Ecuaciones y sistemas

Ecuaciones de primer grado
Sistemas de ecuaciones lineales
Ecuaciones de segundo grado

Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Una ecuación de primer grado con una incógnita es una igualdad en la que interviene una letra, llamada incógnita, que significa desconocida. La palabra incógnita viene del latín **in** *(partícula negativa)* **cognoscere** *(conocer). La letra que se suele utilizar como incógnita es la "x" aunque puede ser cualquier otra letra. Llamamos solución de una ecuación de primer grado con una incógnita al valor que debe de tener la incógnita "x" para que dicha ecuación se verifique.*

- *Los coeficientes son los números que acompañan a la incógnita.*
- *Los términos independientes son los números que no acompañan a la incógnita.*
- *El primer miembro es todo lo que hay a la izquierda del signo igual.*
- *El segundo miembro es todo lo que hay a la derecha del signo igual.*

Ejemplo $\mathbf{4x+3=-x-\frac{3}{2}}$

- La incógnita es "x"
- Los coeficientes son 4 y -1
- Los términos independientes son 3 y $-\frac{3}{2}$
- El primer miembro es $4x+3$
- El segundo miembro es $-x-\frac{3}{2}$

Ecuaciones sin paréntesis ni denominadores

Ejemplo $\mathbf{4x+3-2x=3x-7x+15}$

1) *Se colocan todos los términos que llevan incógnita en el primer miembro y todos los términos independientes en el segundo miembro, teniendo en cuenta que, lo que en un miembro está sumando pasa al otro miembro restando y viceversa. A esta operación también se le denomina transponer términos.*

$$4x-2x-3x+7x=15-3$$

2) *Se agrupan (reducen) los términos semejantes, es decir, se agrupan todos los términos con incógnita del primer miembro por un lado y todos los términos del segundo miembro por otro lado.*

$$6x=12$$

3) *Si la incógnita lleva coeficiente, se pasa al segundo miembro dividiendo (con el signo que tiene en el primer miembro). Si la división no sale exacta se puede dejar el resultado en forma de fracción.*

$$x=\frac{12}{6}=2$$

4) *Se sustituye en la ecuación original la solución que hemos obtenido y comprobamos si se verifica la igualdad. Si se verifica, la solución es correcta.*

$$4\cdot 2+3-2\cdot 2=3\cdot 2-7\cdot 2+15 \qquad 8+3-4=6-14+15 \quad \Rightarrow \quad 7=7$$

¡ATENCIÓN!

El coeficiente que está multiplicando a la incógnita pasa al otro miembro dividiendo, con el signo que tiene.

$-3x = 7 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{7}{3}$		***FALSO***
$-3x = 7 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x = \dfrac{7}{-3} = -\dfrac{7}{3} = \dfrac{-7}{3}}$		***VERDADERO***

<u>*Resuelve mentalmente*</u>

a) $x + 4 = 16$ b) $2x = 26$ c) $9x = 108$ d) $3x - 1 = 32$ e) $x - 5 = 11 - 2x$

Ecuaciones con paréntesis

<u>*Ejemplo*</u> $\mathbf{7(x-1) - 6(x+1) = 3x - 21}$

Se suprimen los paréntesis multiplicando el coeficiente que tengan delante <u>por todos los términos que hay en el interior del paréntesis (propiedad distributiva)</u>. A continuación se efectúan las operaciones como en el apartado anterior.

$$7x - 7\cdot 1 - 6x - 6\cdot 1 = 3x - 21 \qquad 7x - 7 - 6x - 6 = 3x - 21$$

$$7x - 6x - 3x = -21 + 7 + 6 \qquad -2x = -8 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-8}{-2} = 4$$

Comprobamos que se verifica la igualdad

$$7(4-1) - 6(4+1) = 3\cdot 4 - 21 \qquad 7\cdot 3 - 6\cdot 5 = 12 - 21 \qquad 21 - 30 = -9 \quad \Rightarrow \quad -9 = -9$$

¡ATENCIÓN!

Un signo menos delante de un paréntesis cambia el signo <u>de todos los términos</u> que hay en su interior.

$-6(x+1) = -6x + 6$	***FALSO***
$-6(x+1) = \mathbf{-6x - 6}$	***VERDADERO***

<u>*Ejemplo*</u> $\mathbf{3(1-2x) - 4(1-x) = x - 2(1+x)}$

$$3 - 6x - 4 + 4x = x - 2 - 2x \qquad -6x + 4x - x + 2x = -2 - 3 + 4 \qquad -x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-1}{-1} = 1$$

<u>*Problemas propuestos con soluciones*</u>

a) $6(2-x) + 5(2x-3) = 2 + 3(x-5)$ b) $2(x-1) - 2(x+3) = -5(x+1)$

<u>*Soluciones*</u> a) $x = -10$ b) $x = \dfrac{3}{5}$

Ecuaciones con denominadores

<u>*Ejemplo*</u> $\mathbf{\dfrac{x-2}{2} - \dfrac{x}{3} = x + 4}$

1) Suprimimos los denominadores multiplicando ambos miembros de la ecuación por el m.c.m. de los denominadores.

$$\text{m.c.m.}(2,3)=6 \qquad 6\left(\frac{x-2}{2}-\frac{x}{3}\right)=6(x+4) \qquad 3(x-2)-2x=6x+24$$

2) Eliminamos los paréntesis. $\quad 3x-6-2x=6x+24$

3) Transponemos los términos y reducimos los términos semejantes.

$$3x-2x-6x=24+6 \qquad -5x=30$$

4) Despejamos la incógnita $\quad x=\dfrac{30}{-5}=-6$

5) Sustituimos la solución en la ecuación original y comprobamos si se verifica la igualdad.

$$\frac{-6-2}{2}-\frac{-6}{3}=-6+4 \qquad \frac{-8}{2}+\frac{6}{3}=-2 \qquad -4+2=-2 \;\Rightarrow\; -2=-2$$

A veces, al operar con el m.c.m. (denominador común), hay que introducir paréntesis en los numeradores.

<u>*Ejemplo*</u> $\quad \mathbf{\dfrac{x-2}{2}-\dfrac{x+5}{3}=x+4}$

$$\text{m.c.m.}(2,3)=6 \qquad 6\left(\frac{x-2}{2}-\frac{x+5}{3}\right)=6(x+4)$$

$$3(x-2)-2(x+5)=6x+24 \qquad 3x-6-2x-10=6x+24$$

$$3x-2x-6x=24+6+10 \qquad -5x=40 \;\Rightarrow\; x=\frac{40}{-5}=-8$$

Comprobación: $\quad \dfrac{-8-2}{2}-\dfrac{-8+5}{3}=-8+4 \qquad \dfrac{-10}{2}-\dfrac{-3}{3}=-4 \qquad -5+1=-4 \;\Rightarrow\; -4=-4$

<u>*Ejemplo*</u> $\quad \mathbf{7-\dfrac{-2x-4}{3}=-4x}$

$$3\left(7-\frac{-2x-4}{3}\right)=3(-4x) \qquad 21-(-2x-4)=-12x$$

$$21+2x+4=-12x \qquad 2x+12x=-21-4 \qquad 14x=-25 \;\Rightarrow\; x=\frac{-25}{14}$$

Comprobación: $\quad 7-\dfrac{-2\left(\dfrac{-25}{14}\right)-4}{3}=-4\left(\dfrac{-25}{14}\right) \qquad 7-\dfrac{\dfrac{50}{14}-4}{3}=\dfrac{100}{14} \qquad 7-\dfrac{\dfrac{-6}{14}}{3}=\dfrac{100}{14}$

$$7+\frac{6}{14}\cdot\frac{1}{3}=\frac{100}{14} \qquad 7+\frac{6}{42}=\frac{100}{14} \qquad \frac{294+6}{42}=\frac{100}{14} \qquad \frac{300}{42}=\frac{100}{14} \;\Rightarrow\; \frac{100}{14}=\frac{100}{14}$$

<u>*Ejemplo*</u> $\quad \mathbf{\dfrac{x+7}{2}-\dfrac{7-x}{6}=\dfrac{x-7}{12}+7}$

$$\text{m.c.m.}(2,6,12)=2^2\cdot 3=12 \qquad 12\left(\frac{x+7}{2}-\frac{7-x}{6}\right)=12\left(\frac{x-7}{12}+12\right)$$

$$6(x+7)-2(7-x)=x-7+84 \qquad 6x+42-14+2x=x+77$$

$$6x+2x-x=77-42+14 \qquad 7x=49 \;\Rightarrow\; x=\frac{49}{7}=7$$

Comprobación: $\frac{7+7}{2}-\frac{7-7}{6}=\frac{7-7}{12}+7 \qquad \frac{14}{2}-\frac{0}{6}=\frac{0}{12}+7 \qquad 7-0=0+7 \;\Rightarrow\; 7=7$

Problemas propuestos con soluciones

$$\mathbf{a)}\; 2x-8+\frac{1-x}{6}=6x-\frac{5}{8}-2 \qquad \mathbf{b)}\; -6\cdot\frac{4x+1}{8}-\frac{1}{4}=x+\frac{6-3x}{2} \qquad \mathbf{c)}\; -7x+\frac{-2x-10}{4}=3x$$

Soluciones a) $x=-\frac{5}{4}$ b) $x=-\frac{8}{5}$ c) $x=-\frac{5}{21}$

Caso general

Ejemplo $\frac{2x-4(x-5)}{2}-x=\frac{2(5x-4)}{3}+2$

1) En primer lugar eliminamos los paréntesis que aparecen en los numeradores.

$$\frac{2x-4x+20}{2}-x=\frac{10x-8}{3}+2 \qquad \frac{-2x+20}{2}-x=\frac{10x-8}{3}+2$$

2) Suprimimos los denominadores multiplicando los dos miembros de la ecuación por el m.c.m. de los denominadores.

$$\text{m.c.m.}(2,3)=6 \qquad 6\left(\frac{-2x+20}{2}-x\right)=6\left(\frac{10x-8}{3}+2\right)$$

$$3(-2x+20)-6x=2(10x-8)+12$$

3) Eliminamos los paréntesis que han aparecido en el paso anterior.

$$-6x+60-6x=20x-16+12$$

4) Transponemos los términos y reducimos los términos semejantes.

$$-6x-6x-20x=-16+12-60 \qquad -32x=-64$$

5) Despejamos la incógnita $x=\frac{-64}{-32}=2$

6) Sustituimos la solución en la ecuación original y comprobamos si se verifica la igualdad.

$$\frac{2\cdot 2-4(2-5)}{2}-2=\frac{2(5\cdot 2-4)}{3}+2 \qquad \frac{4-4(-3)}{2}-2=\frac{2(10-4)}{3}+2$$

$$\frac{4+12}{2}-2=\frac{2\cdot 6}{3}+2 \qquad 8-2=4+2 \;\Rightarrow\; 6=6$$

Ejemplo $\mathbf{4-\frac{2x-4}{2}=\frac{2(x+1)}{-3}}$

$$4-\frac{2x-4}{2}=\frac{2x+2}{-3} \qquad \text{m.c.m.}(2,3)=6 \qquad 6\left(4-\frac{2x-4}{2}\right)=6\cdot\frac{2x+2}{-3}$$

$$24-3(2x-4)=-2(2x+2) \qquad 24-6x+12=-4x-4$$

$$-6x+4x=-4-24-12 \qquad -2x=-40 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{-40}{-2}=20$$

Comprobación: $4-\frac{2\cdot 20-4}{2}=\frac{2(20+1)}{-3} \qquad 4-\frac{40-4}{2}=\frac{40+2}{-3} \qquad 4-18=\frac{42}{-3} \qquad -14=-14$

Ejemplo $\mathbf{-3\left(\frac{2}{3}-\frac{3x}{2}\right)=-4\cdot\frac{3-6x}{5}}$

$$\frac{-6}{3}+\frac{9x}{2}=\frac{-12+24x}{5} \qquad -2+\frac{9x}{2}=\frac{-12+24x}{5} \qquad \text{m.c.m.}(2,5)=10$$

$$10\left(-2+\frac{9x}{2}\right)=10\cdot\frac{-12+24x}{5} \qquad -20+5\cdot 9x=2(-12+24x)$$

$$-20+45x=-24+48x \qquad 45x-48x=-24+20 \qquad -3x=-4 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$$

Ejemplo $\mathbf{-2\left(x-\frac{3}{24}\right)-5=\frac{1}{2}\left(\frac{3x}{4}+\frac{5(x+2)}{2}\right)}$

$$-2x+\frac{6}{24}-5=\frac{1}{2}\left(\frac{3x}{4}+\frac{5x+10}{2}\right) \qquad -2x+\frac{1}{4}-5=\frac{3x}{8}+\frac{5x+10}{4}$$

$$\text{m.c.m.}(4,8,4)=2^3=8 \qquad 8\left(-2x+\frac{1}{4}-5\right)=8\left(\frac{3x}{8}+\frac{5x+10}{4}\right)$$

$$-16x+2-40=3x+10x+20 \qquad -16x-3x-10x=20-2+40 \qquad -29x=58 \quad \Rightarrow \quad x=-2$$

Ejemplo $\mathbf{-4\left(\frac{2x+3}{4}-\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{8}=2\left(\frac{-2x+3}{16}-1\right)}$

$$-4\cdot\frac{2x+3}{4}+\frac{4x}{2}+\frac{4}{4}-\frac{3}{8}=2\cdot\frac{-2x+3}{16}-2 \qquad -2x-3+2x+1-\frac{3}{8}=\frac{-2x+3}{8}-2$$

$$8\left(-2x-3+2x+1-\frac{3}{8}\right)=8\left(\frac{-2x+3}{8}-2\right) \qquad -16x-24+16x+8-3=-2x+3-16$$

$$-16x+16x+2x=3-16+24-8+3 \qquad 2x=6 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{6}{2}=3$$

Ejemplo $$\frac{5}{8}+\frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}x-\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{6}\right)-\frac{5}{2}\right]=\frac{3}{4}\left(x-\frac{1}{3}\right)-x$$

1) *Antes de operar conviene "arreglar" la expresión que tenemos. Por ejemplo, es conveniente, aunque no es necesario, escribir las expresiones de la forma* $\frac{1}{4}x$ *como* $\frac{x}{4}$ *para que sea más fácil operar con ellas.*

$$\frac{5}{8}+\frac{3}{2}\left[\frac{x}{2}-\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{6}\right)-\frac{5}{2}\right]=\frac{3}{4}\left(x-\frac{1}{3}\right)-x$$

<u>*Nota*</u>: La expresión $x-\frac{1}{3}$ es equivalente a $\frac{x}{1}-\frac{1}{3}$

2) *Quitamos los paréntesis, teniendo en cuenta que* ***un signo menos delante de un paréntesis cambia el signo de todos los elementos que hay en su interior****.*

$$\frac{5}{8}+\frac{3}{2}\left[\frac{x}{2}-\frac{x}{4}-\frac{1}{6}-\frac{5}{2}\right]=\frac{3x}{4}-\frac{3}{12}-x$$

