Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Una ecuación lineal con dos incógnitas es una expresión de la forma $\boldsymbol{ax+by=c}$ *donde a, b y c son los coeficientes (números) y "x" e "y" son las incógnitas. Gráficamente una ecuación lineal representa una recta en el plano. Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas será de la forma:*

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{ax+by=c} \\ \boldsymbol{a'x+b'y=c'} \end{aligned}\right\}$$

Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es encontrar los valores de las incógnitas "x" e "y" que verifican las dos ecuaciones a la vez. Puede suceder que haya una única solución (las rectas se cortan en un punto), que haya infinitas soluciones (las rectas coinciden) o que no haya solución (las rectas son paralelas).

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas existen tres métodos: *método de sustitución, método de igualación y método de reducción.*

Método de Sustitución

1) *Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones (la que sea más fácil).*
2) *Se sustituye la expresión de esta incógnita en la otra ecuación, obteniendo una ecuación de primer grado con una sola incógnita.*
3) *Se resuelve la ecuación y se obtiene el valor de una de las incógnitas. Este valor se sustituye en la ecuación despejada al principio para obtener el valor de la otra incógnita.*
4) *Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.*
5) *Comprobamos los resultados sustituyendo los valores de x e y en las dos ecuaciones para ver si se cumplen.*

Ejemplo $\left.\begin{aligned} \mathbf{x+3y=4} \\ \mathbf{2x-y=1} \end{aligned}\right\}$

1) *Se puede despejar la "x" en la primera ecuación o la "y" en la segunda, ya que en los dos casos son las que tienen el coeficiente más sencillo. Despejamos la "x" en la primera ecuación*

$$x=4-3y$$

2) *Se sustituye en la segunda ecuación el valor de la x por la expresión anterior.*

$$2(4-3y)-y=1$$

3) *Se resuelve la ecuación obtenida.*

$$8-6y-y=1 \qquad -7y=-7 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{-7}{-7}=1$$

4) *Se sustituye* $y=1$ *en la ecuación* $x=4-3y$

$$x=4-3(1)=4-3=1$$

5) *Solución* $x=1 \;\; y=1$

6) *Comprobamos el resultado sustituyendo los valores de x e y en el sistema de ecuaciones lineales.*

$$\left.\begin{array}{r} 1+3\cdot 1=4 \\ 2\cdot 1-1=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4=4 \\ 1=1 \end{array}\right\}$$

Método de Igualación

1) *Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones.*
2) *Se igualan las dos expresiones resultantes, con lo que obtenemos una ecuación con una incógnita.*
3) *Se resuelve la ecuación y se obtiene el valor de una de las incógnitas.*
4) *El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las dos expresiones en las que aparecía despejada la otra incógnita.*
5) *Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.*
6) *Se comprueba el resultado sustituyendo los valores de x e y en las dos ecuaciones para ver si se cumplen.*

Ejemplo $\left.\begin{array}{r} \mathbf{x+3y=4} \\ \mathbf{2x-y=1} \end{array}\right\}$

1) *Se despeja "x" en las dos ecuaciones* $\left.\begin{array}{l} x=4-3y \\ x=\dfrac{1+y}{2} \end{array}\right\}$

2) *Se igualan las dos expresiones resultantes* $4-3y=\dfrac{1+y}{2}$

3) *Se resuelve la ecuación obtenida.*

$$2(4-3y)=1+y \qquad 8-6y=1+y \qquad -6y-y=1-8 \qquad -7y=-7 \quad\Rightarrow\quad y=\frac{-7}{-7}=1$$

4) *Se sustituye* $y=1$ *en la ecuación* $x=4-3y$

$$x=4-3(1)=4-3=1$$

5) *Solución* $x=1 \;\; y=1$

6) *Se comprueba la solución (comprobación efectuada en el método anterior).*

Método de Reducción

Para aplicar este método hay que recordar que, si multiplicamos todos los términos de una ecuación lineal con dos incógnitas por un mismo número distinto de cero, se obtiene otra ecuación lineal equivalente a la dada que tiene las mismas soluciones. Esto quiere decir que, por ejemplo, las ecuaciones $x+3y=-1$, $2x+6y=-2$ *y* $5x+15y=-5$ *tienen las mismas soluciones (la segunda ecuación es igual a la primera multiplicada por dos y la tercera ecuación es igual a la primera multiplicada por 5).*

1) *Se elige la incógnita más apropiada para eliminarla.*

2) *Se multiplica una o las dos ecuaciones por un número o números tales que la incógnita que queremos eliminar aparezca en las dos ecuaciones con el mismo coeficiente pero cambiado de signo.*
3) *Se suman los términos semejantes en las dos ecuaciones con lo que desaparecerá una de las incógnitas.*
4) *Se resuelve la ecuación resultante y se obtiene el valor de la incógnita.*
5) *Se sustituye este valor en una de las ecuaciones iniciales y se calcula la otra incógnita.*
6) *Se comprueba el resultado sustituyendo los valores de x e y en las dos ecuaciones para ver si se cumplen.*

Ejemplo $\left.\begin{array}{r}\mathbf{x+3y=4}\\ \mathbf{2x-y=1}\end{array}\right\}$

1) *Si queremos eliminar la "x" tenemos que multiplicar la primera ecuación por* -2 *para que al sumarla con la segunda se anule. Si queremos eliminar la "y" entonces tenemos que multiplicar la segunda ecuación por 3 para que al sumarla con la primera se anule. Escogemos, por ejemplo, eliminar la "x".*

