Probabilidad

Espacio Muestral. Sucesos
Frecuencia y Probabilidad
Ley de Laplace

Experimentos deterministas y experimentos aleatorios

*Los **experimentos deterministas** son aquellos que se caracterizan porque al repetirlos bajo análogas condiciones se obtiene siempre el mismo resultado*. En dichos experimentos podemos estar seguros del resultado de una experiencia aún antes de realizarla. Por ejemplo:

- Arrojar una piedra al vacío y medir su aceleración.
- Hacer reaccionar ácido sulfúrico con Cinc.
- Medir la longitud de una circunferencia de radio 5 m.
- Abrir las compuertas de un estanque lleno de agua.

Frente a esta clase de fenómenos, son frecuentes otros en los que la concurrencia de unas circunstancias fijas no permite prever cuál será el efecto producido. Por ejemplo:

1. Si se colocan 49 bolas numeradas, iguales en peso, tamaño, textura, etc., en una bolsa y se extrae una bola a ciegas, la bola extraída llevará, necesariamente, uno de los 49 números, pero es imposible predecir cuál será.
2. Si, todos los días, a la misma hora, se hace un trayecto entre dos puntos alejados de una ciudad, nunca se tardará el mismo tiempo y, lo que es peor, éste no puede predecirse de antemano. La duración del trayecto está gobernada por demasiados “imponderables" para que su valor esté determinado por un conjunto cuantificado de causas.
3. Si una moneda cae al suelo de una habitación, no se puede prever el punto al que irá a parar. Aunque se lanzaran diversas monedas idénticas, poniendo cuidado en hacerlo de igual manera en todas las ocasiones, no acabarían todas en el mismo punto.

En estos casos, se dice que el resultado del fenómeno es consecuencia del **azar.**

*El **azar** es la supuesta causa de los hechos o sucesos cuya causa real se desconoce, que produce un resultado imprevisible*, es decir, es la causa a la que se hace responsable del resultado de una infinidad de experiencias. Los experimentos o fenómenos cuyo resultado se atribuye el azar, se denominan ***aleatorios***. *Los **experimentos aleatorios** son aquellos que se caracterizan porque al repetirlos bajo análogas condiciones es imposible predecir el resultado***.** En dichos experimentos nunca podemos estar seguros del resultado de una experiencia antes de realizarla. Son ejemplos de experimentos aleatorios, además de los anteriores, los siguientes:

- Extraer una carta de una baraja.
- Lanzar un dado y anotar el símbolo que aparece en la cara superior.
- Lanzar una moneda y anotar el símbolo que aparece en la cara superior.
- Extraer una bola de la lotería.

Hoy en día las calculadoras y los ordenadores disponen de una función para generar números aleatorios. Por ejemplo, se pueden obtener simulaciones de lanzamientos de moneda, dados, extracciones de cartas de una baraja, etc. con la misma exactitud que si realizamos las pruebas y con la ventaja de obtener el resultado en un intervalo de tiempo muy corto.

- ➢ Utilizando la calculadora simula el lanzamiento de una moneda 50 veces y haz una tabla con los resultados obtenidos. Haz lo mismo para un dado.
- ➢ Simula un sorteo de 10 premios entre 150 personas.
- ➢ Con una moneda puedes efectuar sorteos de “cara o cruz”. ¿Y con una ruleta? ¿Y con una urna con papelitos o bolas? Describe como procederías en estos casos.

Espacio Muestral y Sucesos

*Llamaremos **espacio muestral** de un experimento aleatorio al conjunto de todos los resultados posibles del experimento***.** También se llama espacio de resultados o universo de resultados. Al espacio muestral de un experimento aleatorio lo designaremos por **E**. Cada uno de los elementos que forman el espacio muestral se llama ***punto muestral***. A continuación se presentan ejemplos de espacios muestrales.

