La Proporción Áurea

Escucho y Olvido
Veo y Recuerdo
Hago y Comprendo
Confucio

Números Irracionales. El Número Pi, el número "e" y el número de Oro

Los número irracionales son aquellos que no pueden expresarse como cociente de dos números enteros, es decir tienen infinitas cifras decimales y no son periódicos. Cuando se utilizan, se escriben solamente unas cuantas cifras decimales.

Hay tres números de gran importancia en matemáticas y que "paradójicamente" nombramos con una letra. Estos números son: Pi (π), el número "e" y el número de oro (Φ).

- El número Pi se designa con la letra griega $\pi = 3'14159.....$ y relaciona la longitud de una circunferencia con su diámetro.

$$L = 2\pi \cdot R \quad \Rightarrow \quad \pi = \frac{L}{2R} = \frac{L}{\text{diámetro}} = 3'14159.....$$

La notación con la letra griega π proviene de la inicial de las palabras de origen griego "***π****εριφέρεια*" (*periferia*) y "***π****ερίμετρον*" (*perímetro*) de un círculo y fue el matemático Leonhard Eulerd con su obra "Introducción al cálculo infinitesimal" de 1748, quien la popularizó.

El número de cifras decimales de π se ha disparado con la potencia de cálculo de los ordenadores más modernos y en el año 2010 rozaba las $5 \cdot 10^{12}$ cifras decimales, es decir, 5 billones. Esta cantidad da mucho prestigio al constructor del ordenador que ha realizado el cálculo, por lo que su marca aparece siempre en la lista de records.

El número π es además un número *trascendente*, es decir, no puede ser obtenido directamente mediante la resolución de una ecuación algebraica y está considerado como el número por excelencia de la geometría.

- El número e, conocido a veces como número de Euler (matemático suizo del siglo XVIII) o constante de Napier (Neper) fue reconocido y utilizado por primera vez por el matemático escocés John Napier, quien introdujo el concepto de logaritmo en el cálculo matemático. El número e aparece como límite de la sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2'71828.....$$

El número de cifras decimales del número "e" era el 5 de Julio de 2010 de 10^{12} cifras decimales, es decir, un billón.

Al igual que el número π, es un número *trascendente*, es decir, no puede ser obtenido directamente mediante la resolución de una ecuación algebraica y está considerado el número por excelencia del cálculo.

El número e, base de los logaritmos naturales o neperianos, es sin duda el número más importante del campo del cálculo, debido principalmente a que la función $f(x) = e^x$ coincide con su derivada, y por lo tanto, esta función exponencial suele aparecer en el resultado de ecuaciones diferenciales sencillas. Como consecuencia de esto, describe el comportamiento de acontecimientos físicos regidos por ecuaciones diferenciales sencillas, como pueden ser la velocidad de vaciado de un depósito de agua, el giro de una veleta frente a una ráfaga de viento, el movimiento del sistema de amortiguación de un automóvil o el cimbreo de un edificio metálico en caso de terremoto. Si nos fijamos con atención, en todos estos ejemplos podemos encontrar el número e. De la misma manera, aparece en muchos otros campos de la ciencia y la técnica, describiendo fenómenos eléctricos y electrónicos (descarga de un condensador, la amplificación de corrientes en transistores BJT, etc.), biológicos (crecimiento de células, etc.), químicos (concentración de iones, periodos de semidesintegración, etc.), y muchos más.

- El número designado con letra griega $\Phi = 1'61803.....$ (Fi), llamado número de oro, fue elegido por el matemático americano Mark Barr y es la inicial del nombre del escultor griego Fidias que solía usar la relación áurea en sus esculturas.

  Una diferencia importante desde el punto de vista matemático entre los dos primeros y el número de oro es que los primeros no son solución de ninguna ecuación algebraica (a estos números se les llama *trascendentes*), mientras que el número de oro sí es solución de la siguiente ecuación:

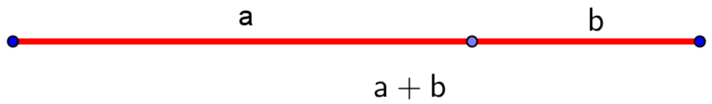
$$x^2 - x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1'61803..... = \Phi$$

  El número de oro o número áureo rige la disposición de los pétalos de las rosas, las dimensiones de las obras de *Le Corbusier*, las partituras de *Debussy*, la Mona Lisa de *Leonardo da Vinci*, la dinámica de los agujeros negros y la estructura microscópica de algunos cristales. Es el número por excelencia de manifestaciones artísticas como la pintura, la escultura, la arquitectura y en general de la naturaleza.

¿Qué es la sección áurea?

El descubrimiento del número Φ se lo debemos al matemático italiano *Leonardo Pisano* (1170-1240), más conocido como *Fibonacci* quien lo obtuvo, a principios del siglo XIII, a partir de la sucesión que lleva su nombre. Sin embargo, el número Φ ya había sido definido por el matemático griego *Euclides* 1500 años antes. Para ello *Euclides* se sirvió de una recta imaginaria. Imaginó un punto concreto, un punto que dividiese la recta en dos segmentos más pequeños. Ambos debían tener una proporción concreta que se definía de la siguiente manera: *la relación entre el segmento mayor y la recta debía ser la misma que la del segmento menor y el mayor*, y la división de ambas longitudes, independientemente del tamaño de la recta inicial, daba lugar a un número, el número Φ, que definía una proporción, la que se ha dado en llamar “divina proporción”.

Tomemos un segmento de longitud $a + b$ y hagamos en él la división indicada anteriormente



Aplicando la proporción áurea obtenemos la siguiente ecuación que tendremos que resolver

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \qquad 1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b} \qquad \text{Si llamamos } \frac{a}{b} = x \qquad 1 + \frac{1}{x} = x$$

$$x+1=x^2 \qquad x^2-x-1=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Una de las soluciones de esta ecuación (la solución positiva) es $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ que corresponde al cociente entre el segmento mayor y el menor. $\frac{a}{b}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1'618033989....$

A este número se le denomina número de oro o número áureo y se representa con la letra Φ, cuyo símbolo le fue asignado a principios del siglo XX por el matemático norteamericano Mark Barr en honor a Fidias, constructor del Partenón de Atenas, del que tomó prestada esa inicial.

Si Φ es solución de la ecuación $x^2-x-1=0$ quiere decir que la igualdad se cumple para ese valor, por lo tanto:

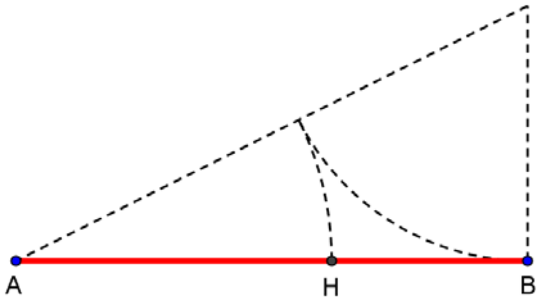
$$\Phi^2-\Phi-1=0 \quad \Rightarrow \quad \Phi^2-\Phi=1$$

Si dividimos los dos miembros por Φ obtenemos: $\frac{\Phi^2-\Phi}{\Phi}=\frac{1}{\Phi} \quad \Rightarrow \quad \Phi-1=\frac{1}{\Phi}$ expresión de la que nos serviremos más adelante.

