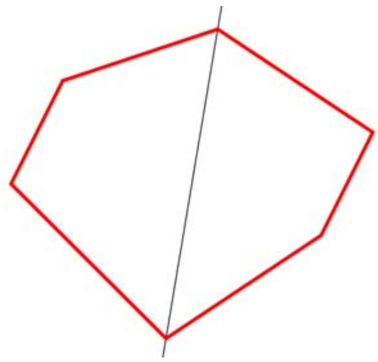
Figuras Planas

Polígonos
Cometas
Isometrías
Teselas. Mosaicos regulares
Mosaicos semirregulares
Mosaicos con polígonos irregulares
Teselaciones periódicas
Mosaicos nazaríes
Teselaciones de M.C. Escher
Teselaciones no periódicas
Teselaciones de Roger Penrose
Cálculo de Áreas de figuras planas

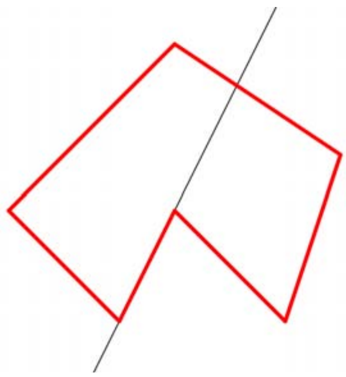
Polígonos

La palabra polígono proviene del griego antiguo, de poli (muchos) y goná (ángulos). Se denomina línea poligonal al conjunto ordenado de segmentos tales que, el extremo de uno de ellos coincide con el origen del segmento que le sigue. Un polígono está conformado por una línea poligonal cerrada.

Un polígono se dice convexo si al atravesarlo una recta lo corta en un máximo de dos puntos o también si el segmento que une dos puntos cualesquiera del polígono es interior al polígono. Todos los ángulos interiores del polígono son menores de 180º. El polígono siempre quedará en un semiplano determinado por cualquiera de las rectas que contengan sus lados.



Un polígono se dice convexo si al atravesarlo una recta lo puede cortar en más de dos puntos o también si el segmento que une dos puntos cualesquiera del polígono tiene puntos que salen fuera del polígono. El polígono no siempre queda en un semiplano determinado por cualquiera de las rectas que contengan sus lados.



A pesar de que hay infinitos polígonos, el más importante es el triángulo, ya que tanto los polígonos cóncavos como los convexos siempre se pueden triangular, es decir dividirlos en piezas triangulares.

Algunas propiedades de los polígonos

- La suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $S = (n-2)\cdot 180º$
- En un polígono convexo la suma de los ángulos exteriores es de 360º.
- El número de diagonales de un polígono (segmentos que unen vértices no consecutivos) es $\dfrac{n\,(n-3)}{2}$

Cometas 1

1) Dibuja dos circunferencias. Describe cómo son y cuál es la posición de una respecto a la otra.
2) Ahora dibuja dos circunferencias de igual radio y que se corten en dos puntos. Si unes el centro de cada circunferencia con los puntos de corte, ¿qué figura encuentras? Describe cuáles son sus características (lados, ángulos, ejes de simetría, diagonales).

Cometas 2

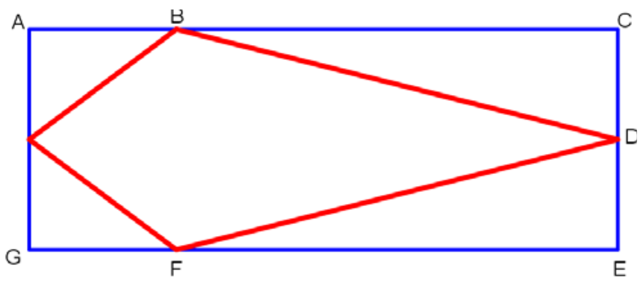
Utilizando las conclusiones obtenidas en el apartado anterior:

a) Dibuja un rombo cuya diagonal mida 6 cm y el lado 4 cm.
b) Dibuja un rombo cuya diagonal mida 6 cm y el lado 3 cm.
c) Dibuja un rombo cuyo lado mida 4 cm y un ángulo 50º

Cometas 3

1) Trazamos dos circunferencias de diferente radio que se corten, ¿cómo será la figura que aparece al unir los centros de las circunferencias con los puntos de corte? Descríbela (lados, ángulos, ejes de simetría, diagonales).
2) Una cometa es un cuadrilátero en el que sus lados son iguales dos a dos y los lados iguales son consecutivos. Dibuja una cometa cuya diagonal mayor mida 12 cm. y la diagonal menor del tamaño que tú quieras. Dibuja otras cometas con la misma diagonal mayor pero variando la diagonal menor.
3) Dibuja una cometa cuyo perímetro sea de 18 cm.
4) Si las longitudes de las diagonales de una cometa son 4’6 cm y 10 cm calcula sus lados y el área.
5) Si unimos los puntos medios de los 4 lados de una cometa ¿qué cuadrilátero se forma?

6) Si inscribimos una cometa en un rectángulo ¿qué relación hay entre sus áreas respectivas?
   ¿Cómo cambiará el perímetro de la cometa a medida que B y F se muevan? Si B y F se encuentran en el punto medio de los lados del rectángulo ¿qué figura se obtiene? ¿cuál es su perímetro?



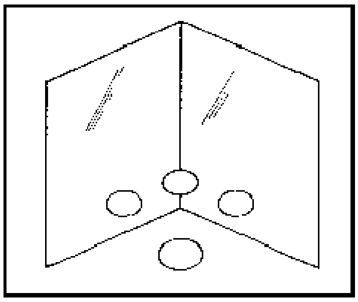
Cónicas

1) Dibuja diferentes cometas manteniendo siempre los mismos centros de las circunferencias y tales que la suma de los lados desiguales sea de 9 cm. Si unimos los puntos de corte de las circunferencias ¿qué figura se obtiene? ¿cómo la definirías?
2) Dibuja diferentes cometas manteniendo siempre los mismos centros de las circunferencias y tales que la diferencia de los lados desiguales sea de 5 cm. Si unimos los puntos de corte de las circunferencias ¿qué figura se obtiene? ¿cómo la definirías?

Isometrías

Toma dos espejos planos de la misma medida y hazlos coincidir de forma que se toquen las caras que se reflejan, sujetándolas con cinta aislante por el borde exterior y con cinta transparente por la parte interior. Hemos construido lo que vamos a llamar "***el libro de los espejos***".

1) Sobre una hoja de papel traza un punto y una línea que no pase por él. Sitúa el eje del libro de los espejos sobre el punto y coloca los espejos de manera que corten a la recta. Abre y cierra las hojas del libro y describe las figuras que vayas observando ¿te suenan? Con un círculo graduado colocado en la parte superior del libro puedes medir en cada momento el ángulo que forman las dos hojas.



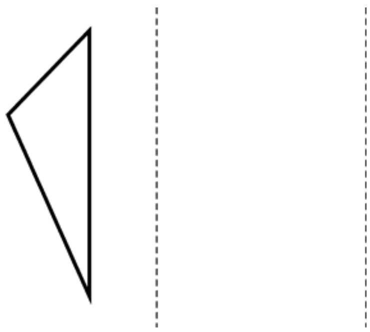
2) Coloca el libro de los espejos sobre cualquier figura que tengas dibujada y varía el ángulo formado por los dos espejos o bien la posición del libro. ¿Qué ves?

3) Un movimiento en el plano es una transformación que cambia de posición todos los puntos del mismo, si bien, para algunos movimientos hay puntos que permanecen invariantes. *A los movimientos que mantienen la forma y el tamaño de los objetos se les llama* ***Isometrías***. A un motivo cualquiera se le puede aplicar una isometría y al resultado obtenido se le puede aplicar otra. A esto le llamamos composición de isometrías. Son isometrías los siguientes movimientos:

- *Giro en el plano* — Es un movimiento que deja un solo punto fijo, llamado centro de giro. Decimos que una figura es *simétrica por rotación* si al girarla un ángulo determinado alrededor de un punto permanece invariante globalmente.
- *Traslación* — Es un movimiento, en una dirección determinada, que no deja ningún punto fijo. Decimos que una figura es *simétrica por traslación* cuando permanece invariante al trasladarla según una determinada dirección.
- *Reflexión* — Es un movimiento que mantiene toda una recta de puntos fijos en el plano llamada eje de reflexión. Decimos que una figura es *simétrica por reflexión* cuando permanece invariante al aplicarle una determinada reflexión.

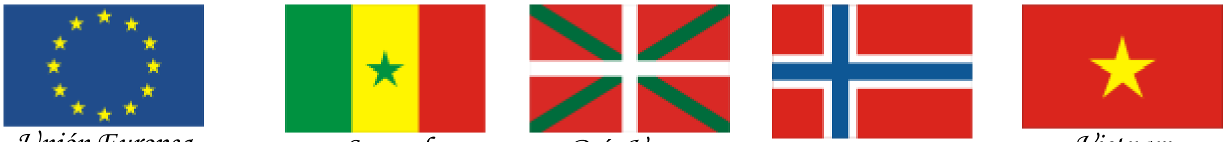
➢ Al componer dos traslaciones ¿qué isometría se obtiene? ¿y al componer dos giros?

➢ Coloca un espejo sobre la primera línea de puntos y dibuja la imagen reflejada. Cambia el espejo a la segunda línea de puntos, paralela a la anterior, y dibuja la nueva imagen reflejada. ¿Qué has obtenido al componer estas dos reflexiones de ejes paralelos? Mide la distancia que hay entre los dos ejes de reflexión y compara esta medida con la longitud de la traslación obtenida.



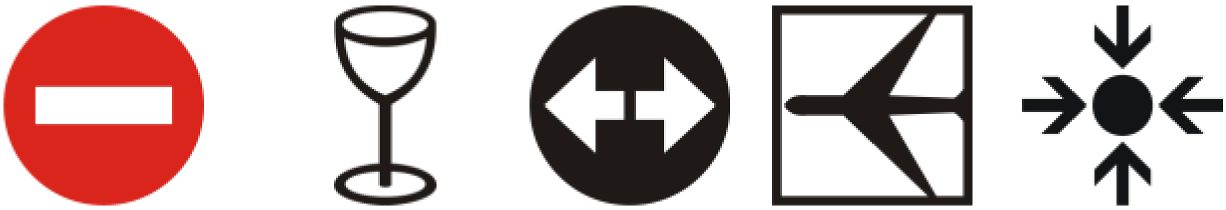
➢ Estudia algunas de las letras del alfabeto y clasifícalas según las isometrías que presentan.
➢ Trabajar el tema de los apuntes de Geogebra titulado: *Traslación, Giro, Homotecia y Reflexión*.

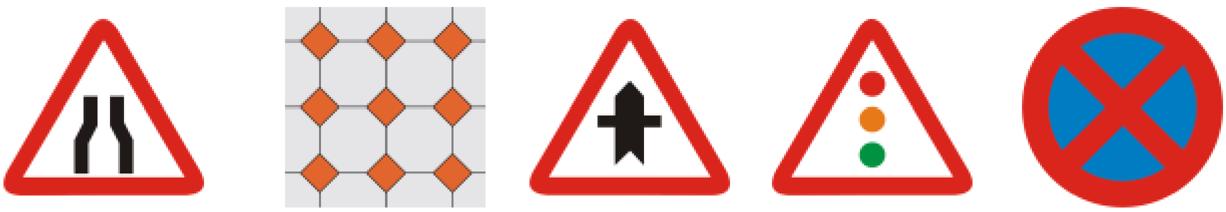
➢ Indica en cada una de las imágenes los ejes de simetría, centros de simetría y el orden de giro de los mismos (decimos que el orden de giro es 2 cuando al girar el dibujo 360º en torno a un centro de giro el dibujo coincide 2 veces consigo mismo). Lo que importa en las simetrías es el dibujo, no los colores (el logo de Antena 3 tiene simetría, aunque los colores no coincidan).



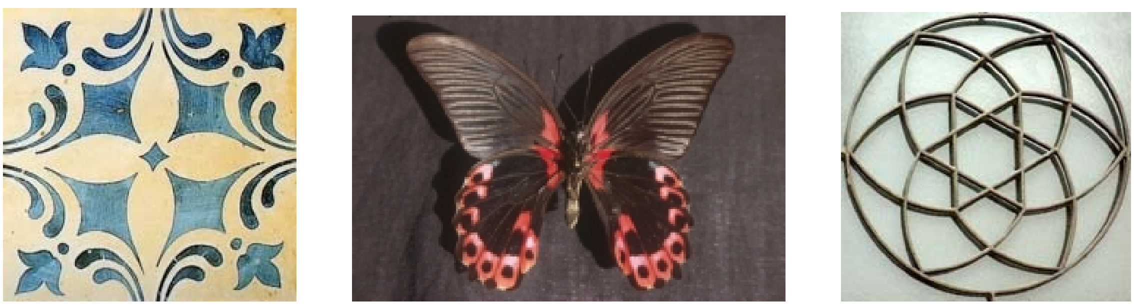
Unión Europea *Senegal* *País Vasco* *Noruega* *Vietnam*

Laos





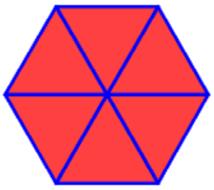
Siria *Rumanía*

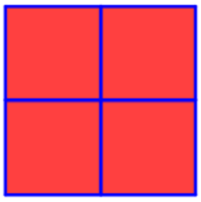


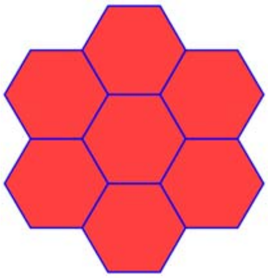
Tramas de polígonos. Mosaicos regulares

Un Mosaico es un recubrimiento del plano formado por piezas, llamadas Teselas, que encajan perfectamente unas con otras sin superponerse y sin dejar huecos sin recubrir. Una ***Teselación se dice regular si se utiliza el mismo tipo de polígonos regulares y en cada vértice inciden el mismo tipo de polígonos, en el mismo número y con la misma disposición****.*

Para que un polígono regular rellene el plano sin producir solapamientos y sin dejar huecos el ángulo interior debe ser divisor de 360º y menor que 180º. Esto solo ocurre con tres polígonos regulares: *el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono*, cuyos ángulos interiores son de 60º, 90º y 120º.



