Proporcionalidad

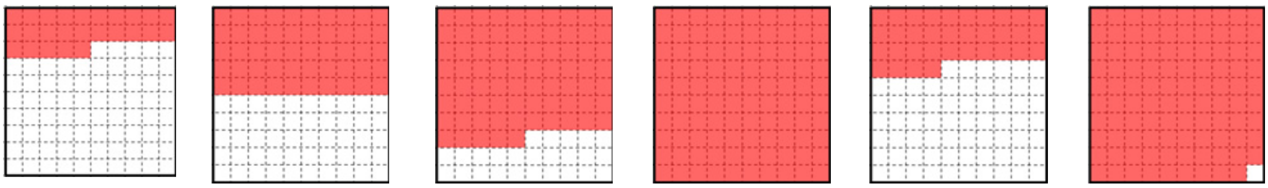
Porcentajes
Música, fracciones y porcentaje
Proporcionalidad directa e inversa
Proporcionalidad compuesta
Escalas
Proporcionalidad geométrica
Google Maps

Porcentaje

Las fracciones con el denominador igual a 100 se llaman porcentajes. Las siguientes expresiones

$$\frac{25}{100}=25\% \qquad \frac{50}{100}=50\% \qquad \frac{75}{100}=75\% \qquad \frac{100}{100}=100\% \qquad \frac{34}{100}=34\% \qquad \frac{99}{100}=99\%$$

se leen: 25 por ciento, 50 por ciento, 75 por ciento, 100 por cien, 34 por ciento y 99 por ciento, respectivamente. Podemos representar gráficamente los porcentajes anteriores igual que se hace con las fracciones:



Ejemplo **Calcula el 12% de 2645 €.**

$$\frac{12}{100}\cdot 2645 = 0'12\cdot 2645 = 317'4$$

Para obtener el 12 % de una cantidad se multiplica dicha cantidad por $0'12$

Ejemplo **Calcula el 187% de 2645 €.**

$$\frac{187}{100}\cdot 2645 = 1'87\cdot 2645 = 4946'15$$

Para obtener el 187 % de una cantidad se multiplica dicha cantidad por $1'87$.

Ejemplo

a) **¿Cuánto es el 100% de una cantidad? ¿Por qué número hay que dividir una cantidad para calcular su 50%? ¿Qué fracción es equivalente al 50%?**

b) **¿Por qué número hay que dividir una cantidad para calcular su 25%? ¿Qué fracción es equivalente al 25%? ¿Por qué número hay que dividir una cantidad para calcular su 10%? ¿Qué fracción es equivalente al 10%?**

Ejemplo **Calcula mentalmente: a) 25% de 400 b) 75% de 500 c) 120% de 3000**

Ejemplo **Calcula: a) 16% de 25 b) 0'3% de 5000 c) 1'2% de 2000 d) 115% de 1640**

Ejemplo **Completa las siguientes tablas:**

30%	**61%**		**120%**	**180%**	**240%**	
0'30		**0'03**		**1'80**		**2'70**

Total	**400**	**640**	**850**		**1280**
%	**15%**	**35%**		**12%**	
Parte	**60**		**136**	**87**	**64**

Música, fracciones y porcentaje

Sabemos que en una partitura musical un compás es un sistema de medida musical compuesta por varias unidades de tiempo (como la negra o la corchea). En la partitura, los compases van separados por medio de líneas divisorias que atraviesan verticalmente el pentagrama.
Por convención, los compases se indican por medio de dos cifras, que se representan en forma de *fracción*, y que se colocan al principio del pentagrama. *El número superior o numerador nos indica el número de tiempos que tiene el compás, y el número inferior o denominador es el que nos indica la figura que será utilizada como unidad de tiempo. Cuando el denominador es 4 la figura utilizada como unidad de tiempo siempre es una negra*. Si usamos el 2 como denominador, la blanca pasará a ser la unidad de tiempo y por tanto la negra vale ½ tiempo y la corchea ¼ de tiempo.

Así, la indicación ¾ quiere decir que el compás tiene 3 tiempos y que cada tiempo es ocupado por una negra, lo que significa que cada compás tendrá tres negras. La indicación 2/4 quiere decir que el compás tiene 2 tiempos y que cada tiempo es ocupado por una negra, lo que significa que cada compás tendrá dos negras.

Los ***compases simples*** pueden tener 2, 3 ó 4 partes, llamándose respectivamente de división Binaria, Ternaria o Cuaternaria. El numerador indica las partes que tiene el compás.

$2/4$	2 partes : Binario
$3/4$	3 partes : Ternario
$4/4$	4 partes : Cuaternario

El valor de las figuras es el siguiente:

Nombre	*Redonda*	*Blanca*	*Negra*	*Corchea*	*Semicorchea*
Duración	*4 tiempos*	*2 tiempos*	*1 tiempo*	*1/2 tiempo*	*1/4 tiempo*
Figura	𝅝	𝅗𝅥	𝅘𝅥	𝅘𝅥𝅮	𝅘𝅥𝅯

No existe una figura que dure 3 tiempos, pero podemos crearla usando el ***puntillo***. El *puntillo* añade a una figura la mitad de su valor. Por ejemplo, si le añadimos a la blanca, que dura dos tiempos, un puntillo, obtendremos un sonido con la duración de tres tiempos $2+1=3$. Si a las figuras que conocemos les añadimos un puntillo obtenemos:

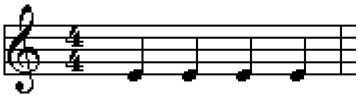
Figura	𝅝. = 𝅗𝅥 𝅗𝅥 𝅗𝅥	𝅗𝅥. = 𝅘𝅥 𝅘𝅥 𝅘𝅥	𝅘𝅥. = 𝅘𝅥𝅮 𝅘𝅥𝅮 𝅘𝅥𝅮
Duración	*6 tiempos* $(4+2)$	*3 tiempos* $(2+1)$	*1 ½ tiempo* $(1+1/2)$

Reconocemos los ***compases compuestos*** porque sus numeradores son 6, 9 ó 12. Si el numerador no es 2, ni 3, ni 4, obtenemos el número de tiempos en el compás dividiendo el numerador entre 3.

$6/8$	2 partes : Binario
$9/8$	3 partes : Ternario
$12/8$	4 partes : Cuaternario

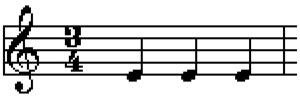
- *Las unidades de tiempo de los compases compuestos llevan un puntillo.*
- *El denominador indica la figura que ocupa un tercio del tiempo*. Por ejemplo en el compás de 6/8 la corchea ocupa un tercio del tiempo ya que un tiempo se forma por 3 corcheas ó 1 negra con puntillo.
- En los compases 6/8, 9/8 y 12/8 la unidad de tiempo es la negra con puntillo.
- En los compases 6/4, 9/4 y 12/4 la unidad de tiempo es la blanca con puntillo.

<u>Ejemplo</u> **Averiguar qué fracción del compás ocupan las siguientes figuras, qué porcentaje del mismo suponen y hacer las subdivisiones que sean necesarias coloreando la parte correspondiente.**



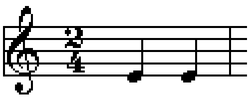
Compás 4x4

	Fracción	%	*Subdivisiones*
Redonda			
Blanca con puntillo			
Blanca			
Negra			
Corchea			
Semicorchea			



Compás 3x4

	Fracción	%	*Subdivisiones*
Redonda			
Blanca con puntillo			
Blanca			
Negra			
Corchea			
Semicorchea			



Compás 2x4

	Fracción	%	*Subdivisiones*
Redonda			
Blanca con puntillo			
Blanca			
Negra			
Corchea			
Semicorchea			

<u>Ejemplo</u> **Haz el mismo esquema anterior para un compás 6x8.**

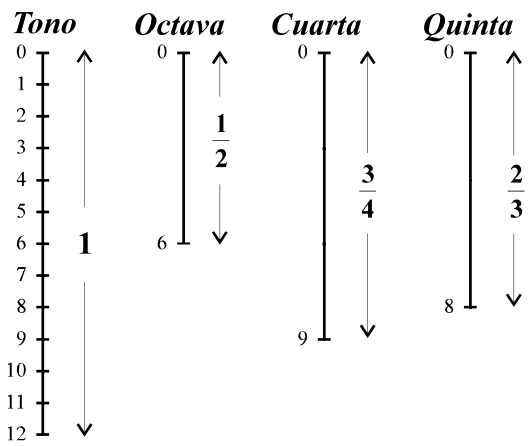
Pitágoras. Los números y la música

Pitágoras es sin duda uno de los grandes fundadores de la cultura occidental. La idea básica sobre la que se apoya nuestra cultura actual, es la de que el universo no es un caos incomprensible, sino más bien un cosmos ordenado cuyos misterios pueden ser abordados con nuestra razón y, más eficazmente, con nuestra razón matematizante. Esto constituye el gran descubrimiento de Pitágoras y de sus discípulos. Su credo fue: “*Todo es armonía y número*”. Con ello indicaban su firme creencia de que el orden del universo se percibe más claramente mediante los instrumentos matemáticos.