- *Divide un segmento de 20 cm. de longitud, en dos partes que se encuentren en proporción áurea.*

¿Cómo dibujar la sección áurea de un segmento AB?

Partimos de un segmento AB. Para aplicarle la Sección Áurea se levanta perpendicularmente por el extremo B otro segmento que mida exactamente la mitad de AB. Se define así un triángulo rectángulo con los catetos en proporción 1:2. Pues bien, si a la hipotenusa le restamos el cateto menor y el segmento que queda lo llevamos sobre el segmento AB obtenemos AH que es la sección áurea del segmento AB. La parte menor BH es a la mayor AH como ésta es a la suma AB.

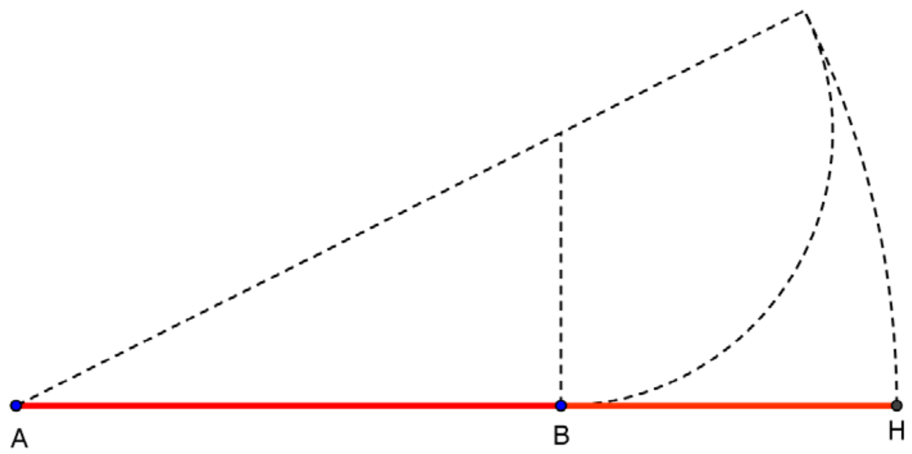


$$\frac{BH}{AH}=\frac{AH}{AB} \quad \Rightarrow \quad AH^2=BH\cdot AB$$

- *Divide un segmento de 10 cm. en dos partes que estén en la proporción áurea. Haz la construcción geométrica.*

¿De qué medida es sección áurea un segmento AB?

Igual de simple es hacer la operación inversa, es decir, averiguar de qué medida es sección áurea el segmento AB. Formamos el mismo triángulo que antes, pero en lugar de restar a la hipotenusa el cateto menor, se le suma. De esta manera se obtiene que AB es sección áurea de AH.

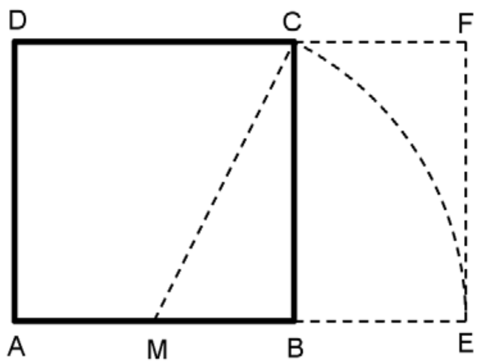


- *Queremos colgar un cuadro de 120 cm. de altura en la pared de nuestra habitación de tal manera que la altura del cuadro corresponda al lado mayor*
  - *a) ¿Cuánto tiene que medir el cuadro de ancho para que la altura y el ancho estén en la proporción áurea? Haz el cálculo partiendo de un segmento cuyas partes estén en la proporción áurea.*
  - *b) Calcula la medida basándote en el dibujo anterior*

- *Si el cuadro tiene una altura de 3 m, ¿cuál deberá ser el ancho para que los dos lados estén en la proporción áurea?*

El rectángulo áureo y el ángulo áureo

Un rectángulo áureo es aquel en el que sus lados están en razón áurea. Su construcción se hace a partir de un cuadrado. Desde el punto medio de la base del cuadrado trazamos un arco de circunferencia de radio la distancia que hay desde el punto medio hasta uno de los vértices superiores del cuadrado. Este arco corta a la prolongación de la base del cuadrado en un punto. El rectángulo ampliado es áureo.



Si el lado del cuadrado vale 1 unidad, entonces se verifica:

$$AE = AM + ME = \frac{1}{2} + ME$$

Como ME es la hipotenusa del triángulo rectángulo MBC, aplicando el teorema de Pitágoras tenemos:

$$ME^2 = MB^2 + BC^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad ME = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$AE = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi = 1'618033989....... \text{ (nuestro número de oro).}$$

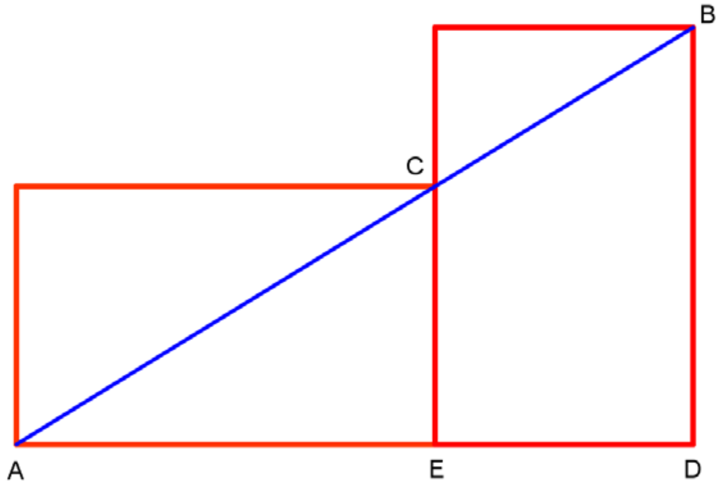
Es decir, que los lados del rectángulo AEFD que hemos construido son 1 y Φ que es el rectángulo áureo que buscábamos.

Obtenemos así un rectángulo cuyos lados están en proporción áurea. A partir de este rectángulo podemos construir otros semejantes que, como veremos mas adelante, se han utilizando en arquitectura (Partenón, pirámides egipcias) y diseño (tarjetas de crédito, carnets, cajetillas de tabaco, etc.).

- *Dibujar en el cuaderno un rectángulo áureo partiendo de un cuadrado de 5 cm. de lado.*

Un experimento que podemos hacer es pedir a un grupo de estudiantes que escojan entre un grupo de rectángulos con diferentes proporciones entre su anchura y su altura y comprobaremos que el rectángulo mayoritariamente elegido es aquel que cuyos lados verifican la proporción áurea. Por eso no es de extrañar que las tarjetas de crédito, el carnet de identidad, etc. sean rectángulos áureos.

Una propiedad importante de los rectángulos áureos es que cuando se colocan dos iguales como se indica en la siguiente figura, la diagonal AB pasa siempre por el vértice C. Es decir, para saber si un rectángulo es áureo sin tener que medir sus lados y hacer la división, los colocamos uno junto al otro, el primero horizontal y el segundo vertical con los lados en contacto. Si la línea recta que une los bordes A y B pasa por C entonces los rectángulos son áureos.