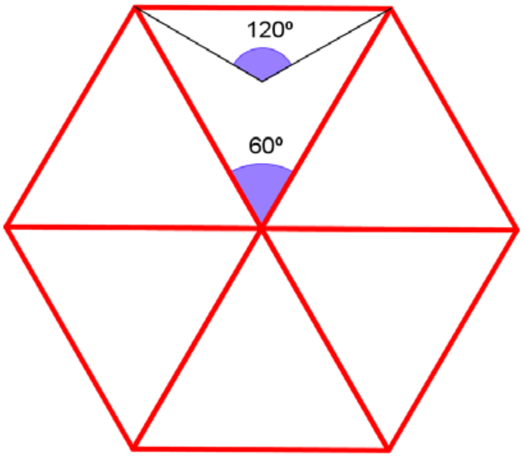


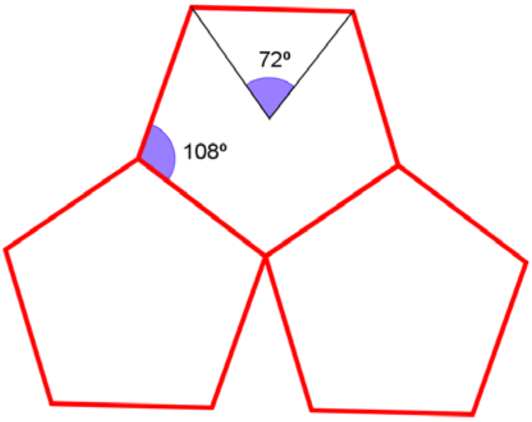


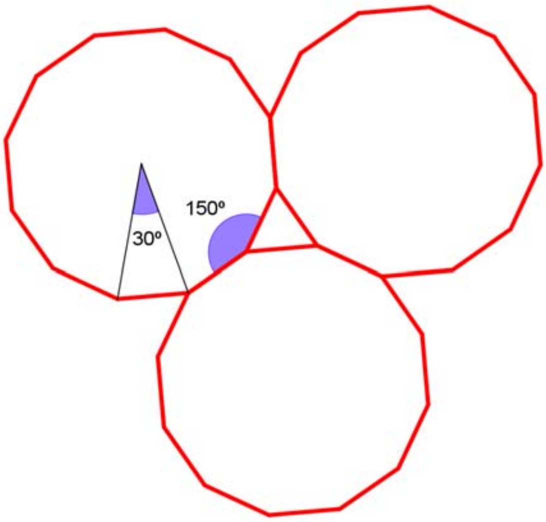
El ángulo central de un polígono regular es el formado por dos radios consecutivos y el ángulo interior es el formado por dos lados consecutivos.

Por ejemplo, en un triángulo equilátero el ángulo central es de 120º y el ángulo interior es de 60º.

El Pentágono regular, por ejemplo, no tesela el plano. El ángulo central es de 72º y el ángulo interior es de 108º. Lo mismo sucede con el Dodecágono regular cuyo ángulo central es de 30º y el ángulo interior es de 150º.





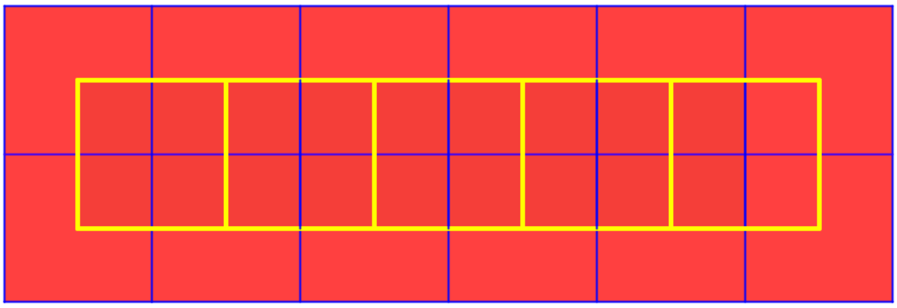


➢ *Completa la siguiente tabla e intenta construir las figuras con los materiales de clase.*

Nº de lados	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***
Polígono	*Triángulo*					
Ángulo central	*120º*					
Ángulo interior	*60º*					
¿Tesela el plano?	*sí*					

Asociada a cada teselación regular existe otra teselación, también regular, obtenida uniendo los centros de los polígonos contiguos. Esta nueva teselación se llama ***Teselación dual*** de la anterior.

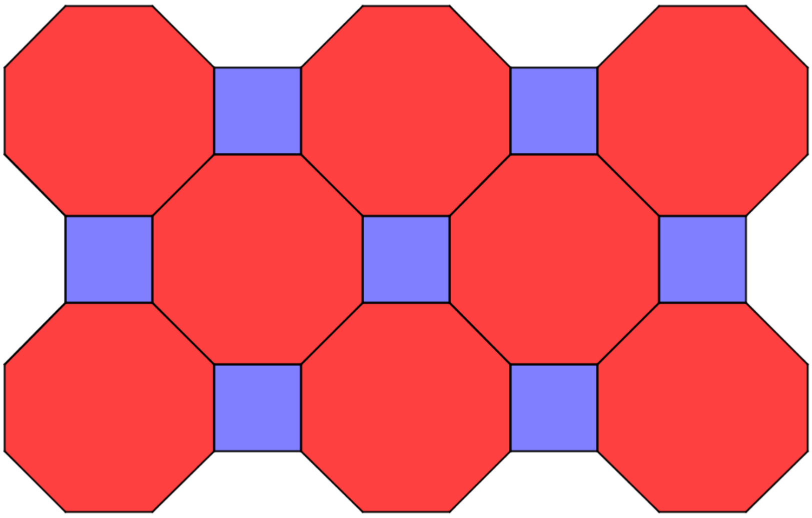
Para indicar que en una tesela regular coinciden alrededor de un vértice 4 cuadrados lo podemos hacer a través del código **4 4 4 4** que quiere decir que hay 4 cuadrados y cada uno de ellos tiene 4 lados (de ahí 4 cuatros). Su teselación dual será también **4 4 4 4** como se indica en la siguiente figura**.**



➢ *Dibuja o construye todas las teselaciones duales correspondientes a las teselaciones regulares indicando sus códigos.*

Mosaicos semirregulares

Llamamos mosaicos semirregulares *aquellos que están formados por más de un polígono regular*. Hemos visto que el pentágono no forma mosaico por sí mismo. Sin embargo la combinación de octógonos y cuadrados tesela el plano. A este tipo de mosaicos formados por *varios polígonos regulares diferentes* suelen llamarse ***Mosaicos Semirregulares***.



*Una **Teselación** se dice **semirregular** si se utilizan distintos tipos de polígonos regulares y en cada vértice inciden el mismo tipo de polígonos, en el mismo número y con la misma disposición.*

La suma de los ángulos interiores de un polígono regular es $S = (n-2)\cdot 180^{o}$ y por tanto el ángulo interior de un polígono regular mide $\frac{(n-2)\cdot 180^{o}}{n}$

- ¿Se puede construir un mosaico con 2 dodecágonos y un cuadrado? En caso negativo explica qué polígono regular combinado con los dos dodecágonos hace falta para teselar el plano.

Dentro de los mosaicos semirregulares podemos distinguir dos grupos: los mosaicos *uniformes* y los mosaicos *no uniformes*.

Mosaicos uniformes

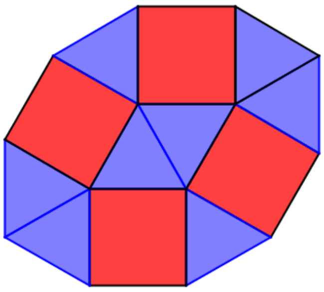
Son aquellos en los que en todos los vértices concurren los mismos polígonos regulares y en el mismo orden. Sólo existen 8 mosaicos de ésta categoría.

Un ejemplo de mosaico semirregular uniforme es el de la figura anterior donde confluyen en un mismo vértice dos octógonos y un cuadrado y se suele codificar como **4 8 8** para indicar que alrededor de un vértice confluyen un cuadrado y dos octógonos, es decir, se unen un ángulo de 90º y dos ángulos de 135º que suman en total 360º. Contando con el mosaico anterior solamente existen 8 mosaicos semirregulares, cuyas codificaciones son:

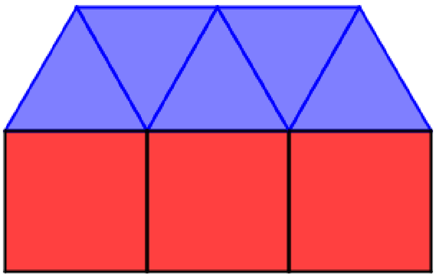
4 8 8   3 6 3 6   3 4 6 4   3 12 12   4 6 12   3 3 3 3 6   3 3 4 3 4   3 3 3 4 4

Los dos últimos están formados por los mismos polígonos en diferente orden de tal manera que al rellenar el plano forman mosaicos diferentes, como se observa a continuación.

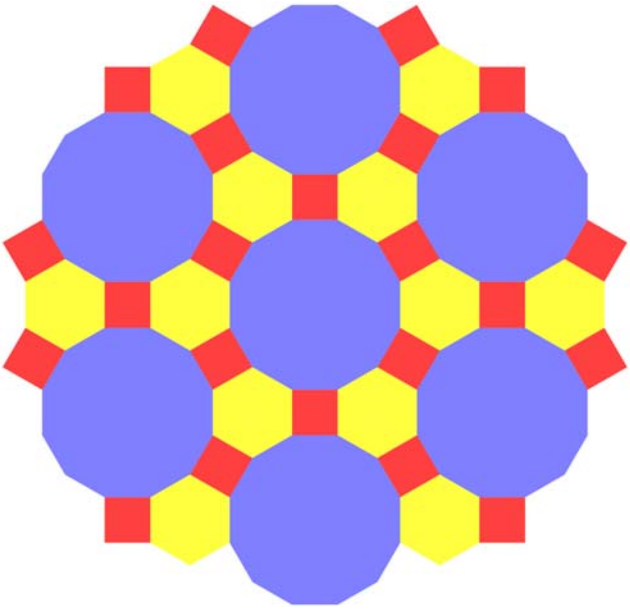
3 3 4 3 4



3 3 3 4 4

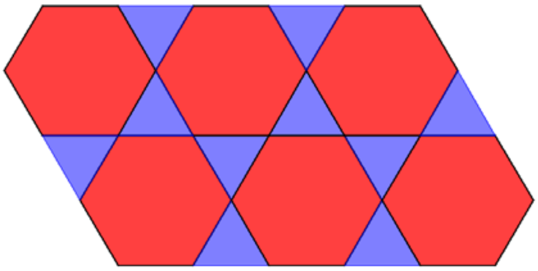


La siguiente figura representa el mosaico ***4 6 12***

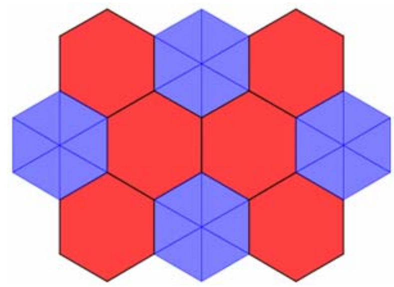


También podemos formar mosaicos variando el orden ***3 6 3 6*** al orden ***3 3 6 6*** y variando el orden de ***3 4 6 4*** al orden ***3 6 4 4***, pero estos mosaicos nuevos no son uniformes, es decir, al intentar expandirlos en el plano aparecerán vértices de distintos tipos.

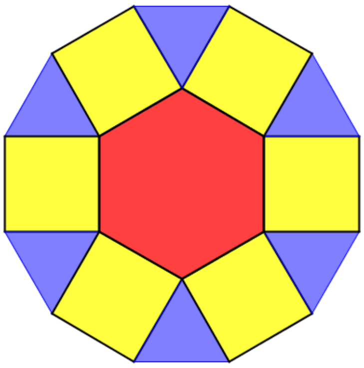
3 6 3 6



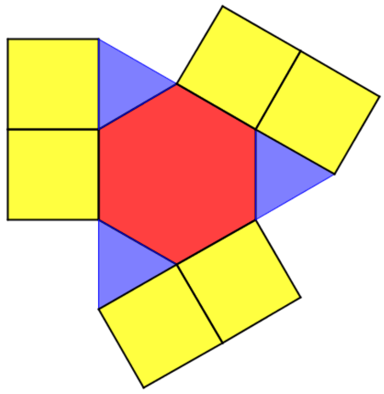
3 3 6 6



3 4 6 4

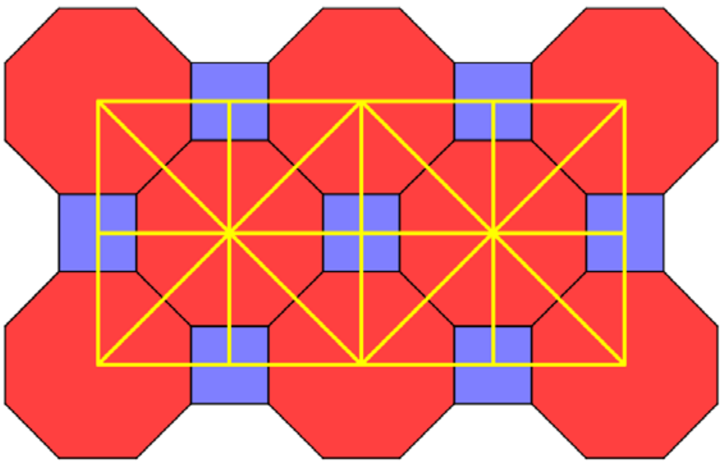


3 6 4 4



- *Intenta construir alguno de los mosaicos uniformes.*

Como en el caso regular, puede obtenerse de cada teselación semiregular uniforme, una ***teselación dual*** uniendo los centros de cada dos polígonos consecutivos como se observa en la figura adjunta. Esta nueva teselación no es regular.



- *Construye todas las teselaciones duales correspondientes a las teselaciones semirregulares indicando sus códigos.*

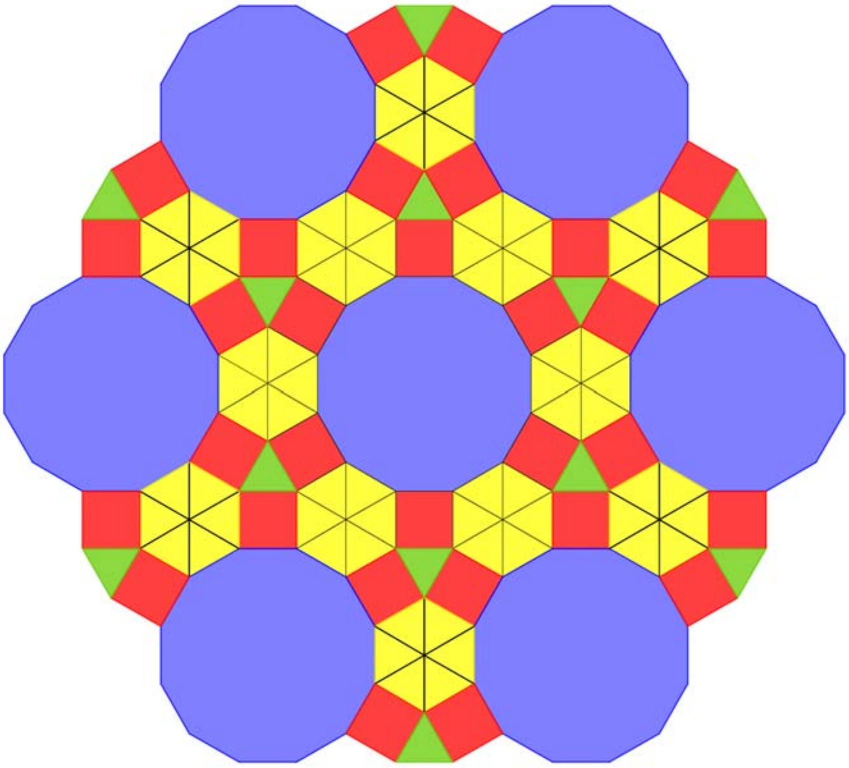
- *Localiza en tu ciudad ejemplos de mosaicos regulares o semirregulares uniformes y fotografíalos.*

Mosaicos no uniformes

Existen otras combinaciones de polígonos regulares tales que la suma de sus ángulos es 360º, por lo que pueden configurar un vértice de un mosaico pero que no es posible expandirlos indefinidamente en el plano sin que haya superposición ni huecos. Son aquellos en los que *son necesarios vértices de más de un tipo para poder recubrir el plano*. Solamente hay 8 configuraciones de este tipo.