3) *Quitamos los corchetes, teniendo en cuenta que* ***un signo menos delante de un corchete cambia el signo de todos los elementos que hay en su interior****.*

$$\frac{5}{8}+\frac{3x}{4}-\frac{3x}{8}-\frac{3}{12}-\frac{15}{4}=\frac{3x}{4}-\frac{3}{12}-x$$

4) *Multiplicamos los dos miembros de la ecuación por el* $m.c.m.(4,8,12)=2^3\cdot 3=24$

$$24\left(\frac{5}{8}+\frac{3x}{4}-\frac{3x}{8}-\frac{3}{12}-\frac{15}{4}\right)=24\left(\frac{3x}{4}-\frac{3}{12}-x\right)$$

$$3\cdot 5+6\cdot 3x-3\cdot 3x-2\cdot 3-6\cdot 15=6\cdot 3x-2\cdot 3-24x \qquad 15+18x-9x-6-90=18x-6-24x$$

5) *Transponemos los términos y reducimos los términos semejantes.*

$$18x-9x-18x+24x=-6-15+6+90 \qquad 15x=75 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{75}{15}=5$$

6) *Sustituimos la solución en la ecuación original y comprobamos si se verifica la igualdad.*

$$\frac{5}{8}+\frac{3}{2}\left[\frac{5}{2}-\left(\frac{5}{4}+\frac{1}{6}\right)-\frac{5}{2}\right]=\frac{3}{4}\left(5-\frac{1}{3}\right)-5 \qquad \frac{5}{8}+\frac{3\cdot 5}{4}-\frac{3\cdot 5}{8}-\frac{3}{12}-\frac{15}{4}=\frac{3\cdot 5}{4}-\frac{3}{12}-5$$

$$24\cdot\frac{5}{8}+24\cdot\frac{15}{4}-24\cdot\frac{15}{8}-24\cdot\frac{3}{12}-24\cdot\frac{15}{4}=24\cdot\frac{15}{4}-24\cdot\frac{3}{12}-24\cdot 5$$

$$15+90-45-6-90=90-6-120 \qquad -36=-36$$

Ecuaciones sin solución

Ejemplo $\mathbf{3x - 2 + x = 5x + 1 - x}$

$$3x + x - 5x + x = 1 + 2 \qquad 0 \cdot x = 3$$

Es evidente que esta igualdad no es cierta independientemente del valor que tome x. Decimos que en este caso *la ecuación no tiene solución*.

Ejemplo $\mathbf{\frac{5x-1}{2} - \frac{3x}{4} - x = \frac{3}{4}(x-1)}$

$$\frac{5x-1}{2} - \frac{3x}{4} - x = \frac{3x}{4} - \frac{3}{4} \qquad 4\left(\frac{5x-1}{2} - \frac{3x}{4} - x\right) = 4\left(\frac{3x}{4} - \frac{3}{4}\right)$$

$$2(5x-1) - 3x - 4x = 3x - 3 \qquad 10x - 2 - 3x - 4x = 3x - 3$$

$$10x - 3x - 4x - 3x = -3 + 2 \qquad 0 \cdot x = -1$$

Es evidente que esta igualdad no es cierta independientemente del valor que tome x. Decimos que en este caso *la ecuación no tiene solución*.

Ecuaciones con infinitas soluciones

Ejemplo $\mathbf{2x - 1 = 3x + 3 - x - 4}$

$$2x - 3x + x = 3 - 4 + 1 \qquad 0 \cdot x = 0$$

Comprobamos que cualquier valor de x es solución de la ecuación. Decimos que *la ecuación tiene infinitas soluciones*.

Ejemplo $\mathbf{\frac{3(x-1)}{2} + 4x = \frac{11x-3}{2}}$

$$\frac{3x-3}{2} + 4x = \frac{11x-3}{2} \qquad 2\left(\frac{3x-3}{2} + 4x\right) = 2 \cdot \frac{11x-3}{2} \qquad 3x - 3 + 8x = 11x - 3$$

$$3x + 8x - 11x = -3 + 3 \qquad 0 \cdot x = 0$$

Comprobamos que cualquier valor de x es solución de la ecuación. Decimos que *la ecuación tiene infinitas soluciones*.

Ejemplo $\mathbf{\frac{(x-1)(x+1)}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} = 0}$

$$(x-1)(x+1) - x^2 + 1 = 0 \qquad x^2 - 1 - x^2 + 1 = 0 \qquad 0 \cdot x^2 = 0$$

Comprobamos que cualquier valor de x es solución de la ecuación. Decimos que *la ecuación tiene infinitas soluciones*.

Ejemplos con diversas variables

Despejar la variable "a" en la ecuación $\mathbf{m = \frac{3}{n - a}}$

Solución $m(n-a) = 3 \qquad mn - ma = 3 \qquad -ma = 3 - mn \qquad a = \frac{3 - mn}{-m} = \frac{mn - 3}{m}$

Despejar la variable "a" en la ecuación $\mathbf{v = v_0 + at^2}$

Solución $v - v_0 = at^2 \qquad a = \frac{v - v_0}{t^2}$

Despejar la variable "t" en la ecuación $\mathbf{v = v_0 + at^2}$

Solución $v - v_0 = at^2 \qquad t = \sqrt{\frac{v - v_0}{a}}$

Despejar la variable "a" en la ecuación $\mathbf{s = vt + \frac{1}{2}at^2}$

Solución $2s = 2vt + at^2 \qquad 2s - 2vt = at^2 \qquad a = \frac{2s - 2vt}{t^2}$

Despejar la variable "d" en la ecuación $\mathbf{F = G \cdot \frac{M \cdot m}{d^2}}$

Solución $d^2 F = GMm \qquad d = \sqrt{\frac{GMm}{F}}$

Despejar la variable "t" en la ecuación $\mathbf{P = \frac{W}{2gt}\left(v_1^2 - v_2^2\right)}$

Solución $P \cdot 2gt = W\left(v_1^2 - v_2^2\right) \qquad t = \frac{W\left(v_1^2 - v_2^2\right)}{2gP}$

Problemas propuestos con soluciones

Resolver las siguientes ecuaciones simplificando al máximo el resultado.

a) $5x-6=-3x$ b) $14-3x=4x$ c) $-16-6x=-2x$ d) $5x+12=2x-21$

e) $7-3x=6x-20$ f) $3(x-6)=2(x-4)$ g) $x+2(3x+1)=3(x-2)$

h) $4-2(x-1)=3(2-x)-10$ i) $12-(x-4)=6+x$ j) $5-(2x-3)=4(x-1)$

k) $3\left(5x-\frac{1}{2}\right)-\frac{x}{2}=2x\left(\frac{1}{5}+3\right)$ l) $\frac{2}{3}(3x-7)-10=0$ m) $3(x+1)-5=2x+1$

n) $\frac{x-3}{5}=1$ o) $\frac{x}{3}+5=2x-14$ p) $\frac{3-x}{5}=x-3$ q) $\frac{x-3}{2}+\frac{2x-1}{6}=4$

r) $\frac{x+1}{6}-\frac{x+3}{4}=-1$ s) $\frac{x-2}{4}+\frac{3x-1}{8}=4$ t) $\frac{x+1}{8}-\frac{x-1}{6}-\frac{x+3}{5}=-2$

u) $\frac{2x-3}{6}=10-\frac{3-3x}{2}$ v) $5\left(\frac{2x-1}{4}-\frac{2}{15}\right)=x+2\left(\frac{x}{3}-\frac{3}{2}\right)$

w) $-\frac{1}{4}\left(3x+\frac{8(2-x)}{3}\right)=2\left(x-\frac{2}{3}\right)+5$ x) $2-\left[-2(x+1)-\frac{x-3}{2}\right]=\frac{2x}{3}-\frac{5x-3}{12}+3x$

y) $\frac{2}{3}\left[x-\left(1-\frac{x-2}{3}\right)\right]+1=x$ z) $6\left(\frac{x+1}{8}-\frac{2x-3}{16}\right)=3\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{8}(3x-2)$

ñ) $\frac{4}{x+3}=\frac{5}{x-2}$ α) $4(x+2)=2[2-(3-2x)]$ β) $4x-2[3-(2x+1)2]=6(2x-1)+4$

Soluciones

a) $x=\frac{3}{4}$ b) $x=2$ c) $x=-4$ d) $x=-11$ e) $x=3$ f) $x=10$ g) $x=-2$

h) $x=-10$ i) $x=5$ j) $x=2$ k) $x=\frac{15}{81}$ l) $x=\frac{22}{3}$ m) $x=3$ n) $x=8$

o) $x=\frac{57}{5}$ p) $x=3$ q) $x=\frac{34}{5}$ r) $x=5$ s) $x=\frac{37}{5}$ t) $x=\frac{203}{29}$ u) $x=\frac{-54}{7}$

v) $x=-\frac{13}{10}$ w) $x=-\frac{12}{5}$ x) $x=3$ y) $x=-1$ z) $x=\frac{5}{3}$ ñ) $x=-23$

α) No tiene solución β) Infinitas soluciones

Resolución de problemas

Para la resolución de problemas mediante ecuaciones de primer grado con una incógnita es conveniente realizar los siguientes pasos:

- *Elección de la incógnita: Como incógnita se elige una de las cantidades desconocidas y las otras se relacionan con ella según el enunciado del problema.*
- *Planteamiento de la ecuación: Consiste en expresar mediante una ecuación la relación existente entre los datos del problemas y la incógnita.*
- *Resolución de la ecuación: Consiste en resolver la ecuación que hemos obtenido, es decir, encontrar el valor de la incógnita.*
- *Comprobación: Una vez resuelta la ecuación hay que comprobar que la solución cumple las condiciones del problema.*

Ejemplo *Un número más su doble es igual a su mitad más quince. ¿Cuál es ese número?*

Elección de la incógnita: Al número, que no conocemos le llamamos “x”.

Planteamiento de la ecuación: $x+2x=\frac{x}{2}+15$

Resolución de la ecuación: $2x+4x=x+30 \qquad 5x=30 \quad \Rightarrow \quad x=6$

Comprobación: $6+2\cdot 6=\frac{6}{2}+15 \qquad 6+12=3+15 \quad \Rightarrow \quad 18=18$

Problemas resueltos

1) ***Halla tres números consecutivos cuya suma sea 39.***

Sea “x” el primer número. Por ser consecutivos los otros dos números son $x+1$ y $x+2$

$$x+x+1+x+2=39 \qquad 3x+3=39 \qquad 3x=36 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{36}{3}=12$$

Comprobación: Los números son 12, 13 y 14, cuya suma da 39.

2) ***Busca un número sabiendo que, si se divide entre 3 y al resultado se le suma 2 se obtiene 5.***

Sea “x” ese número. Del enunciado del problema se deduce que: $\frac{x}{3}+2=5$

$$x+6=15 \quad \Rightarrow \quad x=9$$

Comprobación: $\frac{9}{3}+2=5$

3) ***Un padre tiene 35 años y su hijo 5. ¿Al cabo de cuántos años será la edad del padre tres veces mayor que la edad del hijo?***

Sea “x” el número de años que tienen que pasar para que la edad del padre sea el triple que la del hijo. Al cabo de “x” años la edad del padre será $35+x$ y la del hijo $5+x$.

$$35+x=3\cdot(5+x) \qquad 35+x=15+3x \qquad x-3x=15-35 \qquad -2x=-20 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{-20}{-2}=10 \text{ años}$$

Comprobación: $35+10=3(5+10)$

4) ***La suma de dos números es 25 y uno de ellos es 15 unidades mayor que el otro. ¿Cuáles son los números?***

Si un número es "x" el otro es $x+15$, por tanto $x+x+15=25$ $\quad 2x=10 \Rightarrow x=5$

Comprobación: $5+20=25$

5) ***El perímetro de un rectángulo es 168 m. Si su base es 4 metros mayor que su altura ¿cuánto miden la base y la altura del rectángulo?***

Llamamos "x" a lo que mide la altura. Si la base es 4 metros mayor quiere decir que mide $x+4$

El perímetro de un rectángulo es la suma de sus 4 lados. $x+x+x+4+x+4=168$

$$4x+8=168 \Rightarrow x=40$$

Comprobación: $40+40+44+44=168$

6) ***La suma de cuatro números pares consecutivos es 60 ¿Cuáles son esos números?***

Un número par se expresa como "2x". El siguiente número par consecutivo a 2x se obtiene sumando 2 unidades al anterior, es decir, $2x+2$. Cuatro números pares consecutivos serán:

$$2x+2x+2+2x+4+2x+6=60 \qquad 8x=48 \Rightarrow x=6$$

Comprobación: $12+14+16+18=60$

7) ***En una reunión hay doble número de mujeres que de hombres y triple número de niños que de hombres y mujeres juntos. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños hay si la reunión la componen 96 personas?***

Sea "x" el número de hombres que hay. Si hay el doble de mujeres que de hombres en la reunión quiere decir que hay $2x$ mujeres. Si hay el triple de niños que de hombres y mujeres juntos quiere decir que hay $3\cdot(x+y)$ niños. Si en total hay 96 personas tenemos:

$$x+2x+3\cdot(x+2x)=96 \qquad 3x+3x+6x=96 \qquad 12x=96 \qquad x=\frac{96}{12}=8$$

Es decir, hay 8 hombres, 16 mujeres y 72 niños

8) ***Se han consumido 7/8 de un bidón de aceite. Reponemos 38 l y el bidón ha quedado lleno hasta sus 3/5 partes. Calcula la capacidad del bidón.***

Sea "x" la capacidad del bidón de aceite, en litros.

$$x-\frac{7}{8}x+38=\frac{3}{5}x \qquad x-\frac{7x}{8}+38=\frac{3x}{5}$$

$$\text{m.c.m.}(5,8)=40 \qquad 40\left(x-\frac{7x}{8}+38\right)=40\cdot\frac{3x}{5} \qquad 40x-35x+1520=24x$$

$$40x-35x-24x=-1520 \qquad -19x=-1520 \Rightarrow x=\frac{-1520}{-19}=80 \text{ litros}$$

9) ***Luís hizo un viaje en el coche, en el cual consumió 20 l. de gasolina. El trayecto lo hizo en dos etapas: en la primera, consumió 2/3 de la gasolina que tenía el depósito y en la segunda etapa, la mitad de la gasolina que le queda. Calcular:***
a) La cantidad de gasolina que tenía en el depósito.
b) Los litros consumidos en cada etapa.

a) Sea "x" la cantidad de gasolina que tenía el depósito. En la primera etapa consumió $\frac{2}{3}x$ y en la segunda $\frac{1}{2}\left(x-\frac{2}{3}x\right)$. La ecuación es:

$$\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}\left(x-\frac{2}{3}x\right)=20 \qquad \frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x-\frac{2}{6}x=20 \qquad \frac{2x}{3}+\frac{x}{2}-\frac{2x}{6}=20$$

$$\text{m.c.m.}(2,3,6)=2\cdot 3=6 \qquad 6\left(\frac{2x}{3}+\frac{x}{2}-\frac{2x}{6}\right)=6\cdot 20 \qquad 4x+3x-2x=120$$

$$5x=120 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{120}{5}=24\ \text{litros}$$

b) En la primera etapa consumió $\frac{2}{3}\cdot 24=16$ litros y en la segunda $24-16=8$ litros

10) ***Halla tres números consecutivos tales que la mitad del menor más la tercera parte del mediano menos la quinta parte del mayor sea 5.***

Sean $x, x+1$ y $x+2$ los tres números consecutivos.

$$\frac{x}{2}+\frac{x+1}{3}-\frac{x+2}{5}=5 \qquad \text{m.c.m.}(2,3,5)=30 \qquad 30\left(\frac{x}{2}+\frac{x+1}{3}-\frac{x+2}{5}\right)=30\cdot 5$$

$$15x+10(x+1)-6(x+2)=150 \qquad 15x+10x+10-6x-12=150$$

$$15x+10x-6x=150-10+12 \qquad 19x=152 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{152}{19}=8$$

Los tres números son 8, 9 y 10.

