Funciones

Función Lineal. Función Afín
La Recta. Representación gráfica
Resolución gráfica de un sistema
Parábolas. Representación gráfica

Variables

1) Si flexionamos un cuadrado articulado, ¿qué es lo que cambia? ¿qué se mantiene?
   ¿Qué valores puede tomar la variable altura?
   ¿Cómo podemos expresar estos valores?
   ¿Qué puede decirse del área según varía la altura?
   ¿Puede expresarse la dependencia entre el área y la altura mediante una fórmula?
   ¿Qué valores puede tomar el ángulo?

2) ¿Qué variables aparecen cuando se llena de agua una piscina? Expresa la dependencia entre esas variables mediante una fórmula.

Tablas, gráficas y fórmulas

1) Hemos tomado las distancias recorridas por un tren que circula a velocidad constante y se han obtenido los siguientes valores:

t	1	2	3	4	5	6	7	8
d	2	4	6	8	10	12	14	16

a) Representar gráficamente los puntos de la tabla anterior.
b) Cuáles de los siguientes puntos corresponden al movimiento del tren? $(9,18);(2'5,5);$ $(11,23);(13,28);(15'6,31'2)$.
c) Busca la relación entre variables.

2) Dadas las siguientes tablas, representar las parejas de puntos sobre unos ejes de coordenadas. La variable superior en el eje horizontal (*eje de abscisas*) y la inferior en el eje vertical (*eje de ordenadas*) y encontrar la fórmula que relaciona las dos variables.

a)

t	1	4	6	10	15
e	3	12	18	30	45

b)

x	1	2	3	7
y	5	7	9	17

c)

m	1	2	3	4	9
c	4	9	14	19	44

Ecuación de una recta

La ecuación de una recta viene dada por la expresión: $\mathbf{y = a\,x + b}$

donde *"**a**" es la pendiente de la recta* (su valor nos indica la inclinación de la recta respecto al eje horizontal o eje OX) y *"**b**" es la ordenada en el origen* (su valor nos indica el punto donde la recta corta al eje vertical o eje OY).

- Si $a \neq 0$ y $b = 0$ la expresión $y = ax$ se denomina *función lineal* o *función de proporcionalidad directa*, es decir, una función de proporcionalidad directa es aquella en la que el valor de "y" es igual a un número real multiplicado por "x".

- Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$ la expresión $y = ax + b$ se denomina *función afín*.

- Si $a = 0$ y $b \neq 0$ la expresión $y = b$ se denomina *función constante*.

En general a una expresión de la forma $y = a\,x + b$ *la denominaremos función lineal*.

Ejemplo

De una función que sabemos que es afín sólo conocemos la tabla de valores que aparece a la derecha. Encuentra la expresión de dicha función y represéntala.

x	**1**	**4**	**10**
y	**5'5**	**13**	**28**

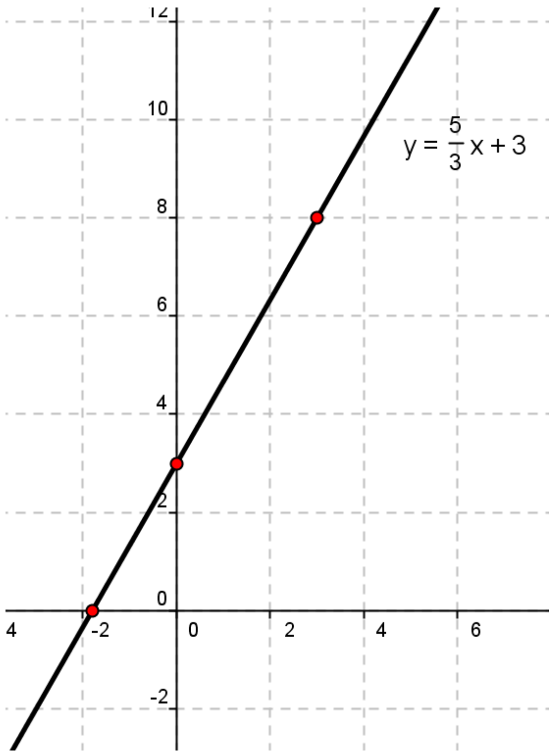
Solución

Por ser una función afín, cada punto de la recta debe de verificar la ecuación $y = ax + b$.

$$\left.\begin{array}{r} 5'5 = a \cdot 1 + b \\ 13 = a \cdot 4 + b \end{array}\right\} \to \begin{cases} a = \dfrac{5}{2} \\ b = 3 \end{cases} \qquad y = \frac{5}{3}x + 3$$

Para *representar gráficamente* una recta basta con obtener dos puntos de ella. Por seguridad, es conveniente calcular un tercer punto para estar seguros de que los tres puntos están alineados. La forma de obtener las coordenadas de los puntos es hacer una tabla de valores con dos columnas: en la columna de la izquierda se coloca en la parte superior la variable independiente y en la columna de la derecha se coloca la variable dependiente. Podemos dar a la variable independiente cualquier valor, pero es conveniente obtener los puntos donde la recta corta a los ejes de coordenadas. Donde corta al eje de abscisas hacemos $y = 0$ y obtenemos el correspondiente valor de "x", y donde corta al eje de ordenadas hacemos $x = 0$ y obtenemos el correspondiente valor de y.

x	y
0	3
$-\dfrac{9}{5}$	0
3	8



Ejemplo

En un experimento de física se obtiene la tabla adjunta, donde el espacio recorrido por un objeto se expresa en metros el tiempo que tarda en recorrerlo se expresa en segundos. ¿Es una función afín?

t	**0'1**	**0'7**	**1'2**
e	**0'05**	**2'45**	**7'2**

Solución

Una manera de comprobar si es una función afín es verificar que los segmentos que unen dos puntos consecutivos tienen la misma pendiente.

$$\left.\begin{matrix}(0'1,0'05)\\(0'7,2'45)\end{matrix}\right\} \quad \frac{2'45-0'05}{0'7-0'1}=\frac{2'4}{0'6}=4 \qquad \left.\begin{matrix}(0'7,2'45)\\(1'2,7'2)\end{matrix}\right\} \quad \frac{7'2-2'45}{1'2-0'7}=\frac{4'75}{0'5}=9'5$$

Como $4 \neq 9'5 \quad \Rightarrow \quad$ no es una función afín

Otra manera es comprobar que cada punto de la recta verifica la ecuación $e = at + b$.

$$\left.\begin{matrix}0'05 = 0'1\cdot a + b\\2'45 = 0'7\,a + b\end{matrix}\right\} \quad \rightarrow \quad \begin{cases}a = 4\\ b = -\dfrac{7}{20}\end{cases} \qquad e = 4t - \frac{7}{20}$$

Si el tercer punto está alineado con los anteriores debe verificar esta ecuación.

$$7'2 \neq 4\cdot 1'2 - \frac{7}{20} \qquad 7'2 \neq 4'45 \quad \Rightarrow \quad \text{No es una función afín}$$

Ejemplo **Una receta para hacer helados recomienda poner 10 gramos de vainilla por cada 200 cm^3 de leche. Encuentra la relación entre la cantidad de leche y de vainilla y representa la función.**

