

***El número de permutaciones ordinarias de n elementos se representa por*** $\mathbf{P_n}$***. En realidad, es un caso particular de las variaciones sin repetición cuando*** $\mathbf{m = n}$***.***

$$P_n = V_{n,n} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot (n-n+1)$$

$$\mathbf{P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

**Ejemplo:** **En la final olímpica de los 100 m lisos participan 8 atletas. ¿De cuántas maneras puede configurarse a priori la clasificación de esta carrera, si todos los atletas la acaban?**

$$P_8 = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40.320$$

**Ejemplo:** **Cinco amigos entran en una librería para comprar cada uno un libro de Asterix. Allí se encuentran con que hay precisamente 5 títulos distintos para escoger y sólo un ejemplar de cada uno. ¿De cuántos modos distintos puede efectuarse la compra? (Dos compras se consideran distintas si difieren en quién es el comprador de cada libro).**

$$P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

**Ejemplo:** **En una bolsa hay 12 bolas: 6 son blancas, numeradas del 1 al 6, y 6 son negras, numeradas del 7 al 12. Realizamos el experimento aleatorio de extraer al azar las 12 bolas, una tras otra, sin devolución. ¿Cuál es el número de casos posibles de este experimento?**

$$P_{12} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 479.001.600$$

## Factorial de un número

***Sea n un número natural mayor que 1. Se llama factorial de n al producto de los n primeros números naturales. El factorial de n se representa por*** $\mathbf{n!}$.

$$\mathbf{n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots\ldots\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

- ***Si*** $\mathbf{n = 1}$ ***definimos*** $\mathbf{1! = 1}$
- ***Si*** $\mathbf{n = 0}$ ***definimos*** $\mathbf{0! = 1}$

**<u>Utilización del factorial para el cálculo de variaciones y permutaciones</u>**

$$V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!} \qquad \mathbf{V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!}}$$

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n! \qquad \mathbf{P_n = n!}$$

**Ejemplo:** **¿De cuántas formas posibles pueden sentarse 7 amigos en un banco? ¿Y si los 7 amigos se sentaran alrededor de una mesa circular?**

$$P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$$

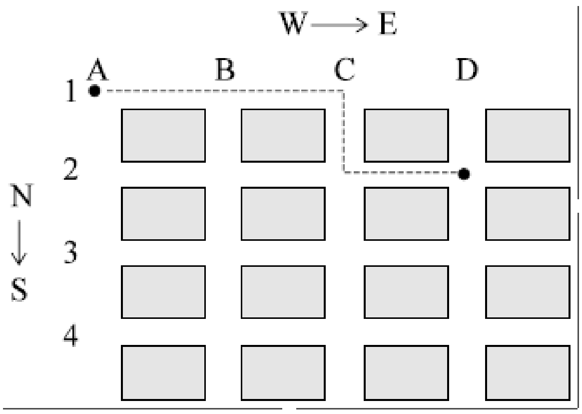
Alrededor de una mesa circular no hay primero ni último, por lo que fijado un individuo determinado, nos quedan otros 6 para sentar de todas las maneras posibles, por tanto éstas son:

$$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

## Permutaciones con repetición

Queremos calcular el número de ordenaciones posibles de una colección de elementos algunos de los cuales son indistinguibles entre sí. Veámoslo a través de algún ejemplo.

**En el plano de la figura adjunta se representan algunas de las calles de una ciudad. Si se designan por 1, 2, 3... las que van de oeste a este y por A, B, C.... las que van de norte a sur, ¿cuántos caminos de longitud mínima pueden seguirse para ir del cruce de las calles A1 al cruce de las calles D2? ¿Y para ir del cruce de las calles A1 al cruce de las calles D3?**




Para ir desde el cruce A1 hasta el cruce D2, cualquiera que sea el camino mínimo que se escoja tendrá que estar compuesto por tres tramos horizontales y uno vertical. Si los tramos verticales los representamos por **v** y los horizontales por **h**, un camino cualquiera, por ejemplo, el representado en el plano será **h-h-v-h**. Entonces habrá tantos caminos como ordenaciones podamos hacer con los símbolos **h, h, h, v**.