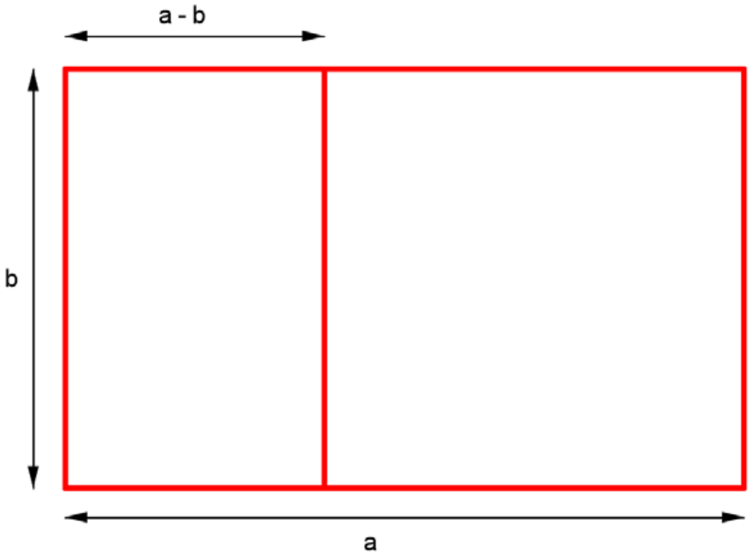


- *Demuestra que los triángulos ADB y AEC son semejantes y calcula la razón de semejanza conocidos los valores de los lados del rectángulo áureo.*

El Gnomon y el rectángulo áureo

Herón de Alejandría definió el Gnomon de la siguiente manera: *un Gnomon es cualquier figura que añadida a una figura original, produce una figura semejante a la original.* Veamos que *en el caso del rectángulo áureo, su gnomon es un cuadrado de lado igual al lado mayor del rectángulo*.

Si a un rectángulo áureo le quitamos un cuadrado de lado igual al lado menor del rectángulo áureo (en la figura "b") obtenemos otro rectángulo de lados $a-b$ y b. Este rectángulo, que es más pequeño que el original, también será áureo si se verifica que $\frac{b}{a-b}=\Phi \quad \leftrightarrow \quad \frac{a-b}{b}=\frac{1}{\Phi}$.



Sabemos que $\frac{a}{b}=\Phi$ por ser el rectángulo original un rectángulo áureo.

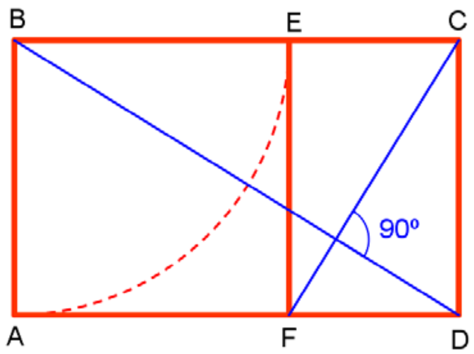
$$\frac{a-b}{b}=\frac{a}{b}-1=\Phi-1$$

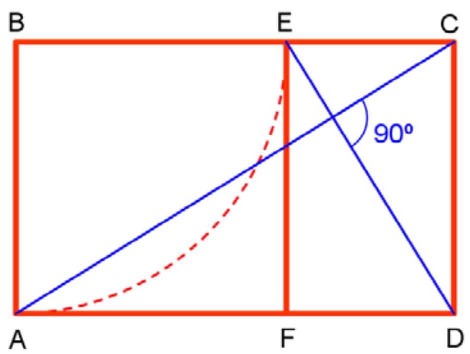
$$\Phi-1=\frac{1}{\Phi} \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{a-b}=\Phi$$

como queríamos demostrar.

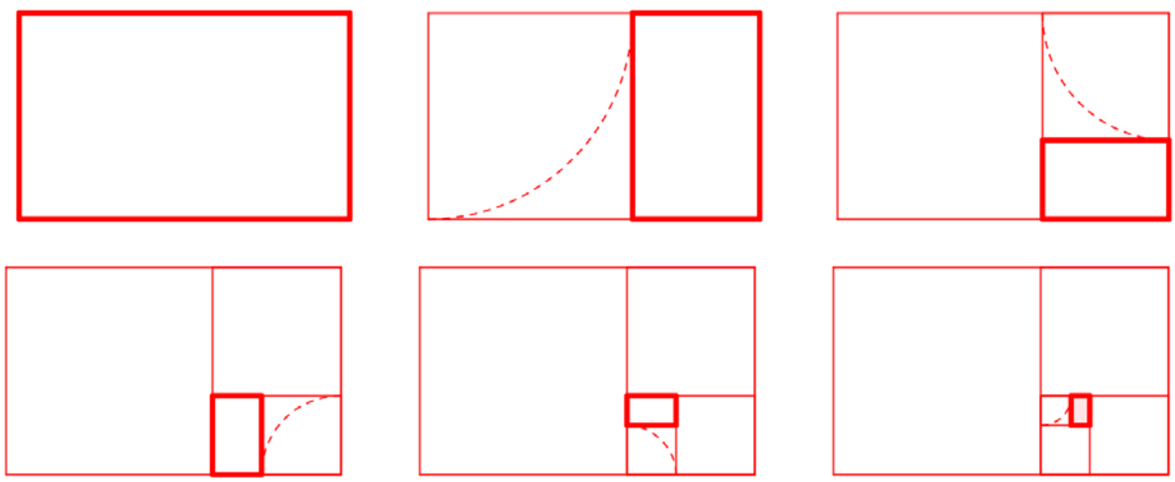
Propiedades del rectángulo áureo

Si en un rectángulo áureo ABCD eliminamos de su interior un cuadrado ABEF cuyo lado es el lado menor del rectángulo áureo, se obtiene otro rectángulo áureo ECDF. Las diagonales de los dos rectángulos áureos que se forman ABCD y ECDF, se cortan siempre en ángulo recto.