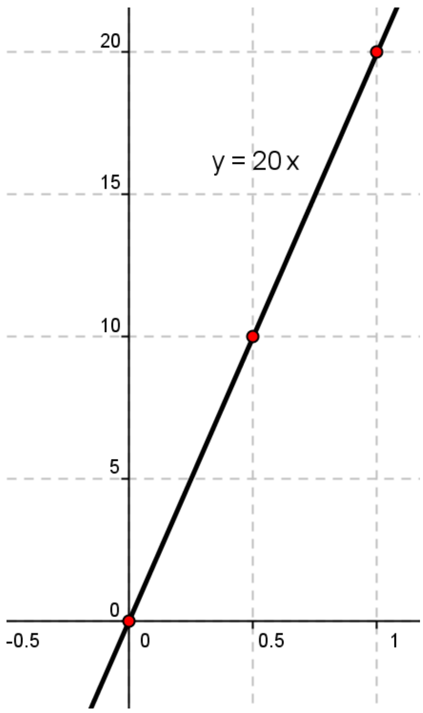
Solución

Si llamamos "y" a la cantidad de leche y "x" a la cantidad de vainilla la ecuación es de la forma $y = ax$

$$200 = 10\cdot a \qquad a = 20$$

$$y = 20x$$

x	y
0	0
1	20
0'5	10



Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

***Primer método**: Calculando directamente la pendiente*

Dadas las coordenadas de dos puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1), la ecuación de la recta que pasa por ellos viene dada por la expresión:

$$\mathbf{y - y_0 = m(x - x_0)} \qquad \text{ó} \qquad \mathbf{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

donde “m” representa la pendiente de la recta y cuyo valor es:

$$\mathbf{m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}} \qquad \text{ó} \qquad \mathbf{m = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}}$$

Ejemplo: Si los puntos son $(6,4)$ y $(10,12)$ tenemos:

$$(x_0, y_0) \to (6,4) \qquad (x_1, y_1) \to (10,12)$$

La pendiente de esta recta es:

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{12-4}{10-6} = \frac{8}{4} = 2 \qquad \text{o} \qquad m = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} = \frac{4-12}{6-10} = \frac{-8}{-4} = 2$$

La ecuación de la recta es:

$$y - 4 = 2(x-6) \;\to\; y - 4 = 2x - 12 \;\to\; y = 2x - 8$$

$$y - 12 = 2(x-10) \;\to\; y - 12 = 2x - 20 \;\to\; y = 2x - 8$$

***Segundo método**: Resolviendo un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas*

Cada pareja de puntos debe verificar la ecuación de la recta, es decir $y = a\,x + b$.

Ejemplo: En el caso del punto $(6,4)$ quiere decir que si en la ecuación de la recta sustituimos la “x” por 6 entonces la “y” vale 4 y para el punto $(10,12)$ quiere decir que si en la ecuación de la recta sustituimos la “x” por 10 entonces la “y” vale 12.

$$(6,4) \;\to\; 4 = 6a + b \qquad (10,12) \;\to\; 12 = 10a + b$$

Resolvemos el sistema formado por estas dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 4 = 6a + b \\ 12 = 10a + b \end{array}\right\} \;\to\; \left\{\begin{array}{l} b = 4 - 6a \\ b = 12 - 10a \end{array}\right. \;\to\; 4 - 6a = 12 - 10a \;\to\; 10a - 6a = 12 - 4$$

$$4a = 8 \;\to\; a = 2 \;\Rightarrow\; b = 4 - 6a = 4 - 6\cdot 2 = -8$$

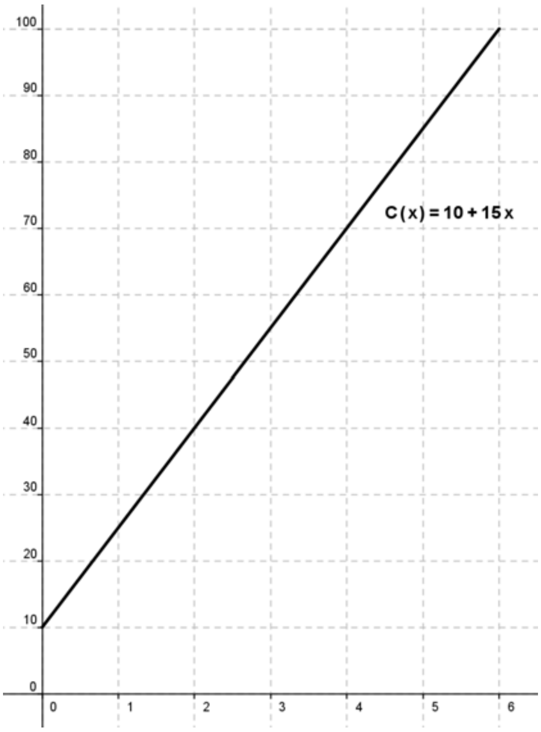
Le ecuación de la recta es pues: $y = 2x - 8$

Ejemplo **En una academia cobran, por las clases de inglés, una cantidad fija de 10 € en concepto de matrícula más una cuota de 15 € mensuales.**
Halla la expresión analítica que relaciona el número de meses con el coste total y representa gráficamente la función obtenida.

Solución

Es una función afín $C(x) = 10 + 15x$

Es importante hacer notar, que el dominio de esta función está restringido a los valores positivos de la variable independiente x (tiempo).



Ejemplo **En un recibo de la luz aparece la siguiente información: consumo 1400 kw/h y precio del kw/h 0’2 €.**

a) ¿Cuánto cobrarán por la energía consumida? Escribe la relación entre el consumo y el coste y represéntala gráficamente.

b) Si además nos cobran al mes 20 € por el alquiler del equipo, ¿cómo queda la función que relaciona el consumo y el coste? Represéntala en los mismos ejes que la anterior.

c) ¿Qué transformación sufre el precio si le añadimos el 16 % de IVA? Escribe la función correspondiente y represéntala junto a las otras dos en los mismos ejes.

Solución

a) $1400 \dfrac{\text{kw}}{\text{h}} \cdot 0'2 \dfrac{€}{\text{kw}/\text{h}} = 280\,€$

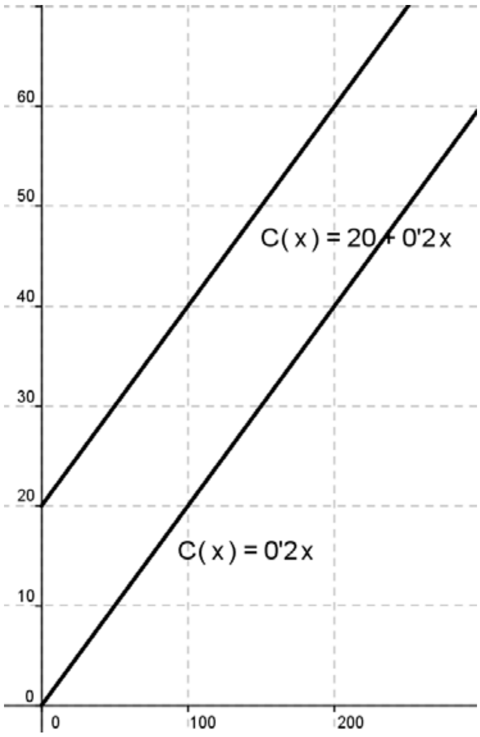
Es una función lineal. Si “x” es el consumo y C(x) es el coste en función del consumo

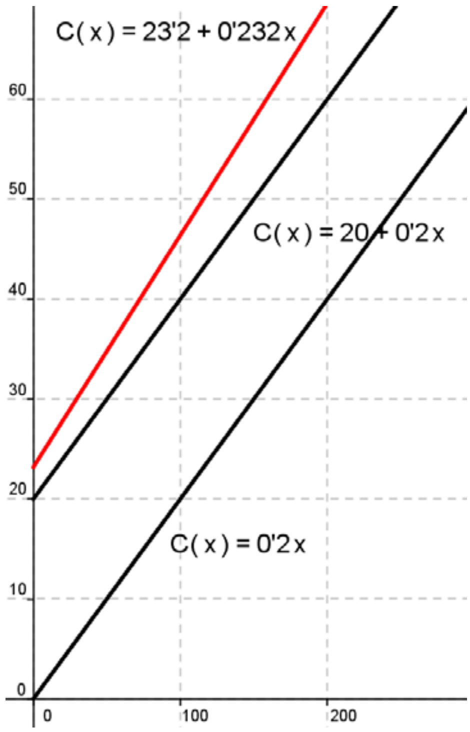
$$C(x) = 0'2\,x$$

b) $C(x) = 20 + 0'2\,x$

c) $C(x) = 1'16\,(20 + 0'2\,x)$

$C(x) = 23'2 + 0'232\,x$





Ejemplo **Representa las rectas siguientes mediante sus cortes con los ejes:**

a) $\mathbf{y = 3x + 6}$ **b)** $\mathbf{L = 5t - 3}$ **c)** $\mathbf{y = \frac{3}{2}x - 1}$ **d)** $\mathbf{y = \frac{-x+3}{5}}$ **e)** $\mathbf{e = -\frac{1}{2}t - 3}$