2) *Se multiplica la primera ecuación por* -2.

$$\left.\begin{array}{r}-2x-6y=-8\\ 2x-y=1\end{array}\right\}$$

3) *Se suman las dos ecuaciones.*

$$\begin{array}{r}-2x-6y=-8\\ 2x\quad -y=\ 1\\ \hline -7y=-7\end{array}$$

4) *Se resuelve la ecuación resultante.*

$$-7y=-7 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{-7}{-7}=1$$

5) *Se sustituye este valor en la primera ecuación y se despeja la "x".*

$$x+3\cdot 1=4 \quad \Rightarrow \quad x=1 \qquad \textit{Solución:} \quad x=1 \;\; y=1$$

6) *Se comprueba la solución (es el mismo sistema del apartado anterior).*

Problemas resueltos

<u>*Ejemplo*</u> $\left.\begin{array}{r}\mathbf{x+3y=7}\\ \mathbf{5x-2y=-16}\end{array}\right\}$

Método de sustitución: Se despeja "x" en la primera ecuación y se sustituye en la segunda.

$$x=7-3y \qquad 5(7-3y)-2y=-16 \qquad 35-15y-2y=-16$$

$$-17y=-51 \;\Rightarrow\; y=\frac{-51}{-17}=3 \;\Rightarrow\; x=7-3\cdot 3=-2$$

La solución es $x=-2 \quad y=3$

Comprobación:

$$\left.\begin{array}{r}-2+3\cdot 3=7\\ 5(-2)-2\cdot 3=-16\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}7=7\\ -16=-16\end{array}\right\}$$

<u>*Ejemplo*</u> $\left.\begin{array}{r}\mathbf{x+4y=3}\\ \mathbf{6x-5y=-11}\end{array}\right\}$

Método de reducción: Se multiplica la primera ecuación por -6 y se suman las dos ecuaciones.

$$\begin{array}{r}-6x-24y=-18\\ 6x\;-5y=\;-11\\ \hline -29y=-29\end{array} \qquad -29y=-29 \;\Rightarrow\; y=\frac{-29}{-29}=1$$

Se sustituye en la primera ecuación y se despeja la "x". $x+4\cdot 1=3 \;\Rightarrow\; x=-1$

La solución es $x=-1 \quad y=1$

Comprobación:

$$\left.\begin{array}{r}-1+4\cdot 1=3\\ 6(-1)-5\cdot 1=-11\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}3=3\\ -11=-1\end{array}\right\}$$

<u>*Ejemplo*</u> $\left.\begin{array}{r}\mathbf{2x-5y=-12}\\ \mathbf{7x-2y=-11}\end{array}\right\}$

Vamos a resolver este sistema primero por el método de sustitución y después por el método de reducción, para ver las dificultades de cálculo tanto en uno como en otro método.

<u>*Método de igualación*</u>*:* Se despeja "x" en las dos ecuaciones y se igualan los resultados.

$$\left\{\begin{array}{l}2x=-12+5y\\ 7x=-11+2y\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{-12+5y}{2}\\ x=\dfrac{-11+2y}{7}\end{array}\right. \qquad \frac{-12+5y}{2}=\frac{-11+2y}{7}$$

$$7(-12+5y)=2(-11+2y) \qquad -84+35y=-22+4y \qquad 35y-4y=-22+84$$

$$31y=62 \quad \Rightarrow \quad y=2$$

Se sustituye $y=2$ en la primera ecuación con la x despejada. $x=\dfrac{-12+5\cdot 2}{2}=-1$

La solución es $x=-1 \quad y=2$

Comprobación:

$$\left.\begin{array}{r} 2(-1)-5\cdot 2=-12 \\ 7(-1)-2\cdot 2=-11 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -12=-12 \\ -11=-11 \end{array}\right\}$$

<u>Método de reducción</u>: Para eliminar "x" multiplicamos la primera ecuación por 7 y la segunda por -2. De esta manera, al sumar las dos ecuaciones desaparece la incógnita x.

$$\left.\begin{array}{r} 7(2x-5y)=7(-12) \\ -2(7x-2y)=-2(-11) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 14x-35y=-84 \\ -14x+4y=22 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{r} 14x-35y=-84 \\ -14x+4y=22 \\ \hline -31y=-62 \end{array}$$

$$-31y=-62 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{-62}{-31}=2$$

Se sustituye $y=2$ en la primera ecuación, por ejemplo.

$$2x-5\cdot 2=-12 \qquad 2x=-2 \quad \Rightarrow \quad x=-1$$

La solución es $x=-1 \quad y=2$, que ya se ha comprobado anteriormente

<u>Ejemplo</u> $\left.\begin{array}{r} \mathbf{2x+10y=52} \\ \mathbf{x+\frac{y}{2}=8} \end{array}\right\}$

Método de sustitución. Se despeja la "x" en la segunda ecuación y se sustituye en la primera.

$$x=8-\frac{y}{2} \qquad 2\left(8-\frac{y}{2}\right)+10y=52 \qquad 16-y+10y=52 \qquad 9y=36 \quad \Rightarrow \quad y=4$$

Se sustituye $y=4$ en la segunda ecuación $\quad x+\dfrac{4}{2}=8 \qquad x+2=8 \quad \Rightarrow \quad x=6$