Pitágoras nació en Samos a principios del siglo VI a. de C. hijo de un rico comerciante. Probablemente, viajó en su juventud a Egipto, Fenicia y Babilonia, donde debió aprender mucho en contacto con las culturas más antiguas de la cuenca mediterránea. Hacia el año 529 a. de C. fundó en Crotona (colonia griega en el sur de Italia), una comunidad científico religiosa que basaba su vida en la contemplación del orden del universo y en el intento de imitar, en su actitud, este equilibrio y orden. El estudio y ejercicio de la aritmética, geometría, música y astronomía era la herramienta básica para lograr tales propósitos. Aunque los pitagóricos no constituyeron un grupo político, sin embargo llegaron a adquirir gran influencia y poder en las decisiones de la ciudad de Crotona. Hacia fines del siglo VI se despertó en Crotona un movimiento antipitagórico de origen oscuro. Pitágoras tuvo que exiliarse y murió en el año 500 a. de C. en Metaponto, otra de las ciudades griegas de Italia. El pitagorismo, como movimiento filosófico, perduró en Grecia y luego en Roma por muchos siglos. Los pitagóricos identificaron al mundo de los números con el propio mundo de las cosas, y atribuyeron propiedades mágicas a ciertos números y figuras geométricas.

Pitágoras descubrió con asombro la relación de la música con la matemática, lo que le llevó a afirmar que los números gobernaban la música. Realizó el siguiente experimento: Tensó una cuerda musical que producía un sonido cuyo grado de elevación (tono) tomó como base. Hizo señales en la cuerda, que la dividían en 12 partes iguales. Al pisar la cuerda en el 6 y hacerla sonar, observó que se obtenía un sonido consonante con el anterior, es decir, que armonizaban al producirse los dos juntos. Era, precisamente, la ***octava*** superior.

Pisó luego en el 9 y resultó otro sonido consonante con los anteriores: la ***cuarta*** superior. De la misma forma, al pisar en el 8, se obtenía la ***quinta***.



Las fracciones de la cuerda: $\frac{1}{2};\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{3}$ como se ve en la figura, correspondían precisamente a los sonidos consonantes fundamentales: ***octava, cuarta*** y ***quinta***.

Los sonidos producidos al pisar en otros puntos, resultaban discordes o al menos, no tan acordes como los anteriores. ¡Los números 1, 2, 3 y 4 determinan, con sus proporciones relativas, los sonidos más consonantes!

Si los números gobiernan la música - se dijo Pitágoras - *es de esperar que, de alguna manera, gobiernen todo el universo.* Así ha sido. A lo largo de los 26 siglos que nos separan de Pitágoras, el desarrollo de las diversas Ciencias ha ido corroborando aquella intuición general que sigue impregnando, profundamente, nuestra cultura.

Ejemplo **La siguiente tabla representa las frecuencias (en Hertzios) de las notas musicales.**

a) Dividiendo la frecuencia de cada nota por la frecuencia de la nota principal (Do-264) obtener las fracciones equivalentes más simplificadas posibles e introducirlas en las casillas correspondientes (tercera fila).

b) Dividiendo la frecuencia de cada nota por la frecuencia de la nota anterior (notas vecinas), obtener las fracciones equivalentes más simplificadas posibles e introducirlas en las casillas correspondientes (primera fila).

264	9:8	**297**	10:9	**330**		**352**		**396**		**440**		**495**		**528**
Do		**Re**		**Mi**		**Fa**		**Sol**		**La**		**Si**		**Do**
1:1		9:8		5:4										**2:1**

a) La expresión 9:8 que aparece en la tercera casilla de la tercera fila de la tabla se obtiene dividiendo la frecuencia de la nota Re (297) entre la frecuencia de la nota principal Do (264) y simplificando.

$$\frac{297}{264}=\frac{3^3\cdot 11}{2^3\cdot 3\cdot 11}=\frac{3^2}{2^3}=\frac{9}{8}=9:8$$

La expresión 5:4 que aparece en la quinta casilla de la tercera fila de la tabla se obtiene dividiendo la frecuencia de la nota Mi (330) entre la frecuencia de la nota principal Do (264) y simplificando.

$$\frac{330}{264}=\frac{2\cdot 3\cdot 5\cdot 11}{2^3\cdot 3\cdot 11}=\frac{5}{2^2}=\frac{5}{4}=5:4$$

b) La expresión 9:8 que aparece en la segunda casilla de la primera fila de la tabla se obtiene dividiendo la frecuencia de la nota Re (297) entre la frecuencia de la nota Do (264) y simplificando.

$$\frac{297}{264}=\frac{3^3\cdot 11}{2^3\cdot 3\cdot 11}=\frac{3^2}{2^3}=\frac{9}{8}=9:8$$

La expresión 10:9 que aparece en la cuarta casilla de la primera fila de la tabla se obtiene dividiendo la frecuencia de la nota Mi (330) entre la frecuencia de la nota Re (297) y simplificando.

$$\frac{330}{297}=\frac{2\cdot 3\cdot 5\cdot 11}{3^3\cdot 11}=\frac{2\cdot 5}{3^2}=\frac{10}{9}=10:9$$

Aumentos y Disminuciones porcentuales

Un aumento porcentual es añadir un porcentaje a una cierta cantidad. Una disminución porcentual es restar un porcentaje a una cierta cantidad.

Ejemplo **A un trabajador que gana 1200 € la empresa le comunica que le va a incrementar el sueldo un 12%. ¿Cuánto cobrará al mes?**

$$1200+\frac{12}{100}\cdot 1200=1200+0'12\cdot 1200=1200(1+0'12)=1'12\cdot 1200=1344\,€$$

Para obtener el resultado de aumentar una cantidad un 12% se multiplica dicha cantidad por $1'12$ ***. Si el aumento es del 6% se multiplica la cantidad por*** $1'06$ ***, etc.***

Ejemplo **Una camisa que costaba 40 € se encuentra rebajada un 20%. ¿Cuál es su precio actual?**

$$40-\frac{20}{100}\cdot 40=40-0'2\cdot 40=40(1-0'2)=40\cdot 0'8=32\,€$$

Para obtener el resultado de disminuir una cantidad un 20% se multiplica dicha cantidad por $0'8$ ***. Si la disminución es del 6% se multiplica la cantidad por*** $0'94$ ***, etc.***

Ejemplo **Calcula los siguientes aumentos y disminuciones porcentuales:**

a) En un instituto hay un 12% menos de alumnas que de alumnos. ¿Cuántas alumnas hay sabiendo que hay 150 alumnos?

b) El precio de una bicicleta que costaba 400€ el año pasado, ha subido un 20%. ¿Cuál es el precio actual?

c) Actualmente me dan 15 € mensuales de paga, pero he convencido a mis padres para que me suban el 15%. ¿Cuál será mi paga a partir de ahora?

Ejemplo **a) En una tienda hacen una rebaja del 20% a todos los artículos. ¿Cuanto costará ahora una camisa que antes costaba 35 €? ¿Y un pantalón de 40 €?**

b) Tengo 52 € y me quiero comprar un MP3 que costaba antes de las rebajas 60 €. ¿Podré pagarlo si lo rebajan un 15%?

c) Quiero comprarme unas zapatillas de deporte. En una tienda veo dos que me gustan; las primeras tienen un precio de 45 € y una rebaja del 30% y las segundas cuestan 35 € pero no tienen rebaja. ¿Cuáles salen más baratas?

Ejemplo **Nos piden por una vivienda nueva 240000 € y sabemos desde el año pasado ha aumentado su precio un 23%. ¿Cuánto costaba hace un año?**

$$x\cdot 1'23=240000 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{240000}{1'23}=195120\ €$$

Ejemplo **Si el precio de un coche es de 20000 € y con la subvención del gobierno me han rebajado 1200 € ¿qué tanto por ciento me han rebajado?**

El coche me ha costado $20000-1200=18800$ €

$$20000 \cdot x = 18800 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{18800}{20000} = 0'94 = 94\,\%$$

Me han rebajado $100 - 94 = 6$, es decir el 6 %.

El IVA (Impuesto sobre el valor añadido)

El IVA es un impuesto al consumo, es decir un impuesto que hay que pagar cada vez que se compra algo.

Ejemplo **En un restaurante nos cobran por comer 38 € y hay que añadir el 16% de IVA. ¿Cuánto nos cuesta la comida?**

$$38 \cdot 1'16 = 44'08\,€$$

Ejemplo **El precio de un artículo sin IVA es 725 €. Si he pagado 841 €, ¿qué porcentaje de IVA me han cargado?**

$$725 \cdot x = 841 \quad \rightarrow \quad x = \frac{841}{725} = 1'16$$

Nos han cargado el 16%.

El IPC (Índice de Precios al Consumo)

El IPC es un índice que refleja cada mes la variación (aumento o, a veces, disminución) que sufren los precios de los productos que consumimos en España. Este índice se mide en tanto por ciento. Así, cuando en un periódico se publica que el IPC ha subido dos décimas (0,2%) significa que el nivel de precios ha aumentado ese porcentaje respecto del mes anterior. Esto no quiere decir que cualquier producto de consumo (alimentos, gasolina, electricidad, vivienda) haya subido ese porcentaje. El IPC se obtiene como una media de la variación de los precios en el mes anterior. El IPC es un índice muy importante, pues suele utilizarse como base para los incrementos de los sueldos de los trabajadores cada año.