3 4 3 12   3 3 4 12   5 5 10   4 5 20   3 7 42   3 8 24   3 9 18   3 10 15

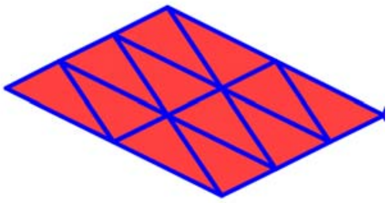
Por ejemplo, el siguiente mosaicos corresponde a la configuración *3 3 4 12***,** pero hay vértices en los que la configuración es *3 3 4 3 4*, como se muestra a continuación.



Mosaicos formados por polígonos irregulares

- *Teselación mediante triángulos*

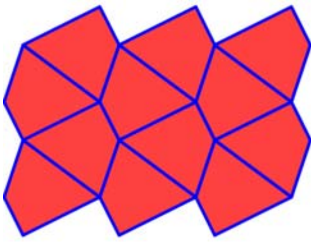
  Se obtiene por simetría respecto del punto medio de cada lado.



- *Teselación mediante cuadriláteros*

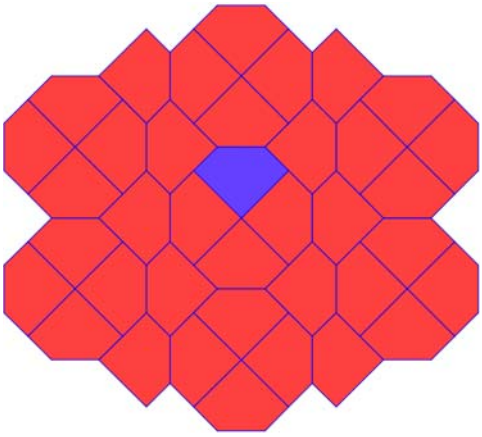
  Se obtiene por simetría respecto del punto medio de cada lado.

  a) Rectágulos
  b) Rombos
  c) Paralelogramos
  d) Un cuadrilátero cualquiera



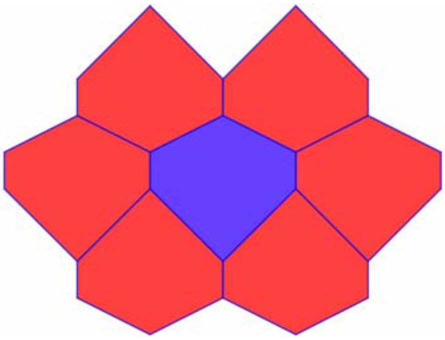
- *Teselación mediante pentágonos irregulares*

  El pentágono regular no tesela el plano, pero actualmente se conocen 14 familias de pentágonos que teselan el plano. Se obtiene por simetría respecto del punto medio de cada lado.



- *Teselación mediante hexágonos irregulares*

  Además del hexágono regular hay otros 3 hexágonos irregulares que rellenan el plano. La siguiente se obtiene por simetría respecto del punto medio de cada lado.



- *Puede demostrarse que no hay polígonos convexos de más de 6 lados que teselen el plano.*

Tipos de Teselaciones. Teselaciones periódicas

Las teselaciones pueden ser *periódicas* o ser *no-periódicas*. *Son periódicas aquellas teselaciones que si las calcamos con un papel de calco y trasladamos este papel por la teselación original la teselación original y la calcada coinciden*. Podemos mover el papel de calco hacia la derecha, hacia la izquierda, hacia arriba, hacia abajo, en cualquiera de las diagonales, etc; lo único que no se puede hacer con el papel de calco son giros. *Cuando una teselación no tiene traslaciones que hagan que coincida consigo misma decimos que es no-periódica*.

Para teselar el plano de forma periódica existen 4 estrategias:

- ***Traslación***
  La nueva tesela surge por desplazamiento de una anterior, sin giros de ningún tipo.
- ***Rotación***
  La nueva tesela surge por el giro de una anterior con centro en algún punto determinado y con un ángulo concreto.
- ***Reflexión***
  La nueva tesela surge mediante una imagen especular de una anterior, con un eje de simetría dado.
- ***Simetría con deslizamiento***
  La nueva tesela surge de una reflexión seguida de una traslación en la dirección del eje de reflexión.

Estas 4 estrategias se denominan movimientos en el plano y son isometrías, es decir, conservan las distancias. Estas transformaciones se combinan entre sí dando lugar a los denominados *grupos de simetrías*, en este caso ***grupos cristalográficos planos***. En el año 1891, Fedorov, un gran matemático ruso, demostró que no hay más que 17 estructuras básicas para las infinitas decoraciones posibles del plano formando mosaicos periódicos. Son los 17 grupos cristalográficos planos. Cada uno de ellos recibe una denominación que procede de la cristalografía, y se pueden clasificar según la naturaleza de sus giros.

Los 17 grupos de simetría del plano se pueden agrupar en 5 apartados, según el orden máximo de los giros.

- 4 grupos de simetrías sin giros.
- 5 grupos de simetrías con giros de 180º.
- 3 grupos de simetrías con giros de 120º.
- 3 grupos de simetrías con giros de 90º.
- 2 grupos de simetrías con giros de 60º

Los árabes fueron unos excelentes creadores de mosaicos geométricos. Su religión les impedía dibujar personas o animales por lo que su creatividad se orientó hacia la caligrafía y los dibujos geométricos creando teselaciones de una belleza insuperable. Los creadores de los mosaicos de la Alhambra no podían conocer el teorema de clasificación de Fedorov y por lo tanto no conocían cuántos grupos de simetría podían usarse para teselar el plano, por eso resulta impactante que conocieran los 17 existentes. Todos ellos están representados en los mosaicos de la Alhambra. La mayoría son los que tienen giros de 90º y aunque algunos grupos aparecen muy poco los 17 están representados.

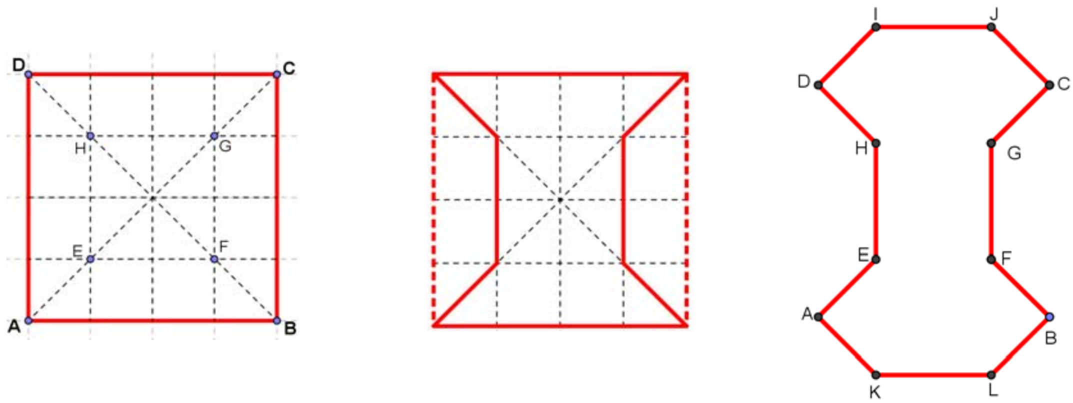
Construyendo mosaicos

Los Mosaicos Nazaríes

La dinastía nazarí reinó en Granada desde el siglo XIII al XV y sus construcciones han quedado reflejadas en la Alhambra de Granada. En todos los mosaicos que hay en la Alhambra se puede encontrar una pequeña región poligonal que mediante traslaciones, giros y simetrías permite reproducir todo el mosaico. En matemáticas este tipo de mosaico se conoce como periódico. Lo increíble ha sido comprobar que, si prescindimos del color, en la Alhambra están representados los 17 tipos, es decir, los árabes encontraron el mismo resultado de forma empírica. La forma de obtenerlos fue transformando un polígono regular en otras figuras de igual superficie que produjeron formas desconocidas hasta esa época en el arte.

Mosaicos generados por Rotación (Mosaico Hueso)

Para la siguiente construcción utilizaremos el programa de matemáticas Geogebra. Vamos a Teselar el plano realizando *solamente giros en el plano* de la tesela Hueso en torno a diferentes puntos.

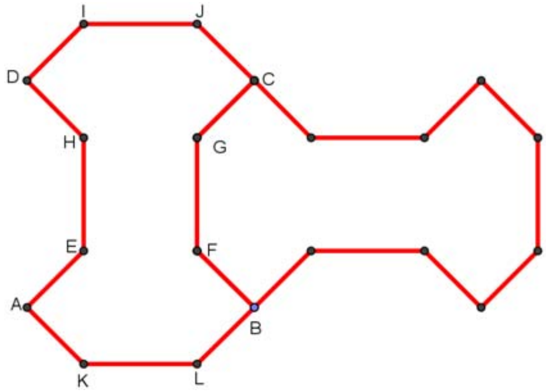


Con el cursor en el interior de la *Venta de Gráficos,* pulsamos el botón derecho del ratón y activamos la opción *Cuadrícula*, o directamente activamos la opción *Cuadrícula* en el menú *Vista*. En el menú *Opciones* activamos la opción *Atracción de Punto a Cuadrícula* y dentro ella la opción *Activa (Cuadrícula),* para que los puntos se queden fijos en los vértices de la cuadrícula y sea más sencillo dibujar la poligonal.

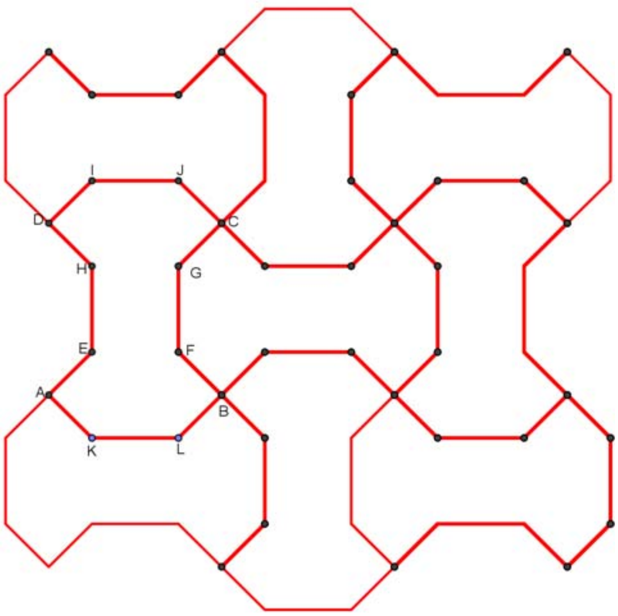
1) Activamos la herramienta *Polígono Regular* y pulsamos con el cursor en dos puntos del plano. Se abre una ventana llamada *Polígono Regular* que nos pide el número de puntos. Escribimos un 4 (cuadrado). Automáticamente se dibuja un cuadrado con los cuatro puntos como vértices del cuadrado. Para que aparezcan los rótulos de los 4 puntos, colocamos el cursor sobre cada uno de ellos y con el botón derecho del ratón activamos la opción *Muestra Rótulo*. Si queremos cambiar el rótulo de algún punto, colocamos el cursor sobre él y pulsamos el botón derecho del ratón, activamos la opción *Renombra* y cambiamos el texto. Es interesante que los 4 vértices figuren con las letras A, B, C y D.
2) Con la herramienta *Nuevo Punto* dibujamos los puntos E, F, G y H como se indica en la figura superior y con la herramienta *Polígono* generamos el polígono AEHDIJCGFBLKA como se indica en la figura superior derecha, sin más que ir pulsando con el cursor sobre los puntos adecuados. Colocamos el cursor en su interior y con el botón derecho del ratón activamos la opción *Propiedades.* En la pestaña *Estilo* en la opción *Grosor de Trazo* ponemos 7 (o el grosor que nos parezca oportuno) y en la opción *Sombreado* ponemos 0. En la parte izquierda de la ventana colocamos el curso encima de la palabra *Punto* y en la pestaña *Básico* de la parte derecha de la ventana desactivamos *Muestra Rótulo*.

3) ***Podemos mover el dibujo por toda la ventana pulsando sobre el icono Desplazar Vista Gráfica (primer icono del menú situado en la parte superior derecha del programa) y luego con el cursor arrastrar la ventana gráfica hasta que el objeto se encuentre en la posición deseada***.

4) Para obtener la figura que aparece a continuación, tenemos que ir girándola (***Giro en el plano***) en torno aun punto. Seleccionamos la herramienta *Rota Objeto en torno a Punto, el Ángulo indicado*, a continuación recuadramos con el cursor la tesela hueso y seleccionamos el punto B sobre el que va a rotar la figura. En la ventana que se abre escribimos el Ángulo (en este caso 90º) y el sentido (en este caso Sentido Horario). Aparecerá dibujada la siguiente figura:

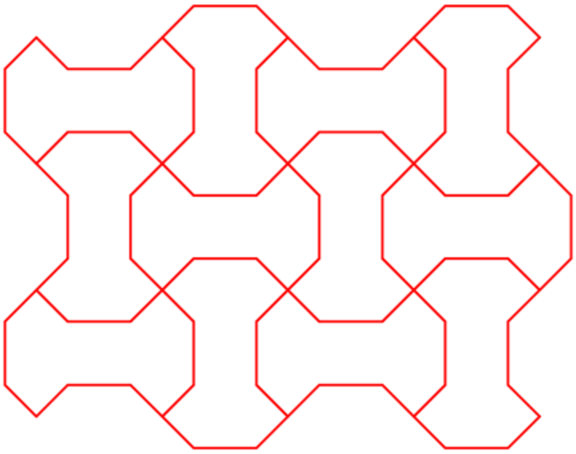


5) Si realizas la misma operación con cualquiera de los dos huesos y vas teniendo en cuenta el punto de giro y el sentido del giro (horario o antihorario) irás obteniendo la siguiente figura:

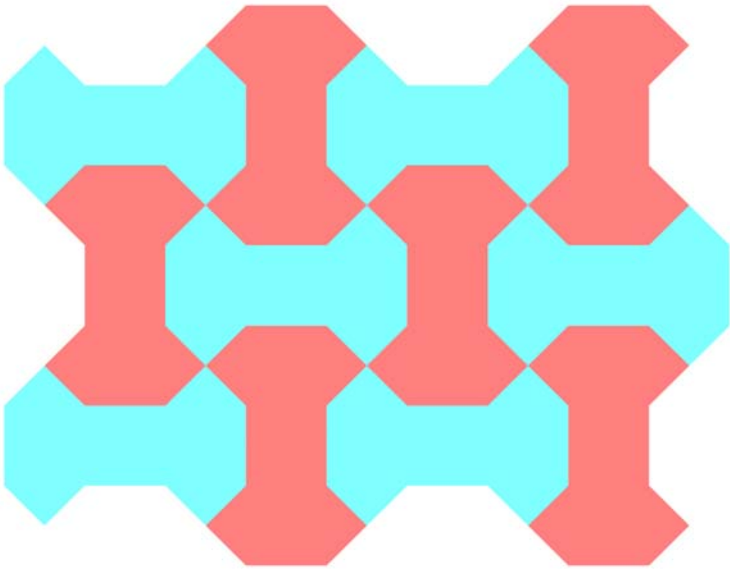


6) En algún caso puede que tengamos que eliminar algún segmento que queda suelto. Colocamos el curso sobre él y desactivamos *Mostrar Objeto* tantas veces hasta que desaparezca el segmento (puede haber varios segmentos superpuestos). Para que desaparezcan los puntos de los vértices con sus rótulos y quede solamente la figura pulsamos con el botón derecho del ratón sobre cualquiera de los puntos y en la ventana que se abre pulsamos sobre la opción *Propiedades*. En la nueva ventana nos colocamos en la parte izquierda y seleccionamos la opción *Punto* (automáticamente se seleccionan todos los puntos de la construcción). En la parte derecha de la ventana activamos la pestaña *Básico* y dentro de ella activamos y desactivamos la opción *Mostrar Objeto* hasta que los puntos desaparezcan. Para que todos los segmentos de la construcción tengan el mismo grosor, colocamos el curso sobre uno de ellos y con el botón derecho del ratón activamos la opción *Propiedades*. En la parte izquierda de la ventana colocamos el cursor sobre la palabra *Segmento* (observamos que debajo de ella quedan seleccionados todos los segmentos) y en la parte derecha de la ventana en la pestaña *Estilo* en la opción *Grosor* activamos 7 o cualquier otro.