La solución es $x=6 \quad y=4$

Comprobación:

$$\left.\begin{array}{r} 2\cdot 6+10\cdot 4=52 \\ 6+\frac{4}{2}=8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 52=52 \\ 6+2=8 \end{array}\right\}$$

Ejemplo $\left.\begin{array}{r}\mathbf{\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=4}\\ \mathbf{x+y=10}\end{array}\right\}$

Podemos eliminar los denominadores de la primera ecuación multiplicando todos sus términos por el mínimo común múltiplo de los denominadores.

$$\text{m.c.m.}(2,3)=6 \qquad \left.\begin{array}{r}6\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}\right)=6\cdot 4\\ x+y=10\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r}3x+2y=24\\ x+y=10\end{array}\right\}$$

Método de sustitución: Despejamos x en la segunda ecuación y la sustituimos en la primera.

$$x=10-y \qquad 3(10-y)+2y=24 \qquad 30-3y+2y=24 \qquad -y=-6 \;\Rightarrow\; y=\frac{-6}{-1}=6$$

Se sustituye $y=2$ en la segunda ecuación (por ser la más sencilla).

$$x+6=10 \;\Rightarrow\; x=4$$

La solución es $x=4 \;\; y=6$.

Comprobación:

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{4}{2}+\dfrac{6}{3}=4\\ 4+6=10\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r}2+2=4\\ 4+6=10\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}4=4\\ 10=10\end{array}\right\}$$

Ejemplo $\left.\begin{array}{r}\mathbf{\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{5}=7}\\ \mathbf{\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{4}=2}\end{array}\right\}$

Podemos eliminar los denominadores de las dos ecuaciones multiplicando todos sus términos por el mínimo común múltiplo de los denominadores.

$$\left\{\begin{array}{l}\text{m.c.m.}(3,5)=15\\ \text{m.c.m.}(3,4)=12\end{array}\right. \quad \left.\begin{array}{r}15\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{5}\right)=15\cdot 7\\ 12\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{4}\right)=12\cdot 2\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r}5x+3y=105\\ 4x-3y=24\end{array}\right\}$$

Método de reducción: Al sumar las dos ecuaciones se elimina la “y”.

$$\begin{array}{r}5x+3y=105\\ 4x-3y=24\\ \hline 9x\quad\;\;=129\end{array} \qquad 9x=129 \;\Rightarrow\; x=\frac{129}{9}=\frac{43}{3}$$

Se sustituye la x en la primera ecuación y se despeja la “y”.

$$\frac{\frac{43}{3}}{3}+\frac{y}{5}=7 \qquad \frac{43}{9}+\frac{y}{5}=7 \qquad \text{m.c.m.}(9,5)=45 \qquad 45\cdot\frac{43}{9}+45\cdot\frac{y}{5}=45\cdot 7$$

$$5\cdot 43+9y=315 \qquad 9y=315-215 \qquad y=\frac{100}{9}$$

La solución es $x=\dfrac{43}{3}$ $y=\dfrac{100}{9}$.

Comprobación:

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{\frac{43}{3}}{3}+\dfrac{\frac{100}{9}}{5}=7\\ \dfrac{\frac{43}{3}}{3}-\dfrac{\frac{100}{9}}{4}=2\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r}\dfrac{43}{9}+\dfrac{100}{45}=7\\ \dfrac{43}{9}-\dfrac{100}{36}=2\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r}45\cdot\dfrac{43}{9}+45\cdot\dfrac{100}{45}=45\cdot 7\\ 36\cdot\dfrac{43}{9}-36\cdot\dfrac{100}{36}=36\cdot 2\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}215+100=315\\ 172-100=72\end{array}\right\}$$

<u>*Ejemplo*</u> $\left.\begin{array}{r}\mathbf{0'8x-0'2y=2'2}\\ \mathbf{0'4x+2y=3'2}\end{array}\right\}$

Para evitar tener que operar con decimales, podemos multiplicar las dos ecuaciones por 10 y resolver el sistema equivalente.

$$\left.\begin{array}{r}10\cdot 0'8x-10\cdot 0'2y=10\cdot 2'2\\ 10\cdot 0'4x+10\cdot 2y=10\cdot 3'2\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r}8x-2y=22\\ 4x+20y=32\end{array}\right\}$$

Método de reducción: Multiplicamos la segunda ecuación por -2.

$$\begin{array}{r}8x-2y=22\\ -8x-40y=-64\\ \hline -42y=-42\end{array} \qquad -42y=-42 \;\Rightarrow\; y=\frac{-42}{-42}=1$$

Sustituyendo este valor en la primera de las dos ecuaciones reducidas tenemos:

$$8x-2\cdot 1=22 \qquad 8x=24 \;\Rightarrow\; x=\frac{24}{8}=3$$

La solución es $x=3$ $y=1$.