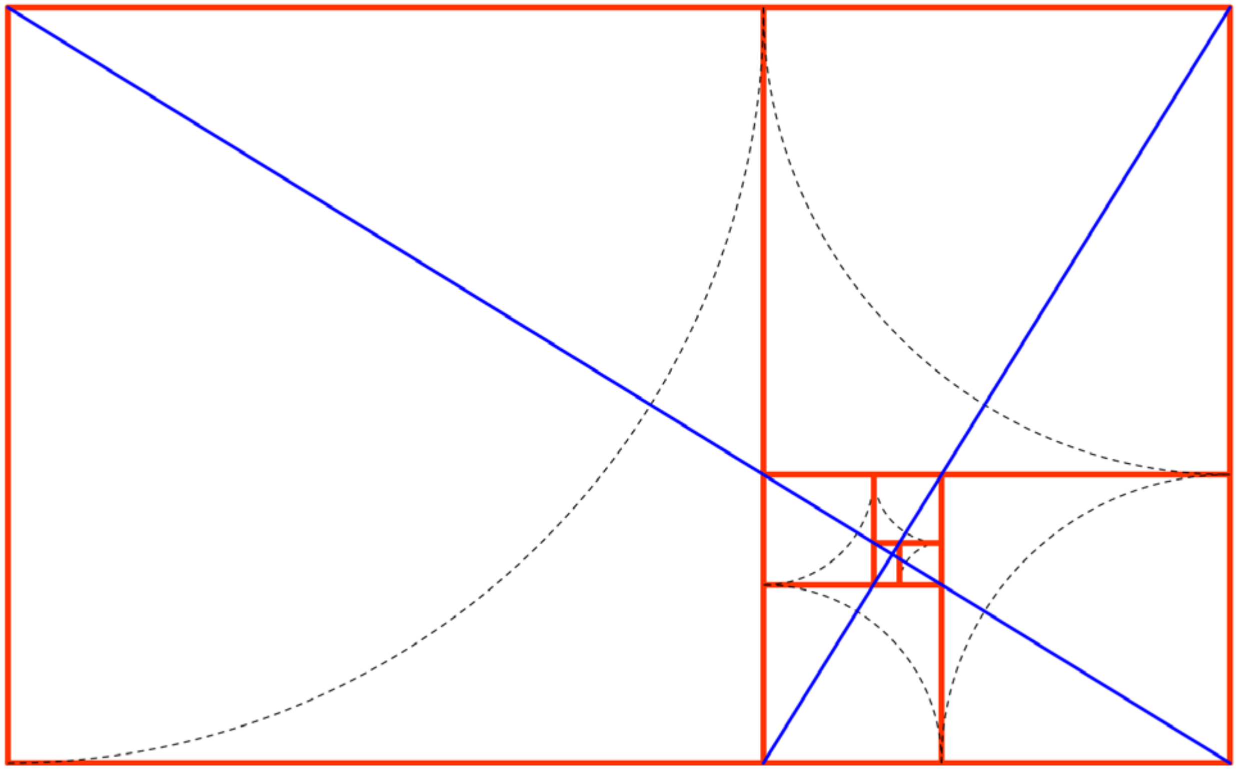




Si repetimos sucesivamente este mismo proceso con el rectángulo áureo más pequeño eliminando de su interior un cuadrado obtenemos la siguiente sucesión de rectángulos áureos.



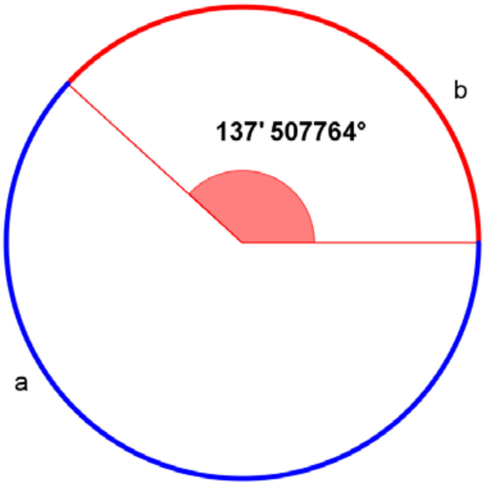
Al trazar las diagonales, como en el caso anterior, se observa que todas ellas están situadas sobre las dos rectas BD y CF, es decir, son siempre perpendiculares y su punto de corte siempre es el mismo. A éste punto donde convergen los innumerables rectángulos áureos que puede generar nuestra imaginación geométrica se ha propuesto llamarle "el ojo de Dios"



El ángulo áureo

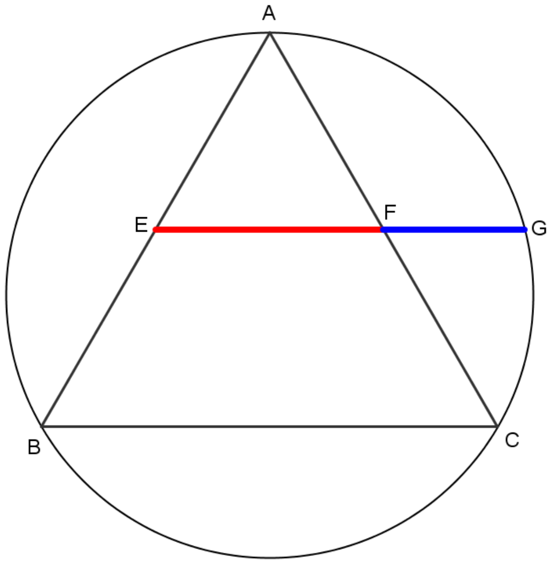
Podemos establecer una relación angular de proporción entre dos segmentos angulares para obtener el número áureo.

Sean "a" y "b" los segmentos que se encuentran en la proporción áurea. Si dibujamos con ellos una circunferencia de longitud $a+b$, el valor del ángulo central correspondiente al segmento menor es un número irracional, que podemos simplificar y redondear como $137'5^{\circ}$. Si dividimos el ángulo central correspondiente al segmento mayor entre el correspondiente al segmento menor obtenemos el número áureo.



$$\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}=\Phi \qquad \frac{222'492236}{137'507744}=\Phi=1'618033989......$$

El número de oro a partir de un círculo y un triángulo equilátero

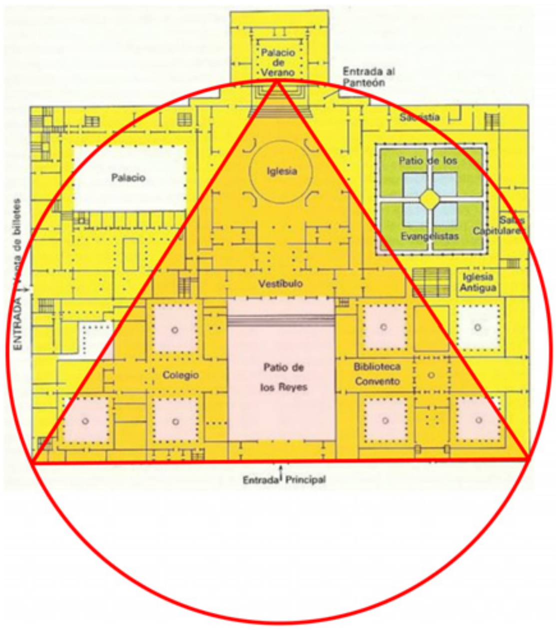


Trazamos una circunferencia e inscribimos en ella un triángulo equilátero. Por el punto medio del lado AB del triángulo equilátero trazamos un segmento paralelo al lado BC que corta a la circunferencia en el punto G. Los segmentos EG, EF y EF, FG están en proporción áurea.

$$\frac{EG}{EF} = \Phi \qquad \frac{EF}{FG} = \Phi$$

La planta de muchos edificios se basa en dicha construcción

*Planta de **El Real Monasterio de San Lorenzo** en El Escorial.*

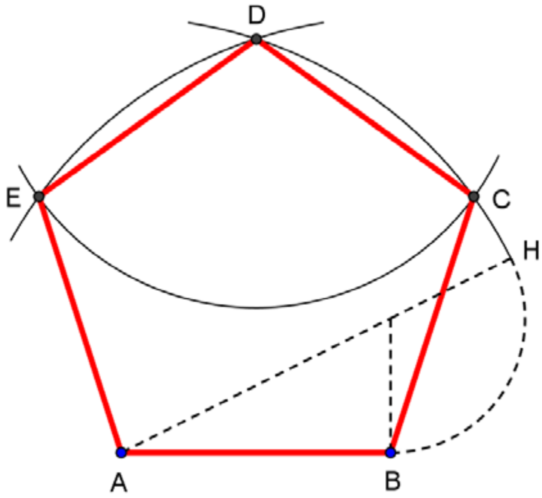


*El dibujo de **Luca Pacioli***

La divinidad del número de oro es un atributo dado por el italiano Luca Paccioli. Obsérvese que el dibujo que está realizando es una circunferencia con el triángulo equilátero.