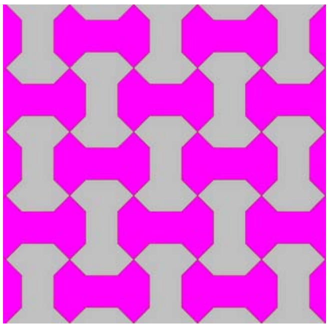
7) Recuadramos con el cursor la parte que queramos mostrar y activamos en el menú *Archivo* la opción *Exporta – Copia la Vista Gráfica al Portapapeles*. Una vez situados en el lugar que queremos aparezca el mosaico, pulsamos el botón derecho del ratón y activamos la opción *Pegar*. Podemos hacer que el mosaico tenga otras dimensiones sin más que arrastrar con el cursor por las esquinas de la imagen que hemos pegado. Se formará el siguiente mosaico:

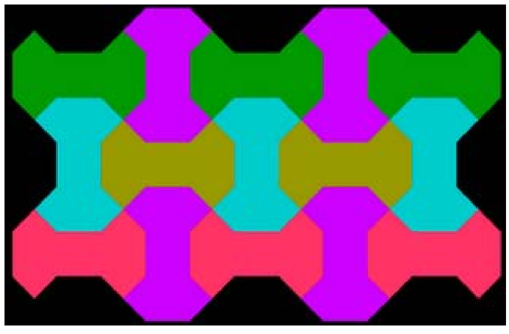


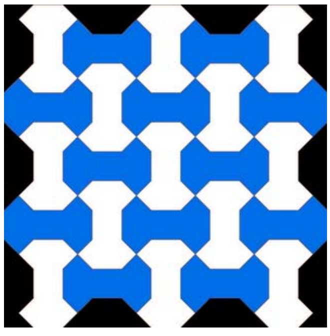
8) *Podemos rellenar fácilmente de varios colores la construcción, porque la figura objeto de relleno es un polígono*. Para ello, colocamos el cursor en el interior de uno de los huesos, pulsamos el botón derecho del ratón y en la ventana que aparece seleccionamos propiedades. En el interior de esta ventana seleccionamos la pestaña *Estilo*. En *Grosor del Trazo* ponemos 0 (para que no se note el contorno del hueso) y en la opción *Sombreado* seleccionamos 50%, por ejemplo. Ahora activamos la pestaña *Color* y seleccionamos el color rojo cuyo código es (255, 0, 0). Si queremos que varios huesos tengan exactamente este estilo, seleccionamos en la parte superior del programa el último menú de la derecha y en su interior la opción *Copia Estilo Visual*. Introducimos el cursor en el interior del hueso cuyo color queremos copiar y posteriormente no tenemos más que ir pulsando con el ratón en el interior de los huesos que queremos tengan el mismo estilo. El mosaico que aparece es la siguiente:



Los siguientes dibujos han sido realizados por alumnos del curso 4º ESO C del año académico 2009/2010 con el programa de matemáticas Geogebra.

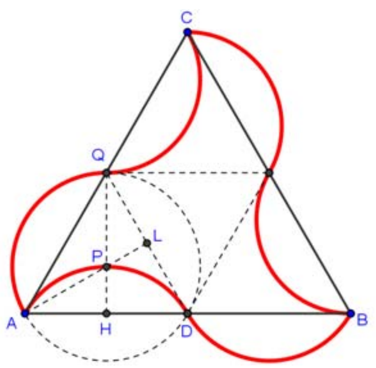


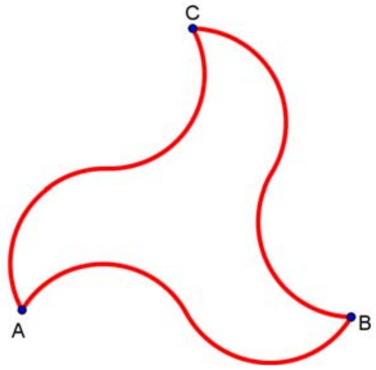




Mosaicos generados por Rotación (la Pajarita Nazarí)

Para la siguiente construcción utilizaremos el programa de matemáticas Geogebra. Vamos a construir un mosaico con la tesela Pajarita Nazarí realizando *solamente giros en el plano* en torno a diferentes puntos.

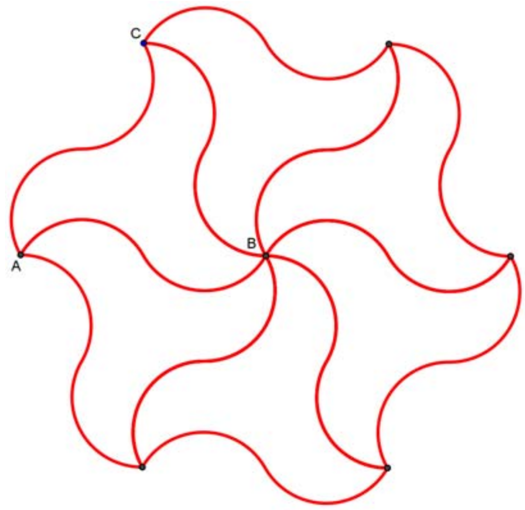




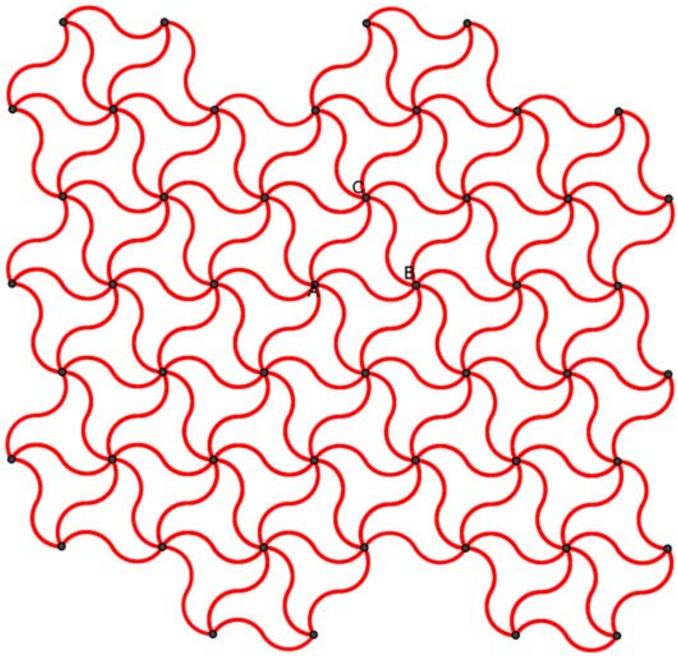
1) Con el cursor en el interior de la *Venta de Gráficos*, pulsamos el botón derecho del ratón y activamos la opción *Cuadrícula*, o directamente activamos la opción *Cuadrícula* en el menú *Vista*. En el menú *Opciones* activamos la opción *Atracción de Punto a Cuadrícula* y dentro ella la opción *Activa (Cuadrícula),* para que los puntos se queden fijos en los vértices de la cuadrícula.
2) Construimos un triángulo equilátero ABC con la herramienta *Polígono Regular*.
3) Con la herramienta *Punto Medio o Centro* seleccionada y pulsando sobre cada uno de los lados del triángulo se dibujan los puntos medios de los lados. Uniendo los puntos medios aparecen 3 triángulos equiláteros.
4) Para dibujar la altura QH en el triángulo AQD procedemos de la siguiente manera: trazamos la perpendicular al lado AD que pasa por el punto Q. Para ello seleccionamos la herramienta *Recta Perpendicular*, pulsamos sobre el punto Q y a continuación sobre el lado AD. Con la herramienta *intersección de Dos Objetos* seleccionamos la perpendicular y el lado AQ y obtenemos el punto de corte H. Con la herramienta *Segmento entre Dos Puntos* unimos el punto Q con H y tenemos una altura. Efectuamos la misma operación para dibujar la altura AL que va desde el punto A hasta el lado QD. Con la herramienta *intersección de Dos Objetos* obtenemos el punto P donde se cortan las alturas. Este punto es el centro de la circunferencia que pasa por los puntos A, Q y D.
5) Trazamos el arco de circunferencia AQ con la herramienta *Arco de Circunferencia dados su Centro y Dos extremos* (el centro es el punto P y los extremos los puntos A y Q. El arco QB se obtiene sin más que girar el arco AQ 180º. Para ello pulsamos sobre la herramienta *Rota Objeto en torno a Punto el Ángulo indicado*. Seguidamente pulsamos sobre el arco AQ y a continuación sobre el punto Q. Se abrirá una ventana que nos pide el ángulo a girar y el sentido. Escribimos 180º y activamos *Sentido Horario*.
6) Repetimos la operación seleccionando ahora el arco QB, pero ahora el ángulo a girar sobre el punto B es de 60º, y así sucesivamente. Colocamos el cursor sobre uno de los arcos y con el botón derecho del ratón activamos la opción *Propiedades.* En la pestaña *Estilo* en la opción *Grosor de Trazo* ponemos 7 (o el grosor que nos parezca oportuno) y en la opción *Sombreado* ponemos 0. Ahora activamos la opción *Copia Estilo Visual* (último menú), pulsamos sobre el arco anterior y a continuación sobre los demás arcos.
7) Cuando esté toda la pajarita dibujada hay que ocultar todos los dibujos auxiliares que hemos utilizado para su construcción (triángulos, perpendiculares, rectas, puntos etc). Colocamos el cursor sobre cada uno de ellos, pulsamos el botón derecho del ratón y en la opción *Propiedades,* en la pestaña *Básico* desactivamos *Mostrar Objeto*. Solo hay que dejar activos los

puntos A, B y C, vértices del triángulo original y sobre los que vamos a rotar la pajarita. A veces cuando desactivamos un punto, con la opción *Mostrar Objeto*, vemos que no desaparece de la pantalla. Esto sucede porque hay varios puntos superpuestos y hay que repetir la operación varias veces.

8) Para obtener la figura que aparece a continuación, tenemos que ir girándola (***Giro en el plano***) en torno aun punto. Seleccionamos la herramienta *Rota Objeto en torno a Punto, el Ángulo indicado,* a continuación recuadramos con el cursor la pajarita completa y seleccionamos el punto B sobre el que va a rotar la figura. En la ventana que se abre escribimos el Ángulo (en este caso 60º) y el sentido (en este caso Sentido Horario). Repetimos exactamente la misma operación pero ahora con la nueva pajarita rotada y así sucesivamente. Aparecerá dibujada la siguiente figura:



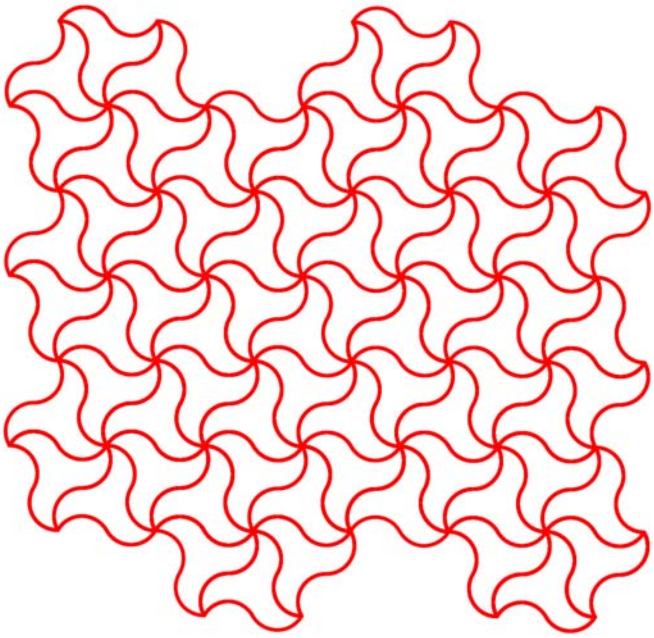
9) Para obtener la figura que aparece a continuación, seleccionamos la herramienta *Rota Objeto en torno a Punto, el Ángulo indicado*, a continuación recuadramos con el cursor toda la construcción anterior y seleccionamos un punto de la periferia sobre el que rotará toda la figura (por ejemplo el punto A). En la ventana que se abre escribimos el Ángulo (en este caso 120º) y el sentido (en este caso Sentido Antihorario, ya que va a rotar hacia la izquierda en sentido contrario a las agujas del reloj). Repetimos la misma operación, siempre calculando previamente el punto de la periferia sobre el que rotará la figura para que vaya teselando el plano. En algún caso puede que tengamos que eliminar algún arco que queda suelto. Colocamos el curso sobre él y desactivamos *Mostrar Objeto* tantas veces hasta que desaparezca el arco (puede haber varios arcos superpuestos).



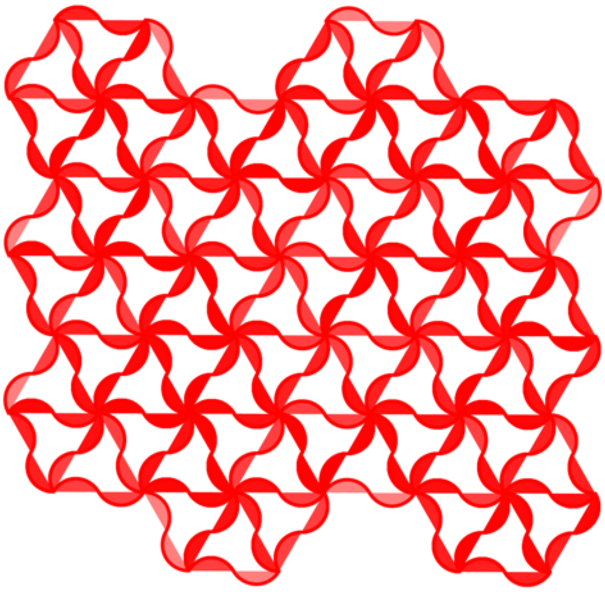
10) Al igual que en apartado 6) hay que ocultar todos los objetos que no deben de aparecer en el mosaico, en concreto los puntos y los rótulos. Ahora vamos a programar que todos los arcos que aparecen en el mosaico tengan el mismo grosor, para que éste aparezca homogéneo. Seleccionamos con el cursor uno de los arcos del mosaico, pulsamos el botón derecho del ratón

y seleccionamos *Propiedades*. En la parte izquierda de la ventana colocamos el cursor encima de la palabra *Arco* (todos los arcos que hay en la figura y que se encuentran debajo de la palabra arco quedarán seleccionados automáticamente), en la pestaña *Estilo* en la opción *Grosor del Trazo* escribimos 7 y en sombreado 0 (si ponemos algo de sombreado aparece una figura interesante con la que puedes experimentar, pero no es la pajarita nazarí). Ahora, para que desaparezcan todos los puntos visibles de la construcción y queden solamente los arcos, colocamos el cursor encima de cualquiera de los puntos sobre los que hemos estado rotando la construcción, pulsamos el botón derecho del ratón y en *Propiedades* en la parte izquierda de la ventana seleccionamos *Punto* y en la pestaña *Básico* desactivamos la opción *Mostrar Objeto*. Si no se desactivan volvemos a pulsar sobre *Mostrar Objeto*.