Comprobación: $\frac{8}{2}+\frac{9}{3}-\frac{10}{5}=5 \qquad 4+3-2=5 \quad \Rightarrow \quad 5=5$

11) ***En una librería, Ana compra un libro con la tercera parte de su dinero y un cómic con las dos terceras partes de lo que le quedaba. Al salir de la librería tenía 12 €. ¿Cuánto dinero tenía Ana?***

Sea "x" la cantidad de dinero que tenía Ana. En el libro se gasta $\frac{1}{3}x$ y en el cómic se gasta $\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{3}x\right)$. La ecuación es:

$$\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{3}x\right)+12=x \qquad \frac{1}{3}x+\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}x+12=x \qquad \frac{x}{3}+\frac{2x}{3}-\frac{2x}{9}-x=-12$$

$$\text{m.c.m.}(3,9)=3^2=9 \qquad 9\left(\frac{x}{3}+\frac{2x}{3}-\frac{2x}{9}-x\right)=9(-12)$$

$$3x+6x-2x-9x=-108 \qquad -2x=-108 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{-108}{-2}=54 \text{ €}$$

12) ***La dos cifras de un número son consecutivas. La mayor es la de las decenas y la menor la de las unidades. El número es igual a seis veces la suma de las cifras. ¿Cuál es el número?***

En un número cualquiera, por ejemplo el 87, el número 7 representa las unidades y el número 8 las decenas, de tal manera que lo podemos escribir como $87=8\cdot 10+7$.
Si “x” es la cifra de las unidades entonces “x+1” será la cifra de las decenas ya que el problema nos dice que son consecutivas, por tanto nuestro número, al igual que el 87, lo podemos escribir como $10(x+1)+x$. La ecuación es:

$$10(x+1)+x=6\left[(x+1)+x\right] \qquad 10x+10+x=6(2x+1) \qquad 11x+10=12x+6$$

$$11x-12x=6-10 \qquad -x=-4 \quad \Rightarrow \quad x=4$$

Por lo tanto, las dos cifras del número son el 4 para las unidades y el 5 para las decenas, es decir, el número es el 54. Tal como dice el enunciado $54=6(5+4)$

13) ***Las tres cuartas partes de la edad del padre de Juan excede en 15 años a la edad de éste. Hace cuatro años la edad del padre era doble de la edad del hijo. Hallar las edades de ambos.***

Sea “x” la edad de Juan. Sabemos que hace 4 años la edad del padre de Juan era el doble que la del hijo, luego hoy, que han pasado 4 años, la edad de Juan será $x+4$ y la del padre $2x+4$. Por lo tanto, la ecuación es:

$$\frac{3}{4}(2x+4)=x+4+15 \qquad \frac{6x}{4}+3=x+19 \qquad 4\left(\frac{6x}{4}+3\right)=4(x+19)$$

$$6x+12=4x+76 \qquad 2x=64 \quad \Rightarrow \quad x=32$$

14) ***Halla tres múltiplos de 3 consecutivos cuya suma sea 351.***

El primer múltiplo de 3 es 3x, el segundo será $3(x+1)$ y el tercero $3(x+2)$.

$$3x+3(x+1)+3(x+2)=351 \qquad 3x+3x+3+3x+6=351 \qquad 9x=342 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{342}{9}=38$$

Los tres múltiplos de 3 consecutivos son 114, 117 y 120.

Comprobación: $114+117+120=351 \quad \Rightarrow \quad 351=351$

15) ***Carlos se ha gastado 3’60 € en comprar 25 chicles de fresa y de menta. Si los de fresa cuestan 12 céntimos cada uno y los de menta 15 céntimos cada uno, ¿cuántos ha comprado de cada clase?***

Sea “x” el número de chicles de fresa. Si en total hay 25 chicles, quiere decir que hay $25-x$ chicles de menta. En este problema es mejor utilizar céntimos en vez de euros para operar con números enteros.

$$12x+15(25-x)=360 \qquad 12x+375-15x=360 \qquad -3x=-15 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{-15}{-3}=5$$

16) ***En un examen de 20 preguntas dan 1'5 puntos por cada respuesta acertada y quitan 1 punto por cada respuesta equivocada. Si un alumno contesta todas las preguntas y obtiene 12'5 puntos, ¿cuántas respuestas ha acertado?***

Sea "x" el número de preguntas acertadas. Como en total hay 20 preguntas, el número de preguntas falladas será $20-x$. Podemos platear la siguiente ecuación:

$$1'5x-1\cdot(20-x)=12'5 \qquad 1'5x-20+x=12'5 \qquad 2'5x=32'5 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{32'5}{2'5}=13$$

El alumno ha acertado 13 preguntas y ha fallado 7.

17) ***Para organizar una excursión de un grupo de amigos, cada uno ha puesto 15 €. Si hubieran sido tres más, sólo hubieran tenido que poner 12 €. ¿cuántos amigos han ido a la excursión?***

Sea "x" el número de amigos que han ido a la excursión. $15x=12(x+3) \quad \Rightarrow \quad x=12$

18) ***Las entradas para un concierto se pusieron a la venta al principio de la semana: el lunes se vendieron 2/5 del total, el martes 2/3 de las restantes, el miércoles 150 y sobraban todavía 1/10 del total de entradas. ¿Cuál era el aforo del local?***

Sea "x" el número total de entradas.

$$\frac{2}{5}x+\frac{2}{3}\left(x-\frac{2}{5}x\right)+150+\frac{1}{10}x=x \qquad \frac{2x}{5}+\frac{2x}{3}-\frac{4x}{15}+150+\frac{x}{10}=x$$

$$\text{m.c.m.}(5,3,15,10)=5\cdot 2\cdot 3=30 \qquad 30\left(\frac{2x}{5}+\frac{2x}{3}-\frac{4x}{15}+150+\frac{x}{10}\right)=30x$$

$$6\cdot 2x+10\cdot 2x-2\cdot 4x+4500+3x=30x \qquad 12x+20x-8x+3x-30x=-4500$$

$$-3x=-4500 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{-4500}{-3}=1500 \ \text{personas}$$

19) ***La edad actual de Sergio es el doble que la de su hermana Raquel, pero hace 10 años la edad de Sergio era el triple que la de Raquel. ¿Cuántos años tienen actualmente cada uno?***
Sea "x" la edad actual de Raquel, por lo tanto la edad actual de Sergio es 2x.

$$2x-10=3(x-10) \qquad 2x-10=3x-30 \qquad -x=-20 \quad \Rightarrow \quad x=20$$

Actualmente Raquel tiene 20 años y Sergio 40.

20) ***En una central quieren mezclar dos tipos de leche: una de 85 céntimos el litro y otra de 92 céntimos el litro, de modo que la mezcla de 350 litros les sale a 90 céntimos el litro. ¿Cuántos litros de leche de cada clase se mezclan?***

Sea "x" la cantidad de leche de 85 céntimos el litro. Si en total hay 350 litros quiere decir que la cantidad de leche de 92 céntimos el litro que se mezcla es de $350-x$. La ecuación que se plantea es:

$$85\cdot x+92(350-x)=90\cdot 350 \qquad 85x+32200-92x=31500 \qquad x=100$$

Hay que mezclar 100 litros de leche de 85 céntimos el litro con 250 litros de leche de 92 céntimos el litro.

21) ***¿Cuántos litros de agua hay que añadir a 110 litros de zumo concentrado que cuesta a 2 € el litro, para obtener una bebida que resulte a 1'7 € el litro?***

Sea "x" el número de litros de agua a añadir. $2\cdot 110 = 1'7\,(110 + x)$ $\quad 220 = 187 + 1'7x$

$$x = \frac{33}{1'7} = 19'41 \text{ litros de agua hay que añadir}$$

22) ***Un coche y una motocicleta parten a las 10 de la mañana el uno hacia el otro desde dos pueblos que distan 90 km. Sabiendo que el coche va al doble de velocidad que la motocicleta y que se cruzan a las 11'30, ¿a qué velocidad va cada uno? ¿dónde se cruzan?***

Tardan 1'5 horas en cruzarse. Si "v" es la velocidad de la motocicleta y 2v la velocidad del coche, teniendo en cuenta que el espacio recorrido por cada uno de ellos es igual a $e = v\cdot t$, podemos plantear la ecuación de la siguiente manera:

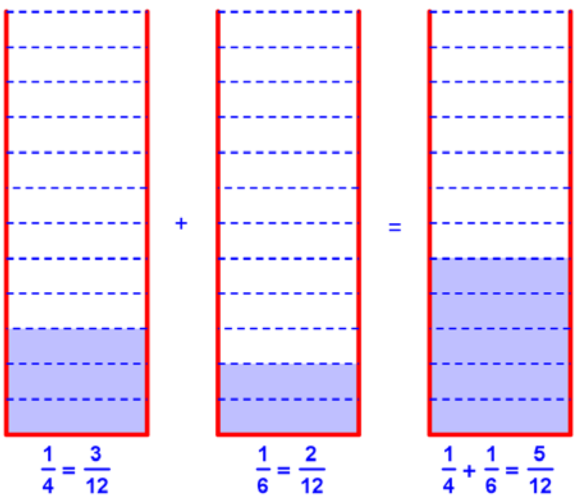
$$1'5\cdot v + 1'5\cdot 2v = 90 \qquad 4'5v = 90 \quad \Rightarrow \quad v = 20 \text{ km/h}$$

La motocicleta va a 20 km/h y el coche a 40 km/h.

La motocicleta recorre $e = 20\cdot 1'5 = 30$ km. y el coche $90 - 30 = 60$ km.

23) ***Un grifo A llena un depósito de agua en 4 horas y otro grifo B lo llena en 6 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán los dos grifos en llenar el depósito?***

En este tipo de problemas se calcula primero qué fracción de depósito llena cada grifo por separado en una hora, a continuación se calcula qué fracción de depósito llenan los dos grifos juntos en una hora y finalmente se halla el tiempo que tarda en llenarse el depósito con los dos grifos abiertos. *Vamos a llamar "x" al tiempo que tardarán en llenar el depósito los dos juntos.*



Como se observa en el dibujo, el grifo A llena en una hora $\frac{1}{4}$ del depósito y el grifo B llena en una hora $\frac{1}{6}$ del depósito. Entre los dos llenan en una hora $\frac{1}{x}$ de depósito.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{x} \qquad \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3+2}{12} = \frac{5}{12} = \frac{1}{x}$$

Veamos ahora el tiempo que tarda en llenarse el depósito con los dos grifos abiertos. Si un grifo tarda 4 horas en llenar un depósito quiere decir que en una hora llena 1/4 de depósito. Si los dos grifos llenan 5/12 de depósito en una hora significa que tardan en llenarlo 12/5 horas, es decir, $2'4$ horas. Este resultado se obtiene sin más que despejar la incógnita "x" en la igualdad anterior:

$$\frac{5}{12} = \frac{1}{x} \qquad 5x = 12 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{12}{5} = 2'4 \text{ horas}$$

$$2'4 \text{ horas} = 2 \text{ horas} + 0'4 \text{ horas} = 2 \text{ horas y } 0'4\cdot 60 \text{ minutos} = 2 \text{ horas y } 24 \text{ minutos}$$

24) ***Un carpintero hace un trabajo en 5 días y su ayudante en 7 días. Entre los dos juntos ¿cuánto trabajo pueden realizar en un día? ¿cuánto tiempo tardarán en realizar el trabajo entre ambos?***

El carpintero hará en un día $\frac{1}{5}$ del trabajo y su ayudante $\frac{1}{7}$. Entre los dos harán en un día $\frac{1}{x}$.

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{7}=\frac{1}{x} \qquad \frac{1}{5}+\frac{1}{7}=\frac{7+5}{35}=\frac{12}{35}=\frac{1}{x}$$

En un día harán $\frac{12}{35}$ del trabajo.

El tiempo que tardarán los dos juntos es $\frac{12}{35}=\frac{1}{x} \qquad 12x=35 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{35}{12}=2'916 \text{ días}$

25) ***Los dos surtidores de una fuente llenan un depósito en 16 horas. ¿Cuánto tiempo tardaría en hacerlo cada uno por separado sabiendo que el segundo surtidor invierte el doble de tiempo que el primero?***

Si los dos surtidores juntos tardan en llenar un depósito 16 horas, quiere decir que en una hora llenan 1/16 de depósito. Si un surtidor tarda “x” horas él solo y el otro tarda el doble entonces:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}=\frac{1}{16} \qquad \frac{2+1}{2x}=\frac{1}{16} \qquad \frac{3}{2x}=\frac{1}{16} \qquad 48=2x \quad \Rightarrow \quad x=\frac{48}{2}=24 \text{ horas}$$

Un surtidor tardaría en llenar el depósito 24 horas y el otro el doble, es decir, 48 horas.

26) ***Un obrero coloca 72 ladrillos en 2h30’, otro coloca 100 ladrillos en 3h y otro coloca 45 ladrillos en 1h20’¿cuánto tardarán en colocar 1000 ladrillos juntos?***

Ponemos el tiempo en minutos.

$$2h\,30'=150' \qquad 3h=180' \qquad 1h\,20'=80'$$

El primer obrero colocará en 1 minuto $\frac{72}{150}$ ladrillos.

El segundo obrero colocará en 1 minuto $\frac{100}{180}$ ladrillos.

El tercer obrero colocará en 1 minuto $\frac{45}{80}$ ladrillos.