Soluciones

a) Cortes con el eje de abscisas $y = 0 \Rightarrow x = -2 \quad (-2, 0)$

Corte con el eje de ordenadas $x = 0 \Rightarrow y = 6 \quad (0, 6)$

b) Cortes con el eje de abscisas $L = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{5} = 0'6 \quad (0'6, 0)$

Corte con el eje de ordenadas $t = 0 \Rightarrow L = -3 \quad (0, -3)$

c) Cortes con el eje de abscisas $y = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \quad \left(\frac{2}{3}, 0\right)$

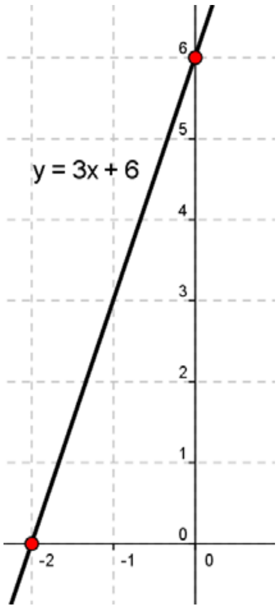
Corte con el eje de ordenadas $x = 0 \Rightarrow y = -1 \quad (0, -1)$

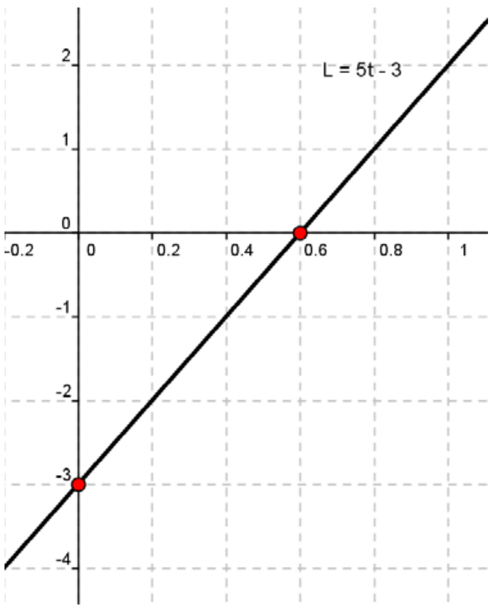
d) Cortes con el eje de abscisas $y = 0 \Rightarrow x = 3 \quad (3, 0)$

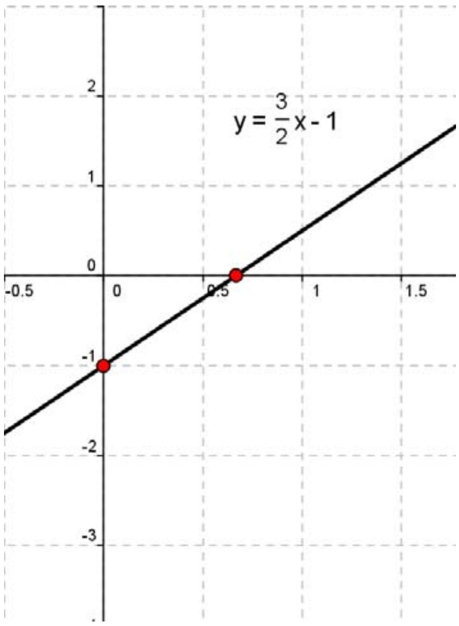
Corte con el eje de ordenadas $x = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{5} = 0'6 \quad (0, 0'6)$

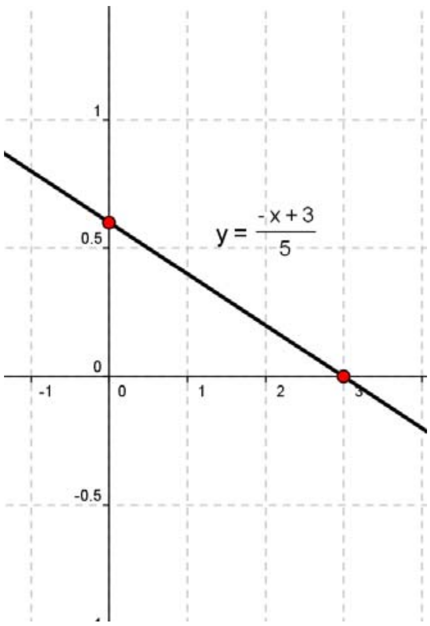
e) Cortes con el eje de abscisas $e = 0 \Rightarrow t = -6 \quad (-6, 0)$

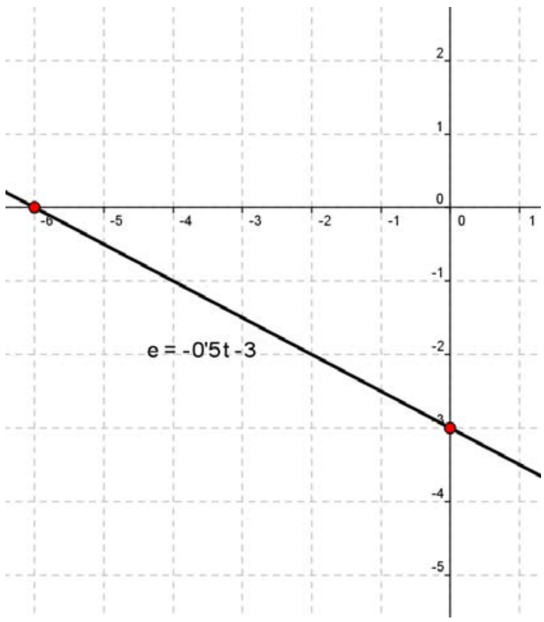
Corte con el eje de ordenadas $t = 0 \Rightarrow e = -3 \quad (0, -3)$


y = 3x + 6


L = 5t - 3


$y = \frac{3}{2}x - 1$


$y = \frac{-x+3}{5}$


e = -0'5t -3

Problemas propuestos

1) **El crecimiento de un feto de más de 12 semanas de gestación se calcula mediante la fórmula $L = 1'53\,t - 6'7$, donde L es la longitud (en cm) y t es el tiempo (en semanas). Calcula la longitud de un feto de 14 semanas.**

2) **Se puede calcular el peso esperado W (en toneladas) de una ballena jorobada a partir de su longitud L (en metros), mediante la fórmula $W = -92'8 + 13'5\,L$.**
   a) Calcula el peso de un ejemplar de 8 metros de largo.
   b) Si una ballena pesa 20 Tm. calcula su longitud.
   c) Representa gráficamente el peso en función de la longitud.

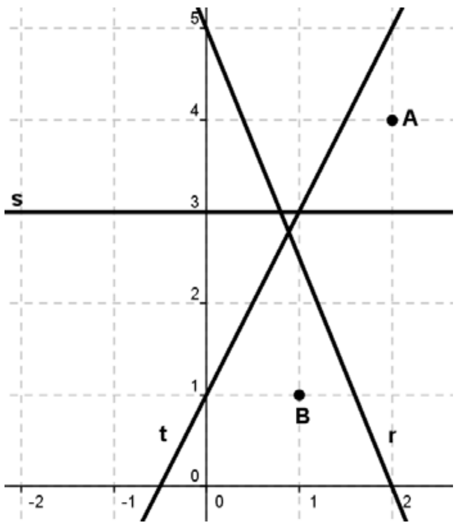
3) **Un bebé pesa al nacer 3 kg y medio, y tres años después alcanza 18 Kg. Suponemos que el peso P en la infancia está relacionado linealmente con la edad t.**
   a) Expresa P en términos de t.
   b) Calcula cuanto pesaría a los 2 años y medio.
   c) Representa gráficamente el peso en función de la edad.