Comprobación:

$$\left.\begin{array}{r}8\cdot 3-2\cdot 1=22\\ 4\cdot 3+20\cdot 1=32\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r}22=22\\ 32=23\end{array}\right\}$$

<u>*Ejemplo*</u> $\left.\begin{array}{r}\mathbf{x-2(x+y)=3y-2}\\ \mathbf{\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=3}\end{array}\right\}$

El primer paso es quitar los paréntesis y los denominadores.

$$\left.\begin{array}{r}x-2x-2y=3y-2\\ 6\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}\right)=6\cdot 3\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r}-x-5y=-2\\ 2x+3y=18\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r}x+5y=2\\ 2x+3y=18\end{array}\right\}$$

Método de sustitución: Despejamos x en la primera ecuación y la sustituimos en la segunda.

$$x=2-5y \qquad 2(2-5y)+3y=18 \qquad 4-10y+3y=18 \qquad -7y=14 \;\Rightarrow\; y=\frac{14}{-7}=-2$$

Sustituimos este valor en la primera ecuación:

$$\frac{x}{3}+\frac{-2}{2}=3 \qquad \frac{x}{3}-1=3 \qquad \frac{x}{3}=4 \;\Rightarrow\; x=12$$

La solución es $x=12 \quad y=-2$.

Comprobación:

$$\left.\begin{array}{r} 12-2(12-2)=3(-2)-2 \\ \dfrac{12}{3}+\dfrac{-2}{2}=3 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 12-20=-8 \\ 4-1=3 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} -8=-8 \\ 3=3 \end{array}\right\}$$

Ejemplo $\left.\begin{array}{r} \mathbf{3x+2y=1} \\ \dfrac{\mathbf{2(x-1)}}{\mathbf{3}}-\dfrac{\mathbf{3y+1}}{\mathbf{2}}=\mathbf{2x+y} \end{array}\right\}$

El primer paso es quitar los paréntesis y los denominadores.

$$\left.\begin{array}{r} 3x+2y=1 \\ \dfrac{2x-2}{3}-\dfrac{3y+1}{2}=2x+y \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 3x+2y=1 \\ 6\left(\dfrac{2x-2}{3}-\dfrac{3y+1}{2}\right)=6(2x+y) \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 3x+2y=1 \\ 4x-4-9y-3=12x+6y \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 3x+2y=1 \\ -8x-15y=7 \end{array}\right\}$$

Método de reducción: Multiplicamos la primera ecuación por 8 y la segunda por 3 para eliminar la “x”.

$$\left.\begin{array}{r} 8(3x+2y)=8\cdot 1 \\ 3(-8x-15y)=3\cdot 7 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 24x+16y=8 \\ -24x-45y=21 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{r} 24x+16y=8 \\ -24x-45y=21 \\ \hline -29y=29 \end{array}$$

$$-29y=29 \;\Rightarrow\; y=\frac{-29}{29}=-1$$

Sustituyendo este valor en la primera de las dos ecuaciones reducidas tenemos:

$$3x+2(-1)=1 \qquad 3x=3 \;\Rightarrow\; x=1$$

La solución es $x=1 \quad y=-1$.

Comprobación:

$$\left.\begin{array}{r} 3\cdot 1+2(-1)=1 \\ \dfrac{2(1-1)}{3}-\dfrac{3(-1)+1}{2}=2\cdot 1-1 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 1=1 \\ 0+1=1 \end{array}\right\}$$

Ejemplo $\left.\begin{array}{r}\mathbf{\dfrac{x+y}{x-y}=5}\\ \mathbf{\dfrac{3x}{3+3y}=1}\end{array}\right\}$

El primer paso es quitar los denominadores, para lo cual multiplicamos en cruz.

$$\left.\begin{array}{r}x+y=5(x-y)\\ 3x=3+3y\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r}x+y=5x-5y\\ 3x=3+3y\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r}x+y-5x+5y=0\\ 3x-3y=3\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r}-4x+6y=0\\ 3x-3y=3\end{array}\right\}$$

Simplificando la primera ecuación por 2 y la segunda por 3 tenemos: $\left.\begin{array}{r}-2x+3y=0\\ x-y=1\end{array}\right\}$

Método de sustitución: Despejamos x en la segunda ecuación y la sustituimos en la primera.

$$x=1+y \qquad -2(1+y)+3y=0 \qquad -2-2y+3y=0 \quad \Rightarrow \quad y=2$$

Sustituimos este valor en la segunda ecuación:

$$\frac{3x}{3+3\cdot 2}=1 \qquad \frac{3x}{9}=1 \qquad 3x=9 \quad \Rightarrow \quad x=3$$

La solución es $x=3 \quad y=2$.

Comprobación:

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{3+2}{3-2}=5\\ \dfrac{3\cdot 3}{3+3\cdot 2}=1\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r}\dfrac{5}{1}=5\\ \dfrac{9}{9}=1\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r}5=5\\ 1=1\end{array}\right\}$$

Problemas propuestos con soluciones

a) $\left.\begin{array}{r} x-3y=-3 \\ 2x+6y=12 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} y=6x \\ x=\dfrac{2y-5}{7} \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x+3}{y}=5 \\ 2(x-3y)+x=9 \end{array}\right\}$ d) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{5}=7 \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{4}=-1 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{3x-2y}{5}-\dfrac{2x-4y}{3}=\dfrac{x-y}{2}+1 \\ 21x-15=13(2x-y)+45 \end{array}\right\}$ f) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x+y}{2}-\dfrac{x-y}{3}=3 \\ \dfrac{x+2y}{3}-\dfrac{x-2y}{4}=3 \end{array}\right\}$ g) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{1}{3x+2y}=1 \\ \dfrac{1}{3y-2x}=-\dfrac{1}{7} \end{array}\right\}$

h) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x+1}{y}=2 \\ \dfrac{x}{y+1}=1 \end{array}\right\}$ i) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{2x-y}{x}=4 \\ 2x+3y=4 \end{array}\right\}$ j) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{3x}{2x+y}=2-\dfrac{1}{5} \\ 2x+3y=3 \end{array}\right\}$ k) $\left.\begin{array}{r} 0'2x-1'7y=6'1 \\ 3x+2y=1 \end{array}\right\}$

l) $\left.\begin{array}{r} 2x+10y=52 \\ x+\dfrac{y}{2}=8 \end{array}\right\}$ m) $\left.\begin{array}{r} 5x-4y=-10 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}=3 \end{array}\right\}$ n) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=4 \\ x+y=10 \end{array}\right\}$ o) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{5}=7 \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{4}=2 \end{array}\right\}$

p) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x+1}{3}+\dfrac{y-2}{2}=2 \\ \dfrac{3x-2}{4}+y=5 \end{array}\right\}$ q) $\left.\begin{array}{r} 6x+y=20 \\ \dfrac{3x-1}{2}-\dfrac{y}{3}=5 \end{array}\right\}$ r) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-1}{2}+\dfrac{y+3}{3}=3 \\ \dfrac{x-4}{3}+\dfrac{y+4}{2}=1 \end{array}\right\}$

s) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{2x}{3}+\dfrac{3y}{4}=5 \\ \dfrac{5x}{3}-\dfrac{y}{2}=3 \end{array}\right\}$ t) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{3y-1}{7}-3=\dfrac{2x-4}{3} \\ \dfrac{y}{3}=\dfrac{4x-15}{5}+3 \end{array}\right\}$

<u>Soluciones</u>

a) $\begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=1 \\ y=6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x=7 \\ y=2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x=\dfrac{31}{3} \\ y=\dfrac{160}{9} \end{cases}$ e) $\begin{cases} x=365 \\ y=145 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x=8 \\ y=2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x=\dfrac{17}{3} \\ y=-\dfrac{19}{3} \end{cases}$ h) $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ i) $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ j) $\begin{cases} x=31 \\ y=-1 \end{cases}$ k) $\begin{cases} x=\dfrac{139}{55} \\ y=-\dfrac{181}{55} \end{cases}$

l) $\begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases}$ m) $\begin{cases} x=\dfrac{14}{9} \\ y=\dfrac{40}{9} \end{cases}$ n) $\begin{cases} x=4 \\ y=6 \end{cases}$ o) $\begin{cases} x=\dfrac{43}{3} \\ y=\dfrac{100}{9} \end{cases}$ p) $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$

q) $\begin{cases} x=\dfrac{73}{21} \\ y=-\dfrac{6}{7} \end{cases}$ r) $\begin{cases} x=\dfrac{41}{5} \\ y=-\dfrac{24}{5} \end{cases}$ s) $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$ t) $\begin{cases} x=5 \\ y=12 \end{cases}$

Resolución de problemas

Para la resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas es conveniente realizar los siguientes pasos:

- *Si es un problema de tipo geométrico conviene hacer un dibujo que se adapte al enunciado del problema.*
- *Elección de las incógnitas: Como incógnitas se eligen las cantidades desconocidas y las otras se relacionan con ellas según el enunciado del problema.*
- *Planteamiento de las ecuaciones: Consiste en expresar mediante dos ecuaciones la relación existente entre los datos del problemas y la incógnitas.*
- *Resolución del sistema: Consiste en resolver el sistema de ecuaciones que hemos obtenido, es decir, encontrar el valor de las incógnitas.*
- *Comprobación: Una vez resuelto el sistema hay que comprobar que las soluciones cumplen las condiciones del problema.*

Ejemplo **Un hotel tiene habitaciones dobles y sencillas. En total hay 50 habitaciones y 87 camas. ¿Cuántas habitaciones tiene de cada tipo?**

Elección de las incógnitas: Al número de habitaciones sencillas le llamamos “x” y al número de habitaciones dobles “y”.

Planteamiento de las ecuaciones: En las habitaciones sencillas hay una cama y en las habitaciones dobles 2 camas, por tanto:

$$\left.\begin{aligned} x+y&=50\\ x+2y&=87\end{aligned}\right\}$$

Resolución del sistema: $x=13 \quad y=37$, es decir, 13 habitaciones sencillas y 37 dobles.

Comprobación: $\left.\begin{aligned} 13+37&=50\\ 13+2\cdot 37&=87\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 50&=50\\ 87&=87\end{aligned}\right\}$

Problemas resueltos

1) ***Encuentra dos números sabiendo que la mitad de su suma es 218 y el doble de su diferencia 116.***

Sean “x” e “y” los números que buscamos. Tenemos que resolver el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x+y}{2}&=218\\ 2(x-y)&=116\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x+y&=436\\ 2x-2y&=116\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x+y&=436\\ x-y&=58\end{aligned}\right\}$$

Despejamos la x en la segunda ecuación y la sustituimos en la primera.

$$x=58+y \qquad 58+y+y=436 \qquad 2y=378 \quad\Rightarrow\quad y=189$$

Sustituimos este valor en la segunda ecuación: $x-189=58 \quad\Rightarrow\quad x=247$

Los números son 189 y 247.