- Para el caso del lanzamiento de un dado tenemos $E=\{1,2,3,4,5,6\}$.
- Para el lanzamiento de una moneda $E=\{C,X\}$.
- Para el lanzamiento de dos monedas podemos suponer que las monedas son distinguibles, bien porque son distintas, bien porque se lanzan por separado, etc.

$$E=\{CC,CX,XC,XX\}$$

- Para el lanzamiento de dos dados, al igual que para las monedas, no hay inconveniente en suponer que los distinguimos.

$$E=\{(1,1),(1,2),\ldots\ldots,(2,1),(2,2),\ldots\ldots,(3,1),(3,2),\ldots\ldots,(6,6)\}$$

- Al sacar una bola de una bolsa que contiene 5 bolas blancas y tres bolas negras, todas ellas iguales en tamaño y textura, supondremos que son distinguibles, pero no al tacto. Da igual que estén numeradas o no.

$$E=\{B_1,B_2,B_3,B_4,B_5,N_1,N_2,N_3\}$$

- Para el lanzamiento de dos dados y anotar la suma de los números que aparecen en las caras superiores:

$$E=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

Se llama ***suceso*** de un experimento aleatorio, ***a cada uno de los subconjuntos del espacio muestral E.*** El conjunto de todos los sucesos de un experimento aleatorio se denomina **espacio de sucesos** y se designa por **S**. A continuación se presentan ejemplos de sucesos.

- Un suceso puede tener nombres peculiares. Así, en el experimento aleatorio consistente en el lanzamiento de un dado tenemos como posibles sucesos:

$$\text{Impar}=\{1,3,5\}\quad \text{Primo}=\{2,3,5\}\quad \text{Menor que }4=\{1,2,3\}\quad \text{Múltiplo de }3=\{3,6\}$$

- En el experimento aleatorio consistente en lanzar una moneda y anotar el resultado tenemos:

$$\text{Espacio muestral}\longrightarrow E=\{C,X\}$$
$$\text{Espacio de sucesos}\longrightarrow S=\{\phi,\{C\},\{X\},\{C,X\}\}$$

- En el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado de quinielas y anotar el símbolo que aparece en la cara superior tenemos:

$$\text{Espacio muestral}\longrightarrow E=\{1,X,2\}$$

Espacio de sucesos $\longrightarrow$ $S=\{\phi,\{1\},\{X\},\{2\},\{1,X\},\{1,2\},\{X,2\},\{1,X,2\}\}$

Obsérvese la estrecha relación entre el número de elementos del espacio muestral y el número de elementos del espacio de sucesos.

En el primer ejemplo E tiene 2 elementos y S tiene $2^2=4$ elementos. En el segundo ejemplo, E tiene 3 elementos y S tiene $2^3=8$ elementos. *Si E es un conjunto finito con n-elementos, hay* $\mathbf{2^n}$ *sucesos posibles.*

Diremos que *un suceso* **A** *se verifica, se realiza o se presenta, si al efectuar una prueba del experimento aleatorio obtenemos como resultado uno de los puntos muestrales que componen el suceso A.* En el ejemplo del dado, si el resultado es 3, ocurren los sucesos Impar, Primo, Menor que 4 y Múltiplo de 3, es decir, todos los sucesos a los que pertenece el número 3.

Sucesos elementales o simples

Son los sucesos formados por un sólo punto muestral; es decir, por un sólo resultado del experimento aleatorio.

- En $E=\{1,2,3,4,5,6\}$ los sucesos elementales son: $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}$

Sucesos compuestos

Son los sucesos formados por dos o más puntos muestrales; es decir, por más de un resultado del experimento.

- Al lanzar dos monedas los sucesos: obtener *una sola cara* $\{CX,XC\}$ y obtener *al menos una cara* $\{CC,CX,XC\}$.

Suceso seguro

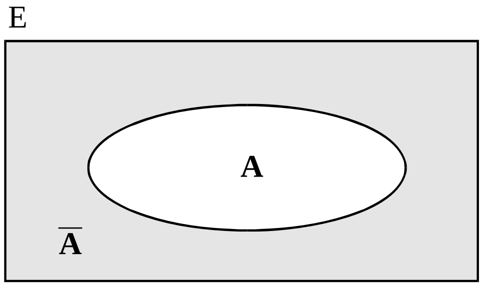
Suceso seguro o cierto es el que siempre se realiza. Coincide con el espacio muestral y lo representaremos por E.

Suceso imposible

Es el suceso que nunca se realiza. Lo representaremos por ϕ**.** Cuando se forma el espacio de sucesos de un experimento aleatorio siempre aparece el suceso imposible.

Ejemplo: Cuando tiramos dos dados, el suceso "suman 15" es claramente el suceso imposible, ya que ningún resultado lo verifica.