Si no te fijas mucho, podrías pensar que se trata de las permutaciones de 4 elementos; es decir, $P_4 = 4! = 24$. Ahora bien, como los elementos repetidos son indistinguibles, muchas ordenaciones son iguales y en consecuencia hay muchas menos de las que en un principio pudiéramos pensar.

$$\text{hhhv}\begin{cases} h_1h_2h_3v \\ h_1h_3h_2v \\ h_2h_1h_3v \\ h_2h_3h_1v \\ h_3h_1h_2v \\ h_3h_2h_1v \end{cases}$$

Si distinguimos las letras con subíndices tendremos que, para una sola ordenación, se obtienen las reseñadas al margen.

En este caso, de cada $3! = 6$ permutaciones ordinarias sólo tenemos que considerar una. En consecuencia, de las permutaciones ordinarias iniciales sólo consideraremos la sexta parte:

$$\frac{24}{6} = \frac{4!}{3!} = 4 \text{ caminos diferentes}$$

A las permutaciones así obtenidas se las denomina permutaciones con repetición de cuatro elementos, donde uno se repite tres veces y otro una vez.

Para el caso de ir desde el cruce A1 hasta el cruce D3, un camino cualquiera es: **h-h-v-h-v**. Si las letras fuesen distintas las ordenaciones posibles serían: $P_5 = 5! = 120$.

Como antes, vamos a distinguir las letras con subíndices. Nos salen las mismas ordenaciones con las **h**, y por cada una de ellas se obtienen tantos caminos diferentes como ordenaciones se puedan hacer con las **v**, o sea $P_2 = 2! = 2$. Por tanto, de cada ordenación de las 5 letras salen $3! \cdot 2! = 12$ permutaciones iguales. En consecuencia, de las permutaciones ordinarias iniciales sólo consideraremos la doceava parte:

$$h_1h_2h_3vv\begin{cases} h_1h_2h_3v_1v_2 \\ h_1h_2h_3v_2v_1 \end{cases} \qquad \frac{120}{12} = \frac{5!}{3!\,2!} = 10 \text{ caminos diferentes}$$

***Permutaciones con repetición de n elementos donde el primer elemento se repite a veces, el segundo b veces,....., el último k veces*** ($\mathbf{a+b+c+\cdots\cdots\cdots+k=n}$)***, son los distintos grupos que se pueden formar, de manera que:***

- ***En cada grupo de n elementos el primer elemento está a veces; el segundo elemento está b veces;.....***
- ***En grupo se diferencia de otro únicamente por el orden de colocación de sus elementos.***

***El número de permutaciones con repetición de n elementos, donde el primer elemento se repite a veces, el segundo b veces,......., el último k veces, se representa por*** $\mathbf{P_n^{a,b,\ldots\ldots,k}}$

$$\mathbf{P_n^{a,b,\ldots\ldots,k}=\frac{n!}{a!\cdot b!\cdot c!\cdots\cdots k!}}$$

Así, en el ejemplo anterior de las calles de la ciudad, el número de caminos pedidos entre A1 y D3 viene dado por:

$$P_5^{3,2}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=\frac{5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 2}=10 \text{ caminos diferentes}$$

En el caso de que pidieran el número de caminos diferentes de longitud mínima entre el cruce A1 y el cruce F7 habría que recorrer cinco manzanas de oeste a este y seis manzanas de norte a sur. En total once manzanas. Sería:

$$P_{11}^{6,5}=\frac{11!}{6!\cdot 5!}=\frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6!}{6!\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}=462 \text{ caminos diferentes}$$