Ejemplo **A finales de 2008, el gobierno hizo la previsión (datos no reales) de que el IPC del año 2009 subiría un 1,8% y en ese porcentaje subió el sueldo de todos los funcionarios. Pedro y José son funcionarios y en el año 2008 tenían un sueldo de 1112 € y 1352 € mensuales respectivamente. ¿Cuál fue la subida de sueldo y el sueldo en 2009?**

Para Pedro la subida del sueldo será de $\frac{1'8}{100} \cdot 1112 = 20'016\,€$ y el sueldo será de $1112 \cdot 1'018 = 1132'016\,€$

Para José la subida del sueldo será de $\frac{1'8}{100} \cdot 1352 = 24'336\,€$ y el sueldo será de $1352 \cdot 1'018 = 1376'336\,€$

¿Cómo se encadenan aumentos y disminuciones porcentuales?

En general, cuando se encadenan varios aumentos porcentuales se multiplican los correspondientes índices de variación.

Ejemplo **Un litro de gasolina costaba en Enero $0'88\,€$, pero ha sufrido dos subidas en los últimos meses, la primera de un 5% y la segunda de un 4%. ¿Cuánto cuesta ahora un litro de gasolina?**

Primera subida: $0'88\cdot 1'05 = 0'924\,€$ Segunda subida: $0'924\cdot 1'04 = 0'96096\,€$

$0'88\cdot 1'05\cdot 1'04 = 0'96096\,€$ $1'05\cdot 1'04 = 1'092 = 1 + 0'092 = 100\,\% + 9'2\,\%$

Por tanto el aumento ha sido del $9'2\,\%$ y no el $5\,\% + 4\,\% = 9\,\%$ que, erróneamente, se tiende a dar como solución. El error es debido a no tener en cuenta que los dos porcentajes, 5 % y 4 % actúan sobre cantidades iniciales distintas.

Ejemplo **Hace 10 años compré un apartamento por 200.000 €. Hace 5 años lo vendí ganando un 15 % y actualmente su dueño lo ha tenido que vender un 25% más barato. ¿Cuánto cuesta actualmente el apartamento?**

$$200.000\cdot 1'15\cdot 0'75 = 172.500\,€$$

Ejemplo **A María en su factura del agua le aplican un recargo del 10 % sobre el coste total por exceso de consumo, un descuento del 15 %, también sobre el total, por ser empleada de la compañía suministradora, y a la cantidad resultante se le aplica un 16 % de IVA. ¿Cuánto tendrá que pagar finalmente si, según el contador, la cuota era de 120 €?**

$$120\cdot 1'1\cdot 0'85\cdot 1'16 = 130'152\,€$$

Ejemplo **En el contrato de trabajo de un empleado que se hizo en el año 2004 se fijaba una subida anual del 6,5%. Si entonces ganaba 800 € al mes, ¿cuál será su sueldo mensual en el año 2010? ¿Cuándo calculas que llegará a ganar el doble del sueldo inicial?**

En el 2010 habrán pasado 6 años, por tanto: $800\cdot 1'065^{6} = 1167'3138\,€$

Ejemplo **Julia comenzó a trabajar como Funcionaria en el años 2000 con un sueldo de 1100 € mensuales. Las subidas anuales que le han aplicado a su sueldo han sido las siguientes:**

2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
$3'5\,\%$	$2\,\%$	$0\,\%$	$3\,\%$	$3'5\,\%$	$2'5\,\%$	$2\,\%$	$2'1\,\%$	$2\,\%$	$3\,\%$

Los índices de precio al consumo de los años 2000 a 2002 fueron:

2000	2001	2002
$4'3\,\%$	$2'5\,\%$	$3'6\,\%$

a) ¿Cuál es el sueldo actual de Julia? ¿Crees que su sueldo ha aumentado un $23'6$ %? (suma de todos los porcentajes) ¿por qué no es así?
b) ¿Cuál fue la pérdida de poder adquisitivo que tuvo Julia durante los años 2000, 2001 y 2002? ¿Crees que podremos averiguarlo sumando y/o restando porcentajes?

a) $1100\cdot 1'035\cdot 1'02\cdot 1'03\cdot 1'035\cdot 1'025\cdot 1'02\cdot 1'021\cdot 1'02\cdot 1'03 = 1388'3467\,€$

El sueldo ha aumentado un $26'21\%$ y no un $23'6\%$, ya que los porcentajes se multiplican, no se suman.

$$1'035\cdot 1'02\cdot 1'03\cdot 1'035\cdot 1'025\cdot 1'02\cdot 1'021\cdot 1'02\cdot 1'03=1'2621$$

b) El incremento del sueldo en esos años fue de $1'035\cdot 1'02\cdot 1=1'0557$ €, es decir del $5'57\%$, mientras que el coste de la vida subió un $1'043\cdot 1'025\cdot 1'036=10'75\%$, por lo tanto Julia perdió un $10'75\%-5'57\%=5'18\%$ de poder adquisitivo.

Problemas propuestos sobre Porcentajes

1) **Expresa en fracción: a) 12% b) 3’5% c) 60% d) 75% e) 100% f) 150% g) 1/2 %**

2) **Expresa en porcentaje: a) 0,12 b) 4’12 c) 0’425 d) 1,7 e) 3 f) 1/10 g) 0,333... h) ¾**

3) **Completa la siguiente tabla:**

	10%	12'5%	20%	25%	33%	50%	75%
12							
		3					
					30		
							3
120							
			4'8				

4) **Determina qué porcentaje es:**
   a) 35 alumnos de un instituto de 700 alumnos.
   b) 2.540 € de rebaja por una compra de 63.500 €
   c) 357 manzanas podridas de un total de 1.500 manzanas.
   d) 40 horas de trabajo semanal de una jornada de 48 horas.

5) **Calcula cuál es:**
   a) El total de una deuda, sabiendo que el 8% de ella es 56.000 €
   b) El precio de un artículo cuyo 12% es 3.600 €
   c) La edad de un padre si el 24% de su edad equivale a la edad de su hija de 12 años.
   d) El descuento del sueldo de un empleado si recibió 84.000 € que equivale al 85%.

6) **Jorge tiene que pagar 4.700 €, pero le rebajan el 5% de su deuda, ¿cuánto le resta por pagar?**

7) **Pedro tenía 8.000 € y se gastó el 20%. Si le dio a su hermano el 15% del resto, ¿cuánto le queda?**

8) **Un artículo se rebaja de 2.700 € a 2.400 €. ¿Cuál es el porcentaje de rebaja? Si el artículo sube de 2.700 € a 3500 €. ¿Cuál es el porcentaje de subida?**

9) **De las 240 láminas que tiene un niño, 48 están repetidas. ¿Cuál es el porcentaje de láminas repetidas?**

10) **Una persona gastó 16.200 €, lo que equivale al 20% de su dinero. ¿Cuánto dinero tenía?**

11) **¿A cómo hay que vender lo que ha costado 680 € para ganar el 40% de la venta?**

12) **En los últimos 3 años, la evolución de las pensiones mínimas para mayores de 65 años con cónyuge es la reflejada en la tabla adjunta (datos reales). ¿Cuál ha sido el porcentaje de subida de la pensión en el 2009 respecto al 2008? ¿Y en el año 2010 respecto al 2009? ¿Cuál ha sido el porcentaje total de subida desde el 2008 al 2010?**

2008	2009	2010
658′7	696′1	725′2

13) **En una población de 10000 habitantes, el 15% son inmigrantes y el 40% de los inmigrantes son ecuatorianos. ¿Cuántos ecuatorianos viven en esa población? ¿Qué porcentaje de esa población son ecuatorianos?**

14) **En unos grandes almacenes rebajan un abrigo un 20% en las primeras rebajas y, sobre ese precio, vuelven a hacer otro 20% de descuento en las segundas rebajas. ¿Qué porcentaje del precio original se ha rebajado el abrigo?**

15) **Este mes ha habido en mi comunidad autónoma 120 accidentes de tráfico, lo que mejora la cifra del año pasado que fue de 160 accidentes. ¿En qué tanto por ciento han disminuido ese tipo de accidentes?**

16) **¿Qué fracción de hora son a) 5 minutos, b) 24 minutos, c) 360 segundos?**

17) **Julio ha contestado correctamente 35 preguntas de un test, lo que supone un 7/12 del total. ¿Cuántas preguntas tenía el test?**

18) **La tercera parte de los 240 viajeros de un avión son europeos, y 2/5 africanos. El resto son americanos. ¿Cuántos americanos viajan en el avión?**

19) **Una familia gasta 2/5 de su presupuesto en la vivienda y 1/3 en comida. Cubiertos estos gastos aún le quedan 400 € cada mes. ¿A cuánto ascienden sus ingresos mensuales?**

20) **Las ¾ partes de las calculadoras de bolsillo que venden un comercio son científicas y, de éstas, un 5/12 son programables. Averigua qué fracción de las calculadoras vendidas son programables. ¿Qué porcentaje suponen? De 400 calculadoras vendidas en un año, ¿cuántas eran programables?**