Los tres juntos colocarán en un minuto $\frac{72}{150}+\frac{100}{180}+\frac{45}{80}=\frac{1000}{x}$

$$\frac{72}{150}+\frac{100}{180}+\frac{45}{80}=\frac{1000}{x} \quad \Rightarrow \quad x=625'76 \text{ minutos} \approx 10h\,25'$$

27) ***Un reloj marca las 3 en punto. ¿A qué hora entre las 3 y las 4 se superpondrán las dos agujas?***

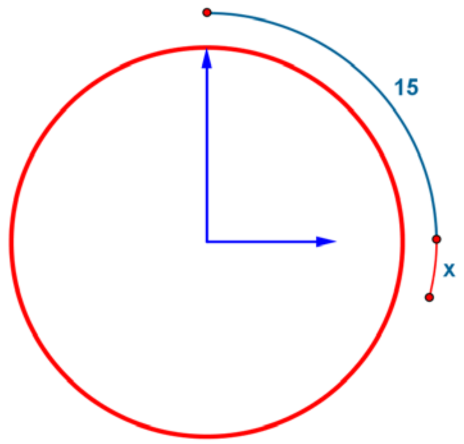
El ángulo o arco que describe el minutero es siempre 12 veces mayor que el arco que describe la aguja horaria, ya que mientras que la aguja horaria recorre en una hora un arco de 30º la aguja correspondiente al minutero da una vuelta completa ($360^\circ=12\cdot 30^\circ$).

Sea “x” el arco que recorre la aguja horaria. La aguja del minutero recorrerá un arco de $15+x$. Como el recorrido del minutero es 12 veces el recorrido de la aguja horaria podemos plantear la ecuación:

$$15+x=12x \qquad 11x=15$$

$$x=\frac{15}{11}=1'3636 \text{ minutos}$$

$$x=1\,\text{m y } 0'3636\cdot 60 \text{ seg} \quad x=1\,\text{m y } 21\text{ s}$$



Esto significa que las dos agujas se superpondrán a las 3 h 16 m 21 s.

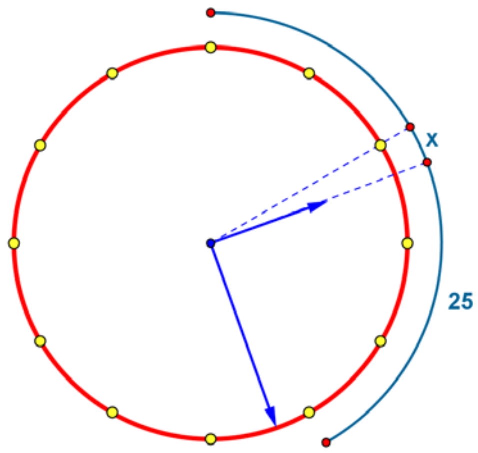
28) ***Un reloj marca las 2 en punto. ¿A qué hora formarán sus agujas por primera vez un ángulo recto?***

Las agujas del reloj formarán un ángulo recto a las 2 h 25 m y un poco más que llamaremos “x”.

$$25+x=12x \qquad 11x=25$$

$$x=\frac{25}{11}=2'2727 \text{ minutos}$$

$$x=2\,\text{m y } 0'2727\cdot 60 \text{ seg} \quad x=2\,\text{m y } 16\text{ s}$$



Esto significa que las dos agujas formarán 90º a las 2 h 27 m 16 s.

Problemas propuestos con soluciones

1) ***Calcula un número sabiendo que sus tres cuartos superan en 22 unidades a su mitad.***
Solución: 88
2) ***La construcción de una carretera entre dos pueblos se inicia a la vez por ambos extremos. Al cabo de un mes, lo construido por un extremo es ¾ de lo construido por el otro, y faltan por construir 4200 m, que es el doble de lo que se ha hecho. ¿Qué longitud va a tener la carretera?***
Solución: 6300 m
3) ***Un depósito está lleno de agua. En una primera extracción se saca 1/5 de su contenido, en una segunda extracción se sacan 60 litros y, por último, se sacan 5/6 del agua restante, quedando aún 50 litros. Calcula la capacidad del depósito.***
Solución: 6450 litros
4) ***En una familia trabajan el padre, la madre y el hijo mayor, ganando conjuntamente 2160 € al mes. La ganancia de la madre es igual a los 2/3 de la del padre, y la del hijo ½ de la de su madre. ¿Cuánto gana cada uno?***
Solución: El padre gana 1080 €, la madre 720 € y el hijo 360 €
5) ***La nota media de tres evaluaciones de Carmen en el área de matemáticas se obtiene sumando las tres notas y dividiendo entre tres. Si ha sacado un 5 y un 7 en las dos primeras evaluaciones, ¿qué nota ha de sacar en la tercera para alcanzar una nota media de 6'5?***
Solución: 7'5
6) ***Un triángulo isósceles tiene de perímetro 20 cm.. Calcula la longitud de sus lados sabiendo que el lado desigual mide la mitad que cada uno de los otros dos.***
Solución: Los lados iguales miden 8 cm. y el lado desigual 4 cm.
7) ***Una pared de 12 metros cuadrados está pintada de dos colores, blanco y azul. La superficie de blanco es 6 veces la mitad de la superficie de azul. ¿Qué superficie está pintada de cada color?***
Solución: 9 m^2 de blanco y 3 m^2 de azul.
8) ***Dos grifos llenan un depósito en 4 horas. Uno de ellos en solitario lo llenaría en 6 horas. ¿Cuánto tardaría en llenarlo el otro grifo?***
Solución: 12 horas
9) ***Una furgoneta sale de un punto A, a una velocidad de 80 km/h. Hora y media más tarde sale del mismo punto un coche a una velocidad de 100 km/h ¿Cuánto tiempo tardará el coche en alcanzar la furgoneta?***
Solución: El coche tarda 6 horas en alcanzar la furgoneta a 600 km. de A
10) ***Un mercancías y un expreso salen de una ciudad a las 8 de la mañana en sentidos opuestos. Sabiendo que el mercancías lleva una velocidad de 60 km/h y el expreso de 90 km/h, ¿a qué hora estarán separados 450 km de otro?***
Solución: A las 11 de la mañana

Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Una ecuación lineal con dos incógnitas es una expresión de la forma $\boldsymbol{ax+by=c}$ *donde a, b y c son los coeficientes (números) y "x" e "y" son las incógnitas. Gráficamente una ecuación lineal representa una recta en el plano. Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas será de la forma:*

$$\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{ax+by=c}\\ \boldsymbol{a'x+b'y=c'}\end{array}\right\}$$

Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es encontrar los valores de las incógnitas "x" e "y" que verifican las dos ecuaciones a la vez. Puede suceder que haya una única solución (las rectas se cortan en un punto), que haya infinitas soluciones (las rectas coinciden) o que no haya solución (las rectas son paralelas).

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas existen tres métodos: *método de sustitución, método de igualación y método de reducción.*

Método de Sustitución

1) *Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones (la que sea más fácil).*
2) *Se sustituye la expresión de esta incógnita en la otra ecuación, obteniendo una ecuación de primer grado con una sola incógnita.*
3) *Se resuelve la ecuación y se obtiene el valor de una de las incógnitas. Este valor se sustituye en la ecuación despejada al principio para obtener el valor de la otra incógnita.*
4) *Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.*
5) *Comprobamos los resultados sustituyendo los valores de x e y en las dos ecuaciones para ver si se cumplen.*

Ejemplo $\left.\begin{array}{r}\mathbf{x+3y=4}\\ \mathbf{2x-y=1}\end{array}\right\}$

1) *Se puede despejar la "x" en la primera ecuación o la "y" en la segunda, ya que en los dos casos son las que tienen el coeficiente más sencillo. Despejamos la "x" en la primera ecuación*

$$x=4-3y$$

2) *Se sustituye en la segunda ecuación el valor de la x por la expresión anterior.*

$$2(4-3y)-y=1$$

3) *Se resuelve la ecuación obtenida.*

$$8-6y-y=1 \qquad -7y=-7 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{-7}{-7}=1$$

4) *Se sustituye* $y=1$ *en la ecuación* $x=4-3y$

$$x=4-3(1)=4-3=1$$

5) *Solución* $x=1 \;\; y=1$

6) *Comprobamos el resultado sustituyendo los valores de x e y en el sistema de ecuaciones lineales.*

$$\left.\begin{array}{r} 1+3\cdot 1=4 \\ 2\cdot 1-1=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4=4 \\ 1=1 \end{array}\right\}$$

Método de Igualación

1) *Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones.*
2) *Se igualan las dos expresiones resultantes, con lo que obtenemos una ecuación con una incógnita.*
3) *Se resuelve la ecuación y se obtiene el valor de una de las incógnitas.*
4) *El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las dos expresiones en las que aparecía despejada la otra incógnita.*
5) *Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.*
6) *Se comprueba el resultado sustituyendo los valores de x e y en las dos ecuaciones para ver si se cumplen.*

Ejemplo $\left.\begin{array}{r} \mathbf{x+3y=4} \\ \mathbf{2x-y=1} \end{array}\right\}$

1) *Se despeja "x" en las dos ecuaciones* $\left.\begin{array}{l} x=4-3y \\ x=\dfrac{1+y}{2} \end{array}\right\}$

2) *Se igualan las dos expresiones resultantes* $4-3y=\dfrac{1+y}{2}$

3) *Se resuelve la ecuación obtenida.*

$2(4-3y)=1+y \qquad 8-6y=1+y \qquad -6y-y=1-8 \qquad -7y=-7 \Rightarrow y=\dfrac{-7}{-7}=1$

4) *Se sustituye* $y=1$ *en la ecuación* $x=4-3y$

$$x=4-3(1)=4-3=1$$

5) *Solución* $x=1 \;\; y=1$

6) *Se comprueba la solución (comprobación efectuada en el método anterior).*

Método de Reducción

Para aplicar este método hay que recordar que, si multiplicamos todos los términos de una ecuación lineal con dos incógnitas por un mismo número distinto de cero, se obtiene otra ecuación lineal equivalente a la dada que tiene las mismas soluciones. Esto quiere decir que, por ejemplo, las ecuaciones $x+3y=-1$, $2x+6y=-2$ y $5x+15y=-5$ *tienen las mismas soluciones (la segunda ecuación es igual a la primera multiplicada por dos y la tercera ecuación es igual a la primera multiplicada por 5).*

1) *Se elige la incógnita más apropiada para eliminarla.*

2) *Se multiplica una o las dos ecuaciones por un número o números tales que la incógnita que queremos eliminar aparezca en las dos ecuaciones con el mismo coeficiente pero cambiado de signo.*
3) *Se suman los términos semejantes en las dos ecuaciones con lo que desaparecerá una de las incógnitas.*
4) *Se resuelve la ecuación resultante y se obtiene el valor de la incógnita.*
5) *Se sustituye este valor en una de las ecuaciones iniciales y se calcula la otra incógnita.*
6) *Se comprueba el resultado sustituyendo los valores de x e y en las dos ecuaciones para ver si se cumplen.*

Ejemplo $$\left.\begin{aligned}\mathbf{x+3y=4}\\ \mathbf{2x-y=1}\end{aligned}\right\}$$

1) *Si queremos eliminar la "x" tenemos que multiplicar la primera ecuación por* -2 *para que al sumarla con la segunda se anule. Si queremos eliminar la "y" entonces tenemos que multiplicar la segunda ecuación por 3 para que al sumarla con la primera se anule. Escogemos, por ejemplo, eliminar la "x".*

2) *Se multiplica la primera ecuación por* -2.

$$\left.\begin{aligned}-2x-6y=-8\\ 2x-y=1\end{aligned}\right\}$$

3) *Se suman las dos ecuaciones.*

$$\begin{array}{r}-2x-6y=-8\\ 2x\quad -y=\ 1\\ \hline -7y=-7\end{array}$$

4) *Se resuelve la ecuación resultante.*

$$-7y=-7 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{-7}{-7}=1$$

5) *Se sustituye este valor en la primera ecuación y se despeja la "x".*

$$x+3\cdot 1=4 \quad \Rightarrow \quad x=1 \qquad \textit{Solución:} \quad x=1 \;\; y=1$$

6) *Se comprueba la solución (es el mismo sistema del apartado anterior).*

Problemas resueltos

Ejemplo $\left.\begin{aligned}\mathbf{x+3y=7}\\ \mathbf{5x-2y=-16}\end{aligned}\right\}$

Método de sustitución: Se despeja "x" en la primera ecuación y se sustituye en la segunda.

$$x=7-3y \qquad 5(7-3y)-2y=-16 \qquad 35-15y-2y=-16$$

$$-17y=-51 \;\Rightarrow\; y=\frac{-51}{-17}=3 \;\Rightarrow\; x=7-3\cdot 3=-2$$

La solución es $x=-2 \quad y=3$

Comprobación:

$$\left.\begin{aligned}-2+3\cdot 3=7\\ 5(-2)-2\cdot 3=-16\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}7=7\\ -16=-16\end{aligned}\right\}$$

Ejemplo $\left.\begin{aligned}\mathbf{x+4y=3}\\ \mathbf{6x-5y=-11}\end{aligned}\right\}$

Método de reducción: Se multiplica la primera ecuación por -6 y se suman las dos ecuaciones.

$$\begin{array}{r} -6x-24y=-18\\ 6x\;-5y=\;-11\\ \hline -29y=-29\end{array} \qquad -29y=-29 \;\Rightarrow\; y=\frac{-29}{-29}=1$$

Se sustituye en la primera ecuación y se despeja la "x". $\quad x+4\cdot 1=3 \;\Rightarrow\; x=-1$

La solución es $x=-1 \quad y=1$

Comprobación:

$$\left.\begin{aligned}-1+4\cdot 1=3\\ 6(-1)-5\cdot 1=-11\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}3=3\\ -11=-1\end{aligned}\right\}$$

Ejemplo $\left.\begin{aligned}\mathbf{2x-5y=-12}\\ \mathbf{7x-2y=-11}\end{aligned}\right\}$

Vamos a resolver este sistema primero por el método de sustitución y después por el método de reducción, para ver las dificultades de cálculo tanto en uno como en otro método.