4) **Un joven recibe, por parte de un familiar, un préstamo de 8250 € sin intereses para comprarse un coche. Deberá pagar 125 € al mes hasta saldar la deuda.**
   a) Representa una gráfica que muestre la relación entre la cantidad a pagar P (en euros) y el tiempo t (en meses)
   b) Encuentra un expresión que dé dicha cantidad a pagar P en términos de t
   c) ¿Después de cuántos meses deberá 5000 €?

5) **En su taxi Juan cobra las siguientes tarifas: 50 cts. por el simple hecho de subirse al taxi y 40 cts. por Km. recorrido. Obtener el precio P del viaje en función del número x de kilómetros recorridos y representar la función gráficamente.**

6) **La pendiente de una recta es 3 y su ordenada en el origen es 1. Represéntala gráficamente y escribe su ecuación.**

7)
   a) Calcula las pendientes de las rectas r, s y t de la figura.
   b) Calcula los puntos de corte con los ejes de cada una de ellas.
   c) Escribe las ecuaciones de cada una de estas rectas.
   d) Calcula la ecuación de la recta que pasa por los punto A y B.



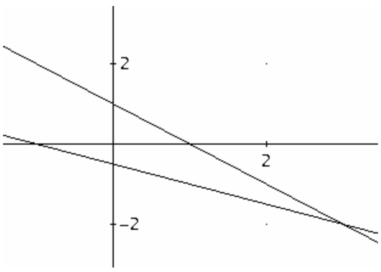
Resolución gráfica de un sistema de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas

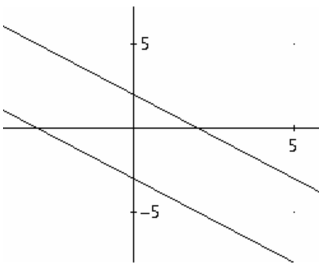
Sea un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas $\left.\begin{array}{r} Ax+By=C \\ A'x+B'y=C' \end{array}\right\}$ cuya solución la podemos obtener por cualquiera de los tres métodos: *sustitución, reducción* e *igualación*.

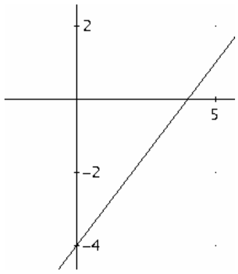
- Si $\dfrac{A}{A'} \neq \dfrac{B}{B'}$ diremos que el sistema es *compatible determinado* y por tanto tiene una única solución. *Gráficamente el sistema representa dos rectas que se cortan un punto cuyas coordenadas corresponden con la solución del sistema de ecuaciones*.
- Si $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} \neq \dfrac{C}{C'}$ diremos que el sistema es *incompatible* y por tanto no tiene solución. *Gráficamente el sistema representa dos rectas paralelas*.
- Si $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'}$ diremos que el sistema es *compatible indeterminado* y por tanto tiene infinitas soluciones. *Gráficamente el sistema representa dos rectas que coinciden*.

Ejemplo **Los gráficos a), b) y c) son la representación gráfica de los sistemas S, S' y S''. Indica qué gráfico corresponde a cada sistema y describe cada uno de los sistemas según todo lo anterior:**

$$\mathbf{S:}\begin{cases} x+y=1 \\ x+2y=-1 \end{cases} \qquad \mathbf{S':}\begin{cases} x+y=2 \\ x+y=-3 \end{cases} \qquad \mathbf{S'':}\begin{cases} 2x-2y=8 \\ x-y=4 \end{cases}$$







Ejemplo **¿De cuáles de estos sistemas es solución el par $x=1, y=-3$? Razónalo.**

$$\begin{cases} x+y=-2 \\ x-y=-4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x+y=6 \\ x-y=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-y=5 \\ 3x-2y=9 \end{cases}$$

Solución

$$\begin{cases} 1-3=-2 \\ 1-(-3)=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3\cdot 1-3=0 \\ 1-(-3)=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\cdot 1-(-3)=5 \\ 3\cdot 1-2(-3)=9 \end{cases}$$

Del tercero.

Ejemplo **Los lados de un triángulo están sobre las rectas determinadas por las ecuaciones:**

$$\mathbf{3x+y=9 \qquad 2x+3y=-1 \qquad x-2y=-4}$$

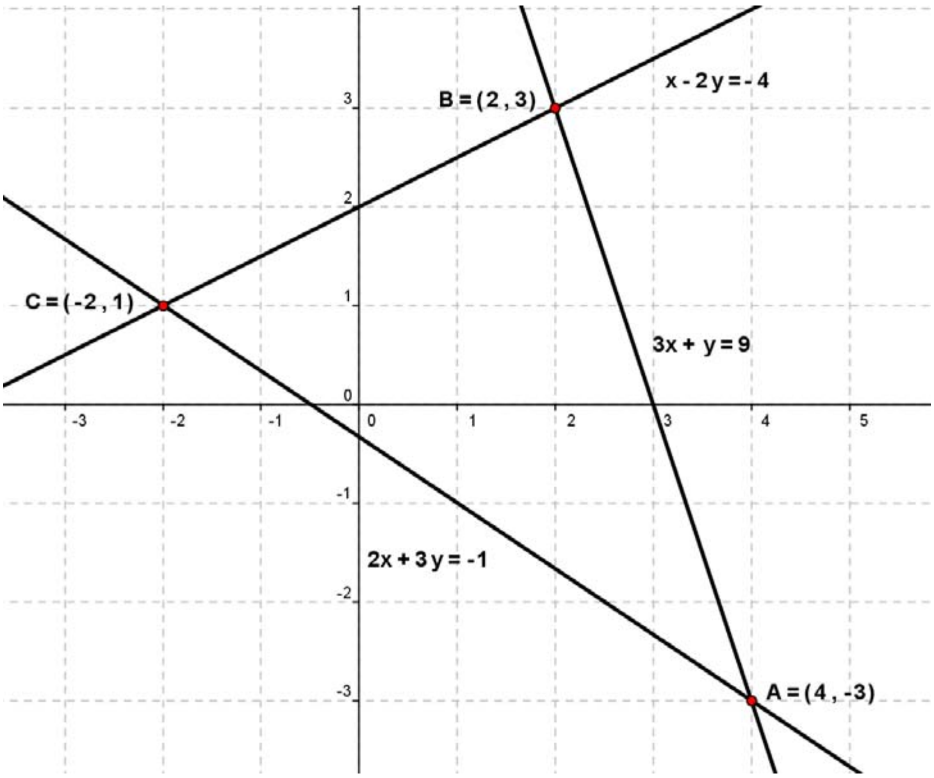
¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del triángulo? Haz una representación gráfica del problema.