Sucesos Contrarios



Sea A un suceso. El subconjunto formado por los elementos de E que no están en A es el conjunto complementario de A y se denota por $\overline{\mathbf{A}}$*,* $\mathbf{A}'$ *o incluso* $\mathbf{A}^c$*. Este conjunto se denomina contrario de A.*

El contrario del suceso imposible ϕ es el suceso seguro E y el contrario de E es ϕ.

Se observa que los sucesos contrarios son siempre incompatibles, pero el recíproco no es cierto. De la definición se deduce que:

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$A \cup \overline{A} = E \quad \text{(suceso seguro)}$$

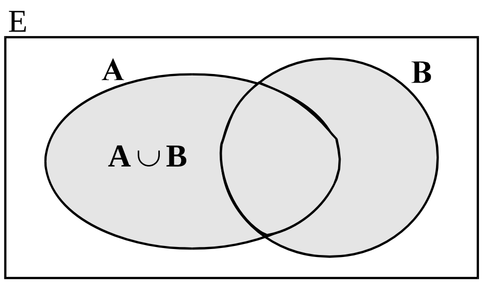
$$A \cap \overline{A} = \phi \quad \text{(suceso imposible)}$$

Ejemplo: En el experimento consistente en el lanzamiento de un dado, el espacio muestral es $E = \{1,2,3,4,5,6\}$. Tenemos los siguientes sucesos contrarios:

$$A = \{1,2,5\} \longrightarrow \overline{A} = \{3,4,6\} \qquad E = \{1,2,3,4,5,6\} \longrightarrow \overline{E} = \phi$$

$$B = \{\phi\} \longrightarrow \overline{B} = \{1,2,3,4,5,6\} \qquad C = \{1\} \longrightarrow \overline{C} = \{2,3,4,5,6\}$$

Unión de Sucesos



Dados dos sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio, se llama suceso unión de A y B al suceso que se realiza cuando se verifica al menos uno de los sucesos A o B.

***Se representa por* $\mathbf{A \cup B}$ *y está formado por los puntos muestrales de* A o B.**

Se observan, inmediatamente, las siguientes relaciones en la unión de sucesos:

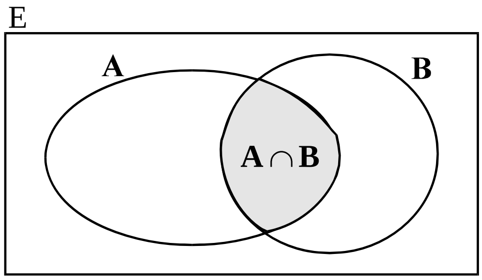
$$A \cup E = E \qquad A \cup \phi = A \qquad A \cup \overline{A} = E$$

Ejemplo: Consideremos el experimento aleatorio del lanzamiento de un dado cuyo espacio muestral es $E = \{1,2,3,4,5,6\}$, y sean los siguientes sucesos:

$$A = \text{"salir número par"} = \{2,4,6\} \quad \text{y} \quad B = \text{"salir número primo"} = \{2,3,5\}$$

Formar el suceso C = "Salir número par o número primo" $\rightarrow$ $C = \{2,3,4,5,6\}$

Intersección de Sucesos



Dados dos sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio, se llama suceso intersección de A y B al suceso que se realiza cuando se verifican simultáneamente los sucesos A y B.

Se representa por $\mathbf{A \cap B}$ ***y está formado por los puntos muestrales de* A *y* B.**

Se observan, inmediatamente, las siguientes relaciones en la intersección de sucesos:

$$A \cap E = A \qquad A \cap \phi = \phi \qquad A \cap \overline{A} = \phi$$

Ejemplo: Considerando el ejemplo anterior, formar el suceso C = "Salir par y número primo".

$$C = \{2\}$$

Sucesos Compatibles. Sucesos Incompatibles

Dos sucesos A y B se dicen ***incompatibles*** *o disjuntos si su intersección es el suceso imposible, es decir si* $\mathbf{A \cap B = \phi}$*. Si* $\mathbf{A \cap B \neq \phi}$ *entonces A y B son* ***compatibles****.*

Cuando es imposible que dos sucesos se realicen simultáneamente decimos que dichos sucesos son incompatibles.

$\mathbf{A \cap B = \phi}$ $\Leftrightarrow$ **A y B son incompatibles** $\qquad$ $\mathbf{A \cap B \neq \phi}$ $\Leftrightarrow$ **A y B son compatibles**

Ejemplo: Al lanzar un dado, los sucesos $A = \{2,4,6\}$ y $B\{3,5\}$ son incompatibles, pues $A \cap B = \phi$.