<u>Método de igualación</u>: Se despeja "x" en las dos ecuaciones y se igualan los resultados.

$$\begin{cases}2x=-12+5y\\ 7x=-11+2y\end{cases} \qquad \begin{cases}x=\dfrac{-12+5y}{2}\\ x=\dfrac{-11+2y}{7}\end{cases} \qquad \frac{-12+5y}{2}=\frac{-11+2y}{7}$$

$$7(-12+5y)=2(-11+2y) \qquad -84+35y=-22+4y \qquad 35y-4y=-22+84$$

$$31y=62 \quad \Rightarrow \quad y=2$$

Se sustituye $y=2$ en la primera ecuación con la x despejada. $x=\dfrac{-12+5\cdot 2}{2}=-1$

La solución es $x=-1 \quad y=2$

Comprobación:

$$\left.\begin{array}{r} 2(-1)-5\cdot 2=-12 \\ 7(-1)-2\cdot 2=-11 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -12=-12 \\ -11=-11 \end{array}\right\}$$

Método de reducción: Para eliminar "x" multiplicamos la primera ecuación por 7 y la segunda por -2. De esta manera, al sumar las dos ecuaciones desaparece la incógnita x.

$$\left.\begin{array}{r} 7(2x-5y)=7(-12) \\ -2(7x-2y)=-2(-11) \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 14x-35y=-84 \\ -14x+4y=22 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{r} 14x-35y=-84 \\ -14x+4y=22 \\ \hline -31y=-62 \end{array}$$

$$-31y=-62 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{-62}{-31}=2$$

Se sustituye $y=2$ en la primera ecuación, por ejemplo.

$$2x-5\cdot 2=-12 \qquad 2x=-2 \quad \Rightarrow \quad x=-1$$

La solución es $x=-1 \quad y=2$, que ya se ha comprobado anteriormente

Ejemplo

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{2x+10y=52} \\ \mathbf{x+\dfrac{y}{2}=8} \end{array}\right\}$$

Método de sustitución. Se despeja la "x" en la segunda ecuación y se sustituye en la primera.

$$x=8-\frac{y}{2} \qquad 2\left(8-\frac{y}{2}\right)+10y=52 \qquad 16-y+10y=52 \qquad 9y=36 \quad \Rightarrow \quad y=4$$

Se sustituye $y=4$ en la segunda ecuación $\quad x+\dfrac{4}{2}=8 \qquad x+2=8 \quad \Rightarrow \quad x=6$

La solución es $x=6 \quad y=4$

Comprobación:

$$\left.\begin{array}{r} 2\cdot 6+10\cdot 4=52 \\ 6+\dfrac{4}{2}=8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 52=52 \\ 6+2=8 \end{array}\right\}$$

Ejemplo $\left.\begin{array}{r}\dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{2}}+\dfrac{\mathbf{y}}{\mathbf{3}}=\mathbf{4}\\ \mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{10}\end{array}\right\}$

Podemos eliminar los denominadores de la primera ecuación multiplicando todos sus términos por el mínimo común múltiplo de los denominadores.

$$\text{m.c.m.}(2,3)=6 \qquad \left.\begin{array}{r}6\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}\right)=6\cdot 4\\ x+y=10\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r}3x+2y=24\\ x+y=10\end{array}\right\}$$

Método de sustitución: Despejamos x en la segunda ecuación y la sustituimos en la primera.

$$x=10-y \qquad 3(10-y)+2y=24 \qquad 30-3y+2y=24 \qquad -y=-6 \;\Rightarrow\; y=\frac{-6}{-1}=6$$

Se sustituye $y=2$ en la segunda ecuación (por ser la más sencilla).

$$x+6=10 \;\Rightarrow\; x=4$$

La solución es $x=4 \;\; y=6$.

Comprobación:

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{4}{2}+\dfrac{6}{3}=4\\ 4+6=10\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r}2+2=4\\ 4+6=10\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}4=4\\ 10=10\end{array}\right\}$$

Ejemplo $\left.\begin{array}{r}\dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{3}}+\dfrac{\mathbf{y}}{\mathbf{5}}=\mathbf{7}\\ \dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{3}}-\dfrac{\mathbf{y}}{\mathbf{4}}=\mathbf{2}\end{array}\right\}$

Podemos eliminar los denominadores de las dos ecuaciones multiplicando todos sus términos por el mínimo común múltiplo de los denominadores.

$$\left\{\begin{array}{l}\text{m.c.m.}(3,5)=15\\ \text{m.c.m.}(3,4)=12\end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{r}15\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{5}\right)=15\cdot 7\\ 12\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{4}\right)=12\cdot 2\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r}5x+3y=105\\ 4x-3y=24\end{array}\right\}$$

Método de reducción: Al sumar las dos ecuaciones se elimina la "y".

$$\begin{array}{r}5x+3y=105\\ 4x-3y=24\\ \hline 9x\qquad =129\end{array} \qquad 9x=129 \;\Rightarrow\; x=\frac{129}{9}=\frac{43}{3}$$

Se sustituye la x en la primera ecuación y se despeja la "y".

$$\frac{\frac{43}{3}}{3}+\frac{y}{5}=7 \qquad \frac{43}{9}+\frac{y}{5}=7 \qquad \text{m.c.m.}(9,5)=45 \qquad 45\cdot\frac{43}{9}+45\cdot\frac{y}{5}=45\cdot 7$$

$$5\cdot 43+9y=315 \qquad 9y=315-215 \qquad y=\frac{100}{9}$$

La solución es $x=\dfrac{43}{3}\quad y=\dfrac{100}{9}$.

Comprobación:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\frac{43}{3}}{3}+\dfrac{\frac{100}{9}}{5}=7\\[2ex] \dfrac{\frac{43}{3}}{3}-\dfrac{\frac{100}{9}}{4}=2\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}\dfrac{43}{9}+\dfrac{100}{45}=7\\[2ex] \dfrac{43}{9}-\dfrac{100}{36}=2\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}45\cdot\dfrac{43}{9}+45\cdot\dfrac{100}{45}=45\cdot 7\\[2ex] 36\cdot\dfrac{43}{9}-36\cdot\dfrac{100}{36}=36\cdot 2\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}215+100=315\\ 172-100=72\end{array}\right\}$$

<u>*Ejemplo*</u> $\left.\begin{array}{r}\mathbf{0'8x-0'2y=2'2}\\ \mathbf{0'4x+2y=3'2}\end{array}\right\}$

Para evitar tener que operar con decimales, podemos multiplicar las dos ecuaciones por 10 y resolver el sistema equivalente.

$$\left.\begin{array}{r}10\cdot 0'8x-10\cdot 0'2y=10\cdot 2'2\\ 10\cdot 0'4x+10\cdot 2y=10\cdot 3'2\end{array}\right\}\qquad\left.\begin{array}{r}8x-2y=22\\ 4x+20y=32\end{array}\right\}$$

Método de reducción: Multiplicamos la segunda ecuación por -2.

$$\begin{array}{r}8x-2y=22\\ -8x-40y=-64\\ \hline -42y=-42\end{array}\qquad -42y=-42\ \Rightarrow\ y=\frac{-42}{-42}=1$$

Sustituyendo este valor en la primera de las dos ecuaciones reducidas tenemos:

$$8x-2\cdot 1=22\qquad 8x=24\ \Rightarrow\ x=\frac{24}{8}=3$$

La solución es $x=3\quad y=1$.

Comprobación:

$$\left.\begin{array}{r}8\cdot 3-2\cdot 1=22\\ 4\cdot 3+20\cdot 1=32\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}22=22\\ 32=23\end{array}\right\}$$

<u>*Ejemplo*</u> $\left.\begin{array}{c}\mathbf{x-2(x+y)=3y-2}\\[1ex] \mathbf{\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=3}\end{array}\right\}$

El primer paso es quitar los paréntesis y los denominadores.

$$\left.\begin{array}{r}x-2x-2y=3y-2\\[1ex] 6\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}\right)=6\cdot 3\end{array}\right\}\qquad\left.\begin{array}{r}-x-5y=-2\\ 2x+3y=18\end{array}\right\}\qquad\left.\begin{array}{r}x+5y=2\\ 2x+3y=18\end{array}\right\}$$

Método de sustitución: Despejamos x en la primera ecuación y la sustituimos en la segunda.

$$x=2-5y\qquad 2(2-5y)+3y=18\qquad 4-10y+3y=18\qquad -7y=14\ \Rightarrow\ y=\frac{14}{-7}=-2$$

Sustituimos este valor en la primera ecuación:

$$\frac{x}{3}+\frac{-2}{2}=3 \qquad \frac{x}{3}-1=3 \qquad \frac{x}{3}=4 \quad \Rightarrow \quad x=12$$

La solución es $x=12 \quad y=-2$.

Comprobación:

$$\left.\begin{array}{r} 12-2(12-2)=3(-2)-2 \\ \dfrac{12}{3}+\dfrac{-2}{2}=3 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 12-20=-8 \\ 4-1=3 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} -8=-8 \\ 3=3 \end{array}\right\}$$

Ejemplo

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{3x+2y=1} \\ \dfrac{\mathbf{2(x-1)}}{\mathbf{3}}-\dfrac{\mathbf{3y+1}}{\mathbf{2}}=\mathbf{2x+y} \end{array}\right\}$$

El primer paso es quitar los paréntesis y los denominadores.

$$\left.\begin{array}{r} 3x+2y=1 \\ \dfrac{2x-2}{3}-\dfrac{3y+1}{2}=2x+y \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 3x+2y=1 \\ 6\left(\dfrac{2x-2}{3}-\dfrac{3y+1}{2}\right)=6(2x+y) \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 3x+2y=1 \\ 4x-4-9y-3=12x+6y \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 3x+2y=1 \\ -8x-15y=7 \end{array}\right\}$$

Método de reducción: Multiplicamos la primera ecuación por 8 y la segunda por 3 para eliminar la “x”.

$$\left.\begin{array}{r} 8(3x+2y)=8\cdot 1 \\ 3(-8x-15y)=3\cdot 7 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 24x+16y=8 \\ -24x-45y=21 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{r} 24x+16y=8 \\ -24x-45y=21 \\ \hline -29y=29 \end{array}$$

$$-29y=29 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{-29}{29}=-1$$

Sustituyendo este valor en la primera de las dos ecuaciones reducidas tenemos:

$$3x+2(-1)=1 \qquad 3x=3 \quad \Rightarrow \quad x=1$$

La solución es $x=1 \quad y=-1$.

Comprobación:

$$\left.\begin{array}{r} 3\cdot 1+2(-1)=1 \\ \dfrac{2(1-1)}{3}-\dfrac{3(-1)+1}{2}=2\cdot 1-1 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 1=1 \\ 0+1=1 \end{array}\right\}$$

Ejemplo $$\left.\begin{array}{r}\mathbf{\dfrac{x+y}{x-y}=5}\\ \mathbf{\dfrac{3x}{3+3y}=1}\end{array}\right\}$$

El primer paso es quitar los denominadores, para lo cual multiplicamos en cruz.

$$\left.\begin{array}{r}x+y=5(x-y)\\ 3x=3+3y\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r}x+y=5x-5y\\ 3x=3+3y\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r}x+y-5x+5y=0\\ 3x-3y=3\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r}-4x+6y=0\\ 3x-3y=3\end{array}\right\}$$

Simplificando la primera ecuación por 2 y la segunda por 3 tenemos: $\left.\begin{array}{r}-2x+3y=0\\ x-y=1\end{array}\right\}$

Método de sustitución: Despejamos x en la segunda ecuación y la sustituimos en la primera.

$$x=1+y \qquad -2(1+y)+3y=0 \qquad -2-2y+3y=0 \quad \Rightarrow \quad y=2$$

Sustituimos este valor en la segunda ecuación:

$$\frac{3x}{3+3\cdot 2}=1 \qquad \frac{3x}{9}=1 \qquad 3x=9 \quad \Rightarrow \quad x=3$$

La solución es $x=3 \quad y=2$.

Comprobación:

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{3+2}{3-2}=5\\ \dfrac{3\cdot 3}{3+3\cdot 2}=1\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r}\dfrac{5}{1}=5\\ \dfrac{9}{9}=1\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r}5=5\\ 1=1\end{array}\right\}$$

Problemas propuestos con soluciones

a) $\left.\begin{array}{r} x-3y=-3 \\ 2x+6y=12 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} y=6x \\ x=\dfrac{2y-5}{7} \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x+3}{y}=5 \\ 2(x-3y)+x=9 \end{array}\right\}$ d) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{5}=7 \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{4}=-1 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{3x-2y}{5}-\dfrac{2x-4y}{3}=\dfrac{x-y}{2}+1 \\ 21x-15=13(2x-y)+45 \end{array}\right\}$ f) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x+y}{2}-\dfrac{x-y}{3}=3 \\ \dfrac{x+2y}{3}-\dfrac{x-2y}{4}=3 \end{array}\right\}$ g) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{1}{3x+2y}=1 \\ \dfrac{1}{3y-2x}=-\dfrac{1}{7} \end{array}\right\}$

h) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x+1}{y}=2 \\ \dfrac{x}{y+1}=1 \end{array}\right\}$ i) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{2x-y}{x}=4 \\ 2x+3y=4 \end{array}\right\}$ j) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{3x}{2x+y}=2-\dfrac{1}{5} \\ 2x+3y=3 \end{array}\right\}$ k) $\left.\begin{array}{r} 0'2x-1'7y=6'1 \\ 3x+2y=1 \end{array}\right\}$

l) $\left.\begin{array}{r} 2x+10y=52 \\ x+\dfrac{y}{2}=8 \end{array}\right\}$ m) $\left.\begin{array}{r} 5x-4y=-10 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}=3 \end{array}\right\}$ n) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=4 \\ x+y=10 \end{array}\right\}$ o) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{5}=7 \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{4}=2 \end{array}\right\}$

p) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x+1}{3}+\dfrac{y-2}{2}=2 \\ \dfrac{3x-2}{4}+y=5 \end{array}\right\}$ q) $\left.\begin{array}{r} 6x+y=20 \\ \dfrac{3x-1}{2}-\dfrac{y}{3}=5 \end{array}\right\}$ r) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-1}{2}+\dfrac{y+3}{3}=3 \\ \dfrac{x-4}{3}+\dfrac{y+4}{2}=1 \end{array}\right\}$

s) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{2x}{3}+\dfrac{3y}{4}=5 \\ \dfrac{5x}{3}-\dfrac{y}{2}=3 \end{array}\right\}$ t) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{3y-1}{7}-3=\dfrac{2x-4}{3} \\ \dfrac{y}{3}=\dfrac{4x-15}{5}+3 \end{array}\right\}$

Soluciones

a) $\begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=1 \\ y=6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x=7 \\ y=2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x=\dfrac{31}{3} \\ y=\dfrac{160}{9} \end{cases}$ e) $\begin{cases} x=365 \\ y=145 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x=8 \\ y=2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x=\dfrac{17}{3} \\ y=-\dfrac{19}{3} \end{cases}$ h) $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ i) $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ j) $\begin{cases} x=31 \\ y=-1 \end{cases}$ k) $\begin{cases} x=\dfrac{139}{55} \\ y=-\dfrac{181}{55} \end{cases}$

l) $\begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases}$ m) $\begin{cases} x=\dfrac{14}{9} \\ y=\dfrac{40}{9} \end{cases}$ n) $\begin{cases} x=4 \\ y=6 \end{cases}$ o) $\begin{cases} x=\dfrac{43}{3} \\ y=\dfrac{100}{9} \end{cases}$ p) $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$

q) $\begin{cases} x=\dfrac{73}{21} \\ y=-\dfrac{6}{7} \end{cases}$ r) $\begin{cases} x=\dfrac{41}{5} \\ y=-\dfrac{24}{5} \end{cases}$ s) $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$ t) $\begin{cases} x=5 \\ y=12 \end{cases}$

Resolución de problemas

Para la resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas es conveniente realizar los siguientes pasos:

- *Si es un problema de tipo geométrico conviene hacer un dibujo que se adapte al enunciado del problema.*
- *<u>Elección de las incógnitas</u>: Como incógnitas se eligen las cantidades desconocidas y las otras se relacionan con ellas según el enunciado del problema.*
- *<u>Planteamiento de las ecuaciones</u>: Consiste en expresar mediante dos ecuaciones la relación existente entre los datos del problemas y la incógnitas.*
- *<u>Resolución del sistema</u>: Consiste en resolver el sistema de ecuaciones que hemos obtenido, es decir, encontrar el valor de las incógnitas.*
- *<u>Comprobación</u>: Una vez resuelto el sistema hay que comprobar que las soluciones cumplen las condiciones del problema.*

<u>Ejemplo</u> ***Un hotel tiene habitaciones dobles y sencillas. En total hay 50 habitaciones y 87 camas. ¿Cuántas habitaciones tiene de cada tipo?***

Elección de las incógnitas: Al número de habitaciones sencillas le llamamos “x” y al número de habitaciones dobles “y”.