Comprobación: $\left.\begin{array}{r}\dfrac{247+189}{2}=218\\ 2(247-189)=116\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r}\dfrac{436}{2}=218\\ 2(58)=116\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r}218=218\\ 116=116\end{array}\right\}$

2) ***Un ejercicio realizado en clase consta de 16 cuestiones. El profesor suma 5 puntos por cada respuesta correcta y resta 3 puntos por cada cuestión no contestada o mal contestada. Si un alumno ha obtenido 32 puntos en el ejercicio, ¿cuántas cuestiones ha contestado correctamente?***

Sea "x" el número de respuestas correctas e "y" las no contestadas o mal contestadas.

$$\left.\begin{array}{r}x+y=16\\ 5x-3y=32\end{array}\right\}$$

Despejamos x en la primera ecuación y la sustituimos en la segunda.

$$x=16-y \qquad 5(16-y)-3y=32 \qquad 80-5y-3y=32 \quad\Rightarrow\quad y=6$$

Si $y=6 \Rightarrow x=10$, es decir, el alumno ha contestado bien a 10 cuestiones, y no ha contestado o ha contestado mal a 6.

Comprobación: $\left.\begin{array}{r}10+6=16\\ 5\cdot10-3\cdot6=32\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r}16=16\\ 32=32\end{array}\right\}$

3) ***Halla dos números naturales tales que su suma sea 140 y al dividir el mayor entre el menor se obtenga 2 de cociente y 14 de resto.***

Sean "x" e "y" los dos números naturales. Teniendo en cuenta la regla de la división que dice que el dividendo es igual al divisor por el cociente más el resto podemos platear el sistema de la siguiente manera:

$$\left.\begin{array}{r}x+y=140\\ x=2y+14\end{array}\right\} \qquad 2y+14+y=140 \qquad 3y=126 \quad\Rightarrow\quad y=42 \quad\Rightarrow\quad x=98$$

Comprobación: $\left.\begin{array}{r}98+42=140\\ 98=2\cdot42+14\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r}140=140\\ 98=98\end{array}\right\}$

4) ***Hace tres años la edad de Juan era el doble que la de su hermana Julia. Dentro de 7 años, la edad de Juan será 4/3 de la que entonces tenga Julia. ¿Qué edad tienen actualmente cada uno de los hermanos?***

Sean "x" la edad actual de Juan e "y" la edad actual de Julia.

$$\left.\begin{array}{r}x-3=2(y-3)\\ x+7=\dfrac{4}{3}(y+7)\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r}x-3=2y-6\\ 3x+21=4y+28\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r}x=2y-3\\ 3x-4y=7\end{array}\right\}$$

Sustituyendo x en la segunda ecuación obtenemos “y”.

$$3(2y-3)-4y=7 \qquad 6y-9-4y=7 \qquad 2y=16 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{16}{2}=8$$

Sustituyendo este valor de y en la primera ecuación obtenemos x. $x=2\cdot 8-3=13$.

La edad de Juan son 13 años y la de Julia 8 años.

Comprobación: $\left.\begin{array}{l} 13-3=2(8-3) \\ 13+7=\frac{4}{3}(8+7) \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} 10=10 \\ 20=20 \end{array}\right\}$

5) ***Raquel ha pagado 55’72 € por una camiseta y un pantalón que costaban 70 € entre los dos. Si en la camiseta han hecho un 18 % de descuento y en el pantalón un 22 % ¿cuál es el precio original de cada artículo?***

Sean “x” el precio de la camiseta e “y” el precio del pantalón originalmente (antes del descuento). Si en la camiseta han hecho un 18 % de descuento quiere decir que le han cobrado un 82 % de su valor original y en el caso del pantalón un 78 %.

$$\left.\begin{array}{r} x+y=70 \\ 0'82x+0'78y=55'72 \end{array}\right\}$$

Para no operar con números decimales multiplicamos todos los términos de la segunda ecuación por 100. Despejamos x en la primera ecuación y sustituimos su valor en la segunda.

$$\left.\begin{array}{r} x+y=70 \\ 82x+78y=5572 \end{array}\right\} \qquad x=70-y \qquad 82(70-y)+78y=5572 \qquad 5740-82y+78y=5572$$

$$-4y=-168 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{-168}{-4}=42\,€ \quad \Rightarrow \quad x=70-42=28\,€$$

El precio original de la camiseta es de 28 € y el del pantalón 42 €.

Comprobación: $\left.\begin{array}{r} 28+42=70 \\ 0'82\cdot 28+0'78\cdot 42=55'72 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} 70=70 \\ 55'72=55'72 \end{array}\right\}$

6) ***Un comerciante compró 35 juegos de un tipo y 25 juegos de otro pagando por ellos 1220 €. Con la venta de los primeros ganó un 25 % y con los segundos perdió un 5 % de tal manera que recibió 170 € de ganancia sobre el precio de compra. Calcula el precio de compra de cada tipo de juego.***

Sean “x” e “y” los dos tipos de juegos. Si con la venta del primero ganó un 25 % quiere decir que lo vendió al 125 % mientras que el segundo lo vendió a un 95 % de lo que le costó.

$$\left.\begin{array}{r} 35x+25y=1220 \\ 0'25\cdot 35x-0'05\cdot 25y=170 \end{array}\right\}$$

Multiplicamos todos los términos de la segunda ecuación por 100.

$$\left.\begin{array}{r}35x+25y=1220\\ 25\cdot 35x-5\cdot 25y=17000\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r}35x+25y=1220\\ 875x-125y=17000\end{array}\right\}$$