Los sucesos $A = \{2,4,6\}$ y $B = \{3,6\}$ son compatibles ya que $A \cap B = 6$

Frecuencia y Probabilidad de un suceso

Se llama ***frecuencia absoluta*** *de un suceso A, al número de veces que se verificó A al realizar el experimento un número determinado de veces.* Se representa por la notación **f(A)** .

Si una persona nos asegura que lanzando una moneda, por ejemplo, obtuvo 57 veces el resultado “cara", no podemos afirmar que dicho suceso sea muy frecuente o poco frecuente, pues necesitamos comparar con la cantidad de veces que se lanzó la moneda. Por esto se introduce la noción de frecuencia relativa.

Se llama ***frecuencia relativa*** *de un suceso al cociente entre la frecuencia absoluta del mismo y el número total de veces que se hace el experimento.*

$$f_r(A) = \frac{f(A)}{N}$$

Propiedades de la frecuencia relativa

1) $0 \le f_r \le 1$ **cualquiera que sea el suceso A**.

2) $f_r(E) = 1$ **(E suceso seguro)**

3) **Si A y B son sucesos incompatibles**: $f_r(A \cup B) = f_r(A) + f_r(B)$

La frecuencia relativa de un suceso S, tiende a estabilizarse en torno a un número a medida que el número de pruebas del experimento crece indefinidamente. A ese número se le llama ***probabilidad del suceso S***.

Experimentando con Dados

Primer experimento. La travesía del río

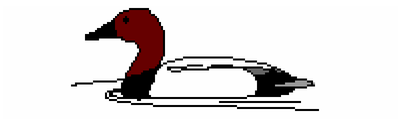
Reglas del juego

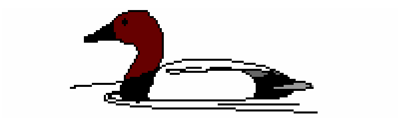
- Este es un juego en el que participan 2 jugadores.
- Cada uno de los jugadores posee 12 fichas. Uno de ellos distribuye sus 12 fichas en una orilla, de la manera que desee y el otro las distribuye en la orilla opuesta. No tiene por qué haber fichas en cada una de las casillas. Puede ocurrir que haya más de una ficha en cada casilla.
- Se lanzan el par de dados alternativamente, de manera que si la suma de los números obtenidos en las correspondientes caras superiores de los dos dados coincide con el número de alguna casilla donde hay fichas, pasa una de estas al otro lado del río y la deja fuera.
- El primer jugador que consigue pasar al otro lado del río todas las fichas gana la partida.

Etapas en el desarrollo del juego

- Propón una primera estrategia o disposición de las 12 fichas que pienses puede ser la mejor para ganar el juego. Después realiza el juego con tu pareja. Cada pareja anota el número de veces que aparece cada suma en la tabla de la página 6.
- ¿Qué frecuencia relativa esperada o proporción esperada asignarías a cada uno de los doce sucesos compuestos anteriores?
- A la vista de los resultados ¿podrías esquematizarlos en un diagrama en árbol?

1		12
2		11
3		10
4		9
5		8
6		7
7		6
8		5
9		4
10		3
11		2
12		1





	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9	G10	G11	G12	G13	G14	G15	f	f_r
1																	
2																	
3																	
4																	
5																	
6																	
7																	
8																	
9																	
10																	
11																	
12																	

Segundo experimento

1) Realiza la experiencia de tirar cada uno de los dos dados 60 veces y anota los resultados en la columna correspondiente a tu grupo.

2) Puesta en común en la pizarra de los resultados obtenidos por cada grupo.

3) Llamamos ***frecuencia absoluta* (*f*)** de un suceso al número de veces que aparece cuando se repite un ***experimento aleatorio***. Llamamos ***frecuencia relativa* (f_r)** de un suceso al cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de veces que repetimos el experimento aleatorio. Según estos conceptos rellena las columnas correspondientes a cada uno de los dados.