Construcción del Pentágono Regular a partir de la sección áurea

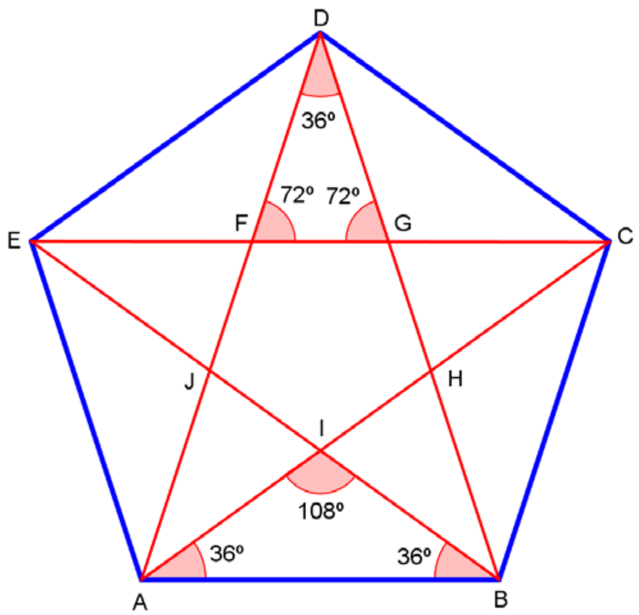
Averiguamos de qué medida es sección áurea el segmento AB que tomamos como lado del pentágono regular y comprobamos, según hemos visto en apartados anteriores, que la medida es AH. Con centro en A trazamos un arco de circunferencia de radio AH y con centro en B trazamos otro arco de circunferencia del mismo radio que el anterior. Estos dos arcos se cortan en el punto D. Con centro en D y radio el segmento AB trazamos un arco de circunferencia que corta a los dos arcos anteriores en los puntos E y C.



Uniendo los puntos ABCDE obtenemos un pentágono regular, que como se observa por la construcción el cociente entre su diagonal y el lado

- *Dibujar en el cuaderno un pentágono regular de 6 cm. de lado y comprobar que el cociente entre la diagonal y el lado es el número de oro.*

El Pentágono Regular y el número de oro



Podemos comprobar que en el pentágono regular el cociente entre la longitud de una diagonal y un lado del pentágono es el número áureo.

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \Phi \qquad \frac{\overline{EC}}{\overline{AB}} = \Phi$$

El pentágono y sus diagonales conforman dos tipos de triángulos isósceles. Uno con ángulos de 36º, 36º y 108º y el otro con ángulos de 72º, 72º y 36º y en ambos casos el cociente entre el lado mayor y el lado menor es el número de oro.

$$\frac{\overline{AB}}{\text{sen}108^o} = \frac{\overline{AI}}{\text{sen}36^o} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AI}} = \frac{\text{sen}108^o}{\text{sen}36^o} = 1'6180...$$

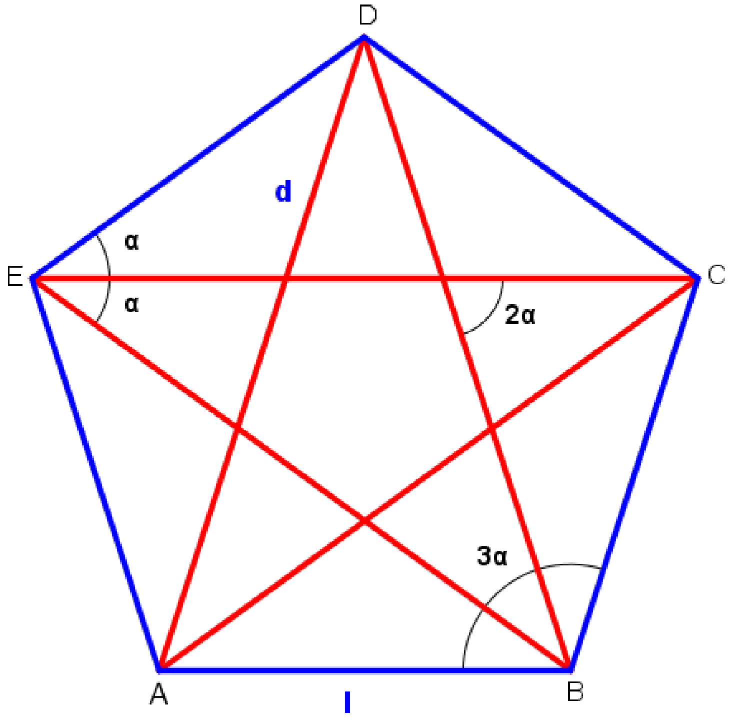
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AI}} = \frac{\overline{FD}}{\overline{FG}} = \Phi$$

$$\frac{\overline{FD}}{\text{sen}72^o} = \frac{\overline{FG}}{\text{sen}36^o} \Rightarrow \frac{\overline{FD}}{\overline{FG}} = \frac{\text{sen}72^o}{\text{sen}36^o} = \frac{\text{sen}(180^o - 72^o)}{\text{sen}36^o} = \frac{\text{sen}108^o}{\text{sen}36^o} = 1'6180...$$

- *Dibuja un pentágono estrellado como el anterior del tamaño de medio folio y calcula el cociente entre su diagonal y el lado. ¿Reconoces ese número? Repite el proceso para el pentágono que aparece invertido en el interior del que has dibujado. ¿Qué número resulta?*
- *En el pentágono anterior, busca los cocientes entre los segmentos* $\overline{AD}$, $\overline{DH}$, $\overline{BI}$, $\overline{IH}$ *que estén en proporción áurea.*