<u>*Solución*</u>

Las coordenadas de los vértices corresponden a los puntos de corte de las rectas y estos se obtienen resolviendo los sistemas de ecuaciones.

$$\left.\begin{aligned}3x+y&=9\\2x+3y&=-1\end{aligned}\right\} \Rightarrow A(4,-3) \qquad \left.\begin{aligned}3x+y&=9\\x-2y&=-4\end{aligned}\right\} \Rightarrow B(2,3)$$

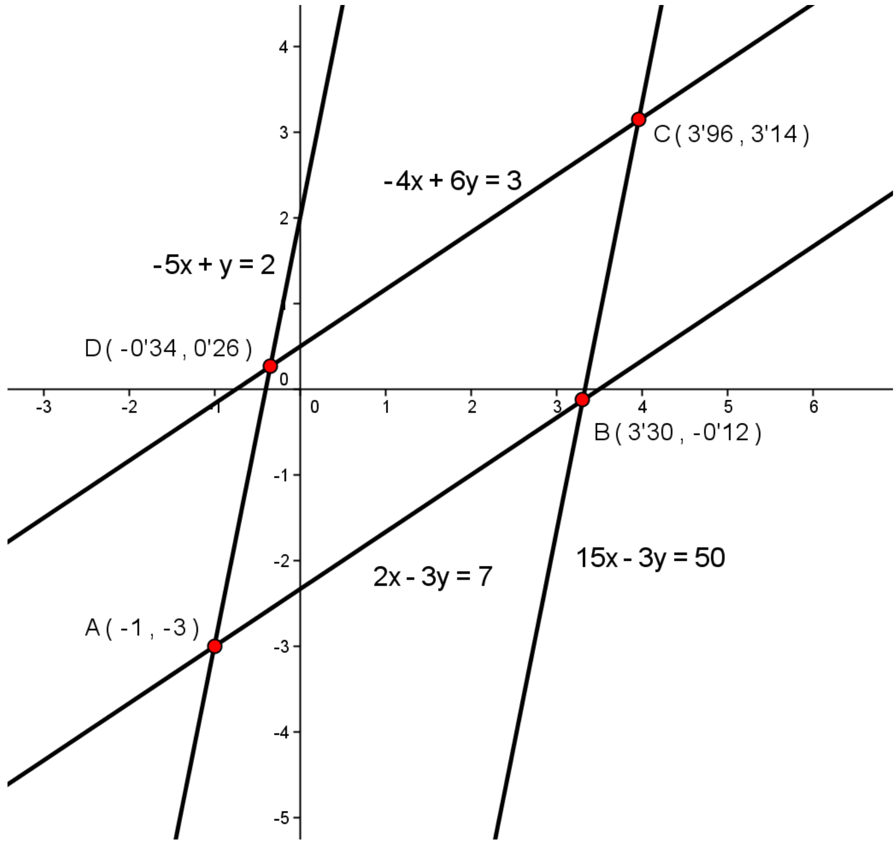
$$\left.\begin{aligned}2x+3y&=-1\\x-2y&=-4\end{aligned}\right\} \Rightarrow C(-2,1)$$



Ejemplo **Los lados de un paralelogramo están sobre las rectas determinadas por las ecuaciones $2x-3y=7$, $-4x+6y=3$, $-5x+y=2$ y $15x-3y=50$. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del paralelogramo? Haz una representación gráfica del problema.**

<u>*Solución*</u>

Al ser un paralelogramo primero hacemos la representación gráfica para ver cuáles son las rectas cuyas intersecciones determinan los vértices del paralelogramo.



$$\left.\begin{array}{r}-5x+y=2\\ 2x-3y=7\end{array}\right\} \Rightarrow A(-1,-3) \qquad \left.\begin{array}{r}15x-3y=50\\ 2x-3y=7\end{array}\right\} \Rightarrow B(3'3,-0'12)$$

$$\left.\begin{array}{r}15x-3y=50\\ -4x+6y=3\end{array}\right\} \Rightarrow C(3'96,3'14) \qquad \left.\begin{array}{r}-5x+y=2\\ -4x+6y=3\end{array}\right\} \Rightarrow D(-0'34,0'26)$$

Problemas propuestos

1) **Dadas las rectas $r: 3x-2y=4$ $\quad s: y=\frac{5}{2}x+7$ $\quad t: y=-8-\frac{3}{5}(x+2)$ averigua cuál de ellas pasa por alguno de estos puntos $P(13,-17)$ $\quad Q(-12,-23)$ $\quad R\left(-\frac{7}{3},-\frac{11}{2}\right)$**

2) **Dadas las rectas a) $y=3x-2$ b) $3x-y+5=0$ c) $y=-3x+2$ d) $y=\frac{3x-2}{2}$ s**
   a) Compara sus pendientes y di, sin dibujarlas, cuáles son paralelas.
   b) Represéntalas gráficamente y compara el resultado con el apartado a).

3) **Dibuja en unos mismos ejes las rectas: a) $x=4$ b) $y=-2$ c) $y=x$ d) $y=-x+2$**

4) **Si los puntos $A(-1,-3), B(1,4)$ y $C(5,-1)$ son los vértices de un triángulo, calcula las ecuaciones de las rectas que contienen a sus lados.**

Parábolas

1) **Un grupo de jóvenes amantes de los deportes de riesgo han decidido hacer puenting desde un puente de 185 m de altura. Van lanzándose con cuerdas de diferentes longitudes y midiendo el tiempo que tardan en sentir el tirón de la cuerda en sus pies. Al final de la jornada han recopilado todos estos datos en una tabla:**

t (seg)	1	2	3	4	5	6
e (m)	5	20	45	80	125	180

a) Representa en un sistema de ejes de coordenadas esas parejas de valores.
b) Trata de encontrar una expresión algebraica que reproduzca esa tabla.

2) **Expresa el volumen de una lata cilíndrica de altura 2 dm en función del radio de la base y representa gráficamente la función obtenida.**

3) **Con un cartón cuadrado de 5 dm de lado se desea construir una caja cortando cuadrados de lado x en las esquinas.**
a) Expresa el área de la caja en función de x y represéntala gráficamente.
b) Si la caja tiene tapa, expresa el área y representa gráficamente la función correspondiente.

Utilizando el programa de matemáticas Geogebra, o la Calculadora Gráfica contesta los siguientes apartados:

1) **Representa las funciones** $y = x^2$ $y = 0'5x^2$ $y = 5x^2$ $y = -x^2$**. ¿Qué relación encuentras entre ellas?**

2) **Representa las funciones** $y = x^2$ $y = x^2 + 1$ $y = x^2 - 3$**. ¿Qué relación encuentras entre ellas?**

3) **¿Cómo será la ecuación de la parábola** $y = x^2$ **desplazada verticalmente 2 unidades?**

4) **Representa las funciones:** $y = x^2$ $y = (x-1)^2$ $y = (x+3)^2$**. ¿Qué relación encuentras entre ellas?**

5) **Si la parábola** $y = x^2$ **la desplazamos horizontalmente 2 unidades hacia la derecha ¿cuál es su ecuación? ¿y si la desplazamos horizontalmente una unidad hacia la izquierda?**

6) **Si la parábola** $y = -x^2$ **la desplazamos horizontalmente 5 unidades hacia la izquierda y verticalmente 3 unidades hacia abajo ¿cuál es su ecuación?**

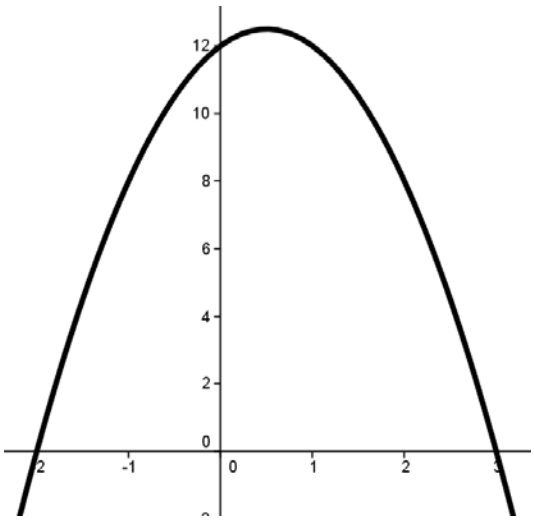
7) **Desarrolla las potencias de las funciones del problema 5). Compara el resultado con las ecuaciones de partida y ponte otros ejemplos.**

8)
a) Representa la función $y = (x-3)(x-1)$ **y observa detenidamente su gráfica.**

b) Borra la gráfica de la función anterior y representa las funciones $y=(x+2)(x-4)$, $y=-2(x+2)(x-4)$ e $y=\frac{5}{4}(x+1)(x+3)$. ¿Qué relación guardan los números que aparecen en la función con los puntos de corte con el eje de abscisas?

c) Representa en los mismos ejes de coordenadas las funciones $y=(x-3)(x+1)$, $y=2(x-3)(x+1)$ e $y=-3(x-3)(x+1)$. ¿qué tienen en común estas tres gráficas? ¿en qué se diferencian? Basándote en las conclusiones obtenidas en este apartado ¿te atreves a escribir la ecuación general de una parábola si conocemos los puntos donde esta corta al eje de abscisas?