Dado 1	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9	G10	f	f_r
1												
2												
3												
4												
5												
6												
Totales												

Dado 2	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9	G10	f	f_r
1												
2												
3												
4												
5												
6												
Totales												

Ley de Laplace

La probabilidad de un suceso S, que representaremos por p(S), es el cociente entre el número de casos favorables a dicho suceso y el número de casos posibles.

$$\mathbf{p(S)=\frac{Número\ de\ casos\ favorables\ \ al\ \ suceso\ S}{Número\ de\ casos\ posibles}}$$

A la hora de aplicar esta definición hay que tener en cuenta que ***los sucesos elementales tienen que ser igualmente probables (equiprobables)***.

Los casos favorables son los elementos que componen el suceso S, y los casos posibles son todos los resultados del experimento, es decir, todos los elementos del espacio muestral.

Ejemplo Se considera un experimento consistente en lanzar un dado. Se pide la probabilidad de obtener:

a) Número impar.
b) Número primo.
c) Múltiplo de 3.
d) Múltiplo de 5.

El espacio muestral del experimento es $E=\{1,2,3,4,5,6\}$, luego el número de casos posibles es 6.

a) A = "Obtener impar" = $\{1,3,5\}$ $\Rightarrow$ $p(A)=\frac{3}{6}=0'5$

b) B = "Número primo" = $\{2,3,5\}$ $\Rightarrow$ $p(B)=\frac{3}{6}=0'5$

c) C = "Múltiplo de tres" = $\{3,6\}$ $\Rightarrow$ $p(C)=\frac{2}{6}=0'\widehat{3}$

d) D = "Múltiplo de 5" = $\{5\}$ $\Rightarrow$ $p(D)=\frac{1}{6}=0'1\widehat{6}$

Ejemplo Se realiza un experimento consistente en lanzar dos monedas. Hallar las siguientes probabilidades:

a) Obtener dos caras.
b) Obtener dos cruces.
c) Obtener una cara y una cruz.
d) Obtener al menos una cruz.

El espacio muestral es $E=\{CC,CX,XC,XX\}$, por tanto el número de casos posibles es 4.

a) A = "Obtener dos caras" = $\{CC\}$ $\Rightarrow$ $p(A)=\frac{1}{4}=0'25$

b) B = "Obtener dos cruces" = $\{XX\}$ = $\Rightarrow$ $p(B)=\frac{1}{4}=0'25$

c) C = "Obtener una cara y una cruz" = $\{CX,XC\}$ $\Rightarrow$ $p(C)=\frac{2}{4}=0'5$

d) D = "Obtener al menos una cruz" = $\{CX, XC, XX\}$ $\Rightarrow$ $p(D) = \frac{3}{4} = 0'75$

Ejemplo Se realiza el experimento consistente en la extracción de una carta de una baraja española. Se pide hallar las siguientes probabilidades:
a) Obtener un oro.
b) Obtener un as.
c) Obtener la sota de espadas.

El espacio muestral del experimento está formado por los 40 resultados posibles correspondientes a cada una de las cartas de la baraja.

a) O = "Obtener un oro" = $\{1,2,3,4,5,6,7,S,C,R\}$ $\Rightarrow$ $p(O) = \frac{10}{40} = 0'25$

b) A = "Obtener un as" = $\{1_E, 1_C, 1_B, 1_O\}$ $\Rightarrow$ $p(A) = \frac{4}{40} = 0'1$

c) B = "Obtener la sota de espadas" = $\{S_E\}$ $\Rightarrow$ $p(B) = \frac{1}{40} = 0'025$

Ejemplo Consideremos el experimento consistente en lanzar dos dados y anotar la suma de los puntos de las caras superiores. Hallar la probabilidad de los siguientes sucesos:
a) Obtener suma igual a 11.
b) Obtener suma igual a 8.
c) Obtener suma menor o igual a 4.

Los posibles resultados se indican en la siguiente tabla:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

$$E = \{(1,1),(1,2),(1,3),\ldots,(2,1),(2,2),\ldots,(3,1),(3,2),\ldots\ldots,(6,1),\ldots,(6,6)\}$$

a) A = "Suma igual a 11" = $\{(5,6),(6,5)\}$ $\Rightarrow$ $p(A) = \frac{2}{36} = 0'055$

b) B = "Suma igual a 8" = $\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$ $\Rightarrow$ $p(B) = \frac{5}{36} = 0'138$

c) C = "Obtener suma menor o igual a 4" = $\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1)\}$

Probabilidad de la Unión de Sucesos

Ejemplo: Calcular la probabilidad de que al elegir al azar una carta de una baraja española sea un as o una copa.