El Pentagrama Pitagórico

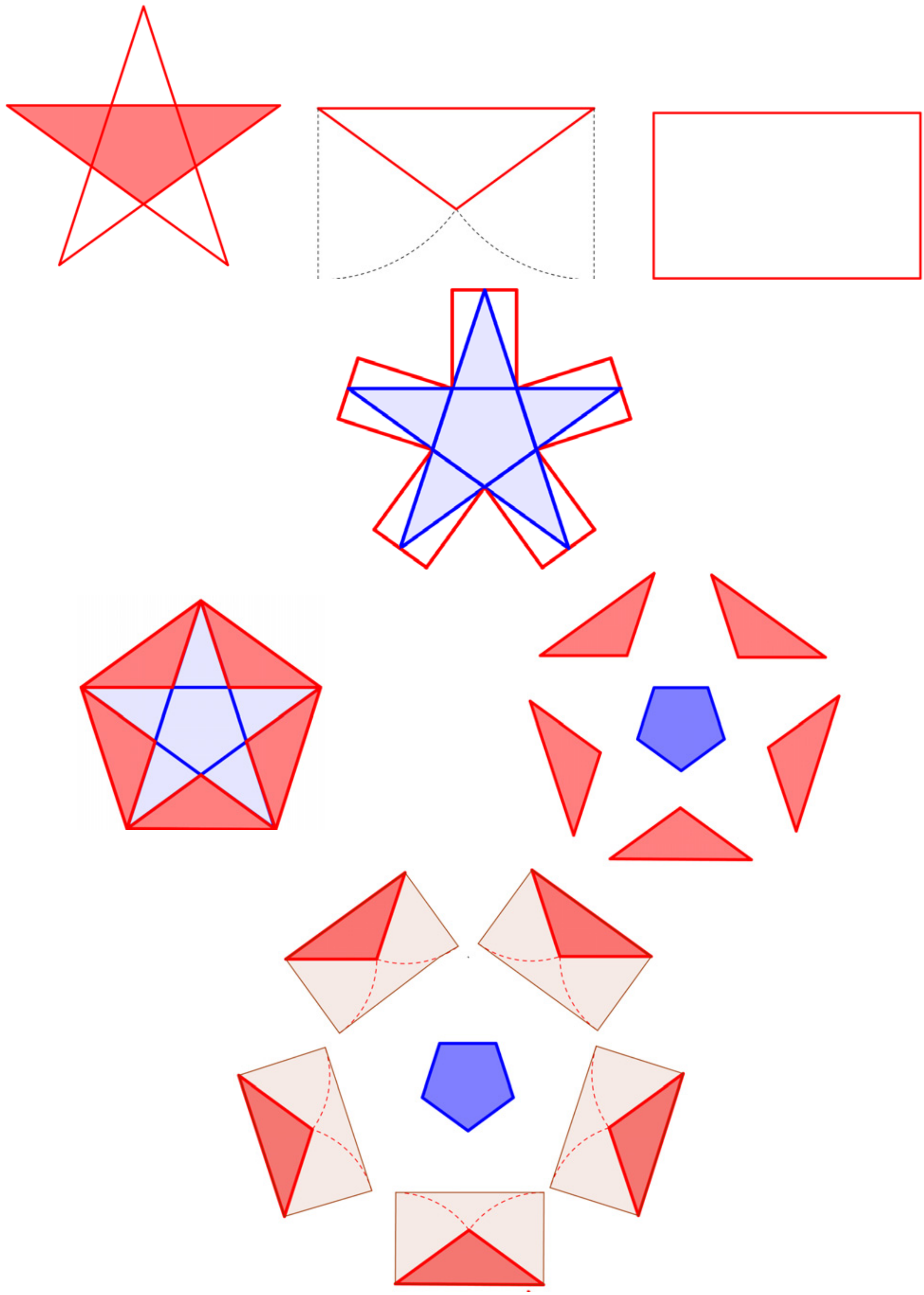
Si trazamos las 5 diagonales del pentágono regular se forma una estrella de 5 puntas. Esta figura, llamada *Pentagrama místico pitagórico*, era según la tradición el símbolo que los seguidores de Pitágoras utilizaban en el siglo VI antes de Cristo para reconocimiento mutuo y como símbolo de salud. Los pitagóricos pensaban que el mundo estaba configurado según un orden numérico donde solo tenían cabida los números fraccionarios. La casualidad hizo que en su propio símbolo se encontrara un número raro, el número áureo.



Como se observa en la figura anterior, los ángulos que aparecen miden un múltiplo entero de α. Para los pitagóricos, era natural que en una figura tan perfecta como el pentágono regular, el lado y la diagonal admitiesen una unidad de medida común, es decir, que existiese un segmento más pequeño que "d" y "l" con el que "d" y "l" se pudiesen medir a la vez, es decir, que $d = mu$ y $l = nu$, siendo m y n números enteros. Pronto se dieron cuenta que no era posible encontrar una unidad "u" con la que se pudieran medir a la vez *d* y *l* en números enteros. Debido a que el cociente entre la diagonal y el lado no era un número racional le llamaron *Irracional*. Se puede comprobar fácilmente que en el pentagrama y en el pentágono regular cualquier segmento es sección áurea del que es inmediatamente mayor.

El Pentagrama Pitagórico y el Rectángulo áureo

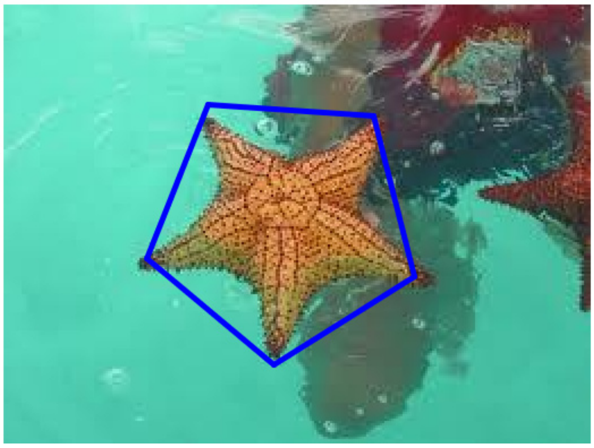
Escondido dentro del pentagrama Pitagórico se encuentra el *Rectángulo áureo*



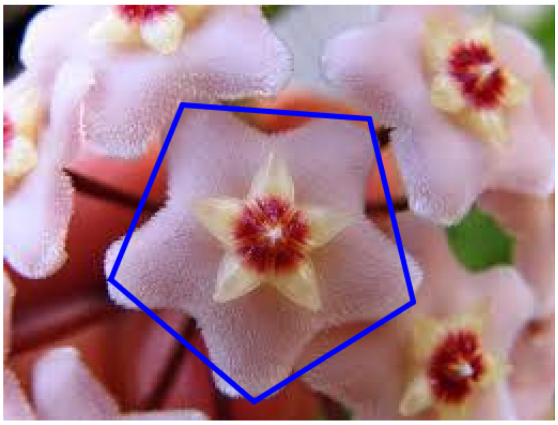
¿Cómo usa la naturaleza el Pentágono Regular?