9) **Teniendo en cuenta las conclusiones del apartado anterior y observando la gráfica de la siguiente función ¿cuáles son sus raíces (puntos de corte con el eje de abscisas)? Haz la descomposición factorial y encuentra su expresión desarrollada.**



Pasos para representar gráficamente una parábola $y = ax^2 + bx + c$

Ejemplo $\mathbf{y = -2x^2 - 2x + 12}$

En este ejemplo $a = -2 \quad b = -2 \quad y \quad c = 12$

1) *Cálculo del Vértice* $V(x_v, y_v)$ $\begin{cases} x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-2}{2(-2)} = -0'5 \\ y_v = (-0'5)^2 - 2(-0'5) + 12 = 12'5 \end{cases}$

El vértice es el punto $V(-0'5, 12'5)$

2) *Cortes con el eje de abscisas o eje horizontal (OX)*

Hacemos siempre $y = 0$ y resolvemos la ecuación resultante $-2x^2 - 2x + 12 = 0$

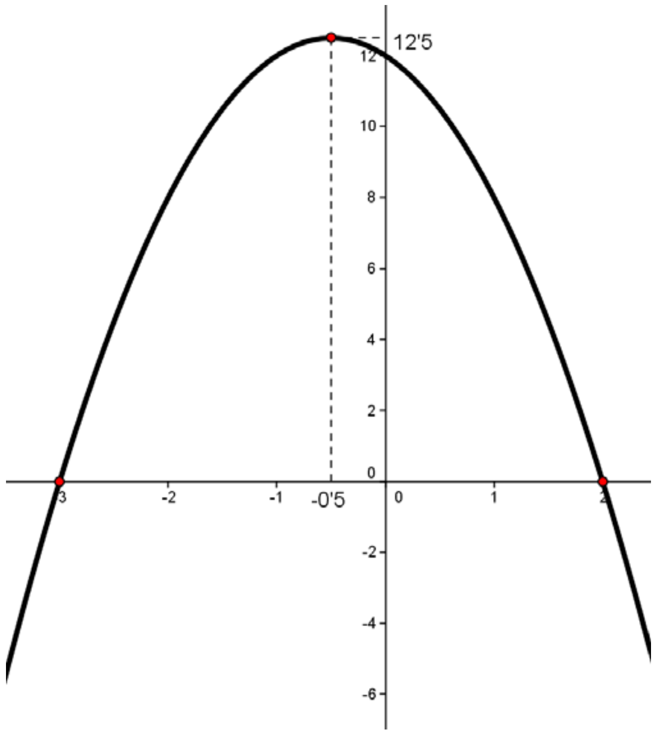
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (12)}}{2 \cdot (-2)} = \frac{2 \pm 10}{-4} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

Los puntos de corte son $(-3, 0)$ y $(2, 0)$

3) *Corte con el eje de ordenadas o eje vertical (OY)*

Hacemos siempre $x = 0$ y calculamos el valor resultante de la "y". En nuestro ejemplo:

$$x = 0 \;\rightarrow\; y = 12 \quad \Rightarrow \quad \text{El punto de corte es el } (0, 12)$$



Ejemplo $\mathbf{y = x^2 - 2x}$

En este ejemplo $a = 1 \quad b = -2 \quad y \quad c = 0$

1) *Cálculo del Vértice* $V(x_v, y_v)$ $\begin{cases} x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-2}{2(1)} = 1 \\ y_v = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1 \end{cases}$

El vértice es el punto $V(1, -1)$

2) *Cortes con el eje de abscisas o eje horizontal (OX)*

Hacemos siempre $y = 0$ y resolvemos la ecuación resultante $x^2 - 2x = 0$

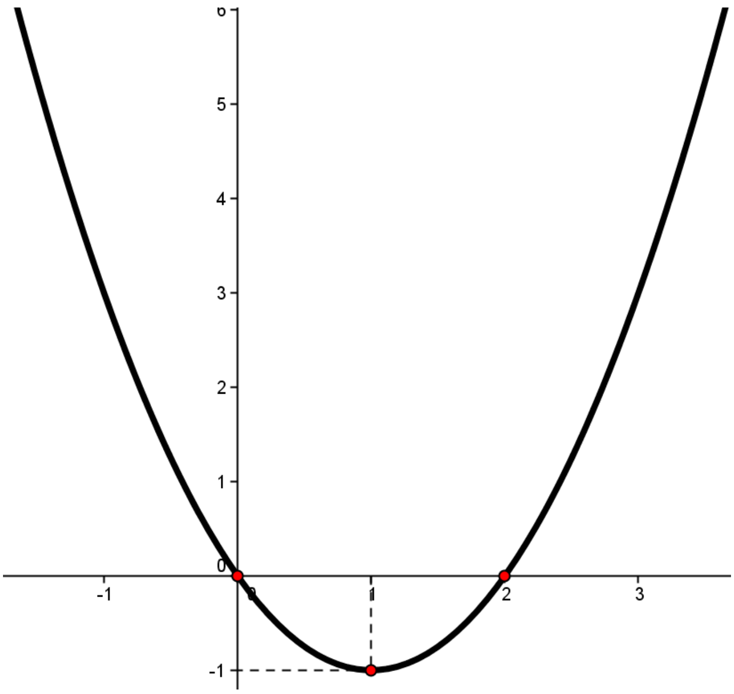
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 2}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Los puntos de corte son $(2, 0)$ y $(0, 0)$

3) *Corte con el eje de ordenadas o eje vertical (OY)*

Hacemos siempre $x = 0$ y calculamos el valor resultante de la "y". En nuestro ejemplo:

$x = 0 \ \rightarrow \ y = 0 \quad \Rightarrow$ El punto de corte es el $(0, 0)$



Problemas resueltos

1)

a) Escribe la ecuación de la parábola resultante de trasladar el vértice de la $y = x^2$ al punto $(3, -1)$.

b) Calcula los puntos en que corta al eje OX. Represéntala.

c) Ponte otros ejemplos.