21) **Una fotocopiadora reduce a los 5/6 del tamaño original. De la fotocopia reducida saco otra y así sucesivamente hasta obtener una copia menor que la mitad del original. ¿Cuántas veces he tenido que repetir el proceso?**

22) **Un servicio de cerrajería cobra 15 € por cada hora de trabajo en un servicio normal. Si el trabajo se realiza de forma urgente, el precio aumenta un 20%. ¿Cuánto se pagará por un trabajo de servicio urgente que ha llevado 3 horas?**

23) **Un determinado producto ha aumentado su precio un 15% en un año, y al año siguiente ha aumentado un 16%. ¿Cuál ha sido el porcentaje de aumento en total?**

24) **Un vendedor de motos gana un 30% sobre el precio de coste de la moto. Si la moto tenía un precio de coste de 15600 € y el vendedor hace un 10% de descuento y aumenta un 16% de IVA, ¿cuál es el precio final de la moto?**

25) **En una factura con un 16% de IVA, la cantidad inicial es de 850 €. Si han hecho un descuento y la cantidad final a abonar es de 788'8 €, ¿qué porcentaje de descuento han hecho?**

26) **Al ir a pagar una factura que hacen un 15% de descuento y aplican un 16% de IVA, analiza qué es mejor: que hagan primero el descuento y luego apliquen el IVA, al revés, o da lo mismo.**

Razón y Proporción

Razón de dos cantidades

La razón de dos números o de dos cantidades a y b $(b \neq 0)$ es el cociente entre ambos números o cantidades.

Cualquier fracción es una razón pero el contrario no es cierto, ya que por ejemplo $\frac{5'2}{3'5}$ es una razón pero no es una fracción, porque tanto el numerador como el denominador no son números enteros.

Proporción

Una proporción es una igualdad entre dos razones $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Por ejemplo: $\frac{2}{3} = \frac{3'4}{5'1}$ ya que $2 \cdot 5'1 = 3 \cdot 3'4$

Magnitudes directamente proporcionales

Dos magnitudes son directamente proporcionales si al multiplicar o dividir cualquier valor de una de ellas por un número, el valor correspondiente de la otra queda también multiplicado o dividido por el mismo número. En la práctica, para comprobar si dos magnitudes son directamente proporcionales nos preguntamos: ¿a doble cantidad de la primera corresponde doble cantidad de la segunda?, ¿a triple cantidad de la primera corresponde triple cantidad de la segunda?, etc. *La razón o cociente entre la segunda y la primera magnitud se llama constante de proporcionalidad directa.*

- Son magnitudes directamente proporcionales la cantidad de un producto y su coste, el tiempo para realizar un trabajo y el coste de la mano de obra, etc.
- No son magnitudes directamente proporcionales la edad de una persona y su peso, el precio de una joya y su tamaño, la extensión de un país y el número de habitantes y el área de un cuadrado y la longitud de su lado.

Regla de tres simple directa

La regla de tres simple directa es un procedimiento para resolver problemas en los que intervienen dos magnitudes directamente proporcionales. Dadas dos magnitudes, se conoce la equivalencia entre un valor de una y un valor de la otra y el problema consiste en que a cada nuevo valor que se le de a una de las magnitudes hay que encontrar el correspondiente valor proporcional de la otra magnitud. Resolver un problema mediante una regla de tres simple directa consiste en hallar el cuarto término de una proporción conocidos los otros tres.

Ejemplo **Si 5 kg de naranjas cuestan 4 €, ¿cuánto costarán 15 kg?**

Como al duplicar el peso de las naranjas también se duplica su precio, las magnitudes son directamente proporcionales. Para resolver los problemas de este tipo so ordenan los datos en forma de una tabla. La incógnita “x” del problema es en este caso el precio total de las naranjas que deseamos averiguar.

Naranjas (kg)		Coste (€)
5 kg	————	4 €
15 kg	————	x

$$\frac{5}{15}=\frac{4}{x} \qquad 5x=60 \quad \Rightarrow \quad x=12\,€$$

Ejemplo **Un ciclista recorre en 3 horas una distancia de 90 km a velocidad constante. ¿Qué tiempo tardará en recorrer 30 km?**

Distancia		Tiempo
90 km	————	3 h
30 km	————	x

$$\frac{90}{30}=\frac{3}{x} \qquad 90x=90 \quad \Rightarrow \quad x=1\,\text{hora}$$

Magnitudes inversamente proporcionales

Dos magnitudes son inversamente proporcionales si al multiplicar (dividir) cualquier valor de una de ellas por un número, el valor correspondiente de la otra queda dividido (multiplicado) por el mismo número. Dadas dos magnitudes, se conoce la equivalencia entre un valor de una y un valor de la otra y el problema consiste en que a cada nuevo valor que se le de a una de las magnitudes hay que encontrar el correspondiente valor proporcional inverso de la otra magnitud.

- Por ejemplo, son magnitudes inversamente proporcionales el tiempo que se necesita para realizar un trabajo y el número de trabajadores que se destinan a él, ya que, si se duplica el número de trabajadores, se necesita la mitad de tiempo.
- También son inversamente proporcionales el número de personas que se reparten una cantidad de dinero y lo que les corresponde a cada una de ellas, ya que, si se duplica la cantidad de personas, perciben la mitad del dinero.

Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando la razón de dos cantidades cualesquiera de una de ellas es igual al inverso de la razón de las dos cantidades correspondientes de la otra.

Regla de tres simple inversa

La regla de tres es un procedimiento para resolver problemas en los que intervienen dos magnitudes inversamente proporcionales. Si se trata únicamente de dos magnitudes directamente proporcionales decimos que es una regla de tres simple directa. Resolver un problema mediante una regla de tres simple directa consiste en hallar el cuarto término de una proporción conocidos los otros tres.

Ejemplo **Cada uno de los 6 acertantes de una lotería cobrarán 80000 €. ¿Cuánto cobraría cada uno si apareciesen dos acertantes más?**

Son magnitudes inversamente proporcionales, ya que, cuantos más acertantes menor es el premio.

Acertantes		Premio
6	————	80000
8	————	x

$$\frac{6}{8}=\frac{x}{80000} \qquad 480000=8x \quad \Rightarrow \quad x=60000\,€$$

Ejemplo **9 personas realizan un trabajo en 6 días. ¿Cuánto tiempo tardarán en realizar el mismo trabajo 6 personas?**

Son magnitudes inversamente proporcionales, ya que, cuantas menos personas trabajen más tiempo tardarán en realizar el mismo trabajo.

Personas		Tiempo
9	————	3 días
3	————	x

$$\frac{9}{3}=\frac{x}{3} \qquad 27=3x \quad \Rightarrow \quad x=9 \text{ días}$$

Repartos Proporcionales

El problema consiste en repartir una cierta cantidad en partes proporcionales a varios números dados. Estos repartos pueden ser directos o inversos, según si el reparto se efectúa de manera directamente proporcional o inversamente proporcional.

Repartos proporcionales directos

Para repartir una cierta cantidad de forma directamente proporcional a varios números se opera de la siguiente manera:

- *Se divide dicha cantidad entre la suma de todos los números y así se obtiene la constante de proporcionalidad.*
- *Se multiplica la constante por cada número para hallar las cantidades buscadas.*

Ejemplo **El padre de Juan, Pablo y María quiere repartir 396 € de forma directamente proporcional a las edades de cada uno. Si Juan tiene 20 años, Pablo 15 años y María 9 años, ¿qué cantidad le corresponde a cada uno?**

La suma de las edades es de $20+15+9=44$ años

A Juan le corresponde: $396\cdot\frac{20}{44}=180$ €

A Pablo le corresponde: $396\cdot\frac{15}{44}=135$ €

A María le corresponde: $396\cdot\frac{9}{44}=81$ €

Ejemplo **Tres socios pusieron, para formar una empresa, 7000 €, 9000 € y 10000 € respectivamente. Al cabo de un tiempo la empresa ha producido unos beneficios de 5200 €. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?**

El capital total que pusieron es de $7000+9000+10000=26000$ €

Al primer socio le corresponde: $5200\cdot\frac{7000}{26000}=1400$ €

Al segundo socio le corresponde: $5200\cdot\frac{9000}{26000}=1800$ €

Al tercer socio le corresponde: $5200\cdot\frac{10000}{26000}=2000$ €

Repartos proporcionales inversos

Para repartir una cierta cantidad de forma inversamente proporcional a varios números, se opera de la siguiente manera:

- *Calculamos los inversos de cada número.*
- *Se reducen todas las fracciones a común denominador.*
- *Se multiplica la cantidad a repartir por los numeradores de las fracciones.*

Ejemplo **Un club de fútbol decide repartir una prima de 120000 € entre los dos porteros del primer equipo en partes inversamente proporcionales a los goles encajados durante la temporada, que fueron 16 y 24. ¿Qué parte le corresponde a cada uno?**

Calculamos los inversos de los números 16 y 24 que son $\frac{1}{16}$ y $\frac{1}{24}$

Reducimos las fracciones a común denominador $\frac{1}{16}=\frac{3}{48}$ y $\frac{1}{24}=\frac{2}{48}$

Repartimos los 120000 € en partes proporcionales a 3 y 2, cuya suma es 5.

$$120000\cdot\frac{3}{5}=72000\,€ \qquad 120000\cdot\frac{2}{5}=48000\,€$$

Al portero que encajó 16 goles le corresponden 72000 € y al que encajó 24 goles le corresponde 48000 €.