11) Recuadramos con el cursor la parte que queramos mostrar y activamos en el menú *Archivo* la opción *Exporta – Copia la Vista Gráfica al Portapapeles*. Una vez situados en el lugar que queremos aparezca el mosaico, pulsamos el botón derecho del ratón y activamos la opción *Pegar*. Podemos hacer que el mosaico tenga otras dimensiones sin más que arrastrar con el cursor por las esquinas de la imagen que hemos pegado. Debe mostrarse el siguiente mosaico:



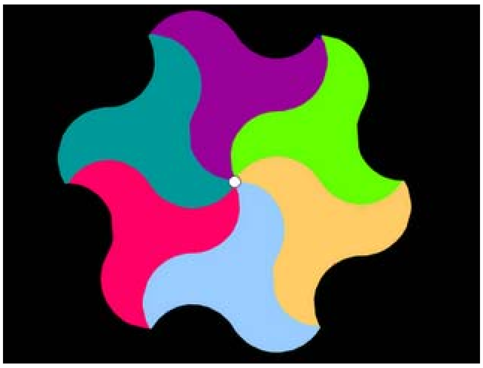
Si en estilo hubiéramos introducido en la pestaña *Estilo* en la opción *Sombreado* el *50%*, obtendríamos el siguiente mosaico:

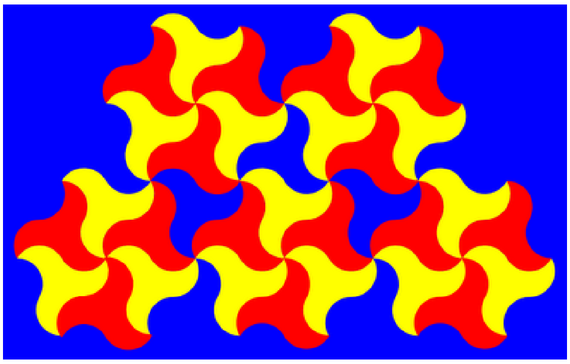


12) Geogebra no permite rellenar esta figura de forma automática como en el caso del Hueso, ya que no es una figura poligonal. El truco para poder realizar esta operación es colocar muchos puntos seguidos encima de la construcción inicial (primera pajarita) con la opción *Nuevo Punto* (mínimo 15 puntos en cada arco, aunque hay un límite a partir del cual el programa no nos permite colocar más) y cuando los tengamos todos unirlos con la herramienta *Polígono* hasta que aparezca una poligonal cerrada. Posteriormente seleccionamos el polígono y lo rellenamos de un color. Este proceso se explicará con detalle en las fichas de Geogebra. L

¿Qué tipos de simetría presenta la pajarita nazarí?

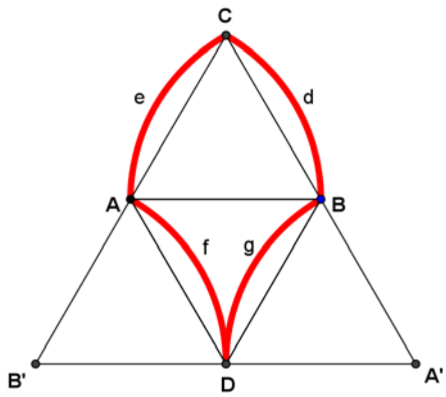
Los siguientes dibujos han sido realizados por alumnos del curso 4º ESO C del año académico 2009/2010 con el programa de matemáticas Geogebra.





Mosaicos generados por Traslación (El Pétalo Nazarí)

Para la siguiente construcción utilizaremos el programa de matemáticas Geogebra. Vamos a construir un mosaico con la tesela Pajarita Nazarí realizando *solamente traslaciones en el plano*.

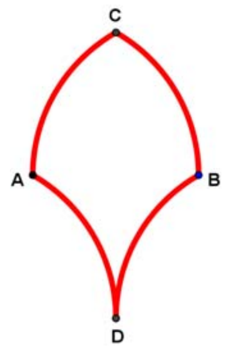


1) Con el cursor en el interior de la *Venta de Gráficos*, pulsamos el botón derecho del ratón y activamos la opción *Cuadrícula*, o directamente activamos la opción *Cuadrícula* en el menú *Vista*. En el menú *Opciones* activamos la opción *Atracción de Punto a Cuadrícula* y dentro ella la opción *Activa (Cuadrícula),* para que los puntos se queden fijos en los vértices de la cuadrícula y representamos dos puntos A y B.
2) Con la herramienta *Polígono Regular* trazamos dos triángulos equiláteros de lado AB. Uno el ABC (sentido antihorario) y otro el BAD.
3) Para visualizar el tercer vértice de cada triángulo (puntos C y D) colocamos el cursor sobre cada uno de ellos y pulsando el botón derecho del ratón, en la opción *Propiedades*, activa-

mos *Muestra Rótulo*. Si el rótulo que aparece no nos interesa, pulsamos sobre la opción *Renombra* y escribimos otro rótulo.

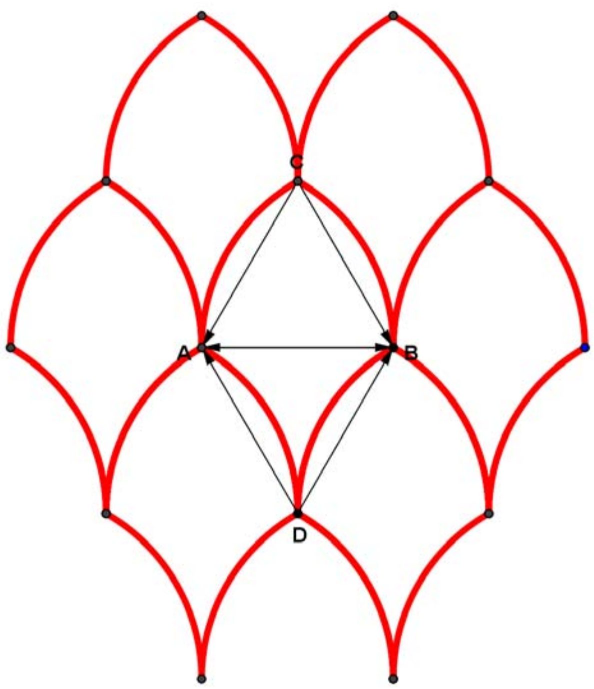
4) Los puntos B' y A' se obtiene por simetría de los punto B y A respecto a los segmentos AD y BD respectivamente utilizando la herramienta *Refleja Objeto en Recta*.
5) Con centro en los puntos A, B, A' y B' y utilizando la herramienta *Arco de Circunferencia dados su Centro y dos extremos* trazamos los 4 arcos e, d, f y g que constituyen el pétalo siempre en el sentido antihorario, es decir, de C a A, de B a D, etc. Colocamos el cursor sobre uno de los arcos y activamos la opción *Propiedades*. En la pestaña *Estilo* en *Grosor de Trazo* ponemos 7 (o el grosor que nos parezca oportuno) y en la pestaña *Sombreado* ponemos 0. Ahora activamos la opción *Copia Estilo Visual* (último menú), pulsamos sobre el arco anterior y a continuación sobre los demás arcos. Si la construcción está bien hecha (para lo cual es muy importante que los arcos vayan a parar a los puntos indicados), al desplazar los puntos A ó B el pétalo se desplazará y escalará sin deshacerse.

6) Colocamos el cursor sobre un arco o un punto cualquiera y con el botón derecho del ratón activamos la opción *Propiedades*. En la parte izquierda de la ventana nos colocamos encima de la palabra *Punto* (se seleccionarán automáticamente todos los puntos) y en la pestaña *Básico* de la parte derecha de la ventana desactivamos la opción *Mostrar Rótulo*. Lo mismo hacemos con los objetos que no deben aparecer en la construcción final hasta que quede solamente la figura del pétalo y los puntos A, B, C y D para poder interactuar con ellos, como se indica en la figura adjunta.



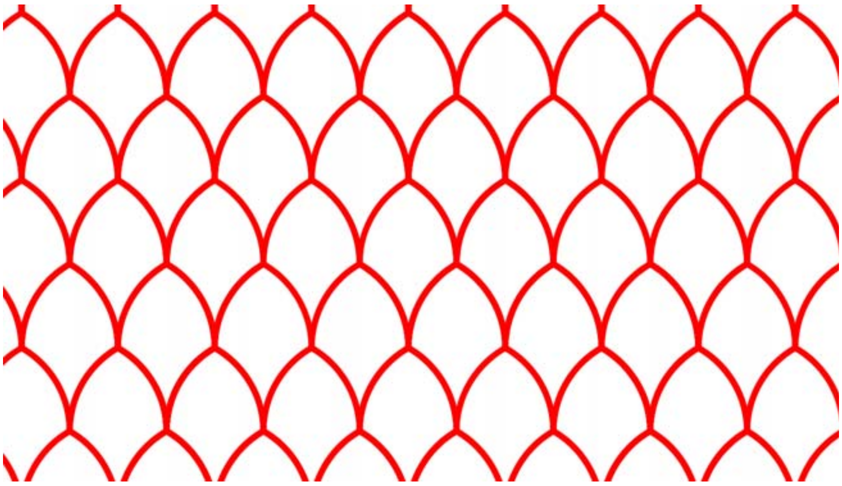
7) Finalmente, para que el pétalo rellene el plano tenemos que ir trasladándolo (***Traslación en el plano***) mediante los siguientes pasos:

a) Con la herramienta *Vector entre Dos Puntos* se trazan los vectores que van de D a A (pulsando primero en D y finalizando en A), de D a B, de C a A, de C a B, de A a B y de B a A (los vectores se pueden dibujar todos seguidos).
b) Se selecciona la herramienta *Traslada Objeto por un Vector*, se recuadra el pétalo original con el cursor y se pulsa sobre uno de los vectores, con lo que el pétalo se desplazará en la dirección indicada por el vector. Esta operación hay que repetirla con el mismo pétalo para los demás vectores.



8) Siguiendo el método anterior y seleccionando como objeto a trasladar varios pétalos juntos podemos conseguir que el pétalo tesele todo el plano y genere un mosaico. Al final de la construcción colocamos el cursor encima de cualquier punto, pulsamos el botón derecho del

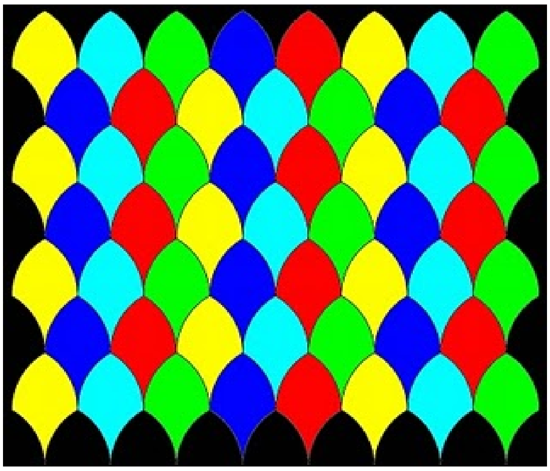
ratón y activamos la opción *Propiedades*. Nos colocamos en la parte izquierda de la ventana encima de *Punto* y en la pestaña *Básico* desactivamos *Muestra Objeto*. Repetimos la operación con la palabra *Vector* hasta que quede solamente el mosaico formado por los pétalos. Recuadramos con el cursor la parte que queramos mostrar y activamos en el menú *Archivo* la opción *Exporta – Copia la Vista Gráfica al Portapapeles*. Una vez situados en el lugar que queremos aparezca el mosaico, pulsamos el botón derecho del ratón y activamos la opción *Pegar*. Podemos hacer que el mosaico tenga otras dimensiones sin más que arrastrar con el cursor por las esquinas de la imagen que hemos pegado.

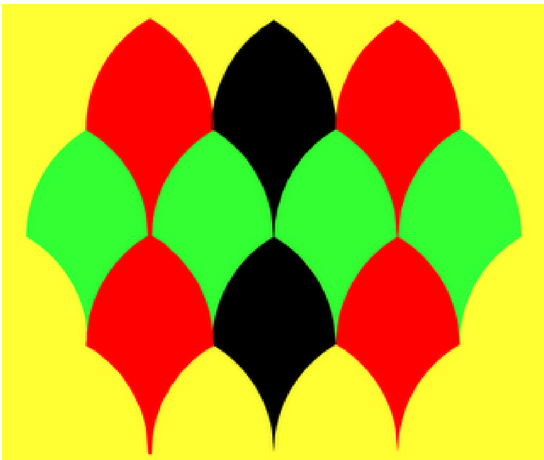


9) Geogebra no permite rellenar esta figura de forma automática como en el caso del Hueso, ya que no es una figura poligonal. El truco para poder realizar esta operación es colocar muchos puntos seguidos encima de la construcción inicial (primer pétalo) con la opción *Nuevo Punto* (mínimo 15 puntos en cada arco, aunque hay un límite a partir del cual el programa no nos permite colocar más) y cuando los tengamos todos unirlos con la herramienta *Polígono* hasta que aparezca una poligonal cerrada. Posteriormente seleccionamos el polígono y lo rellenamos de un color. Es posible colorear cada pétalo de un color diferente, teniendo en cuenta que podemos usar la herramienta *Copia Estilo Visual* para poder colorear automáticamente varios de ellos del mismo color. Este proceso se explicará con detalle en la ficha correspondiente de Geogebra.

¿Qué tipos de simetría presenta el Pétalo nazarí?

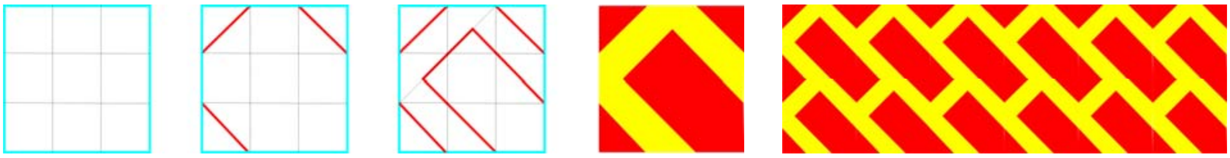
Los siguientes dibujos han sido realizados por alumnos del curso 4º ESO C del año académico 2009/2010 con el programa de matemáticas Geogebra.