En la ***Petunia***

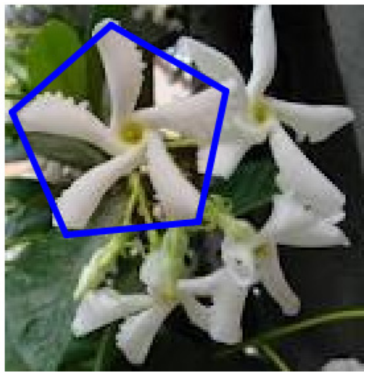
En la ***Estrella de Mar***



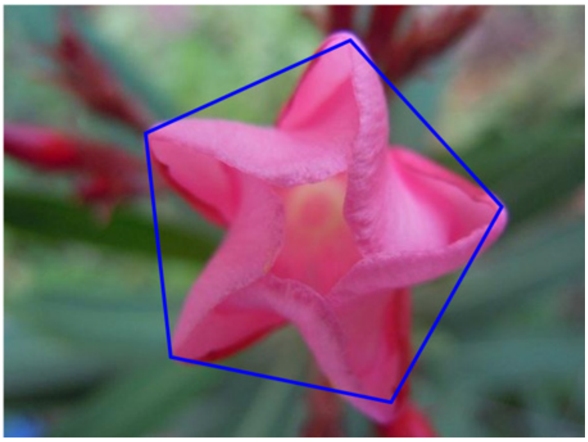
En la ***Flor de cera***



En el ***Jazmín estrella***



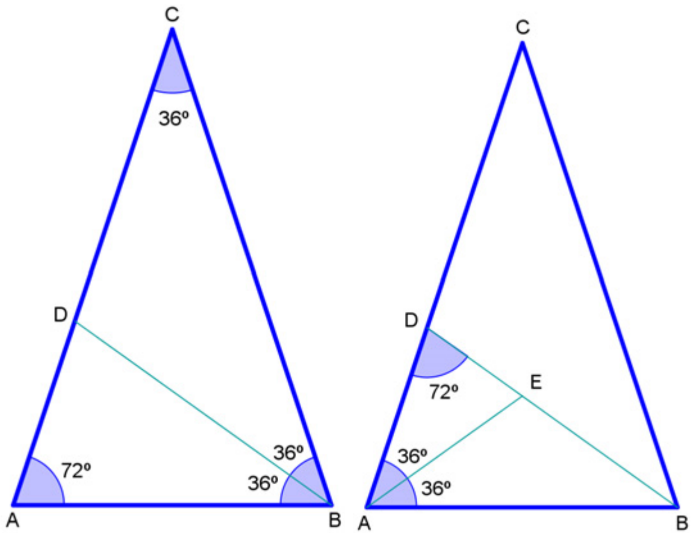
En las ***Adelfas***



En la ***Arquitectura***

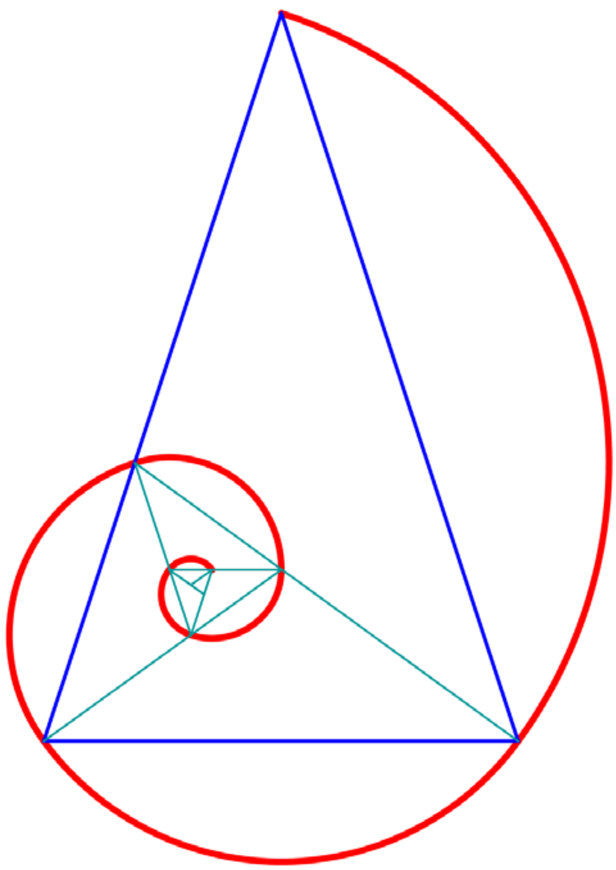
El triángulo áureo

Acabamos de ver que el pentágono regular y sus diagonales forman dos tipos de triángulos isósceles en los que la relación entre el lado mayor y el menor es el número áureo. Es por eso que estos dos triángulos se llaman triángulos áureos y al igual que ocurría con el rectángulo áureo se puede construir una espiral logarítmica a partir de un triángulo áureo A, B y C de ángulos 36º, 72º y 72º.
Si trazamos la bisectriz del ángulo B obtenemos dos triángulos: el BDC y el ADB.



Los ángulos del triángulo BDC son 36º, 36º y 108º luego es un triángulo áureo. El segundo, es decir, el ADB es semejante al original, luego también es un triángulo áureo. Evidentemente si en esos triángulos dividimos el lado mayor entre el menor se obtiene el número áureo. Si continuamos el proceso dibujando la bisectriz del ángulo A, obtenemos otro triángulo ADE que vuelve a ser semejante a los dos anteriores.

Al igual que ocurre con el rectángulo áureo, que al sustraerle un cuadrado de su interior se forma otro rectángulo áureo, en el triángulo áureo sucede lo mismo, es decir, si seguimos trazando bisectrices iremos obteniendo sucesivos triángulos áureos más reducidos en el interior del primero. El proceso consiste en ir sustrayendo al triángulo áureo un gnomon áureo y así ir obteniendo una sucesión de triángulos áureos en los que podemos generar una espiral que converge en un punto de manera similar al "ojo de Dios" visto anteriormente.



La espiral se construye uniendo mediante arcos de circunferencia los vértices consecutivos de estos triángulos. Los sucesivos arcos que componen la espiral se dibujan tomando como centro el vértice correspondiente al ángulo mayor de cada uno de los triángulos isósceles y como radio la longitud del lado menor. Esta espiral aumenta su longitud en cada cuarto de vuelta aproximadamente $1'618034$ veces el tamaño anterior, es decir que el factor de crecimiento es el número áureo.

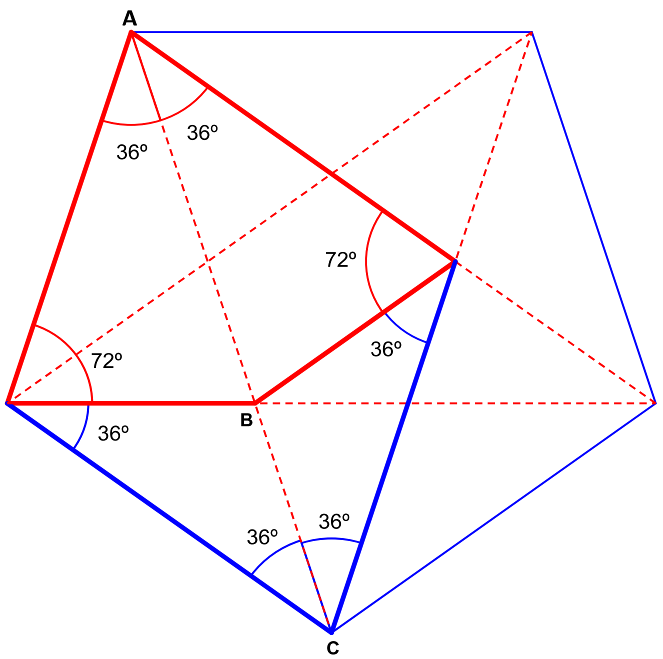
Los Mosaicos de Penrose

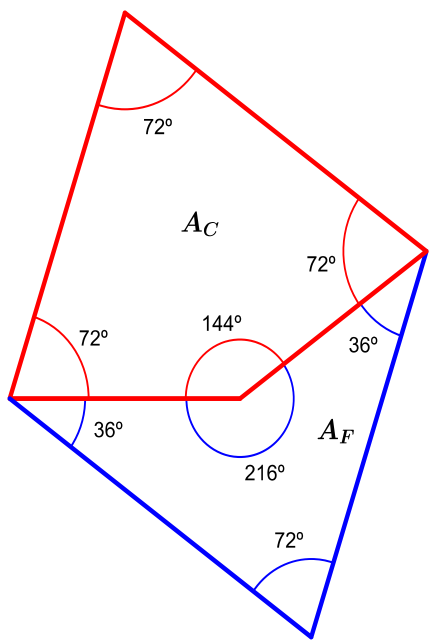
Cuando una teselación no tiene traslaciones que hagan que coincida consigo misma decimos que es no periódica o aperiódica.