Planteamiento de las ecuaciones: En las habitaciones sencillas hay una cama y en las habitaciones dobles 2 camas, por tanto:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=50 \\ x+2y=87 \end{array}\right\}$$

Resolución del sistema: $x=13 \quad y=37$, es decir, 13 habitaciones sencillas y 37 dobles.

Comprobación: $\left.\begin{array}{r} 13+37=50 \\ 13+2\cdot 37=87 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 50=50 \\ 87=87 \end{array}\right\}$

<u>Problemas resueltos</u>

1) ***Encuentra dos números sabiendo que la mitad de su suma es 218 y el doble de su diferencia 116.***

Sean “x” e “y” los números que buscamos. Tenemos que resolver el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x+y}{2}=218 \\ 2(x-y)=116 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x+y=436 \\ 2x-2y=116 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x+y=436 \\ x-y=58 \end{array}\right\}$$

Despejamos la x en la segunda ecuación y la sustituimos en la primera.

$$x=58+y \qquad 58+y+y=436 \qquad 2y=378 \quad \Rightarrow \quad y=189$$

Sustituimos este valor en la segunda ecuación: $x-189=58 \quad \Rightarrow \quad x=247$

Los números son 189 y 247.

Comprobación: $\left.\begin{array}{r}\dfrac{247+189}{2}=218\\ 2(247-189)=116\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r}\dfrac{436}{2}=218\\ 2(58)=116\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r}218=218\\ 116=116\end{array}\right\}$

2) ***Un ejercicio realizado en clase consta de 16 cuestiones. El profesor suma 5 puntos por cada respuesta correcta y resta 3 puntos por cada cuestión no contestada o mal contestada. Si un alumno ha obtenido 32 puntos en el ejercicio, ¿cuántas cuestiones ha contestado correctamente?***

Sea "x" el número de respuestas correctas e "y" las no contestadas o mal contestadas.

$$\left.\begin{array}{r}x+y=16\\ 5x-3y=32\end{array}\right\}$$

Despejamos x en la primera ecuación y la sustituimos en la segunda.

$$x=16-y \qquad 5(16-y)-3y=32 \qquad 80-5y-3y=32 \quad \Rightarrow \quad y=6$$

Si $y=6 \Rightarrow x=10$, es decir, el alumno ha contestado bien a 10 cuestiones, y no ha contestado o ha contestado mal a 6.

Comprobación: $\left.\begin{array}{r}10+6=16\\ 5\cdot 10-3\cdot 6=32\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r}16=16\\ 32=32\end{array}\right\}$

3) ***Halla dos números naturales tales que su suma sea 140 y al dividir el mayor entre el menor se obtenga 2 de cociente y 14 de resto.***

Sean "x" e "y" los dos números naturales. Teniendo en cuenta la regla de la división que dice que el dividendo es igual al divisor por el cociente más el resto podemos platear el sistema de la siguiente manera:

$$\left.\begin{array}{r}x+y=140\\ x=2y+14\end{array}\right\} \qquad 2y+14+y=140 \qquad 3y=126 \quad \Rightarrow \quad y=42 \quad \Rightarrow \quad x=98$$

Comprobación: $\left.\begin{array}{r}98+42=140\\ 98=2\cdot 42+14\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r}140=140\\ 98=98\end{array}\right\}$

4) ***Hace tres años la edad de Juan era el doble que la de su hermana Julia. Dentro de 7 años, la edad de Juan será 4/3 de la que entonces tenga Julia. ¿Qué edad tienen actualmente cada uno de los hermanos?***

Sean "x" la edad actual de Juan e "y" la edad actual de Julia.

$$\left.\begin{array}{r}x-3=2(y-3)\\ x+7=\dfrac{4}{3}(y+7)\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r}x-3=2y-6\\ 3x+21=4y+28\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r}x=2y-3\\ 3x-4y=7\end{array}\right\}$$

Sustituyendo x en la segunda ecuación obtenemos “y”.

$$3(2y-3)-4y=7 \qquad 6y-9-4y=7 \qquad 2y=16 \;\Rightarrow\; y=\frac{16}{2}=8$$

Sustituyendo este valor de y en la primera ecuación obtenemos x. $x=2\cdot 8-3=13$.

La edad de Juan son 13 años y la de Julia 8 años.

Comprobación: $\left.\begin{array}{r} 13-3=2(8-3) \\ 13+7=\frac{4}{3}(8+7) \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 10=10 \\ 20=20 \end{array}\right\}$

5) ***Raquel ha pagado 55’72 € por una camiseta y un pantalón que costaban 70 € entre los dos. Si en la camiseta han hecho un 18 % de descuento y en el pantalón un 22 % ¿cuál es el precio original de cada artículo?***

Sean “x” el precio de la camiseta e “y” el precio del pantalón originalmente (antes del descuento). Si en la camiseta han hecho un 18 % de descuento quiere decir que le han cobrado un 82 % de su valor original y en el caso del pantalón un 78 %.

$$\left.\begin{array}{r} x+y=70 \\ 0'82x+0'78y=55'72 \end{array}\right\}$$

Para no operar con números decimales multiplicamos todos los términos de la segunda ecuación por 100. Despejamos x en la primera ecuación y sustituimos su valor en la segunda.

$$\left.\begin{array}{r} x+y=70 \\ 82x+78y=5572 \end{array}\right\} \qquad x=70-y \qquad 82(70-y)+78y=5572 \qquad 5740-82y+78y=5572$$

$$-4y=-168 \;\Rightarrow\; y=\frac{-168}{-4}=42\,€ \;\Rightarrow\; x=70-42=28\,€$$

El precio original de la camiseta es de 28 € y el del pantalón 42 €.

Comprobación: $\left.\begin{array}{r} 28+42=70 \\ 0'82\cdot 28+0'78\cdot 42=55'72 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 70=70 \\ 55'72=55'72 \end{array}\right\}$

6) ***Un comerciante compró 35 juegos de un tipo y 25 juegos de otro pagando por ellos 1220 €. Con la venta de los primeros ganó un 25 % y con los segundos perdió un 5 % de tal manera que recibió 170 € de ganancia sobre el precio de compra. Calcula el precio de compra de cada tipo de juego.***

Sean “x” e “y” los dos tipos de juegos. Si con la venta del primero ganó un 25 % quiere decir que lo vendió al 125 % mientras que el segundo lo vendió a un 95 % de lo que le costó.

$$\left.\begin{array}{r} 35x+25y=1220 \\ 0'25\cdot 35x-0'05\cdot 25y=170 \end{array}\right\}$$

Multiplicamos todos los términos de la segunda ecuación por 100.

$$\left.\begin{aligned} 35x+25y&=1220 \\ 25\cdot 35x-5\cdot 25y&=17000 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 35x+25y&=1220 \\ 875x-125y&=17000 \end{aligned}\right\}$$

Utilizando el método de reducción multiplicamos la primera ecuación por 5 y la sumamos a la segunda.

$$\begin{array}{r} 175x+125y=6100 \\ 875x-125y=17000 \\ \hline 1050x \qquad =23100 \end{array} \qquad 1050x=23100 \;\Rightarrow\; x=\frac{23100}{1050}=22\text{ €}$$

Sustituyendo en la primera ecuación obtenemos la y.

$$35\cdot 22+25y=1220 \qquad 25y=450 \;\Rightarrow\; y=\frac{450}{25}=18\text{ €}$$

Comprobación: $\left.\begin{aligned} 35\cdot 22+25\cdot 18&=1220 \\ 875\cdot 22-125\cdot 18&=17000 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 1220&=1220 \\ 17000&=17000 \end{aligned}\right\}$

7) ***Hallar dos números tales que si les agregamos 7 unidades los resultados están en la relación 3 a 2, pero si les restamos cinco unidades, la razón de estas diferencias es 5/2.***

Sean "x" e "y" los números pedidos.

$$\left.\begin{aligned} \frac{x+7}{y+7}&=\frac{3}{2} \\ \frac{x-5}{y-5}&=\frac{5}{2} \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 2x+14&=3y+21 \\ 2x-10&=5y-25 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 2x-3y&=7 \\ 2x-5y&=-15 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x&=20 \\ y&=11 \end{aligned}\right.$$

Comprobación: $\left.\begin{aligned} \frac{20+7}{11+7}&=\frac{3}{2} \\ \frac{20-5}{11-5}&=\frac{5}{2} \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \frac{27}{18}&=\frac{3}{2} \\ \frac{15}{6}&=\frac{5}{2} \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} &\text{Simplificando por 9} \\ &\text{Simplificando por 3} \end{aligned} \qquad \left.\begin{aligned} \frac{3}{2}&=\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2}&=\frac{5}{2} \end{aligned}\right\}$

8) ***La cifra de las decenas de un número de dos cifras es el doble de la cifra de las unidades, y si a dicho número le restamos 27 se obtiene el número que resulta al invertir el orden de sus cifras. ¿Cuál es ese número?***

Sea x la cifra de las unidades e y la cifra de las decenas. Recuerda que todo número de dos cifras se puede descomponer en suma:

$$34=30+4=10\cdot 3+4$$

El número de dos cifras yx se escribe: $yx=10y+x$

El número de dos cifras xy se escribe: $xy=10x+y$

Según el enunciado se tienen estas dos ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} y&=2x \\ 10y+x-27&=10x+y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x&=3 \\ y&=6 \end{aligned}\right.$$

Comprobación: $\left.\begin{array}{r} 6=2\cdot 3 \\ 10\cdot 6+3-27=10\cdot 3+6 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} 6=6 \\ 36=36 \end{array}\right\}$

9) ***Hace 3 años la edad de María era el doble que la de su hermana Marta. Dentro de 7 años será 4/3 de la que entonces tenga Marta. Calcula la edad actual de cada una.***

Sea "x" la edad actual de María e "y" la edad actual de Marta.

Según el enunciado:

$$\left.\begin{array}{r} x-3=2(y-3) \\ x+7=\frac{4}{3}(y+7) \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x-3=2y-6 \\ 3x+21=4y+28 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y=8 \\ x=13 \end{array}\right.$$

La edad actual de María es de 13 años y la de Marta de 8 años.

Comprobación: $\left.\begin{array}{r} 13-3=2(8-3) \\ 13+7=\frac{4}{3}(8+7) \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} 10=10 \\ 20=20 \end{array}\right\}$

10) ***A las 9 de la mañana sale un coche del punto A con una velocidad de 80 km/h. Dos horas más tarde sale una moto del punto A en persecución del coche anterior con una velocidad de 120 km/h. ¿A qué distancia del punto A le alcanza?***

Sabemos que en un movimiento rectilíneo uniforma se verifica que:

$$\text{Espacio recorrido} = \text{velocidad} \times \text{tiempo} \qquad e=v\cdot t$$

El espacio que recorre el coche que sale a las 9 de la mañana es: $e=80t$

El espacio que recorre la moto que sale a las 11 de la mañana es: $e=120(t-2)$, ya que cuando la moto alcance al coche, los dos habrán recorrido el mismo espacio pero la moto habrá tardado dos horas menos.

Tenemos el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{l} e=80t \\ e=120(t-2) \end{array}\right\}$

Resolviendo el sistema por igualación: $80t=120t-240 \qquad -40t=-240 \Rightarrow t=\frac{-240}{-40}=6\,h$

La moto alcanza al coche a una distancia de A de $e=80\cdot 6=480\,km$ y el encuentro se produce a las 15 h.

11) ***Dos ciudades A y B distan entre sí 360 km. A las 5 de la tarde sale un coche de la ciudad A a la ciudad B con una velocidad media de 70 km/h. A la misma hora sale un camión de la ciudad B hacia A con una velocidad de 50 km/h. ¿A qué hora se encuentran los coches? ¿A qué distancia de las ciudades A y B se encuentran los vehículos?***

Sea "x" la distancia recorrida por el coche que sale de la ciudad A. La distancia recorrida por el coche que sale de la ciudad B será $360-x$. Podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x=70t \\ 360-x=50t \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x=70t \\ x=360-50t \end{array}\right\} \quad 70t=360-50t \quad 120t=360 \quad t=\frac{360}{120}=3\,h$$

Tardan en encontrarse 3 horas, por tanto si salieron a las 5 de la tarde se encuentran a las 8 de la tarde.

La distancia a la que se encuentran los vehículos es: $\begin{cases} x = 70 \cdot 3 = 210\text{km} \\ y = 50 \cdot 3 = 150\text{km} \end{cases}$

12) ***Un automóvil tarda dos horas en recorrer la distancia entre dos ciudades. Si su velocidad hubiera sido superior en 30 km/h habría tardado una hora y cuarto. ¿Cuál es la distancia entre las dos ciudades?***

Sea "x" la distancia entre las dos ciudades. Una hora y cuarto es $1\text{h} + \frac{1}{4}\text{h} = \frac{5}{4}\text{h} = 1'25\text{h}$. Podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2v \\ x = 1'25(v+30) \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x = 2v \\ x = 1'25v + 37'5 \end{array}\right\} \qquad 2v = 1'25v + 37'5$$

$$0'75v = 37'5 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{37'5}{0'75} = 50\,\text{km/h}$$

La distancia entre las dos ciudades es de $x = 2 \cdot 50 = 100\,\text{km}$.

Comprobación: $\left.\begin{array}{l} x = 2 \cdot 50 \\ x = 1'25(50+30) \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x = 100 \\ x = 1'25 \cdot 80 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x = 100 \\ x = 100 \end{array}\right\}$

13) ***Hemos mezclado aceite de oliva de 3'5 € el litro con aceite de girasol de 2 € el litro para obtener 50 l de mezcla a 3'08 € el litro. Calcula la cantidad de aceite de oliva y de girasol que hemos mezclado.***

Sea "x" la cantidad de aceite de oliva e "y" la cantidad de aceite de girasol que mezclamos.

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 50 \\ 3'5x + 2y = 3'08 \cdot 50 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x + y = 50 \\ 3'5x + 2y = 154 \end{array}\right\}$$

$$x = 50 - y \qquad 3'5(50 - y) + 2y = 154 \qquad 175 - 3'5y + 2y = 154 \qquad -1'5y = -21$$

$$-1'5y = -21 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-21}{-1'5} = 14 \text{ litros}$$

Hemos mezclado 14 litros de aceite de girasol con 36 litros de aceite de oliva

Comprobación: $\left.\begin{array}{r} 36 + 14 = 50 \\ 3'5 \cdot 36 + 2 \cdot 14 = 3'08 \cdot 50 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 50 = 50 \\ 154 = 154 \end{array}\right\}$

14) ***Si en un depósito que contiene agua a 50 ºC añadimos agua a 15 º obtenemos 150 litros a 36 ºC. ¿Cuántos litros había en el depósito y cuántos hemos añadido?***

Sea "x" los litros de agua que había en el depósito e "y" los que hemos añadido.

$$\left.\begin{array}{r} x+y=150 \\ 50x+15y=150\cdot 36 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x+y=150 \\ 50x+15y=5400 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=90 \\ y=60 \end{array}\right.$$

Había 90 litros de agua a 50 ºC y hemos añadido 60 litros a 15 ºC.