Mosaicos generados por traslación

Partiendo de un cuadrado explica todos los movimientos hasta la formación completa de la siguiente tesela como se indica en el dibujo. ¿Qué tipos de simetría presenta?

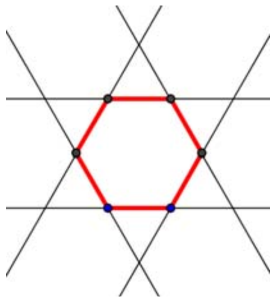


➢ *Construye tus propios mosaicos utilizando estas técnicas.*

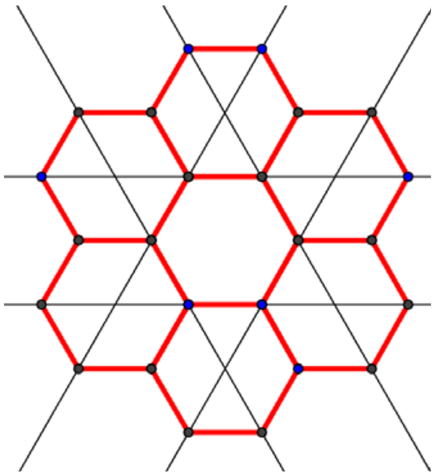
Mosaicos generados por Reflexión (el Hexágono)

Para la siguiente construcción utilizaremos el programa de matemáticas Geogebra. Vamos a construir un mosaico con la tesela Hexágono realizando *solamente simetrías en el plano*.

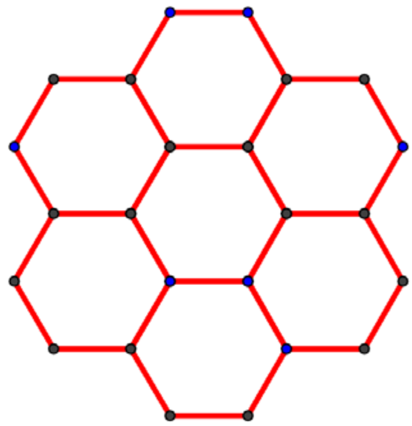
1) Con el cursor en el interior de la *Venta de Gráficos*, pulsamos el botón derecho del ratón y activamos la opción *Cuadrícula*, o directamente activamos la opción *Cuadrícula* en el menú *Vista*. En el menú *Opciones* activamos la opción *Atracción de Punto a Cuadrícula* y dentro ella la opción *Activa (Cuadrícula),* para que los puntos se queden fijos en los vértices de la cuadrícula y representamos dos puntos A y B.
2) Con la herramienta *Polígono Regular* dibujamos un hexágono de lado AB. Colocamos el cursor en su interior y con el botón derecho del ratón activamos la opción *Propiedades*. En la pestaña *Estilo* en la opción *Grosor de Trazo* ponemos 7 (o el grosor que nos parezca oportuno) y en la opción *Sombreado* ponemos 0. En la parte izquierda de la ventana colocamos el curso encima de la palabra *Punto* y en la pestaña *Básico* de la parte derecha de la ventana desactivamos *Muestra Rótulo*.
3) Con la herramienta *Recta que pasa por Dos Puntos* dibujamos las rectas que pasan por cada dos vértices consecutivos del hexágono (se pueden dibujar seguidas sin volver a pasar por el icono de la herramienta).



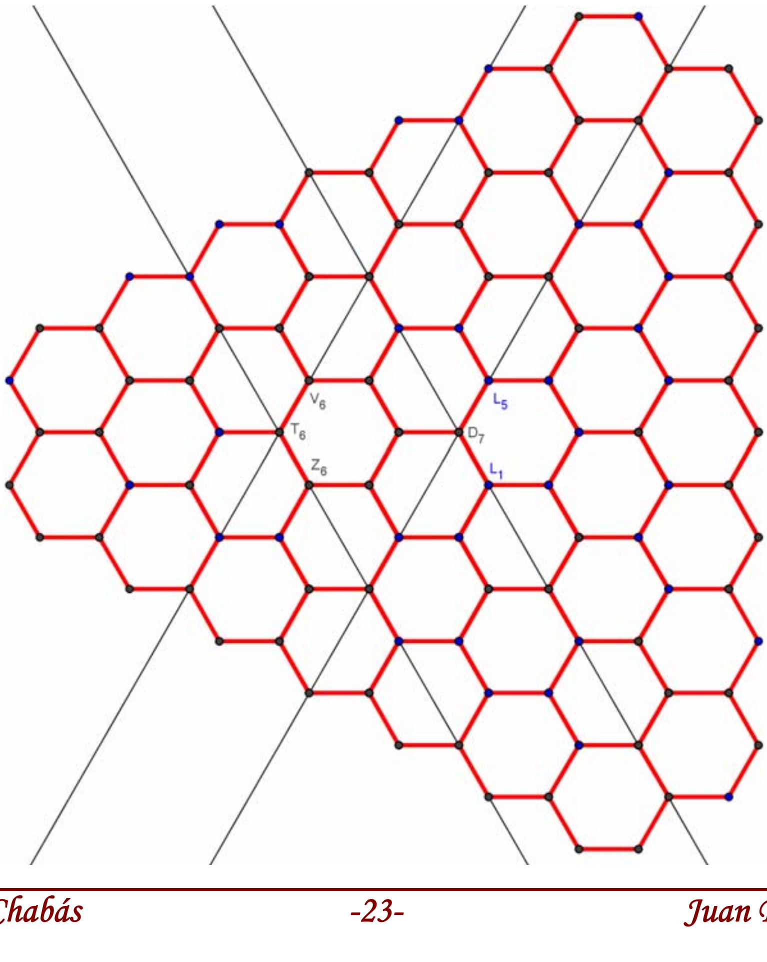
4) Pulsamos en el icono *Refleja Objeto en Recta* luego pulsamos en el interior del hexágono y finalmente vamos pulsando en cada una de las rectas que hemos dibujado. Se dibujarán 6 hexágonos simétricos respecto a las 6 rectas dibujadas. Si en alguno de los casos no se dibujara el hexágono, repetimos la operación pasando por el icono etc.



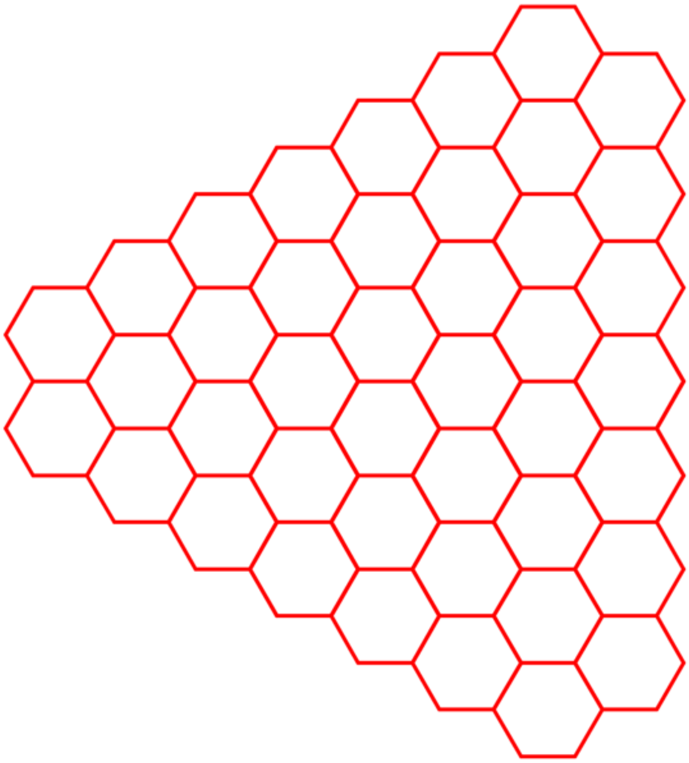
5) Ahora colocamos el cursor sobre cualquiera de las rectas que hemos dibujado, activamos con el botón derecho del ratón la opción *Propiedades* y dentro de la ventana que aparece colocamos el cursor en la parte izquierda encima de la palabra *Recta*, con lo que quedarán seleccionadas todas las rectas de la construcción. En la pestaña *Básico* que aparece a la derecha de la ventana desmarcamos la opción *Muestra Objeto*



6) Ahora dibujamos las rectas que pasan por los puntos V_6 y T_6 y por los puntos V_6 y Z_6. Pulsamos en el icono *Refleja Objeto en Recta* luego seleccionamos con el cursor toda la construcción anterior y pulsamos sobre cada una de las dos rectas. Si en algún caso la imagen no se refleja volvemos a repetir la operación. Una vez realizada la simetría y ante el cúmulo de rótulos que se superponen en los puntos, pulsamos con el botón derecho del ratón sobre uno de ellos y en *Propiedades* en la parte izquierda de la ventana colocamos el cursor encima de la palabra *Punto* y desactivamos en la pestaña *Básico* de la derecha de la ventana la opción *Muestra Rótulo*. En la nueva construcción que aparece, trazamos las nuevas rectas que pasan por los puntos L_5, D_7 y E_1, como se indica en el dibujo, y volvemos a realizar la simetría pero ahora con toda la construcción, etc. Podemos repetir el proceso cuantas veces queramos, escogiendo bien los ejes de simetría. Con la rueda del ratón podemos hacer zoom en la imagen para verla completa y con el primer icono de la parte superior derecha *Desplazar Vista Gráfica* podemos mover la imagen por toda la pantalla. Tenemos que ver la siguientes figura:

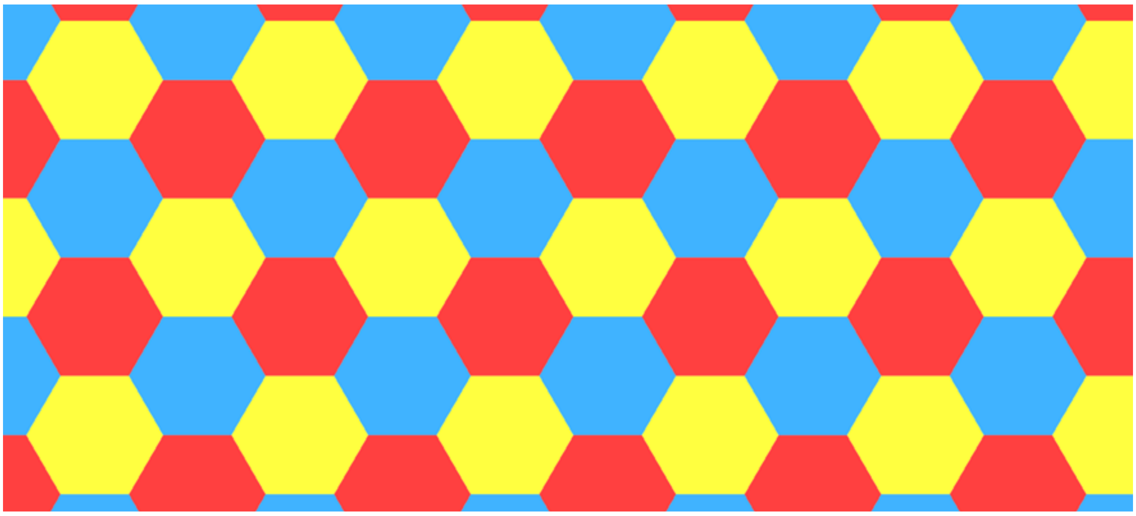


7) Ahora colocamos el cursor encima de cualquier punto, pulsamos el botón derecho del ratón y activamos la opción *Propiedades*. Nos colocamos en la parte izquierda de la ventana encima de *Punto* y en la pestaña *Básico* desactivamos *Muestra Objeto*. Repetimos la operación con la palabra *Recta* hasta que quede solamente el mosaico formado por los hexágonos.



8) Recuadramos toda la construcción, pulsamos con el cursor en cualquiera de los segmentos y activamos el botón derecho del ratón. En la opción *Propiedades* en la pestaña *Estilo* en *Grosor de Trazo* escribimos 7 y en la pestaña *Color* el rojo (255, 0, 0). Recuadramos con el cursor la parte que queramos mostrar y activamos en el menú *Archivo* la opción *Exporta – Copia la Vista Gráfica al Portapapeles*. Una vez situados en el lugar que queremos aparezca el mosaico, pulsamos el botón derecho del ratón y activamos la opción *Pegar*. Podemos hacer que el mosaico tenga otras dimensiones sin más que arrastrar con el cursor por las esquinas de la imagen que hemos pegado.

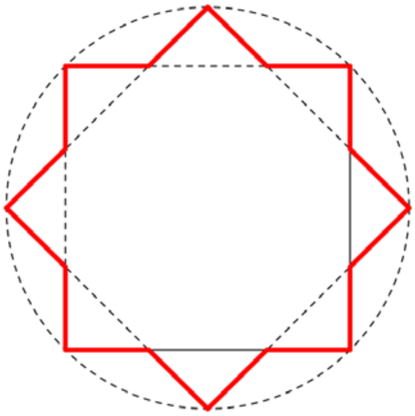
9) Una imagen posible es la siguiente, según el trozo que seleccionemos:



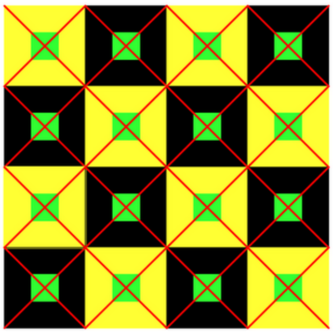
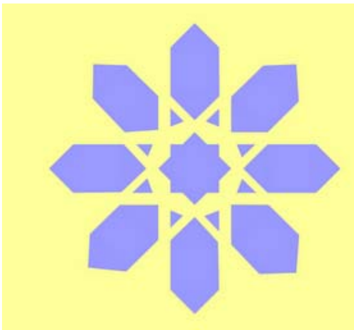
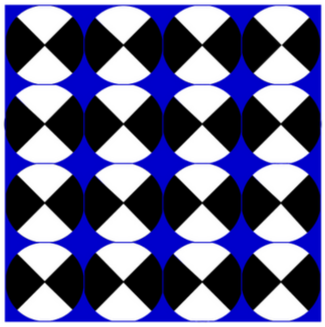
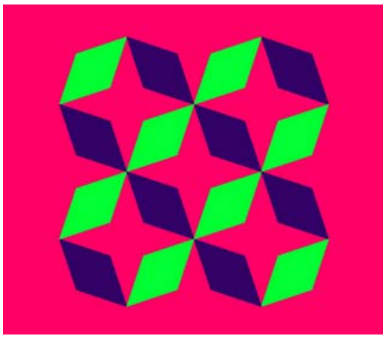
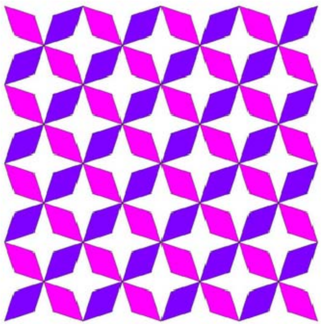
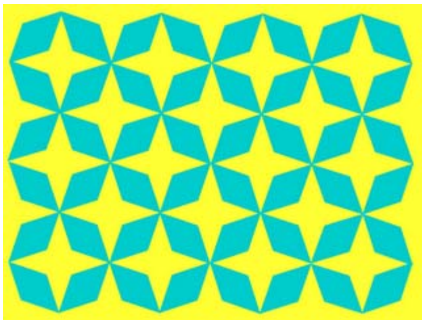
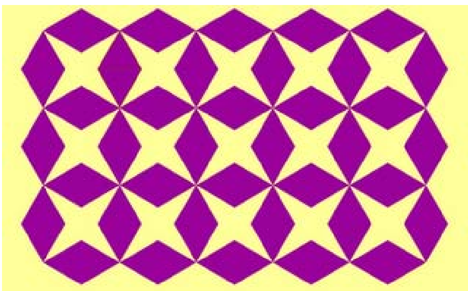
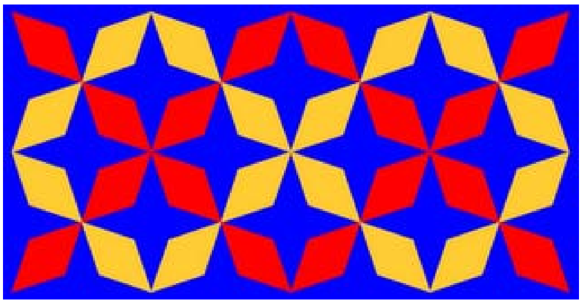
El sello de Salomón

Construye el sello de Salomón partiendo de una circunferencia y dos cuadrados inscritos en ella.

a) ¿Qué tipos de simetrías axial y central presenta? ¿Tesela el plano?
b) El sello de Salomón tesela el plano en combinación con dos polígonos regulares. Deduce razonadamente cuáles son y genera el mosaico correspondiente.