Ejemplo **Un padre quiere repartir 18000 € de forma inversamente proporcional a las edades de sus tres hijos de 10, 11 y 15 años. ¿Cuánto le corresponderá a cada uno?**

Calculamos los inversos de los números 10, 11 y 15 que son $\frac{1}{10},\frac{1}{11}$ y $\frac{1}{15}$

Reducimos las fracciones a común denominador $\frac{1}{10}=\frac{33}{330}$, $\frac{1}{11}=\frac{30}{330}$ y $\frac{1}{15}=\frac{22}{330}$

Repartimos los 18000 € en partes proporcionales a 33, 30 y 22, cuya suma es 85.

$$18000\cdot\frac{33}{85}=6988'23\,€ \qquad 18000\cdot\frac{30}{85}=6352'94\,€ \qquad 18000\cdot\frac{22}{85}=4658'82\,€$$

Proporcionalidad compuesta

Diremos que un problema es de proporcionalidad compuesta cuando en él intervienen más de dos magnitudes proporcionales. Al intervenir más de dos magnitudes, las relaciones de proporcionalidad dos a dos de las magnitudes que intervienen pueden ser distintas, es decir, puede ser que entre las magnitudes A y B la relación sea de proporcionalidad directa y entre las magnitudes B y C sea inversa. Como entre las magnitudes se pueden establecer relaciones de proporcionalidad directa o inversa, podemos distinguir tres casos de regla de tres compuesta.

Procedimiento general

Un crucero por el Mediterráneo para 200 personas durante 15 días necesita, para gastos de alojamiento y comida, 54000 €. ¿Cuánto se gastará para alojar y alimentar a 250 personas durante 10 días?

Método de reducción a la unidad

1) Elaboramos una tabla con las magnitudes y las cantidades correspondientes.

D = nº de días	**P = nº de personas**	**G = Gastos**
15 días	200 personas	54000 €
10 días	250 personas	x €

2) Estudiamos qué relación de proporcionalidad, directa o inversa, mantiene la magnitud **G** de la incógnita con las otras magnitudes.
   a) Si **P** se mantiene constante, entonces a doble número de días hay doble gasto, a triple número de días triple gasto, si reducimos las vacaciones a la tercera parte, el gasto se reducirá a la tercera parte. Esto quiere decir que *G es directamente proporcional a D*.
   b) Si **D** se mantiene constante, entonces a doble número de personas hay doble gasto, a triple número de personas hay triple gasto etc. Esto quiere decir que *G es directamente proporcional a P*.

3) En la siguiente tabla intentamos reducir el estudio de las magnitudes conocidas (en este caso personas y días) a uno.

Días	***Personas***	***Gastos (€)***
15 días	200 personas	54000 €
15 días	1 persona	$\frac{1}{200}\cdot 54000$ €
1 día	1 persona	$\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{200}\cdot 54000$ €
10 días	1 persona	$\frac{10}{15}\cdot\frac{1}{200}\cdot 54000$ €
10 días	250 personas	$\frac{10}{15}\cdot\frac{250}{200}\cdot 54000$ €

4) El resultado final es $x = \frac{10}{15}\cdot\frac{250}{200}\cdot 54000 = 45000$ €

Método mediante una regla de tres compuesta

1) Planteamos la regla de tres y expresamos las cantidades de la misma magnitud en la misma unidad.

2) Comparamos cada magnitud con la que lleva la incógnita “x” para ver si la proporcionalidad es directa o inversa. Escribimos una **D** entre las magnitudes que son directamente proporcionales y una **I** entre las magnitudes que son inversamente proporcionales.

D Días		D Personas		Gastos
15	———	**200**	———	**54000**
10	———	**250**	———	**x**

3) Escribimos una proporción en la que la primera razón son las cantidades donde está la “x” y la segunda razón es el producto de las razones correspondientes a cada magnitud teniendo en cuenta que si la proporción es inversa (I) hay que invertir las cantidades.

$$\frac{54000}{x}=\frac{15}{10}\cdot\frac{200}{250} \qquad \frac{54000}{x}=\frac{15\cdot 200}{10\cdot 250}=\frac{3000}{2500}=\frac{6}{5} \qquad x=\frac{5\cdot 54000}{6}=45000\,€$$

Lo más práctico para resolver estos problemas es mediante una regla de tres compuesta, ya que si en el problema intervienen más de tres magnitudes la tabla se hace bastante extensa.

Ejemplo **Si 18 máquinas mueven 1200 m^3 de tierra en 12 días, ¿cuántos días necesitarán 24 máquinas para mover 1600 m^3 de tierra?**

Método de reducción a la unidad

1) Elaboramos una tabla con las magnitudes y las cantidades correspondientes.

M = Máquinas	**V = Volumen**	**D = nº de días**
18 máquinas	1200 m^3	12 días
24 máquinas	1600 m^3	x días

2)

a) Si **V** se mantiene constante, entonces el doble o triple de máquinas tardarán la mitad o la tercera parte de días, a triple número de máquinas se tarda la tercera parte de días, etc. Esto quiere decir que *D es inversamente proporcional a M*.

b) Si **M** se mantiene constante, entonces para mover el doble o el triple de tierra se necesitan el doble o el triple de días. Esto quiere decir que *D es directamente proporcional a V*.

3) En la siguiente tabla intentamos reducir el estudio de las magnitudes conocidas (en este caso máquinas y volumen) a uno.

Máquinas	***Volumen***	***Días***
18 máquinas	1200 m^3	12 días
1 máquina	1200 m^3	$18\cdot 12$ días

1 máquina	$1\,m^3$	$\frac{1}{1200}\cdot 18\cdot 12$ días
24 máquinas	$1\,m^3$	$\frac{1}{1200}\cdot\frac{18}{24}\cdot 12$ días
24 máquinas	$1600\,m^3$	$\frac{1600}{1200}\cdot\frac{18}{24}\cdot 12$

4) El resultado final es $\quad x=\frac{1600}{1200}\cdot\frac{18}{24}\cdot 12=12\,\text{días}$

Método mediante una regla de tres compuesta

I Máquinas		D Volumen		Días
18	———	1200	———	12
24	———	1600	———	x

Escribimos una proporción en la que la primera razón son las cantidades donde está la "x" y la segunda razón es el producto de las razones correspondientes a cada magnitud teniendo en cuenta que si la proporción es inversa (I) hay que invertir las cantidades.

$$\frac{12}{x}=\frac{24}{18}\cdot\frac{1200}{1600} \qquad \frac{12}{x}=\frac{24\cdot 1200}{18\cdot 1600}=1 \qquad x=12\,\text{días}$$

Ejemplo **Si 8 obreros realizan en 9 días, trabajando a razón de 6 horas por día, un muro de 30 m. ¿Cuántos días necesitarán 10 obreros trabajando 8 horas diarias para realizar los 50 m de muro que faltan?**

Manteniendo fijos el nº de horas trabajadas por día y la longitud del muro, cuantos más obreros se tardará menos días. *El nº de obreros y el nº de días es una relación de proporcionalidad inversa.*

Manteniendo fijos el nº de obreros y la longitud del muro, cuantas más horas se trabajen menos días se tardarán. *Las horas trabajadas y el nº de días es una relación de proporcionalidad inversa.*

Manteniendo fijos el nº de obreros y el nº de horas trabajadas por día, cuanto mayor sea la longitud del muro más días se tardará en construirlo. *La longitud del muro y el nº de días es una relación de proporcionalidad directa.*

I Obreros		Días		I Horas		D Longitud
8	———	9	———	6	———	30
10	———	x	———	8	———	50

$$\frac{9}{x}=\frac{10}{8}\cdot\frac{8}{6}\cdot\frac{30}{50} \qquad \frac{9}{x}=\frac{10\cdot 8\cdot 30}{8\cdot 6\cdot 50}=1 \qquad x=9\,\text{días}$$

Problemas propuestos

1) **La construcción de una carretera, que circulará por tres comunidades autónomas diferentes, tendrá un coste total de 25’7 millones de euros y será sufragado de la siguiente manera: un 25% corresponderá a los fondos de la Unión Europea, un 20% a la Administración Central y el resto deberá ser pagado por las tres comunidades de forma proporcional al número de habitantes implicados, que resulta ser de 20450, 123000 y 245500, respectivamente. Calcula la cantidad a pagar por cada una de las administraciones.**

2) **Se han necesitado 2000 calorías para calentar 2 litros de agua desde 10ºC a 50ºC. Si a 5 litros de agua a la misma temperatura inicial le suministramos 8000 calorías ¿Qué temperatura alcanzarán?**

3) **Se reparte un premio de 12100 € entre los tres primeros clasificados en una carrera en proporción inversa al tiempo empleado. Si los tiempos han sido 8, 9 y 10 minutos ¿cuánto le corresponderá a cada corredor?**

4) **Veinte obreros han colocado durante 6 días 400 m de cable trabajando 8 horas diarias. ¿Cuántas horas diarias tendrán que trabajar 24 obreros durante 14 días para tender 700 m de cable?**

5) **Un peregrino recorre 720 km en 24 días caminando 10 horas al día. Calcula cuántos días tardará en recorrer 432 km si camina 8 horas diarias.**

6) **Las cantidades para hacer una tarta de frambuesa para 4 personas son: frambuesas, 350 gr; azúcar, 175 gr; harina, 100 gr y leche 10 cl.**
   a) ¿Cuáles serían las cantidades necesarias para una tarta para 2 personas? ¿Y para 6 personas?
   b) Si tenemos 200 gr de harina y cantidades suficientes de los otros ingredientes, ¿para cuántas personas saldrá la tarta? ¿Cuánto necesitaríamos de cada ingrediente?