Comprobación: $\left.\begin{array}{r} 90+60=150 \\ 50\cdot 90+15\cdot 60=5400 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 150=150 \\ 4500+900=5400 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 150=150 \\ 5400=5400 \end{array}\right\}$

15) ***¿Cuál es el área de un rectángulo sabiendo que su perímetro mide 16 cm. y que su base es el triple de su altura?***

Sea "x" la base del rectángulo e "y" la altura.

$$\left.\begin{array}{r} 2x+2y=16 \\ x=3y \end{array}\right\} \qquad 2\cdot 3y+2y=16 \qquad 8y=16 \Rightarrow y=\frac{16}{8}=2\,cm \Rightarrow x=3\cdot 2=6\,cm$$

Comprobación: $\left.\begin{array}{r} 2\cdot 6+2\cdot 2=16 \\ 6=3\cdot 2 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 16=16 \\ 6=6 \end{array}\right\}$

16) ***Un comerciante compra un pañuelo y una bufanda por 30 € y los vende por 34 €. ¿Cuánto le costó cada objeto, sabiendo que en la venta del pañuelo ganó el 10 por 100 y en la venta de la bufanda ganó el 15 por 100?***

Sea "x" lo que cuesta el pañuelo e "y" lo que cuesta la bufanda.

$$\left.\begin{array}{r} x+y=30 \\ 1'1x+1'15y=34 \end{array}\right\} \qquad x=30-y \qquad 1'1(30-y)+1'15y=34 \qquad 33-1'1y+1'15y=34$$

$$0'05y=1 \Rightarrow y=\frac{1}{0'05}=20\,€ \Rightarrow x=10\,€$$

El pañuelo costó 10 € y la bufanda 20 €

Comprobación: $\left.\begin{array}{r} 10+20=30 \\ 1'1\cdot 10+1'15\cdot 20=34 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 30=30 \\ 34=34 \end{array}\right\}$

Ecuaciones de 2º grado

Una ecuación de segundo grado es una expresión de la forma $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$.

Para obtener las soluciones se procede de la siguiente manera:

1) Se dividen todos los miembros de la ecuación por a (coeficiente de x^2).

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0 \qquad \text{Simplificando} \qquad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

2) Se multiplica y se divide por 2 el coeficiente de la x

$$x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} = 0$$

3) Se suma a los dos miembros de la igualdad la expresión $\frac{b^2}{4a^2}$

$$x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2}$$

4) Se pasa $\frac{c}{a}$ restando al segundo miembro.

$$x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

5) Comprobamos que en el primer miembro aparece el desarrollo de un binomio al cuadrado.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

6) Se extrae la raíz cuadrada en ambos miembros.

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

7) Se despeja la variable x.

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\mathbf{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Número de soluciones

La cantidad b^2-4ac que aparece bajo el radical se llama ***discriminante*** de la ecuación, ya que permite *discriminar o distinguir* el número de soluciones de una ecuación de segundo grado, y de su signo depende que ésta tenga o no soluciones.

- Si $\mathbf{b^2-4ac>0}$ existen ***dos soluciones distintas***. Si las soluciones son x_1 y x_2, la ecuación puede factorizarse así:

$$a(x-x_1)(x-x_2)=0$$

- Si $\mathbf{b^2-4ac=0}$ el radical se anula, y las dos soluciones son iguales. Se dice también que se trata de ***una solución o raíz doble.***

  Si la raíz doble es x_1, la ecuación puede factorizarse así:

$$a(x-x_1)(x-x_1)=a(x-x_1)^2=0$$

- Si $\mathbf{b^2-4ac<0}$ no existen raíces cuadradas reales y la ecuación ***no tiene soluciones reales***. En este caso se dice que la ecuación es irreducible ya que no se puede factorizar al carecer de raíces reales.

Ejemplo $\mathbf{x^2-7x-18=0}$

Es muy importante identificar bien los coeficientes de x^2, de x y el término independiente, con sus signos respectivos. $a=1, b=-7$ y $c=-18$

$$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4(1)(-18)}}{2\cdot 1}=\frac{7\pm\sqrt{49+72}}{2}=\frac{7\pm 11}{2} \qquad x_1=\frac{7+11}{2}=9 \qquad x_2=\frac{7-11}{2}=-2$$

Comprobación:

$$x_1=9 \rightarrow 9^2-7\cdot 9-18=0 \qquad 81-63-18=0$$
$$x_2=-2 \rightarrow (-2)^2-7(-2)-18=0 \qquad 4+14-18=0$$

Ejemplo $\mathbf{5x^2-6x-27=0}$

$a=5, b=-6$ y $c=-27$

$$x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4(5)(-27)}}{2\cdot 5}=\frac{6\pm\sqrt{36+540}}{10}=\frac{6\pm 24}{10} \qquad x_1=\frac{6+24}{10}=3 \qquad x_2=\frac{6-24}{10}=-1'8$$

Comprobación:

$$x_1=3 \rightarrow 5\cdot 3^2-6\cdot 3-27=0 \qquad 45-18-27=0$$
$$x_2=-1'8 \rightarrow 5\cdot(-1'8)^2-6\cdot(-1'8)-27=0 \qquad 16'2+10'8-27=0$$

Ejemplo $\mathbf{12x^2+4x-5=0}$

$a=12, b=4$ y $c=-5$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4(12)(-5)}}{2\cdot 12}=\frac{-4\pm\sqrt{16+240}}{24}=\frac{-4\pm 16}{24}\qquad x_1=\frac{-4+16}{24}=\frac{1}{2}\qquad x_2=\frac{-4-16}{24}=\frac{-5}{6}$$

Comprobación:

$$x_1=\frac{1}{2}\ \rightarrow\ 12\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\cdot\frac{1}{2}-5=0\qquad 12\cdot\frac{1}{4}+2-5=0\qquad 3+2-5=0$$

$$x_2=\frac{-5}{6}\ \rightarrow\ 12\cdot\left(\frac{-5}{6}\right)^2+4\cdot\frac{-5}{6}-5=0\qquad 12\cdot\frac{25}{36}-\frac{10}{3}-5=0\qquad \frac{25}{3}-\frac{10}{3}-5=0$$

Ejemplo $\mathbf{x^2-\frac{7}{6}x+\frac{1}{3}=0}$

$a=1, b=-\frac{7}{6}$ y $c=\frac{1}{3}$ En este caso lo más práctico es eliminar los denominadores para operar con número enteros. $x^2-\frac{7}{6}x+\frac{1}{3}=0\ \rightarrow\ 6x^2-7x+2=0$

$$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4(6)(2)}}{2\cdot 6}=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{12}=\frac{7\pm 1}{12}\qquad x_1=\frac{7+1}{12}=\frac{2}{3}\qquad x_2=\frac{7-1}{12}=\frac{1}{2}$$

Comprobación:

$$x_1=\frac{2}{3}\ \rightarrow\ \left(\frac{2}{3}\right)^2-\frac{7}{6}\left(\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{3}=0\qquad \frac{4}{9}-\frac{7}{9}+\frac{1}{3}=0\qquad \frac{4-7+3}{9}=0$$

$$x_2=\frac{1}{2}\ \rightarrow\ \left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{6}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}=0\qquad \frac{1}{4}-\frac{7}{12}+\frac{1}{3}=0\qquad \frac{3-7+4}{9}=0$$

Ejemplo $\mathbf{x^2+(x+2)^2=580}$

Eliminamos el paréntesis, reducimos términos semejantes y simplificamos la expresión resultante.

$$x^2+x^2+4x+4=580\ \rightarrow\ 2x^2+4x-576=0\ \rightarrow\ x^2+2x-288=0$$

$a=1, b=2$ y $c=-288$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(1)(-288)}}{2\cdot 1}=\frac{-2\pm\sqrt{1156}}{2}=\frac{-2\pm 34}{2}\qquad x_1=\frac{-2+34}{2}=16\qquad x_2=\frac{-2-34}{2}=-18$$

Comprobación: $\begin{array}{lll} x_1 = 16 & \rightarrow & 16^2 + 2\cdot 16 - 288 = 0 \quad 256 + 32 - 288 = 0 \\ x_2 = -18 & \rightarrow & (-18)^2 + 2(-18) - 288 = 0 \quad 324 - 36 - 288 = 0 \end{array}$

__*Ejemplo*__ $\mathbf{4x^2 - 4x + 1 = 0}$

$a = 4, b = -4 \text{ y } c = 1$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(4)(1)}}{2\cdot 4} = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{8} = \frac{4 \pm 0}{8} = \frac{1}{2} \qquad x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$$

En este caso la solución o raíz es doble.

Comprobación: $x = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\cdot\frac{1}{2} + 1 = 0 \qquad 4\cdot\frac{1}{4} - 2 + 1 = 0 \qquad 1 - 2 + 1 = 0$

__*Ejemplo*__ $\mathbf{x^2 + x + 1 = 0}$

$a = 1, b = 1 \text{ y } c = 1$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(1)}}{2\cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{No tiene solución}$$

__*Ejemplo*__ $\mathbf{x^2 - 5x = 0}$

__*Aplicando la fórmula*__ $a = 1, b = -5 \text{ y } c = 0$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(0)}}{2\cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{5 \pm 5}{2} \qquad \begin{array}{l} x_1 = \frac{5+5}{2} = 5 \\ x_2 = \frac{5-5}{2} = \frac{0}{2} = 0 \end{array}$$

__*Sacando factor común*__

$x^2 - 5x = 0 \qquad x(x-5) = 0 \qquad \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 5 \end{array}$

Comprobación: $\begin{array}{lll} x_1 = 0 & \rightarrow & 0^2 - 5\cdot 0 = 0 \quad 0 = 0 \\ x_2 = 5 & \rightarrow & 5^2 - 5\cdot 5 = 0 \quad 25 - 25 = 0 \end{array}$

__*Ejemplo*__ $\mathbf{x^2 - 81 = 0}$

__*Aplicando la fórmula*__ $a = 1, b = 0 \text{ y } c = -81$

$$x = \frac{0^2 \pm \sqrt{0^2 - 4(1)(-81)}}{2\cdot 1} = \frac{\pm\sqrt{324}}{2} = \frac{\pm 18}{2} \qquad \begin{array}{l} x_1 = 9 \\ x_2 = -9 \end{array}$$

__*Despejando directamente la incógnita*__

$x^2 - 81 = 0 \qquad x^2 = 81 \qquad x = \pm\sqrt{81} = \pm 9 \qquad \begin{array}{l} x_1 = 9 \\ x_2 = -9 \end{array}$

Comprobación: $\begin{array}{lll} x_1 = 9 & \rightarrow & 9^2 - 81 = 0 \quad 81 - 81 = 0 \\ x_2 = -9 & \rightarrow & (-9)^2 - 81 = 0 \quad 81 - 81 = 0 \end{array}$

Ejemplo *Resolver las siguientes ecuaciones sin aplicar la fórmula.*

a) $\mathbf{3x^2 - 5x = 0}$ **b)** $\mathbf{25x^2 - \frac{1}{100} = 0}$ **c)** $\mathbf{4(3-2x)(1+7x) = 0}$

Soluciones

a) $x(3x-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x-5=0 \Rightarrow x = \frac{5}{3} \end{cases}$

b) $25x^2 - \frac{1}{100} = 0 \qquad 25x^2 = \frac{1}{100} \qquad x^2 = \frac{1}{2500} \qquad x = \pm\sqrt{\frac{1}{2500}} = \pm\frac{1}{50}$

c) $4(3-2x)(1+7x)=0 \Rightarrow \begin{cases} 3-2x=0 \Rightarrow -2x=-3 \quad x = \frac{-3}{-2} = 1'5 \\ 1+7x=0 \Rightarrow 7x=-1 \quad x = \frac{-1}{7} \end{cases}$

Ejemplo $\mathbf{x(2x-1) + \frac{3}{5} = \frac{3x^2 - x}{5} + \frac{1}{5}}$

Eliminamos los paréntesis y los denominadores.

$2x^2 - x + \frac{3}{5} = \frac{3x^2 - x}{5} + \frac{1}{5} \qquad 10x^2 - 5x + 3 = 3x^2 - x + 1 \qquad 7x^2 - 4x + 2 = 0$

$a = 7, b = -4 \text{ y } c = 2$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(7)(2)}}{2 \cdot 7} = \frac{4 \pm \sqrt{16-56}}{14} = \frac{4 \pm \sqrt{-40}}{14}$$ No tiene solución

Ejemplo $\mathbf{x(x-1) + 1 = \frac{5}{6} + \frac{x(2x-1)}{3}}$

Eliminamos los paréntesis y los denominadores.