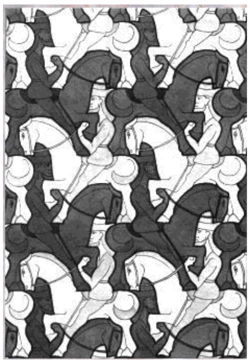


Mosaicos creados por alumnos de 4º ESO C del curso 2009/2010 con Geogebra

Teselaciones de M.C. Escher

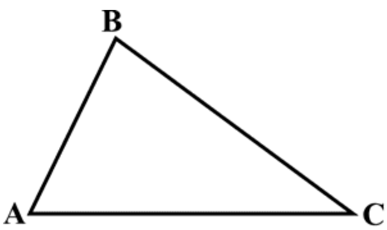
- Mauricius Cornelius Escher fue un pintor holandés que combinó en sus pinturas arte y geometría. Escher visitó la Alhambra en varias ocasiones en busca de inspiración y quedó sobrecogido por la belleza de este palacio árabe del siglo XIV y en particular por los mosaicos que decoraban sus paredes. A diferencia de los mosaicos de la Alhambra, Escher usa imágenes de seres vivos en los suyos y busca el contraste no solo en las imágenes sino también en los colores. Dedicó una buena parte de su carrera a dibujar sorprendentes figuras que encajaban perfectamente entre sí formando bellos mosaicos en los que aparecen lagartos, caballeros o pájaros cubriendo armoniosamente el plano. Estas decoraciones se realizaban partiendo de polígonos, en su mayoría regulares, que mediante determinadas transformaciones, se convertían en las figuras que posteriormente cubrían una superficie de forma regular y sin dejar huecos entre ellas. Aquí puedes ver tres ejemplos:

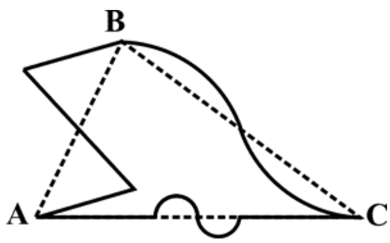


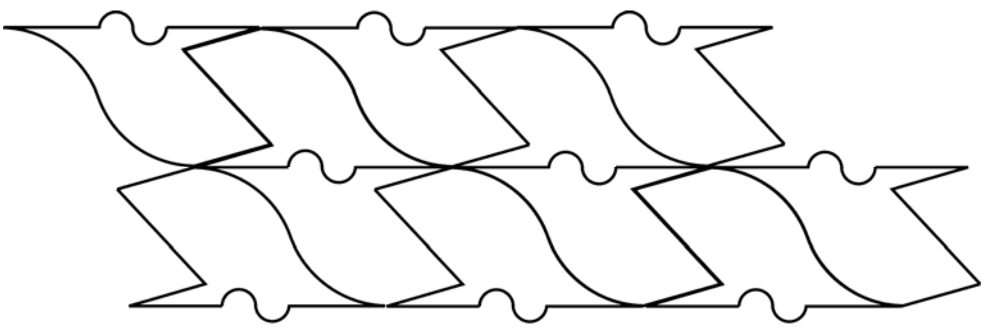
¿Cómo hacer una teselación de Escher?

Una de las posibles maneras de hacer una teselación de Escher es partir de un triángulo o cuadrilátero cualquiera. Se recorta un trozo de uno de los lados de tal manera que nunca sobrepase la mitad del lado y mediante un giro de 180º, con centro en la mitad del lado, se vuelve a colocar el trozo recortado en la nueva posición.

- Dibuja un triángulo cualquiera. Distorsiona cada lado del triángulo, de forma que siempre sea simétrico respecto de su punto medio. La figura que obtienes de este modo permite recubrir un plano.







Una de las técnicas que utilizaba para construir sus mosaicos consistía en realizar deformaciones en los lados de los polígonos que teselaban el plano y luego las trasladaba o rotaba.

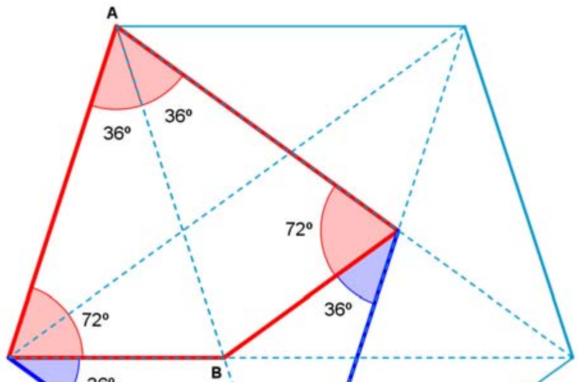
Teselaciones no periódicas. Los mosaicos de Penrose

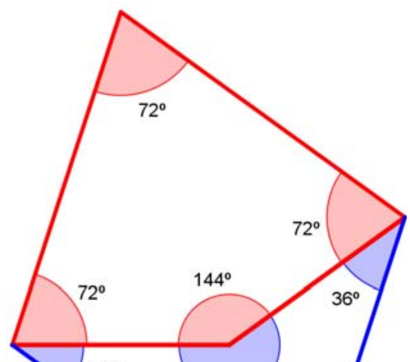
Cuando una teselación no tiene traslaciones que hagan que coincida consigo misma decimos que es no periódica o aperiódica.

Durante décadas se ha intentado averiguar cual era el número mínimo de teselas necesarias para formar una teselación no periódica. El más pequeño que se conoce lo describió Roger Penrose en 1974 y sólo contiene dos piezas: el cometa y la flecha cuyas dimensiones guardan la proporción áurea. Diseñó un mosaico formado con cuadriláteros cóncavos y convexos como éstos, pero para colocarlos imponía la condición de que dos cuadriláteros fronterizos sólo podían compartir un lado y no dos, es decir que el vértice cóncavo de una flecha no podía ser llenado con un cometa, pero sí por un par de cometas. Debido a esta circunstancia, en los mosaicos de Penrose se han dibujado dos arcos en el cometa y otros dos en la flecha para que cuando se coloquen las piezas tengan continuidad esas líneas.

- El ***cometa*** es un cuadrilátero cuyas cuatro esquinas tienen ángulos de 72º, 72º, 72º y 144º y puede ser bisectado a lo largo de su eje de simetría para formar un par de triángulos acutángulos. Se utiliza para su construcción el número de oro.
- La ***flecha*** es un cuadrilátero cóncavo que tiene 4 ángulos interiores que son de 36º, 72º, 36º y 216º. La flecha puede ser bisectada a lo largo de su eje de simetría para formar un par de triángulos obtusángulos. Se utiliza para su construcción el número de oro.

Estos dos cuadriláteros unidos forman un rombo que se obtiene de un pentágono regular.



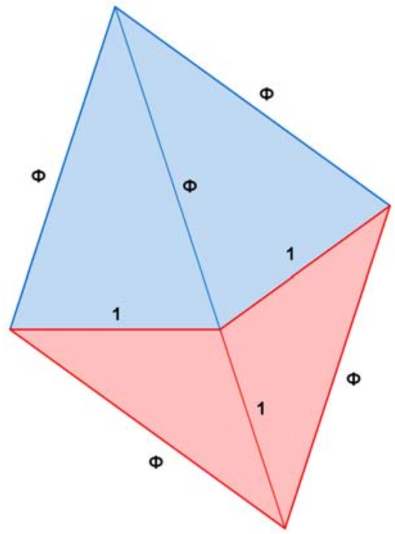


Sabemos que en el pentágono regular la relación $\frac{AB}{BC} = \Phi$ es el número de oro y se verifica en cualquiera de sus diagonales, lo que significa que el cociente entre el lado mayor del cometa y el lado menor es el número de oro.

El valor numérico del número de oro se obtiene al resolver la ecuación $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

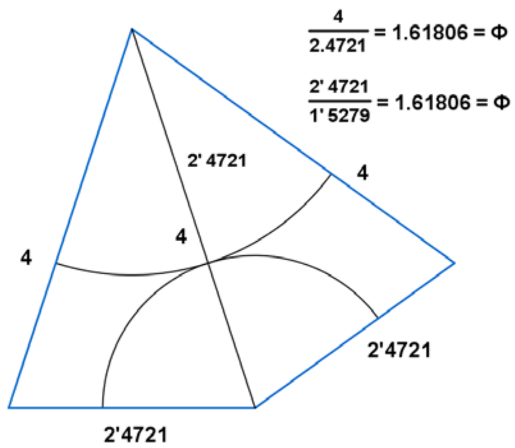
Por otra parte, $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \Phi^2 = \Phi + 1 \quad \rightarrow \quad \Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$

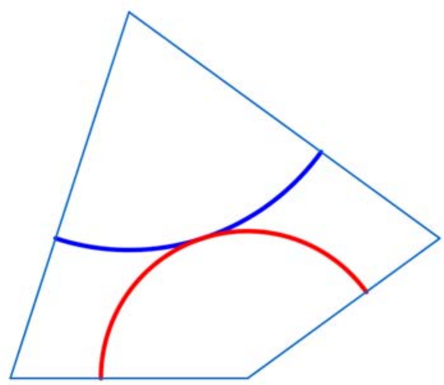


Dado que la cometa y la flecha componen juntas un rombo es evidente que con ellas se puede recubrir periódicamente el plano.

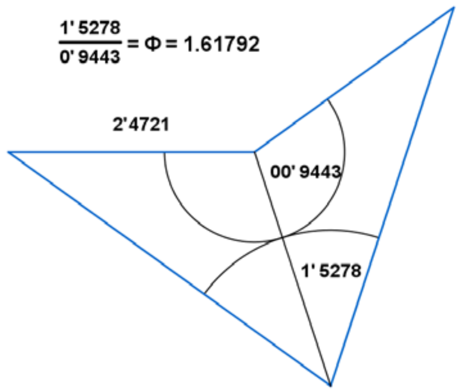
Para evitar esto y que el recubrimiento del plano no sea periódico, John Conway, que fue el que dio el nombre de cometa y flecha a dichas teselas, propuso dibujar dos arcos sobre cada pieza. Estos arcos se distinguirán o bien por el trazo o por tener colores distintos y son los que señalarán las combinaciones posibles: dos aristas sólo podrán entrar en contacto si los extremos de sus arcos coinciden. *Los radios que tenemos que usar para dibujar los dos arcos en cada pieza están en proporción áurea.*

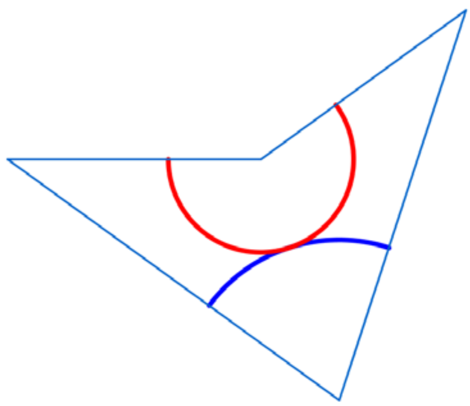
$$\frac{4}{x}=\frac{x}{4-x} \qquad x^2+4x-16=0 \qquad x=\frac{-4+\sqrt{16+64}}{2}=\frac{-4+\sqrt{82}}{2} \qquad x=2'4721$$





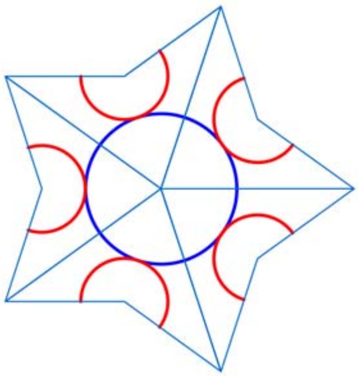
$$\frac{2'4721}{x}=\frac{x}{2'4721-x} \qquad x^2+2'4721x-6'1112=0 \qquad x=\frac{-2'4721+\sqrt{2'4721^2+24'4448}}{2} \qquad x=1'5278$$



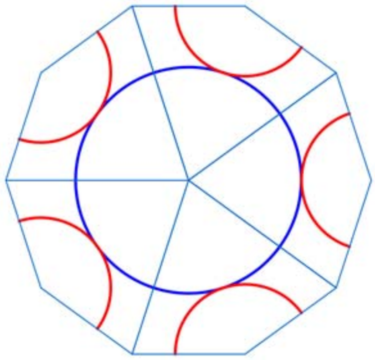


Podemos construir un teselado de Penrose a partir de las flechas y las cometas mediante la construcción de teselas alrededor de un vértice aislado y su consiguiente expansión radial. Se obtienen así 7 clases de distintas de teselaciones.