7) **Los formatos de papel se basan en una norma alemana que poco a poco ha ido extendiéndose a la mayoría de los países. El tamaño básico, el DIN A0 es un rectángulo de 1 m^2 de superficie. Los sucesivos tamaños DIN A1, DIN A2, DIN A3, DIN A4, etc. se obtienen duplicando el papel sobre el lado mayor.**
   a) Partiendo de un folio haz una tabla en la que aparezcan los datos que vas obteniendo. ¿Qué número de DIN A crees que es el folio que tienes en la mano? ¿Por qué?
   b) ¿Qué proporción guardan sus lados? ¿Guardan la misma proporción los demás formatos?

8) **Para hacer un trabajo en clase, Pedro y un amigo han tardado 4 días.**
   a) Si en el grupo hubiesen estado también María y Luisa, ¿cuánto hubieran tardado?
   b) ¿Y si lo hubiese hecho Pedro solo?

9) **Una finca tiene una valla antigua sostenida por 650 postes colocados a intervalos de 1’20 m. ¿Cuántos postes se necesitarán para la nueva valla en la que los postes se colocarán a intervalos de 1’30 m?**

10) **Un peregrino del camino de Santiago ha invertido 5 días y 2 horas en cubrir una distancia de 128 km. Sabiendo que en cada jornada camina 6 horas, ¿qué distancia recorre al día?**

Proporcionalidad geométrica

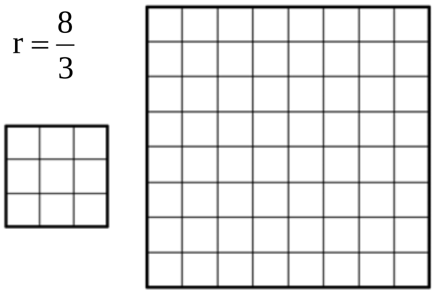
En matemáticas el concepto de semejanza está muy ligado al concepto de proporcionalidad, de tal manera que se dice que dos objetos son semejantes si "guardan" una proporción entre ellos, o lo que es lo mismo, dos figuras son semejantes si guardan una proporción entre cada una de sus partes respectivas. Así, dos fotografías de la misma persona, una de tamaño 3cm x 4cm, y otra ampliada de la anterior a tamaño 6cm x 8cm, son semejantes porque guardan una misma proporción, ya que una es la ampliación de la otra tanto a lo ancho como a lo largo con una misma razón, o sea, las divisiones de sus lados correspondientes son de igual valor.

- *Dos figuras que tienen la misma forma y distintas dimensiones se llaman semejantes.*
- *Dos figuras son semejantes si sus ángulos correspondientes son iguales y los lados correspondientes proporcionales.*
- *Los elementos que se corresponden (puntos, lados, ángulos, etc.) se llaman homólogos.*

Ejemplo sobre cuadrados y circunferencias

Todos los cuadrados son semejantes (ángulos iguales y lados proporcionales).

Los dos cuadrados son semejantes y la razón de semejanza es: $r = \frac{8}{3}$



El área del cuadrado pequeño es: $A_1 = 3^2 = 9$

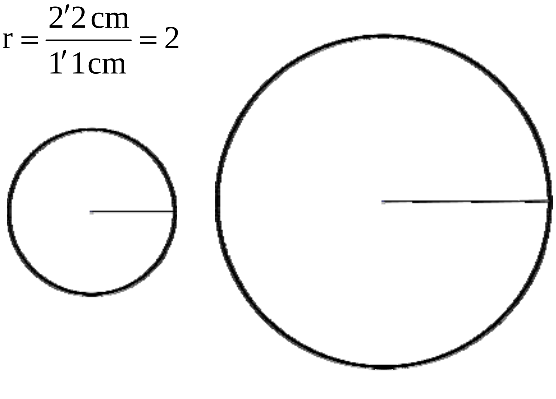
El área del cuadrado grande es: $A_2 = 8^2 = 64$

El cociente entre las áreas es: $\frac{A_2}{A_1} = \frac{64}{9} = \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{64}{9}$

La razón de las áreas de dos cuadrados es igual al cuadrado de la razón de semejanza.

Todas las circunferencias son semejantes.

Los dos círculos son semejantes. Midiendo con la regla observamos que el radio de la circunferencia pequeña es $1'1\,\text{cm}$ y el de la grande $2'2\,\text{cm}$. La razón de semejanza es: $r = \frac{2'2\,\text{cm}}{1'1\,\text{cm}} = 2$



El área del círculo pequeño es: $A_1 = \pi \cdot 1'1^2$

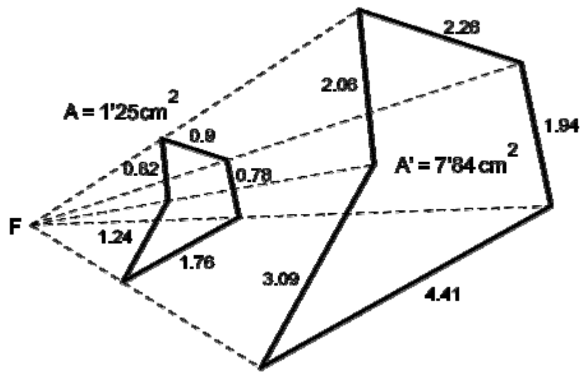
El área del círculo grande es: $A_2 = \pi \cdot 2'2^2$

El cociente entre áreas es: $\frac{A_2}{A_1} = \frac{\pi \cdot 2'2^2}{\pi \cdot 1'1^2} = \left(\frac{2'2}{1'1}\right)^2 = 4$

La razón de las áreas de dos círculos es igual al cuadrado de la razón de semejanza.

Ejemplo sobre figuras arbitrarias semejantes

Podemos dibujar dos figuras semejantes partiendo de un punto fijo F, llamado foco.



$$\frac{2'26\,\text{cm}}{0'9\,\text{cm}} = 2'5111 \qquad \frac{1'94\,\text{cm}}{0'78\,\text{cm}} = 2'4871$$

$$\frac{4'41\,\text{cm}}{1'76\,\text{cm}} = 2'5056 \qquad \frac{3'09\,\text{cm}}{1'24\,\text{cm}} = 2'4919$$

$$\frac{2'06\,\text{cm}}{0'82\,\text{cm}} = 2'5121$$

$$\frac{A'}{A} = \frac{7'84\,\text{cm}^2}{1'25\,\text{cm}^2} = 6'272 = (2'5043)^2$$

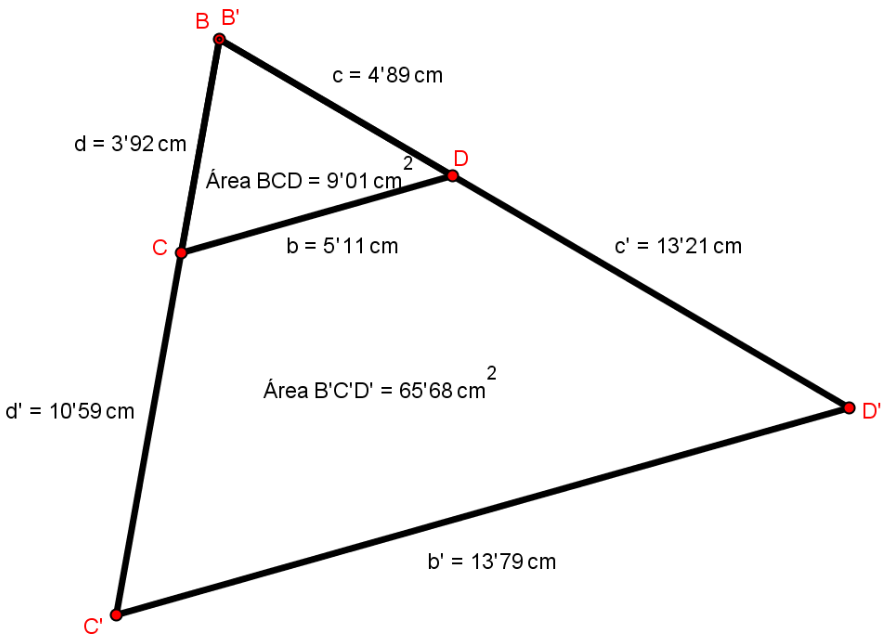
$$\frac{P'}{P} = \frac{2'26\,\text{cm} + 1'94\,\text{cm} + 4'41\,\text{cm} + 3'09\,\text{cm} + 2'06\,\text{cm}}{0'9\,\text{cm} + 0'78\,\text{cm} + 1'76\,\text{cm} + 1'24\,\text{cm} + 0'82\,\text{cm}} = \frac{13'76\,\text{cm}}{5'5\,\text{cm}} = 2'5018$$

La razón de los perímetros de dos figuras arbitrarias semejantes es igual a la razón de semejanza.