Utilizando el método de reducción multiplicamos la primera ecuación por 5 y la sumamos a la segunda.

$$\begin{array}{r}175x+125y=6100\\ 875x-125y=17000\\ \hline 1050x\qquad =23100\end{array} \qquad 1050x=23100 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{23100}{1050}=22\text{ €}$$

Sustituyendo en la primera ecuación obtenemos la y.

$$35\cdot 22+25y=1220 \qquad 25y=450 \quad\Rightarrow\quad y=\frac{450}{25}=18\text{ €}$$

Comprobación: $\left.\begin{array}{r}35\cdot 22+25\cdot 18=1220\\ 875\cdot 22-125\cdot 18=17000\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r}1220=1220\\ 17000=17000\end{array}\right\}$

7) ***Hallar dos números tales que si les agregamos 7 unidades los resultados están en la relación 3 a 2, pero si les restamos cinco unidades, la razón de estas diferencias es 5/2.***

Sean "x" e "y" los números pedidos.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x+7}{y+7}=\dfrac{3}{2}\\[2mm] \dfrac{x-5}{y-5}=\dfrac{5}{2}\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}2x+14=3y+21\\ 2x-10=5y-25\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}2x-3y=7\\ 2x-5y=-15\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}x=20\\ y=11\end{array}\right.$$

Comprobación: $\left.\begin{array}{l}\dfrac{20+7}{11+7}=\dfrac{3}{2}\\[2mm] \dfrac{20-5}{11-5}=\dfrac{5}{2}\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}\dfrac{27}{18}=\dfrac{3}{2}\\[2mm] \dfrac{15}{6}=\dfrac{5}{2}\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{Simplificando por 9}\\[4mm] \text{Simplificando por 3}\end{array} \quad \left.\begin{array}{l}\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}\\[2mm] \dfrac{5}{2}=\dfrac{5}{2}\end{array}\right\}$

8) ***La cifra de las decenas de un número de dos cifras es el doble de la cifra de las unidades, y si a dicho número le restamos 27 se obtiene el número que resulta al invertir el orden de sus cifras. ¿Cuál es ese número?***

Sea x la cifra de las unidades e y la cifra de las decenas. Recuerda que todo número de dos cifras se puede descomponer en suma:

$$34=30+4=10\cdot 3+4$$

El número de dos cifras yx se escribe: $\quad yx=10y+x$

El número de dos cifras xy se escribe: $\quad xy=10x+y$

Según el enunciado se tienen estas dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r}y=2x\\ 10y+x-27=10x+y\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}x=3\\ y=6\end{array}\right.$$

Comprobación: $\left.\begin{array}{r}6=2\cdot 3\\ 10\cdot 6+3-27=10\cdot 3+6\end{array}\right\}\qquad \left.\begin{array}{r}6=6\\ 36=36\end{array}\right\}$

9) ***Hace 3 años la edad de María era el doble que la de su hermana Marta. Dentro de 7 años será 4/3 de la que entonces tenga Marta. Calcula la edad actual de cada una.***

Sea “x” la edad actual de María e “y” la edad actual de Marta.

Según el enunciado:

$$\left.\begin{array}{r}x-3=2(y-3)\\ x+7=\dfrac{4}{3}(y+7)\end{array}\right\}\qquad \left.\begin{array}{r}x-3=2y-6\\ 3x+21=4y+28\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{l}y=8\\ x=13\end{array}\right.$$

La edad actual de María es de 13 años y la de Marta de 8 años.

Comprobación: $\left.\begin{array}{r}13-3=2(8-3)\\ 13+7=\dfrac{4}{3}(8+7)\end{array}\right\}\qquad \left.\begin{array}{r}10=10\\ 20=20\end{array}\right\}$

10) ***A las 9 de la mañana sale un coche del punto A con una velocidad de 80 km/h. Dos horas más tarde sale una moto del punto A en persecución del coche anterior con una velocidad de 120 km/h. ¿A qué distancia del punto A le alcanza?***

Sabemos que en un movimiento rectilíneo uniforma se verifica que:

$$\text{Espacio recorrido}=\text{velocidad}\times\text{tiempo}\qquad e=v\cdot t$$

El espacio que recorre el coche que sale a las 9 de la mañana es: $e=80t$

El espacio que recorre la moto que sale a las 11 de la mañana es: $e=120(t-2)$, ya que cuando la moto alcance al coche, los dos habrán recorrido el mismo espacio pero la moto habrá tardado dos horas menos.

Tenemos el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{l}e=80t\\ e=120(t-2)\end{array}\right\}$

Resolviendo el sistema por igualación: $80t=120t-240\qquad -40t=-240\quad\Rightarrow\quad t=\dfrac{-240}{-40}=6\,h$

La moto alcanza al coche a una distancia de A de $e=80\cdot 6=480\,km$ y el encuentro se produce a las 15 h.

11) ***Dos ciudades A y B distan entre sí 360 km. A las 5 de la tarde sale un coche de la ciudad A a la ciudad B con una velocidad media de 70 km/h. A la misma hora sale un camión de la ciudad B hacia A con una velocidad de 50 km/h. ¿A qué hora se encuentran los coches? ¿A qué distancia de las ciudades A y B se encuentran los vehículos?***

Sea “x” la distancia recorrida por el coche que sale de la ciudad A. La distancia recorrida por el coche que sale de la ciudad B será $360-x$. Podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r}x=70t\\ 360-x=50t\end{array}\right\}\qquad \left.\begin{array}{l}x=70t\\ x=360-50t\end{array}\right\}\qquad 70t=360-50t\qquad 120t=360\qquad t=\frac{360}{120}=3\,h$$

Tardan en encontrarse 3 horas, por tanto si salieron a las 5 de la tarde se encuentran a las 8 de la tarde.