**Ejemplo: ¿De cuántas formas pueden alinearse 8 signos más y 6 signos menos?**

$$P_{14}^{8,6}=\frac{14!}{8!\cdot 6!}=\frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8!}{8!\cdot 6!}=3003$$

**Ejemplo: ¿Cuántas quinielas pueden hacerse con siete 1, cuatro X y tres 2?**

$$P_{14}^{7,4,3}=\frac{14!}{7!\cdot 4!\cdot 3!}=120.120 \text{ quinielas}$$

**Ejemplo: Disponemos de una bolsa con 5 bolas blancas iguales y 3 bolas negras indistinguibles. Realizamos el experimento de extraer sucesivamente las 8 bolas de la bolsa, y queremos saber el número total de casos posibles del experimento si sólo nos fijamos en el color de cada bola.**

El problema se reduce al recuento de listas que es posible confeccionar con las letras B, B, B, B, B, N, N, N.

$$P_8^{5,3}=\frac{8!}{5!\cdot 3!}=56 \text{ casos posibles}$$

# Combinaciones

## Combinaciones sin repetición

**Ejemplo:** **¿Cuántos partidos han de jugar 4 amigos si deciden enfrentarse cada uno contra todos los demás?**

Disponemos de 4 elementos, A, B, C y D. Queremos agruparlos de dos en dos, sin que importe el orden.

Si utilizamos un diagrama en árbol para describir los partidos, nos encontraremos con que aparecerán tanto AB como BA, lo cual estaría bien si el torneo fuera a doble vuelta. Pero no es el caso. ¿Qué hacer entonces? La solución es bien fácil: los contamos todos y dividimos por dos.

Si influyera el orden, el número de partidos sería: $V_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12$ .

Pero como no influye el orden, cada una de las posibles elecciones la hemos contado dos veces (AB, BA), tantas como formas en que se pueden ordenar estos dos elementos, es decir: $P_2 = 2! = 2$ .

Por tanto, el número de posibles elecciones es: $\frac{V_{4,2}}{P_2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$

***Combinaciones ordinarias o sin repetición de m elementos tomados n a n*** $(n \le m)$ ***son los distintos grupos que se pueden formar con los m elementos, de manera que:***

- ***En cada grupo entren n elementos distintos.***
- ***Dos grupos son diferentes si se diferencian en algún elemento, pero no en el orden de colocación.***

***El número de combinaciones de m elementos tomados n a n se representa por*** $\mathbf{C_{m,n}}$**.**

$$\mathbf{C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{\frac{m!}{(m-n)!}}{n!} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}}$$

***<u>Observación</u>*** ***A este cociente se le conoce como paréntesis de Euler o número combinatorio, y se escribe*** $\mathbf{\binom{m}{n} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}}$***. Por tanto:***

$$\mathbf{C_{m,n} = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}}$$

**Ejemplo:** **En un colectivo de 10 personas ¿de cuántas formas se pueden elegir los 3 representantes que acudirán a una cierta reunión?**

$$C_{10,3} = \frac{V_{10,3}}{P_3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 120$$

**Ejemplo:** **En un octógono regular, ¿cuántos triángulos se pueden formar con sus vértices? ¿Y cuántas diagonales distintas?**

Los distintos triángulos que resultan son: $C_{8,3} = \frac{V_{8,3}}{P_3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 56$

En cuanto a las diagonales, como dos vértices consecutivos determinan un lado, éstas serán:

$$C_{8,2} - 8 = \frac{V_{8,2}}{P_2} - 8 = \frac{8 \cdot 7}{2} - 8 = 20$$

**Ejemplo:** **¿Cuántas apuestas distintas se pueden realizar en el juego de la lotería primitiva, donde han de elegirse 6 números de 49?**

$$C_{49,6} = \frac{V_{49,6}}{P_6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 13.983.816$$

## Combinaciones con repetición

***Combinaciones con repetición de m elementos tomados n a n*** $(\mathbf{n \le m})$ ***son los distintos grupos que se pueden formar con los m elementos, de manera que:***