La razón de las áreas de dos figuras arbitrarias semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza.

Ejemplo sobre triángulos

Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus ángulos homólogos iguales y sus lados homólogos proporcionales, es decir, cada longitud de uno de ellos se obtiene multiplicando la longitud correspondiente en el otro por una cantidad fija (el doble, el triple, la mitad, etc.). A esa cantidad fija se le llama *razón de semejanza*. En los triángulos semejantes de la figura, calcular la razón de la proporción entre los lados, la razón de los perímetros y la razón de las áreas.



Si medimos con una regla los lados de los triángulos y calculamos sus áreas, comprobaremos que las medidas son reales.

<u>*Proporcionalidad entre los lados homólogos*</u>

$$\frac{b'}{b}=\frac{13'79\,\text{cm}}{5'1\,\text{cm}}=2'70 \qquad \frac{c'}{c}=\frac{13'21\,\text{cm}}{4'89\,\text{cm}}=2'70 \qquad \frac{d'}{d}=\frac{10'59\,\text{cm}}{3'92\,\text{cm}}=2'70$$

$$\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}=\frac{d'}{d}=2'70$$ A esta cantidad se le llama *razón de semejanza*

<u>*Proporcionalidad entre los perímetros*</u>

$$\frac{b'+c'+d'}{b+c+d}=\frac{13'79\,\text{cm}+13'21\,\text{cm}+10'59\,\text{cm}}{5'1\,\text{cm}+4'89\,\text{cm}+3'92\,\text{cm}}=\frac{37'59\,\text{cm}}{13'91\,\text{cm}}=2'70$$

<u>*Proporcionalidad entre las áreas*</u>

$$\frac{\text{Área }B'C'D'}{\text{Área }BCD}=\frac{65'68\,\text{cm}^2}{9'01\,\text{cm}^2}=7'2896=(2'70)^2$$

La razón de las áreas de dos triángulos semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza.

<u>*Conclusión*</u>

- *La razón de la proporción entre los lados de dos figuras semejantes se llama razón de semejanza.*

$$\mathbf{\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=r}$$

- *La razón de los perímetros de dos figuras semejantes es igual a su razón de semejanza.*

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{a+b+c}{a'+b'+c'}=\mathbf{\frac{P}{P'}}=\mathbf{r}$$

- *La razón de las áreas de dos figuras semejantes es igual al cuadrado de su razón de semejanza.*

$$\mathbf{\frac{S}{S'}=r^2}$$

<u>*Ejemplo*</u> **Los catetos de un triángulo rectángulo miden 24 m y 10 m. ¿Cuánto medirán los catetos de un triángulo semejante al anterior cuya hipotenusa mide 52 m?**

Si $a=14\,\text{m}, b=10\,\text{m}$ y c son los catetos y la hipotenusa del primer triángulo, por el teorema de Pitágoras tenemos:

$$c=\sqrt{24^2+10^2}=26$$

Dividiendo entre sí las dos hipotenusas obtenemos la razón de semejanza $\frac{c'}{c}=\frac{52}{26}=2$.

Si a', b' son los catetos del segundo triángulo, conocida la razón de semejanza se deduce:

$$\frac{a'}{24}=2 \Rightarrow a'=2\cdot 24=48 \qquad \frac{b'}{10}=2 \Rightarrow b'=2\cdot 10=20$$

Ejemplo **En una pizzería venden tres tipos de pizzas: Grande, Mediana y Pequeña. La grande tiene un diámetro de 45 cm y cuesta 21'06 €, la mediana tiene un diámetro de 30 cm y cuesta 9'36 € y la pequeña tiene un diámetro de 15 cm y cuesta 2'34 €. La pizza mediana es el doble de ancha que la pequeña ¿por qué no cuesta el doble? La pizza grande es el triple de ancha que la pequeña ¿por qué no cuesta el triple?**

Veamos la razón de semejanza entre los radios o diámetros y entre las áreas.

Mediana y pequeña $\quad r=\frac{30}{15}=2 \quad \frac{A_M}{A_P}=\frac{\pi\cdot 15^2}{\pi\cdot 7'5^2}=4 \quad A_M=4A_P$

La superficie de la mediana es 4 veces la superficie de la pequeña, por eso cuesta 4 veces más $9'36\,€=4\cdot 2'34\,€$.

Grande y pequeña $\quad r=\frac{45}{15}=3 \quad \frac{A_G}{A_P}=\frac{\pi\cdot 22'5^2}{\pi\cdot 7'5^2}=9 \quad A_G=9A_P$

La superficie de la grande es 9 veces la superficie de la pequeña, por eso cuesta 9 veces más $21'06\,€=9\cdot 2'34\,€$.

.

Ejemplo **Se quiere enmarcar una foto de $6x11\,cm$. Calcula las dimensiones del marco para que la razón entre el área del marco y el de la foto sea 25/16.**

La razón entre las áreas es el cuadrado de la razón de semejanza, por lo tanto:

$$\frac{A_M}{A_F}=\frac{25}{16}=\left(\frac{5}{4}\right)^2 \Rightarrow r=\frac{5}{4}=1'25$$

Las dimensiones del marco serán: $6\cdot 1'25=7'5\,cm \qquad 11\cdot 1'25=13'75\,cm$

Problemas propuestos

1) **Dibuja un triángulo, uno de cuyos lados mide $2'5\,cm$, otro $3'5\,cm$ y el ángulo comprendido entre ellos 80º. ¿Sabrías dibujar otro triángulo semejante al anterior uno de cuyos lados mida $7'5\,cm$ y el otro $10'5\,cm$? ¿Cuál es la razón de semejanza? ¿Cuántas veces es mayor el área del grande que la del pequeño?**
2) **Disponemos de una foto de dimensiones $17\times 15\,cm$. Si queremos hacer una fotocopia cuya imagen quede reducida al 50% de la superficie original ¿cuáles serán las nuevas dimensiones? Si queremos hacer una copia cuya imagen sea el doble de ancha y de larga ¿cuáles serán las nuevas dimensiones?**

Escalas

Dada una representación proporcional de un objeto real necesitamos saber la razón de proporcionalidad que guarda con él. Esta *razón de proporcionalidad se llama escala*. Las escalas pueden ser numéricas o gráficas.

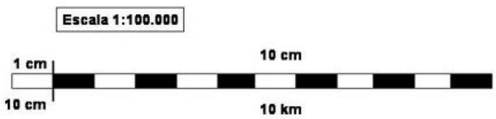
Escala numérica

La escala numérica se expresa en la forma $\mathbf{x:y}$, donde "x" representa las unidades medidas sobre la representación proporcional e "y" la medida que corresponde en el objeto real. Cuando es posible, se suele dar la escala con alguno de sus elementos igual a la unidad. Podemos distinguir 3 casos:

- *Si* $x > y$, *la escala es de aumento*. Este tipo de escalas se emplean sobre todo para representar piezas diminutas como, por ejemplo, los engranajes de un reloj. Por ejemplo, $50{:}1$ significa que a 50 unidades en la representación le corresponde 1 unidad en el objeto real.
- *Si* $x < y$ *la escala es de reducción*. Este tipo de escalas son las más comunes y se emplean para los planos de pisos, mapas de carreteras, etc. Por ejemplo, $1{:}50$ significa que a una unidad en la representación le corresponden 50 unidades en el objeto real.
- Si $x = y$ el tamaño físico del objeto representado en el plano coincide con la realidad.

Escala gráfica

En los mapas suele encontrarse una línea graduada y segmentada que complementa o sustituye a la escala numérica.



La ventaja de esta escala sobre la numérica es que esta se puede trabajar directamente sobre el mapa, sin realizar ningún cálculo, la otra ventaja es que si el mapa se amplia o se reduce esta sigue siendo útil pues mantiene las proporciones, no sucede lo mismo con la escala numérica.

Ejemplo **a) ¿Cuánto medirá en un plano a escala 1:320 una longitud medida en el terreno de $54'32\,\text{m}$? b) Si en el plano se ha representado una distancia que mide 17 cm ¿cuál es el valor de la distancia en la realidad?**

a) El problema consiste en reducir o dividir la longitud medida tantas veces como indica el denominador de la escala. Por consiguiente, la representación quedará 320 veces más pequeña que la longitud real medida.

$$\frac{54'32\,\text{m}}{320} = 0'16975\,\text{m} = 16'975\,\text{cm}$$

En el plano se debe medir una longitud de $16'975\,\text{cm}$ para representar los $54'32\,\text{m}$ medidos en el terreno.

b) $17\,\text{cm} \cdot 320 = 5440\,\text{cm} = 54'40\,\text{m}$

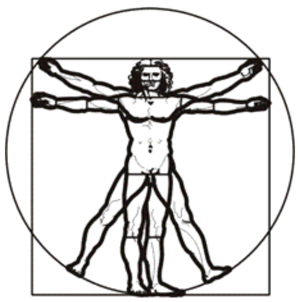
Ejemplo **Averigua la escala de un mapa sabiendo que la distancia entre dos pueblos es de 20 cm. en el mapa y de 15 km. en la realidad.**

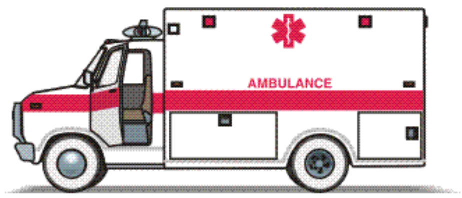
$$15\,\text{km} = 1500000\,\text{cm} \qquad \frac{1500000}{20} = 75000$$

La escala es 1:75000, que significa que a 1 cm en el mapa le corresponden 75000 cm en la realidad, es decir $750\,\text{m} = 0'75\,\text{km}$

Problemas propuestos

1) **Estos dibujos están hechos a escala de objetos reales cuyos valores son: hombre de Vitrubio: 1’20 m, ambulancia: 170 cm. e ingeniero: 1900 mm.**





a) ¿Cuáles son las escalas que se han aplicado?
b) ¿En cuál de ellos crees que se ha aplicado una escala mayor? ¿y menor?