La distancia a la que se encuentran los vehículos es: $\begin{cases} x = 70 \cdot 3 = 210\text{km} \\ y = 50 \cdot 3 = 150\text{km} \end{cases}$

12) ***Un automóvil tarda dos horas en recorrer la distancia entre dos ciudades. Si su velocidad hubiera sido superior en 30 km/h habría tardado una hora y cuarto. ¿Cuál es la distancia entre las dos ciudades?***

Sea "x" la distancia entre las dos ciudades. Una hora y cuarto es $1\text{h} + \frac{1}{4}\text{h} = \frac{5}{4}\text{h} = 1'25\,\text{h}$. Podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2v \\ x = 1'25(v+30) \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x = 2v \\ x = 1'25\,v + 37'5 \end{array}\right\} \qquad 2v = 1'25v + 37'5$$

$$0'75v = 37'5 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{37'5}{0'75} = 50\,\text{km/h}$$

La distancia entre las dos ciudades es de $x = 2 \cdot 50 = 100\,\text{km}$.

Comprobación: $\left.\begin{array}{l} x = 2 \cdot 50 \\ x = 1'25(50+30) \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x = 100 \\ x = 1'25 \cdot 80 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x = 100 \\ x = 100 \end{array}\right\}$

13) ***Hemos mezclado aceite de oliva de 3'5 € el litro con aceite de girasol de 2 € el litro para obtener 50 l de mezcla a 3'08 € el litro. Calcula la cantidad de aceite de oliva y de girasol que hemos mezclado.***

Sea "x" la cantidad de aceite de oliva e "y" la cantidad de aceite de girasol que mezclamos.

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 50 \\ 3'5\,x + 2y = 3'08 \cdot 50 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x + y = 50 \\ 3'5\,x + 2y = 154 \end{array}\right\}$$

$$x = 50 - y \qquad 3'5(50 - y) + 2y = 154 \qquad 175 - 3'5y + 2y = 154 \qquad -1'5y = -21$$

$$-1'5y = -21 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-21}{-1'5} = 14 \text{ litros}$$

Hemos mezclado 14 litros de aceite de girasol con 36 litros de aceite de oliva

Comprobación: $\left.\begin{array}{r} 36 + 14 = 50 \\ 3'5 \cdot 36 + 2 \cdot 14 = 3'08 \cdot 50 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 50 = 50 \\ 154 = 154 \end{array}\right\}$

14) ***Si en un depósito que contiene agua a 50 ºC añadimos agua a 15 º obtenemos 150 litros a 36 ºC. ¿Cuántos litros había en el depósito y cuántos hemos añadido?***

Sea "x" los litros de agua que había en el depósito e "y" los que hemos añadido.

$$\left.\begin{array}{r} x+y=150 \\ 50x+15y=150\cdot 36 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x+y=150 \\ 50x+15y=5400 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=90 \\ y=60 \end{array}\right.$$

Había 90 litros de agua a 50 ºC y hemos añadido 60 litros a 15 ºC.

Comprobación: $$\left.\begin{array}{r} 90+60=150 \\ 50\cdot 90+15\cdot 60=5400 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 150=150 \\ 4500+900=5400 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 150=150 \\ 5400=5400 \end{array}\right\}$$

15) ***¿Cuál es el área de un rectángulo sabiendo que su perímetro mide 16 cm. y que su base es el triple de su altura?***

Sea "x" la base del rectángulo e "y" la altura.

$$\left.\begin{array}{r} 2x+2y=16 \\ x=3y \end{array}\right\} \qquad 2\cdot 3y+2y=16 \qquad 8y=16 \Rightarrow y=\frac{16}{8}=2\,\text{cm} \Rightarrow x=3\cdot 2=6\,\text{cm}$$

Comprobación: $$\left.\begin{array}{r} 2\cdot 6+2\cdot 2=16 \\ 6=3\cdot 2 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 16=16 \\ 6=6 \end{array}\right\}$$

16) ***Un comerciante compra un pañuelo y una bufanda por 30 € y los vende por 34 €. ¿Cuánto le costó cada objeto, sabiendo que en la venta del pañuelo ganó el 10 por 100 y en la venta de la bufanda ganó el 15 por 100?***

Sea "x" lo que cuesta el pañuelo e "y" lo que cuesta la bufanda.

$$\left.\begin{array}{r} x+y=30 \\ 1'1x+1'15y=34 \end{array}\right\} \qquad x=30-y \qquad 1'1(30-y)+1'15y=34 \qquad 33-1'1y+1'15y=34$$

$$0'05y=1 \Rightarrow y=\frac{1}{0'05}=20\,€ \Rightarrow x=10\,€$$

El pañuelo costó 10 € y la bufanda 20 €

Comprobación: $$\left.\begin{array}{r} 10+20=30 \\ 1'1\cdot 10+1'15\cdot 20=34 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 30=30 \\ 34=34 \end{array}\right\}$$