$x^2 - x + 1 = \frac{5}{6} + \frac{2x^2 - x}{3} \qquad 6x^2 - 6x + 6 = 5 + 4x^2 - 2x \qquad 2x^2 - 4x + 1 = 0$

$a = 2, b = -4 \text{ y } c = 1$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(2)(1)}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{4} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2} \qquad \begin{matrix} x_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \\ x_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \end{matrix}$$

Ejemplo $\mathbf{(x+1)\left[\frac{3}{2} - 2(1-x)\right] = 3x^2 + \frac{11(x-1)}{2}}$

Eliminamos el paréntesis del interior del corchete.

$$(x+1)\left[\frac{3}{2}-2+2x\right]=3x^2+\frac{11(x-1)}{2} \qquad (x+1)\left[\frac{-1+4x}{2}\right]=3x^2+\frac{11(x-1)}{2}$$

Multiplicamos el paréntesis por el corchete.

$$\frac{(x+1)(-1+4x)}{2}=3x^2+\frac{11(x-1)}{2} \qquad \frac{-x+4x^2-1+4x}{2}=3x^2+\frac{11x-11}{2}$$

$$\frac{4x^2+3x-1}{2}=3x^2+\frac{11x-11}{2} \qquad 4x^2+3x-1=6x^2+11x-11 \qquad -2x^2-8x+10=0$$

$$2x^2+8x-10=0 \qquad a=2,b=8 \text{ y } c=-10$$

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4(2)(-10)}}{2\cdot 2}=\frac{-8\pm\sqrt{64+80}}{4}=\frac{-8\pm 12}{4} \qquad x_1=\frac{-8+12}{4}=1 \qquad x_2=\frac{-8-12}{4}=-5$$

Ecuaciones Bicuadradas

Se llaman ecuaciones bicuadradas a las ecuaciones de cuarto grado que carecen de término impar. Su forma general es:

$$\mathbf{a\,x^4+b\,x^2+c=0}$$

Si la expresamos de la forma $a(x^2)^2+bx^2+c=0$ *y hacemos el cambio* $x^2=z$ *obtenemos la ecuación de segundo grado* $a\,z^2+bz+c=0$. *Resolviendo esta ecuación en z se obtienen a lo más dos soluciones* z_1 y z_2 *que permiten calcular x.*

$$x^2=z_1 \Rightarrow \begin{array}{l} x=+\sqrt{z_1} \\ x=-\sqrt{z_1}\end{array} \qquad x^2=z_2 \Rightarrow \begin{array}{l} x=+\sqrt{z_2} \\ x=-\sqrt{z_2}\end{array}$$

Ejemplo $\mathbf{x^4-5x^2+4=0}$

$$x^2=z \qquad z^2-5z+4=0 \qquad z=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4(1)(4)}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm 3}{2} \qquad z_1=\frac{5+3}{2}=4 \qquad z_2=\frac{5-3}{2}=1$$

$$z_1=4 \Rightarrow \begin{array}{l} x_1=+\sqrt{4}=2 \\ x_2=-\sqrt{4}=-2\end{array} \qquad z_2=1 \Rightarrow \begin{array}{l} x_3=+\sqrt{1}=1 \\ x_4=-\sqrt{1}=-1\end{array}$$

Ejemplo $\mathbf{x^4-5x^2-36=0}$

$$x^2=z \qquad z^2-5z-36=0 \qquad z=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4(1)(-36)}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm 13}{2} \qquad z_1=\frac{5+13}{2}=9 \qquad z_2=\frac{5-13}{2}=-4$$

$$z_1=9 \Rightarrow \begin{array}{l} x_1=+\sqrt{9}=3 \\ x_2=-\sqrt{9}=-3\end{array} \qquad z_2=-4 \Rightarrow \text{No hay solución}$$

Ejemplo $\mathbf{3x^4 - 5x^2 = 0}$

$$x^2 = z \qquad 3z^2 - 5z = 0 \qquad z = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(0)}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm 5}{6} \qquad \begin{array}{l} z_1 = \frac{5+5}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \\ z_2 = \frac{5-5}{6} = 0 \end{array}$$

$$z_1 = \frac{5}{3} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = +\sqrt{\frac{5}{3}} \\ x_2 = -\sqrt{\frac{5}{3}} \end{array} \qquad z_2 = 0 \Rightarrow x_3 = x_4 = 0$$

Problemas propuestos con soluciones

a) $\mathbf{x^2 - 6x + 9 = 16}$ **b)** $\mathbf{3x^2 + 2x - 3 = 2x^2 + 7 - x}$ **c)** $\mathbf{11(x-1)^2 = (2x-3)^2 + 4x^2 + 1}$

d) $\mathbf{\frac{(x+2)^2}{5} - \frac{x^2-9}{4} = \frac{(x+3)^2}{2} + \frac{1}{5}}$ **e)** $\mathbf{2 + (2x+3)(x-2) = (2x+1)(x-4) + 18}$

f) $\mathbf{\frac{x^2 - x - 4}{4} = \frac{x^2 + x - 2}{2}}$ **g)** $\mathbf{\frac{x^2+1}{3} - 1 = \frac{x^2-4}{6} + x}$ **h)** $\mathbf{x^4 - 5x^2 - 36 = 0}$

i) $\mathbf{3x + 6x = (x+2)(5-3x)}$ **j)** $\mathbf{\left(x - \frac{1}{3}\right)(3x+4) = 0}$ **k)** $\mathbf{\frac{16x^2}{25} - \frac{1}{16} = 0}$ **l)** $\mathbf{\frac{3}{5}x^2 - x = 0}$

m) $\mathbf{\frac{x^2 - 32}{4} = -\frac{28}{x^2 - 9}}$ **n)** $\mathbf{(x\sqrt{2} - 1)^2 + (\sqrt{2} + x)^2 = (\sqrt{3}\,x - 2)^2}$ **o)** $\mathbf{x^4 - 16 = 0}$

Soluciones

a) $x_1 = 7$ y $x_2 = -1$ b) $x_1 = 2$ y $x_2 = -5$ c) $x_1 = \frac{5+\sqrt{22}}{3}$ y $x_2 = \frac{5-\sqrt{22}}{3}$

d) $x_1 = -1$ y $x_2 = -3$ e) $x = 3$ f) $x_1 = 0$ y $x_2 = -3$ g) $x_1 = 0$ y $x_2 = 6$

h) $x_1 = 3$ y $x_2 = -3$ i) $x_1 = \frac{\sqrt{55}-5}{3}$ y $x_2 = \frac{-\sqrt{55}-5}{3}$ j) $x_1 = \frac{1}{3}$ y $x_2 = -\frac{4}{3}$

k) $x_1 = -\frac{5}{16}$ y $x_2 = \frac{5}{16}$ l) $x_1 = 0$ y $x_2 = \frac{5}{3}$ m) $x_1 = -5, x_2 = -4, x_3 = 4$ y $x_4 = 5$

n) $x = \frac{1}{4\sqrt{3}}$ o) $x_1 = -2$ y $x_2 = 2$

1) ***Al aumentar en 3 cm el lado de un cuadrado se forma otro cuadrado de 324 cm² de área. Calcula la medida del lado del cuadrado inicial.***

Sean "x" la medida del lado del cuadrado inicial. Al aumentar el lado 3 cm, el nuevo lado del cuadrado será de $x+3$.

$$(x+3)^2=324 \qquad x^2+9+6x=324 \qquad x^2+6x-315=0$$

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4(1)(-315)}}{2\cdot 1}=\frac{-6\pm\sqrt{36+1260}}{2}=\frac{-6\pm 36}{2} \qquad x_1=\frac{-6+36}{2}=15 \qquad x_2=\frac{-6-36}{2}=-21$$

La solución válida es la positiva, es decir, 15 cm ya que el lado del cuadrado no puede ser negativo.

Comprobación: $(15+3)^2=324 \qquad 18^2=324 \qquad 324=324$

2) ***La tercera parte del cuadrado de un número entero, sumado a la quinta parte del mismo número da como resultado 78. Calcula dicho número.***

Sea "x" el número buscado. $\frac{x^2}{3}+\frac{x}{5}=78$

$$\text{m.c.m.}(3,5)=15 \qquad 15\left(\frac{x^2}{3}+\frac{x}{5}\right)=15\cdot 78 \qquad 5x^2+3x-1170=0$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4(5)(-1170)}}{2\cdot 5}=\frac{-3\pm\sqrt{9+23400}}{10}=\frac{-3\pm 153}{10} \qquad x_1=\frac{-3+153}{10}=15 \qquad x_2=\frac{-3-153}{10}=-15'6$$

La solución válida es 15, ya que de las dos soluciones es la única que es un número entero.

Comprobación: $\frac{15^2}{3}+\frac{15}{3}=78 \qquad 75+5=78$

3) ***Una caja mide 5 cm de altura y de ancho mide 5 cm más que de largo. Su volumen es de 1500 cm³. Calcula su longitud y su anchura.***

Sea "x" el largo de la caja.

$$1500=x(x+5)5 \qquad 1500=5x^2+25x \qquad 5x^2+25x-1500=0 \qquad x^2+5x-300=0$$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4(1)(-300)}}{2\cdot 1}=\frac{-5\pm\sqrt{25+1200}}{2}=\frac{-5\pm 35}{2} \qquad x_1=\frac{-5+35}{2}=15 \qquad x_2=\frac{-5-35}{2}=-20$$

La solución válida es la positiva, es decir, 15 cm ya que el lado de la caja no puede ser negativo. Por tanto, el largo es 15 cm, el ancho 20 cm y la altura es de 5 cm.
Comprobación: $1500=15\cdot(15+5)\cdot 5 \qquad 1500=15\cdot 20\cdot 5 \qquad 1500=1500$

4) ***Calcula la hipotenusa de un triángulo rectángulo sabiendo que las medidas de sus lados son tres números enteros consecutivos.***

Sea "x" uno de los lados. Los otros dos serán $x+1$ y $x+2$, por tanto, la hipotenusa será el $x+2$ que es el mayor. Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos:

$$(x+2)^2 = x^2 + (x+1)^2 \qquad x^2 + 4 + 4x = x^2 + x^2 + 1 + 2x \qquad x^2 + 4 + 4x = 2x^2 + 1 + 2x$$

$$-x^2 + 2x + 3 = 0 \qquad x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \qquad x_1 = \frac{2+4}{2} = 3 \qquad x_2 = \frac{2-4}{2} = -1$$

La solución válida es 3. Los lados del triángulo son 3, 4 y 5.

Comprobación: $(3+2)^2 = 3^2 + (3+1)^2 \qquad 5^2 = 3^2 + 4^2 \qquad 25 = 9 + 16$

5) ***Calcula las dimensiones de un rectángulo en el que la base mide 2 cm menos que la altura y la diagonal mide 10 cm.***

Sea "x" la medida de la altura. La base será $x-2$. Aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene:

$$100 = x^2 + (x-2)^2 \qquad 100 = x^2 + x^2 + 4 - 4x \qquad 2x^2 - 4x - 96 = 0 \qquad x^2 - 2x - 48 = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-48)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4+192}}{2} = \frac{2 \pm 14}{2} \qquad x_1 = \frac{2+14}{2} = 8 \qquad x_2 = \frac{2-14}{2} = -6$$

Las dimensiones son 8 cm de altura y 6 cm de base.

Comprobación: $100 = 8^2 + (8-2)^2 \qquad 100 = 64 + 36$

6) ***La suma de los cuadrados de dos números consecutivos positivos es 85. ¿Cuáles son los números?***

Sea "x" uno de los números. El número consecutivo será $x+1$.

$$x^2 + (x+1)^2 = 85 \qquad x^2 + x^2 + 1 + 2x = 85 \qquad 2x^2 + 2x - 84 = 0 \qquad x^2 + x - 42 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-42)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+168}}{2} = \frac{-1 \pm 13}{2} \qquad x_1 = \frac{-1+13}{2} = 6 \qquad x_2 = \frac{-1-13}{2} = -7$$

La solución válida es 6, por tanto los números consecutivos positivos son 6 y 7.

Comprobación: $6^2 + (6+1)^2 = 85 \qquad 36 + 49 = 85$

7) ***El producto de dos números consecutivos positivos es 156. ¿Cuáles son esos números?***

Sea "x" uno de los números. El número consecutivo será $x+1$.

$$x(x+1)=156 \qquad x^2+x=156 \qquad x^2+x-156=0$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(1)(-156)}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm\sqrt{1+624}}{2}=\frac{-1\pm 25}{2} \qquad x_1=\frac{-1+25}{2}=12 \qquad x_2=\frac{-1-25}{2}=-13$$

La solución válida es 12 que es el número positivo, por tanto los números consecutivos positivos son 12 y 13.

Comprobación: $12(12+1)=156 \qquad 12\cdot 13=156$

8) ***El cuadrado de un número positivo, menos el triple del número, menos 7 es 11. ¿Cuál es el número?***

Sea "x" el número. $x^2-3x-7=11 \qquad x^2-3x-18=0$

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4(1)(-18)}}{2\cdot 1}=\frac{3\pm\sqrt{9+72}}{2}=\frac{3\pm 9}{2} \qquad x_1=\frac{3+9}{2}=6 \qquad x_2=\frac{3-9}{2}=-3$$

La solución válida es 6 que es el número positivo.

Comprobación: $6^2-3\cdot 6-7=11 \qquad 36-18-7=11 \qquad 11=11$

9) ***El área de un rectángulo es 18 cm². ¿Cuáles son sus dimensiones sabiendo que una es el doble que la otra?***

Sea "x" la base del rectángulo. La altura será 2x.

$$x\cdot 2x=18 \qquad 2x^2=18 \qquad x^2=\frac{18}{2}=9 \qquad x=\sqrt{9}=3$$

La solución válida es 3 que es la positiva, por tanto la base mide 3 y la altura 6.

Comprobación: $3\cdot 2\cdot 3=18 \qquad 18=18$

10) ***La edad de un padre es el cuadrado de la de su hijo. Dentro de 24 años la edad del padre será el doble que la del hijo. ¿Cuántos años tienen ahora cada uno?***

Sea "x" la edad actual del hijo. La edad del padre será x^2.

$$x^2+24=2(x+24) \qquad x^2+24=2x+48 \qquad x^2-2x-24=0$$

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(-24)}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm\sqrt{4+96}}{2}=\frac{2\pm 10}{2} \qquad x_1=\frac{2+10}{2}=6 \qquad x_2=\frac{2-10}{2}=-4$$

La solución válida es 6 que es la positiva, por tanto el hijo tiene 6 años y el padre 36.

Comprobación: $6^2+24=2(6+24) \qquad 60=60$

11) ***La suma de las edades de los 4 miembros de una familia es 104 años. El padre tiene 6 años más que la madre que tuvo a los dos hijos gemelos a los 27 años. ¿Qué edad tiene cada uno?***

Sea "x" la edad actual de la madre. La edad del padre será $x+6$.

$$x+x+6+2(x-27)=104 \qquad 2x+6+2x-54=104 \qquad 4x=152 \qquad x=38$$

La madre tiene 38 años, el padre 44 y los hijos gemelos $38-27=11$ años.

Comprobación: $38+38+6+2(38-27)=104 \qquad 82+2\cdot 11=104 \qquad 104=104$

12) ***Para construir una pirámide regular de base cuadrada y de 30 m de altura se han necesitado 2250 m³ de piedra. Calcula el lado de la base de la pirámide.***

Si "x" es el lado del cuadrado de la base de la pirámide, la fórmula que nos da el volumen es:

$$V=\frac{1}{3}\times \text{Área de la base}\times \text{altura}=\frac{1}{3}\cdot x^2\cdot 30$$

$$2250=\frac{1}{3}\cdot x^2\cdot 30 \qquad 6750=30x^2 \qquad x^2=\frac{6750}{30}=225 \quad \Rightarrow \quad x=\sqrt{225}=15\,\text{m}$$

Comprobación: $2250=\frac{1}{3}\cdot 15^2\cdot 30 \qquad 2250=2250$

13) ***Busca los números que cumplan la siguiente condición: "La décima parte del número más los dos tercios de su cuadrado da un resultado nulo".***

Sea "x" el número que buscamos.

$$\frac{x}{10}+\frac{2}{3}x^2=0 \qquad 30\left(\frac{x}{10}+\frac{2}{3}x^2\right)=0 \qquad 3x+20x^2=0 \qquad 20x^2+3x=0$$

$$x(20x+3)=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=0 \\ 20x+3=0 \qquad 20x=-3 \qquad x=\dfrac{-3}{20} \end{cases}$$

Comprobación: $\dfrac{\frac{-3}{20}}{10}+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{-3}{20}\right)^2=0 \qquad \dfrac{-3}{200}+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{9}{400}=0 \qquad \dfrac{-3}{200}+\dfrac{18}{1200}=0$

$$1200\cdot\frac{-3}{200}+1200\cdot\frac{18}{1200}=0 \qquad 6(-3)+18=0 \qquad -18+18=0$$