- ***En cada grupo entren n elementos repetidos o no.***
- ***Dos grupos son diferentes si se diferencian en algún elemento, pero no en el orden de colocación.***

***El número de combinaciones con repetición de m elementos tomados n a n se representa por*** $\mathbf{CR_{m,n}}$.

$$\mathbf{CR_{m,n}} = \binom{\mathbf{m+n-1}}{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{(m+n-1)!}}{\mathbf{n!\cdot(m-1)!}}$$

**Ejemplo: ¿Cuántas comisiones de 5 personas se pueden formar con tres fuerzas políticas?**

$$CR_{3,5} = \binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = \frac{7!}{5!\cdot(7-5)!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5!}{5!\cdot 2} = 21$$

**Ejemplo: En una bolsa hay bolas blancas, negras, rojas y amarillas: muchas de cada color. Se extraen tres bolas a la vez y se quiere saber el número de "tipos de resultados" posibles, considerando sólo el color de las bolas.**

$$CR_{4,3} = \binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\cdot(6-3)!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 3\cdot 2} = 20$$

No es difícil detallar estas 20 combinaciones sin que el orden en que escribimos las letras tenga trascendencia ninguna.

BBB, BBN, BBR, BBA, BNN, BNR, BNA, BRR, BRA, BAA, NNN, NNR, NNA, NRR, NRA, NAA, RRR, RRA, RAA, AAA.

## Problema general

**En una empresa hay 5 plazas vacantes, de las que 3 corresponden a hombres y 2 a mujeres. Se han presentado 10 hombres y 8 mujeres.**

**a) ¿De cuántas formas distintas se pueden cubrir las vacantes?**

**b) ¿Cuántas posibilidades habrá si las plazas de los hombres tienen todas distinta remuneración?**

**c) ¿Cuántas posibilidades habrá si tanto las plazas de los hombres como las de las mujeres tienen distinta remuneración?**

**d) ¿De cuántas maneras se pueden ordenar en fila los 10 hombres y las 8 mujeres?**

**e) ¿De cuántas maneras se pueden ordenar en fila los 10 hombres y las 8 mujeres si los hombres deben estar juntos y las mujeres también?**

a) El número de formas distintas de elegir a los hombres es: $C_{10,3}=\frac{V_{10,3}}{P_3}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2}=120$

El número de formas distintas de elegir a las mujeres: $C_{8,2}=\frac{V_{8,2}}{P_2}=\frac{8\cdot 7}{2}=28$

El número de formas distintas de cubrir las vacantes: $C_{10,3}\cdot C_{8,2}=120\cdot 28=3360$

b) El número de formas distintas de elegir a los hombres es: $V_{10,3}=10\cdot 9\cdot 8=720$

El número de formas distintas de elegir a las mujeres: $C_{8,2}=\frac{V_{8,2}}{P_2}=\frac{8\cdot 7}{2}=28$

El número de formas distintas de cubrir las vacantes: $V_{10,3}\cdot C_{8,2}=720\cdot 28=20160$

c) El número de formas distintas de elegir a los hombres es: $V_{10,3}=10\cdot 9\cdot 8=720$

El número de formas distintas de elegir a las mujeres: $V_{8,2}=8\cdot 7=56$

El número de formas distintas de cubrir las vacantes: $V_{10,3}\cdot V_{8,2}=720\cdot 28=40320$

d) Se pueden ordenar de: $P_{18}=18!=6.402.373.705.000.000$

e) Los hombres se pueden ordenar de: $P_{10}=10!=3.628.800$

Las mujeres se pueden ordenar de: $P_8=8!=40.320$

El número de ordenaciones posibles, si los hombres deben estar juntos y las mujeres también es:

$$2\cdot P_{10}\cdot P_8=292.626.432.000$$

El doble del producto, ya que los hombres pueden estar situados delante de las mujeres o detrás.