Solución

a) $y = (x-3)^2 + 1$

b) Cortes con el eje de abscisas

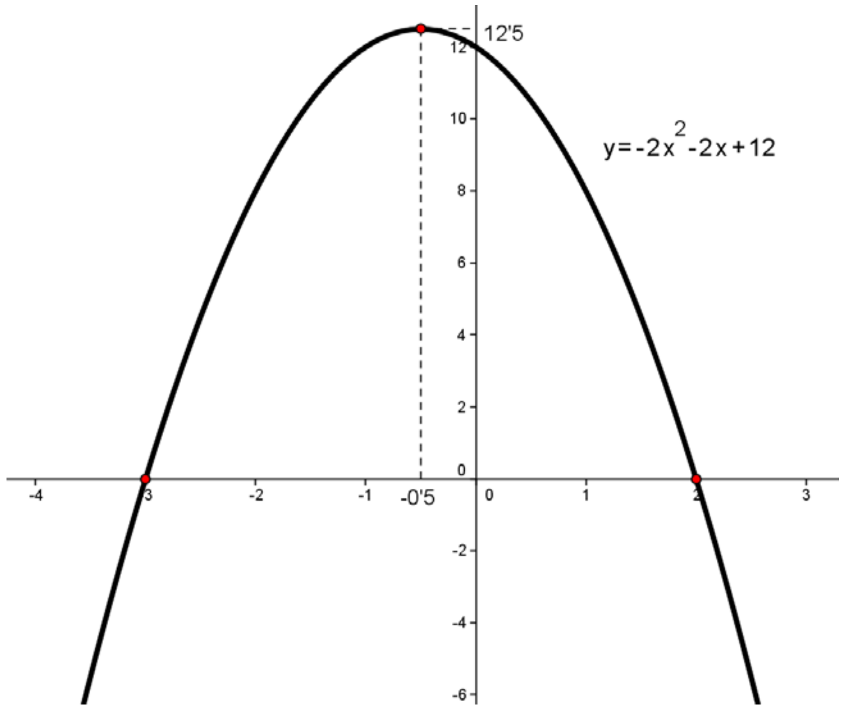
Hacemos $y = 0$ y resolvemos la ecuación resultante

$$(x-3)^2 + 1 = 0 \qquad (x-3)^2 = -1 \qquad \text{No corta a OX}$$

Corte con el eje de ordenadas o eje vertical (OY)

Hacemos $x = 0$ y calculamos el valor resultante de la "y". En nuestro ejemplo:

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad y = (-3)^2 + 1 = 10 \qquad \Rightarrow \qquad \text{El punto de corte es el } (0, 10)$$



2)

a) Encuentra el vértice de la parábola $y = x^2 - 10x + 21$. Calcula los puntos de corte con el eje OX y con el eje OY.

b) Represéntala.

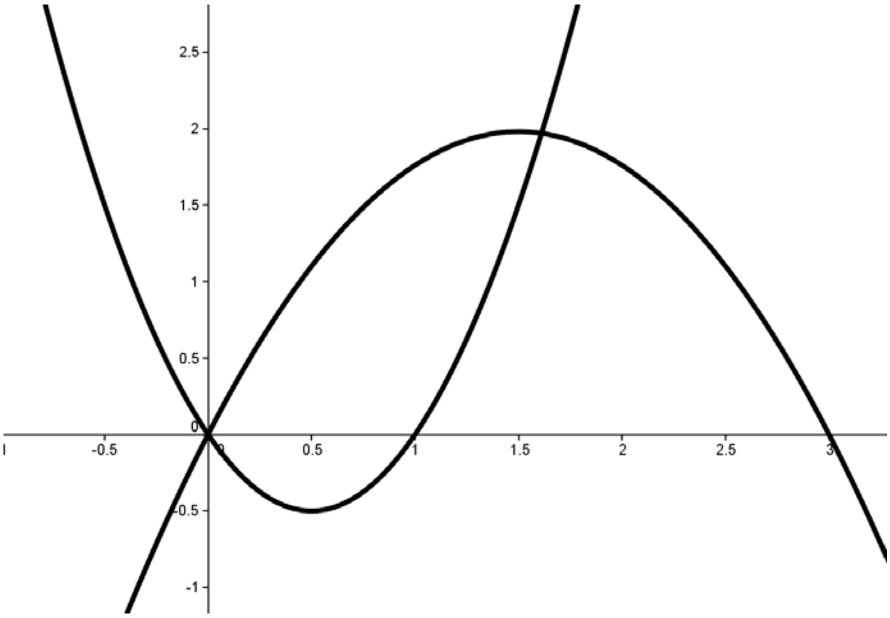
Sol: $V(5, -4)$ $(3, 0)$, $(7, 0)$ y $(0, 21)$

3) Haz lo mismo con las parábolas a) $y=-2x^2+5x-1$ b) $e=-t^2+6t-12$

Sol: a) $V(1'25, 2'125)$ $(0'21, 0)$, $(2'28, 0)$ y $(0,-1)$

b) $V(3,-3)$, No corta al eje de abscisas, $(0,-12)$

4) Determina las ecuaciones de las siguientes parábolas:



<u>*Solución*</u>

Para calcular la ecuación de una parábola conocidos tres de sus puntos lo mejor es sustituir las coordenadas de cada punto en la ecuación general de la parábola $y=ax^2+bx+c$ y resolver el sistema formado por las tres ecuaciones lineales con incógnitas "a", "b" y "c". Pero cuando de los tres puntos que conocemos dos corresponden a los puntos de corte con el eje de abscisas el método más rápido es sustituir el tercer punto en la ecuación

$$y=k(x-a)(x-b)$$

donde "a" y "b" son las abscisas de los puntos de corte.

Para la parábola cóncava los puntos de corte son $(0,0)$ y $(1,0)$. La ecuación es:

$$y=k(x-0)(x-1)$$

El valor del k lo obtenemos sustituyendo las coordenadas del vértice $(0'5,-0'5)$ en la ecuación.

$$-0'5=k(0'5-0)(0'5-1) \qquad -0'5=k\cdot 0'5(-0'5) \;\Rightarrow\; k=\frac{1}{0'5}=2$$

La ecuación de la parábola cóncava es $y=2x(x-1)=2x^2-2x$

Para la parábola convexa los puntos de corte son $(0,0)$ y $(3,0)$. La ecuación es:

$$y=k(x-0)(x-3)$$

El valor del k lo obtenemos sustituyendo las coordenadas del vértice $(1'5, 2)$ en la ecuación.

$$2 = k(1'5 - 0)(1'5 - 3) \qquad 2 = k \cdot 1'5(-1'5) \quad \Rightarrow \quad k = -0'88$$

La ecuación de la parábola convexa es $y = -0'88\,x(x-3) = -0'88\,x^2 + 2'64\,x$

5) **El número de personas atacadas cada día por una determinada enfermedad viene dada por la función $f(x) = -x^2 + 40x + 84$, donde x representa el número de días transcurridos desde que se descubrió la enfermedad. Calcula:**
a) ¿Cuántas personas enferman al quinto día?
b) ¿Cuándo deja de crecer la enfermedad?
c) ¿Cuándo desaparecerá la enfermedad?
Sol: a) 259 personas b) 20 días c) 42 días

6) **Se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba con una velocidad de 14'7 m/s desde un punto situado a 10 m del suelo. Su altura en cada instante está dada por la ecuación $y = -4'9t^2 + 14'7t + 10$.**
a) Haz una representación gráfica.
b) ¿En qué instante el cuerpo alcanza la altura máxima? ¿Cuál es ésta?
c) ¿En qué intervalo de tiempo el cuerpo está a una altura superior a los 15 m?
d) ¿En qué instante el cuerpo llegará al suelo?

Solución

a) En este caso $a = -4'9 \quad b = 14'7 \quad$ y $\quad c = 10$. Al ser una función que depende del tiempo el dominio es para $t \geq 0$.