2) **En un periódico observamos la fotografía de un jugador de baloncesto. Si en la fotografía el jugador mide 12 cm y la escala es de 1:18**
a) ¿Cuánto mide en la realidad el jugador?
b) Si la canasta de baloncesto se encuentra a una altura de 3 m ¿cuánto tiene que saltar el jugador para tocar con la cabeza el aro?

3) **Tenemos dibujados en un papel un camión y un puente. El camión mide de alto 5 cm. y la escala es de 1:62 mientras que el puente mide de alto 4 cm. y la escala es de 1:75. ¿Pasará el camión por debajo del puente?**

4) **Dos ciudades distan entre sí 25 km ¿A qué distancia se hallarán en un plano de escala $1:25000$? ¿Y en otro en el que se indica que 5 cm equivalen a 100 km?**

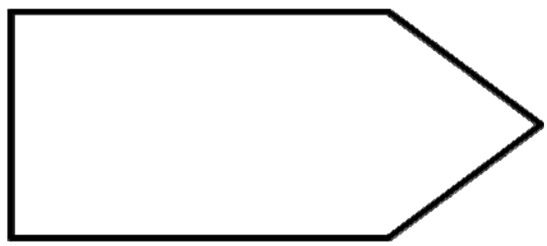
5) **Un dibujo de un anillo se hace a escala $5:1$. ¿Cuál es el diámetro del anillo si en el dibujo mide 7 cm?**

6) **Si la razón de las áreas de dos polígonos semejantes es $0'04$, ¿cuál es la razón de sus perímetros?**

7) **En un triángulo se traza la paralela a uno de sus lados por el punto medio de uno de los otros lados. ¿Qué relación hay entre el perímetro del triángulo obtenido y el primitivo? ¿Cuál es la razón entre las áreas de los dos triángulos?**

8) **Se tiene un hexágono regular de lado 10 cm. Calcula la razón de proporcionalidad y la razón de las áreas con otro hexágono regular de 15 cm, de lado.**

9) **Dada la figura adjunta, S, dibuja en cada caso una figura semejante, S', tal que:**
a) Su perímetro sea el doble de S.
b) Su área sea 9 veces la de S.
c) Tenga un vértice en común con S.
d) Esté contenida en el interior de S.



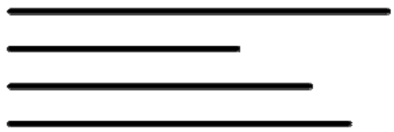
10) **En un plano de una vivienda dibujado a escala $1:40$ una habitación mide $1'5\,\text{cm}$. ¿Cuánto medirá si el dibujo se hace a escala $1:50$?**

11) **Dibuja a escala $1:100$ el plano de tu habitación**.

12) **Si deseas representar en un papel A4 la planta de un edificio rectangular de 35 m de largo y 27 m de ancho, ¿qué escala, como mínimo, deberás emplear?**

13) **Averigua qué escala debes emplear para realizar una maqueta del I.E.S. Historiador Chabás que quepa sobre un tablón de exposición rectangular que mida 2 m de largo por $1'5\,\text{m}$ de ancho.**

14) **Estos cuatro segmentos son diferentes representaciones que un grupo de alumnos ha realizado de una vara de 2 m de longitud. ¿Cuál es la escala de cada representación?**



Escalas, Planos y Mapas

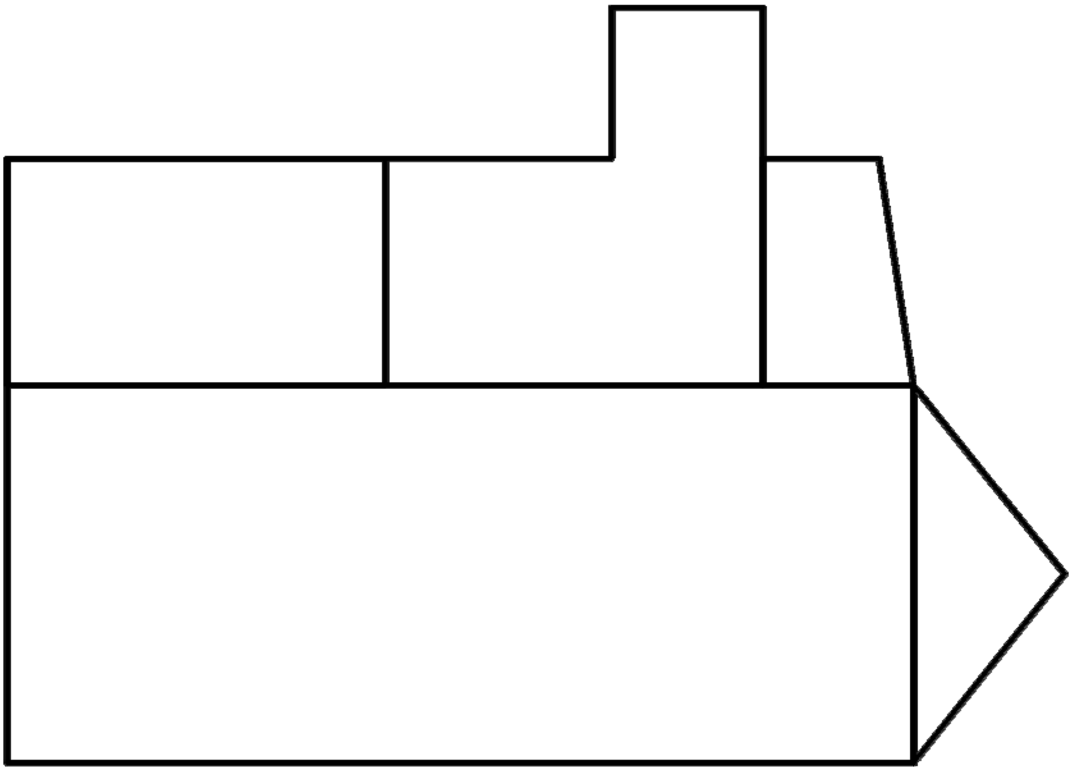
Ejemplo **Teniendo en cuenta la escala gráfica que figura en la parte inferior derecha del mapa, calcula, de manera aproximada:**

a) La distancia entre Madrid y Valencia.
b) La distancia entre Madrid y París.
c) La distancia entre Madrid y Roma
d) Compara los cálculos realizados con las distancias reales.

Ejemplo **a) ¿Cuál es la superficie real de esta vivienda si la escala es 1:125?**

b) ¿Cuál será su valor en el mercado si $1\,m^2$ cuesta 1500 €?

Solución: a) $149'695312\,m^2$ b) $224.542'968\,€$



Google Maps

Ejemplo **A una altura de $9'79\,km$, el satélite nos envía esta imagen donde localizamos las poblaciones de Denia, Ondara y Pedreguer. Con la ayuda de una regla realiza todas las mediciones y cálculos que consideres convenientes y contesta a las siguientes preguntas:**

a) ¿A qué escala está hecha la fotografía?

b) ¿Cuáles son las distancias reales entre las poblaciones?

c) Busca en Internet el valor de las distancias y compáralas con los resultados que has obtenido.

http://dl.dropbox.com/u/12420697/Geogebra%20y%20Google%20Maps/Triangulo%20DPO%20resolver%20alumnos%20dropbox.pdf

Solución: $D-O=7'89\,km$ $O-P=3'86\,km$ $D-P=8'31\,km$

Ejemplo **El satélite nos envía esta imagen donde localizamos el I.E.S. Historiador Chabás. Con la ayuda de una regla, y teniendo en cuenta la escala correspondiente, realiza todas las mediciones y cálculos que consideres convenientes y contesta a las siguientes preguntas:**

a) ¿A qué escala está hecha la fotografía?

b) ¿Cuál es el Perímetro del Chabás?

c) ¿Qué superficie aproximada ocupa (divide el polígono en dos triángulos)?

c) Compara las distancias obtenidas con las reales (investiga en Internet).

http://dl.dropbox.com/u/12420697/Geogebra%20y%20Google%20Maps/Triangulo%20IES%20Chabas%20resolver%20alumnos%20dropbox.pdf

Solución: $P \cong 480'77\,m$ $A \cong 11814'4639\,m^2$