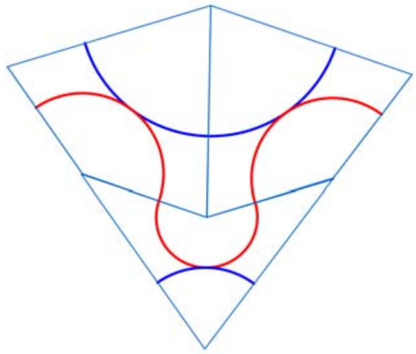
Estrella



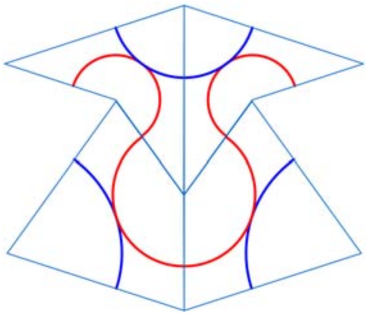
Sol



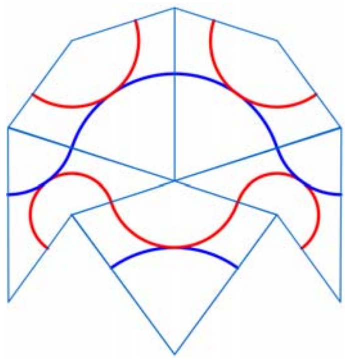
As



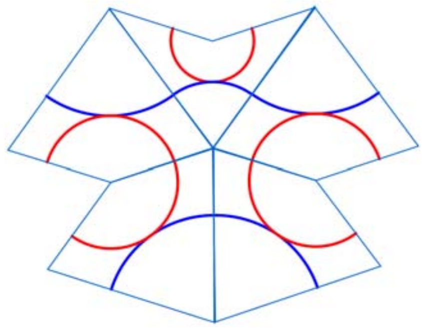
Dos



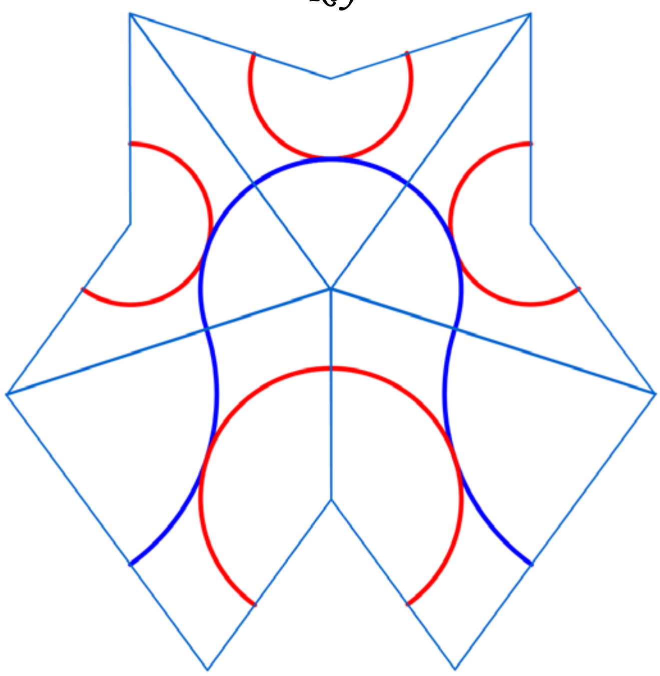
Sota



Reina

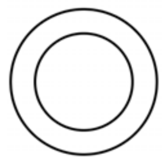


Rey

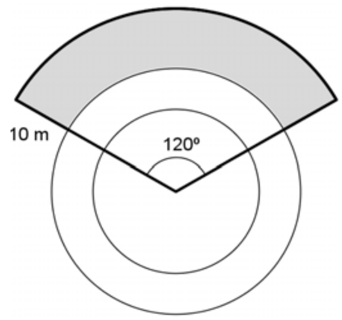


Problemas sobre Áreas

1) **Una plaza de toros tiene 10m de radio. Alrededor de esta se encuentra el callejón formando una corona circular de 2m de ancha. Se pide calcular el área de la plaza de toros así como del callejón.**



2) **La misma plaza tiene unas gradas que forman un sector de corona circular como indica la figura. Suponiendo que cada asiento ocupa 0,75m^2. ¿Cuántas personas caben en dicha plaza?**



3) **¿Cuánto mide el lado de un cuadrado que tiene un área de 225m^2?**

4) **Un rectángulo tiene un área de 143m^2. Sabemos que un lado mide 11m. ¿Cuánto mide el otro lado?**

5) **Un triángulo tiene un área de 400 cm^2. Si la altura de dicho triángulo es de 16cm. ¿Cuánto medirá la base?**

6) **Un hexágono regular tiene un área de 96cm^2. Calcula su perímetro sabiendo que la apotema mide 8cm.**

7) **Un pentágono regular tiene una superficie de 175cm^2.Si la apotema mide 5cm. ¿Cuánto mide un lado de dicho pentágono?**

8) **Calcula la diagonal de un cuadrado cuyo lado vale 64m.**

9) **Un trapecio tiene una altura de 4m, su base menor mide 6m y su área es de 36m^2. ¿Cuánto vale su base mayor?**

10) **Se desea embaldosar una sala rectangular de 12m de ancho y 6 de largo. Si el metro cuadrado de baldosas nos cuesta 12 €. ¿Cuánto valdrá embaldosar la sala?**

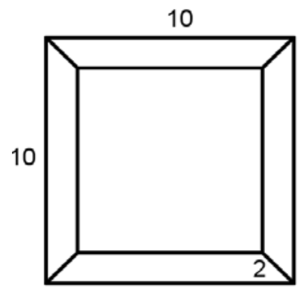
11) **Se desea embaldosar una sala rectangular de 9m de ancho por 14 de largo con baldosas de 40x30cm. ¿Cuántas baldosas se necesitan?**

12) **Queremos chapar el tablero de una mesa circular cuyo radio es de 90cm. Si el metro cuadrado de chapa vale 12 €. ¿Cuánto valdrá dicha chapa?**

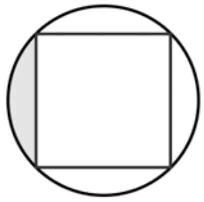
13) **Se desea construir un rombo que tenga una superficie de 98cm^2. Pero además se desea que la diagonal mayor sea el doble de la menor. ¿Cuánto deben medir las diagonales? ¿Y los lados de dicho rombo?**

14) **El suelo de un piso de 50x20m se quiere cubrir con baldosas cuadradas de 20cm de lado. ¿Cuántas baldosas se necesitan en total?**

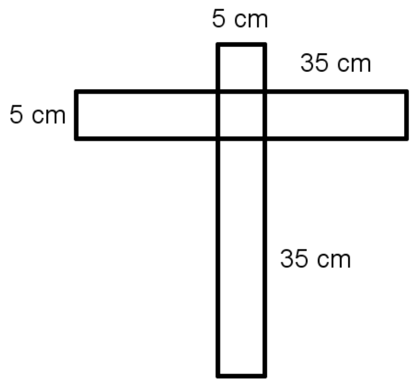
15) **Hallar el área del cuadrado interior de la siguiente figura.**



16) **Un cuadrado está inscrito en una circunferencia de radio 15cm como indica la siguiente figura.**
a) Calcula el área del cuadrado.
b) Calcula el área de la parte coloreada.



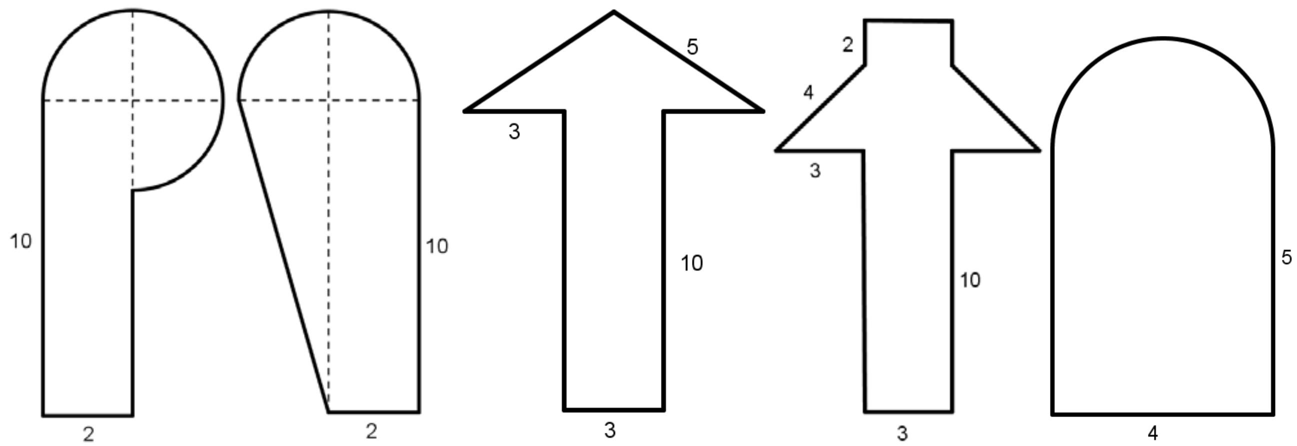
17) **Calcula el área de la siguiente figura:**



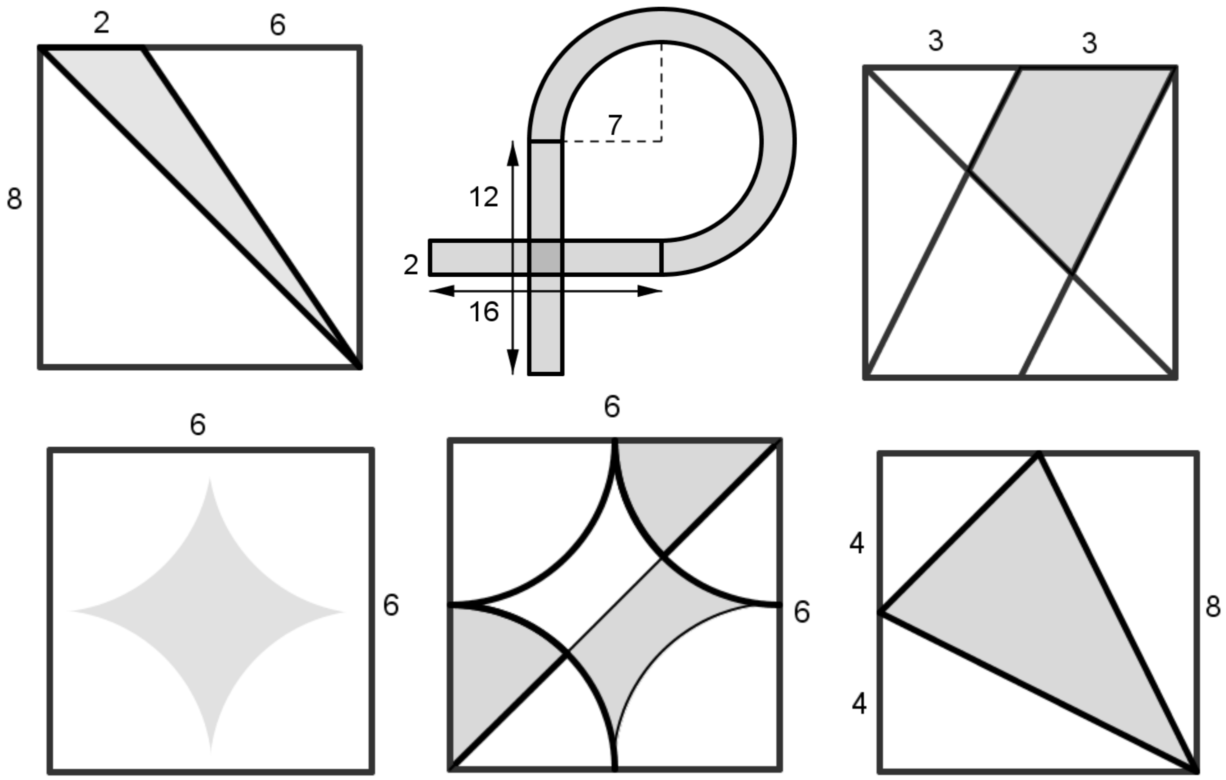
18) **La rueda de un coche tiene un diámetro exterior de 60cm. ¿Cuántas vueltas habrá dado la rueda durante un trayecto de 20km?**

19) **Una pared cuadrada está cubierta por baldosas cuadradas. Si sobre las dos diagonales hay un total de 65 baldosas. ¿Cuántas baldosas cubren toda la pared?**

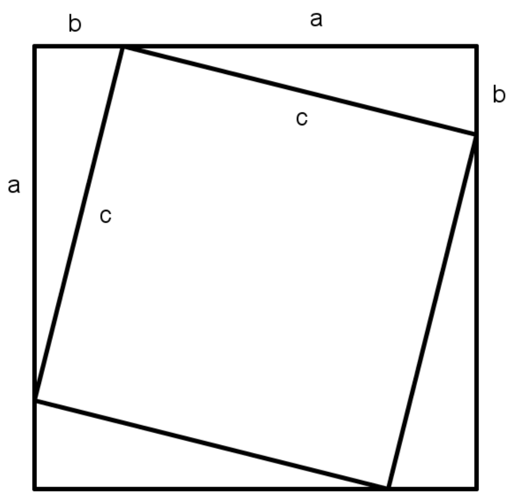
20) **Calcula el perímetro y el área de las siguientes figuras:**



21) **Halla el área de la zona coloreada.**



22) **En este dibujo encontrarás una demostración china del Teorema de Pitágoras. Para encontrarla procederás como sigue:**



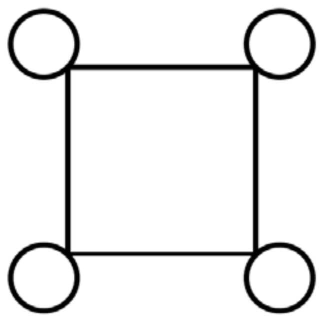
a) Halla el área del cuadrado exterior. Recuerda que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

b) Halla el área de todas las figuras que forman el cuadrado anterior. Es decir, del cuadrado interior y de los cuatro triángulos.

c) Plantea una ecuación igualando el área del cuadrado grande a la suma del área del cuadrado pequeño y las áreas de los cuatro triángulos.

d) Simplifica la ecuación e interpreta el resultado.

23) **El señor Pancracio posee una finca de campo con una piscina cuadrada con un árbol en cada esquina como indica la figura. Ahora desea construir en el mismo lugar una piscina también cuadrada pero con el doble superficie pero para ello no puede arrancar ningún árbol pues su mujer lo amenaza con el divorcio. Ayuda al pobre Pancracio.**



Soluciones

1) $A_{PT} = 314'15\,m^2 \quad A_{call} = 138'23\,m^2$ 2) 475 3) 15 m 4) 13 m 5) 50 cm 6) 24 cm

7) 14 cm 8) 90'50 cm 9) 12 m 10) 864 € 11) 1050 12) 30 €

13) $d = 9'89\,cm \quad D = 19'78\,cm \quad l = 11'05\,cm$ 14) 25000 15) $51'43\,u^2$ 16) a) $A = 450\,cm^2$

b) $A = 64'21\,cm^2$ 17) $A = 325\,cm^2$ 18) 10610'32

19) La pared tiene de lado x, y en cada diagonal hay 33 baldosas de lado a y diagonal l, por tanto se verifica:

$$l = \sqrt{2a^2} \qquad (33l)^2 = 2x^2 \qquad x^2 = \frac{1089l^2}{2} \qquad \frac{\frac{1089 \cdot 2a^2}{2}}{a^2} = 1089 \text{ baldosas}$$

20) a) $P = 29'42\,u.l. \quad A = 29'42\,u^2$ b) $P = 28'48\,u.l. \quad A = 36'28\,u^2$ c) $P = 39\,u.l. \quad A = 39'80\,u^2$

d) $P = 44\,u.l. \quad A = 51'87\,u^2$ e) $P = 20'28\,u.l. \quad A = 26'28\,u^2$

21) a) $A = 8u^2$ b) $A = 127'39\,u^2$ c) $A = 9\,u^2$ d) $A = 7'72\,u^2$ e) $A = 10'93\,u^2$ f) $A = 24\,u^2$

22) a) $A = (a+b)^2$ b) $\frac{ba}{2}$; c^2 ; $(a+b)^2$ c) $(a+b)^2 = 2ab + c^2$ d) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

23) En la nueva piscina cuadrada, los árboles estarán situados en la mitad de cada lado.