<u>*Solución*</u>

Si llamamos A al suceso sacar un as y C al suceso sacar una copa tenemos:

$$p(A)=\frac{4}{40} \qquad p(C)=\frac{10}{40}$$

Pero estos dos sucesos tienen un elemento en común, el as de copas, y no podemos contarlo dos veces a la hora de calcular la probabilidad de su unión, por eso, a la probabilidad de la unión hay que restarle la probabilidad de la intersección.

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=\frac{4}{40}+\frac{10}{40}-\frac{1}{40}=0'375$$

En general, si A y B son dos sucesos cualesquiera, se verifica:

$$\mathbf{p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)}$$

Probabilidad del Suceso contrario

Ejemplo: Una caja que tiene 50 DVDs contiene 3 defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir uno al azar no sea defectuoso?

<u>*Solución*</u>

Sea A el suceso "estar estropeado" y $\overline{A}$ el suceso contrario, es decir, "no estar estropeado". Según el apartado anterior tenemos:

$$p(A\cup\overline{A})=p(A)+p(\overline{A})-p(A\cap\overline{A})$$

Como A y $\overline{A}$ son incompatibles, se verifica que $p(A\cap\overline{A})=0$, por tanto:

$$p(A\cup\overline{A})=p(A)+p(\overline{A})=p(E)=1 \;\Rightarrow\; p(A)+p(\overline{A})=1$$

En nuestro ejemplo: $p(\overline{A})=1-p(A)=1-\frac{3}{50}=0'94 \;\rightarrow\; p(\overline{A})=94\%$

En general, si A es un suceso cualquiera se verifica:

$$\mathbf{p(A)+p(\overline{A})=1 \;\Rightarrow\; p(\overline{A})=1-p(A)}$$

Esperanza matemática

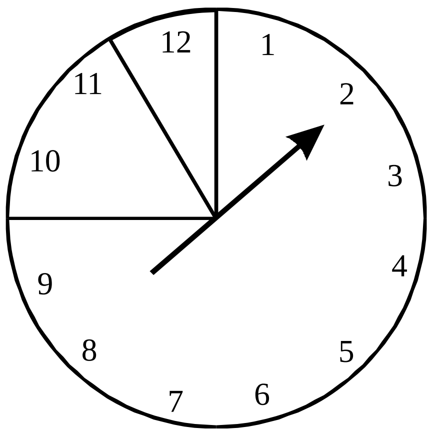
Se llama ***esperanza matemática E(x)*** o ***valor esperado*** de una variable aleatoria “x”, a la suma de las probabilidades de cada suceso multiplicadas por su valor. Representa el beneficio medio que se obtiene en cada jugada cuando se juega un número elevado de veces.

Ejemplo La nota de matemáticas de un alumno en la segunda evaluación es un 4 y el profesor le propone el siguiente juego: en una urna se meten 10 bolas, cuatro con la nota 5, cuatro con la nota 3 y dos con la nota 8. Se extrae una bola de la urna y la nota que indique será la de la evaluación. ¿le conviene jugar al alumno?

$$E(x)=\frac{4}{10}\cdot 5+\frac{4}{10}\cdot 3+\frac{2}{10}\cdot 8=4'8 \qquad \text{Como } 4'8>4 \text{ sí le conviene jugar.}$$

- **Si $E(x)>0$ el juego es favorable al jugador.**
- **Si $E(x)<0$ el juego es desfavorable al jugador.**
- **Si $E(x)=0$ el juego es equitativo.**

Ejemplo Una ruleta está dividida en 12 sectores iguales. Considera tres sectores de la ruleta: El A, que incluye los sectores numerados del 1 al 9; el B, los numerados con 10 y 11; el C, el numerado con el 12.



Te propongo el siguiente juego: si la aguja señala uno de los sectores de A, entonces pagas 1 €; si señala uno de los sectores de B, ganas 2 € y si marca el sector C ganas 4 €. Si realizas 60 jugadas:

a) Haz una simulación del juego con la calculadora. ¿Qué criterio utilizas?
b) Recoge los resultados del experimento aleatorio en la tabla adjunta.
c) ¿Te conviene jugar? ¿Cuánto esperas ganar o perder?

	G1	**G2**	**G3**	**G4**	**G5**	**G6**	**G7**	**G8**	**G9**	**G10**		
Pierde 1												
Gana 2												
Gana 4												
Total												