Calculamos el vértice y los puntos de corte con el eje de abscisas.

$$V(x_v, y_v) \quad \begin{cases} x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{14'7}{2(-4'9)} = 1'5 \\ y_v = -4'9(1'5)^2 + 14'7 \cdot 1'5 + 10 = 21'025 \end{cases}$$

El vértice es el punto $V(1'5, 21'025)$

Cortes con el eje de abscisas:

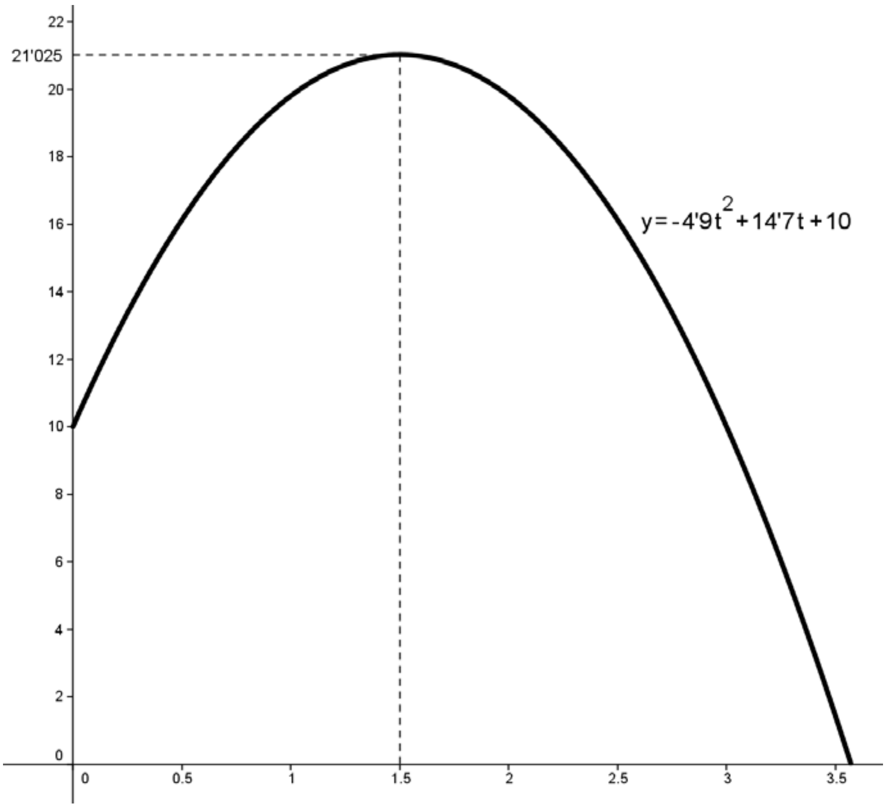
Hacemos $y = 0$ y resolvemos la ecuación resultante $-4'9t^2 + 14'7t + 10 = 0$

$$t = \frac{-14'7 \pm \sqrt{(14'7)^2 - 4 \cdot (-4'9) \cdot (10)}}{2 \cdot (-4'9)} = \frac{-14'7 \pm 20'3}{-9'8} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t_1 = -0'57 \\ t_2 = 3'57 \end{cases}$$

Como el tiempo no puede ser negativo el único punto de corte con el eje de abscisas es $(3'57, 0)$.

Corte con el eje de ordenadas:

$$t = 0 \;\rightarrow\; y = 10 \quad \Rightarrow \quad \text{El punto de corte es el } (0, 10)$$



b) La altura máxima la alcanza al cabo de $1'5\,\text{seg}$ y es de $21'025\,\text{m}$.

c) En la ecuación de la parábola sustituimos $y = 15$

$$15 = -4'9\,t^2 + 14'7\,t + 10 \qquad -4'9\,t^2 + 14'7\,t - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t_1 = 0'39 \\ t_2 = 2'60 \end{cases}$$

Entre los $0'39\,\text{seg}$ y $2'60\,\text{seg}$

d) El cuerpo llegará al suelo al cabo de $3'57\,\text{seg}$

7) La parábola $y = ax^2 + bx + c$ pasa por el origen de coordenadas.

a) ¿Cuánto valdrá c?

b) Si además sabemos que pasa por los puntos $(1,3)$ y $(4,6)$. ¿Cuánto valdrán a y b?

c) Representa gráficamente la parábola.

Sol: a) $c = 0$ b) $a = -0'5$ y $b = 3'5$

8) Tenemos 200 kg. de naranjas que hoy se venden a 0'40 €/kg. Cada día que pasa se estropea 1 kg. y el precio aumenta 0'01 €/kg.

a) ¿Cuándo hemos de vender las naranjas para obtener el máximo beneficio?

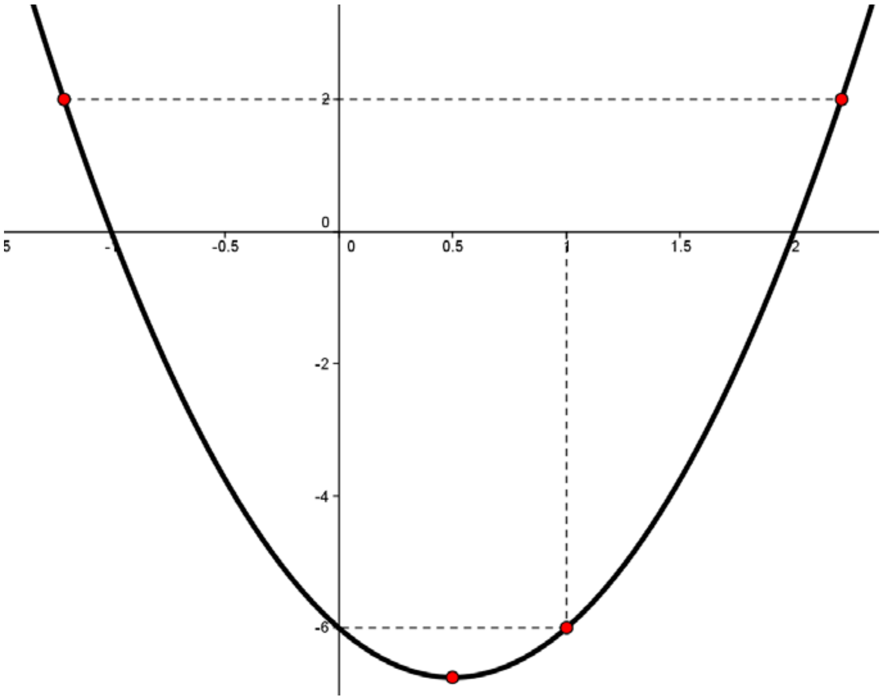
b) ¿Cuál será ese beneficio?

Sol: a) Al cabo de 80 días b) 144 €

9) Los gastos anuales de una empresa por la fabricación de x ordenadores son $G(x) = 20000 + 250x$ en euros, y los ingresos que se obtienen por las ventas son $I(x) = 600x - 0'1x^2$ en euros. ¿Cuántos ordenadores deben fabricarse para que el beneficio (ingresos menos gastos) sea máximo?

Sol: 1750 ordenadores

10) Determina la ecuación de la parábola y calcula las coordenadas de los puntos situados sobre ella.



Sol: $y = 3x^2 - 3x - 6$ Los puntos son: $(-1'2, 2)$; $(0'5, -6'75)$; $(1, -6)$; $(2'2, 2)$

Problemas propuestos

1) **Representa las siguientes parábolas, hallando el vértice y los puntos de corte con los ejes.**

a) $y = (x-2)^2$ **b)** $y = 2x^2 - 8x + 2$ **c)** $y = \frac{1}{3}x^2 - x + 3$ **d)** $y = -x^2 + 3x - 4$

2) **La altura h a la que se encuentra en cada instante t un proyectil que lanzamos verticalmente con una velocidad de 500 m/s es:** $h = 500t - 5t^2$.
a) Haz una representación gráfica.
b) ¿Cuáles son los valores que puede tomar t?
c) ¿En qué instante alcanza el proyectil la altura máxima?
d) ¿En qué intervalo de tiempo el proyectil está a una altura superior a los 4500 m?

3) **Utiliza una escala adecuada para representar las parábolas siguientes:**

a) $y = \frac{x^2}{100}$ **b)** $y = -75x^2 + 675$ **c)** $y = 0'002x^2 - 0'04x$ **d)** $y = -10x^2 - 100x$

4) **¿Cuánto debe de valer k, para que la parábola** $y = 4x^2 - 20x + k$ **tenga un solo punto de corte con el eje de abscisas? ¿Para qué valores de k no cortará la parábola al eje de abscisas?**

5) **La parábola** $y = ax^2 + bx + c$ **pasa por el origen de coordenadas. ¿Cuánto valdrá c? Si además pasa por los puntos** $(1, 3)$ **y** $(4, 6)$ **cuánto valdrán a y b?**