Durante décadas se ha intentado averiguar cual era el número mínimo de teselas necesarias para formar una teselación no periódica. El más pequeño que se conoce lo describió Roger Penrose en 1974 y sólo contiene dos piezas: *el cometa y la flecha cuyas dimensiones guardan la proporción áurea*. Diseñó un mosaico formado con cuadriláteros cóncavos y convexos como éstos, pero para colocarlos imponía la condición de que dos cuadriláteros fronterizos sólo podían compartir un lado y no dos, es decir que el vértice cóncavo de una flecha no podía ser llenado con un cometa, pero sí por un par de cometas. Debido a esta circunstancia, en los mosaicos de Penrose se han dibujado dos arcos en el cometa y otros dos en la flecha para que cuando se coloquen las piezas tengan continuidad esas líneas.

- El ***cometa*** es un cuadrilátero cuyas cuatro esquinas tienen ángulos de 72º, 72º, 72º y 144º y puede ser bisectado a lo largo de su eje de simetría para formar un par de triángulos acutángulos. Se utiliza para su construcción el número de oro.
- La ***flecha*** es un cuadrilátero cóncavo que tiene 4 ángulos interiores que son de 36º, 72º, 36º y 216º. La flecha puede ser bisectada a lo largo de su eje de simetría para formar un par de triángulos obtusángulos. Se utiliza para su construcción el número de oro.

Estos dos cuadriláteros unidos forman un rombo que se obtiene de un pentágono regular.



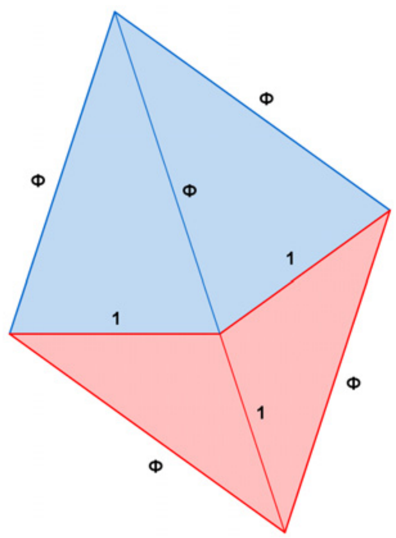


Sabemos que en el pentágono regular la relación $\frac{AB}{BC} = \Phi$ es el número de oro y se verifica en cualquiera de sus diagonales, lo que significa que el cociente entre el lado mayor del cometa y el lado menor es el número de oro.

Sabemos que $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0 \;\rightarrow\; \Phi^2 = \Phi + 1 \;\rightarrow\; \Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$

Si dividimos la superficie del cometa entre la superficie de la flecha obtenemos también el número áureo.

$$\frac{A_C}{A_F} = \Phi$$

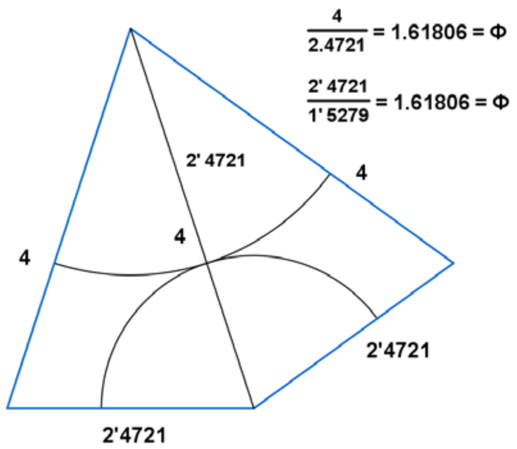


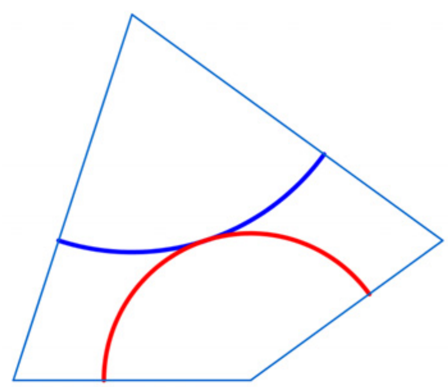
Dado que la cometa y la flecha componen juntas *un rombo es evidente que con ellas se puede recubrir periódicamente el plano.*

Para evitar esto y que el recubrimiento del plano no sea periódico, John Conway, que fue el que dio el nombre de cometa y flecha a dichas teselas, propuso dibujar dos arcos sobre cada pieza. Estos arcos se distinguirán o bien por el trazo o por tener colores distintos y son los que señalarán las combinaciones posibles: dos aristas sólo podrán entrar en contacto si los extremos de sus arcos coinciden. Los radios que tenemos que usar para dibujar los dos arcos en cada pieza están en proporción áurea.

Supongamos que el lado de la cometa mide 4 unidades. Se verifica la siguiente proporción:

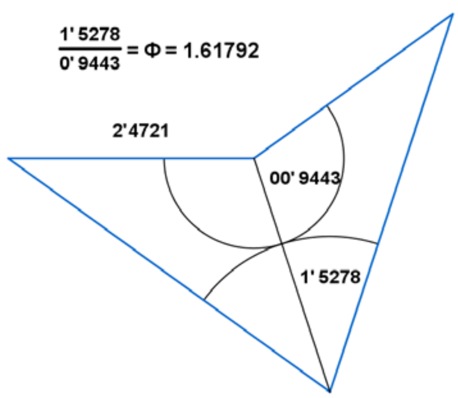
$$\frac{4}{x} = \frac{x}{4-x} \qquad x^2 + 4x - 16 = 0 \qquad x = \frac{-4+\sqrt{16+64}}{2} = \frac{-4+\sqrt{82}}{2} \qquad x = 2'4721$$

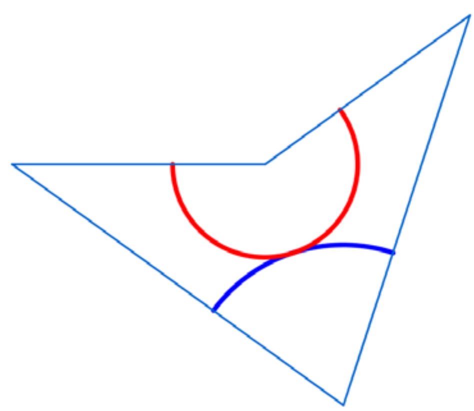




Por otro lado, en la flecha se verifica la siguiente proporción:

$$\frac{2'4721}{x} = \frac{x}{2'4721 - x} \qquad x^2 + 2'4721x - 6'1112 = 0 \qquad x = 1'5278$$





Espirales

La Espiral Logarítmica. Ecuación y características

El término espiral logarítmica se debe a Pierre Varignon. La espiral logarítmica fue estudiada por Descartes y Torricelli, pero la persona que le dedicó un libro completo fue Jakob Bernoulli, que la llamó *Spira mirabilis* «la espiral maravillosa». Impresionado por sus propiedades, pidió que grabaran en su tumba, en Basilea, la espiral logarítmica con la máxima *Eadem mutata resurgo (resurjo cambiada pero igual)*, pero, en su lugar, se grabó una espiral de Arquímedes.

En coordenadas polares (r,θ), la fórmula de la espiral logarítmica puede escribirse como:

$$r = r_0\, e^{k\theta}$$

donde "r" es el radio vector (segmento que va desde cualquier punto de la espiral hasta el centro de la misma), r_0 es el radio inicial, θ el ángulo de giro y k una constante.

En coordenadas paramétricas las ecuaciones son: $\begin{cases} x = r_0\, e^{k\theta}\cos\theta \\ y = r_0\, e^{k\theta}\operatorname{sen}\theta \end{cases}$

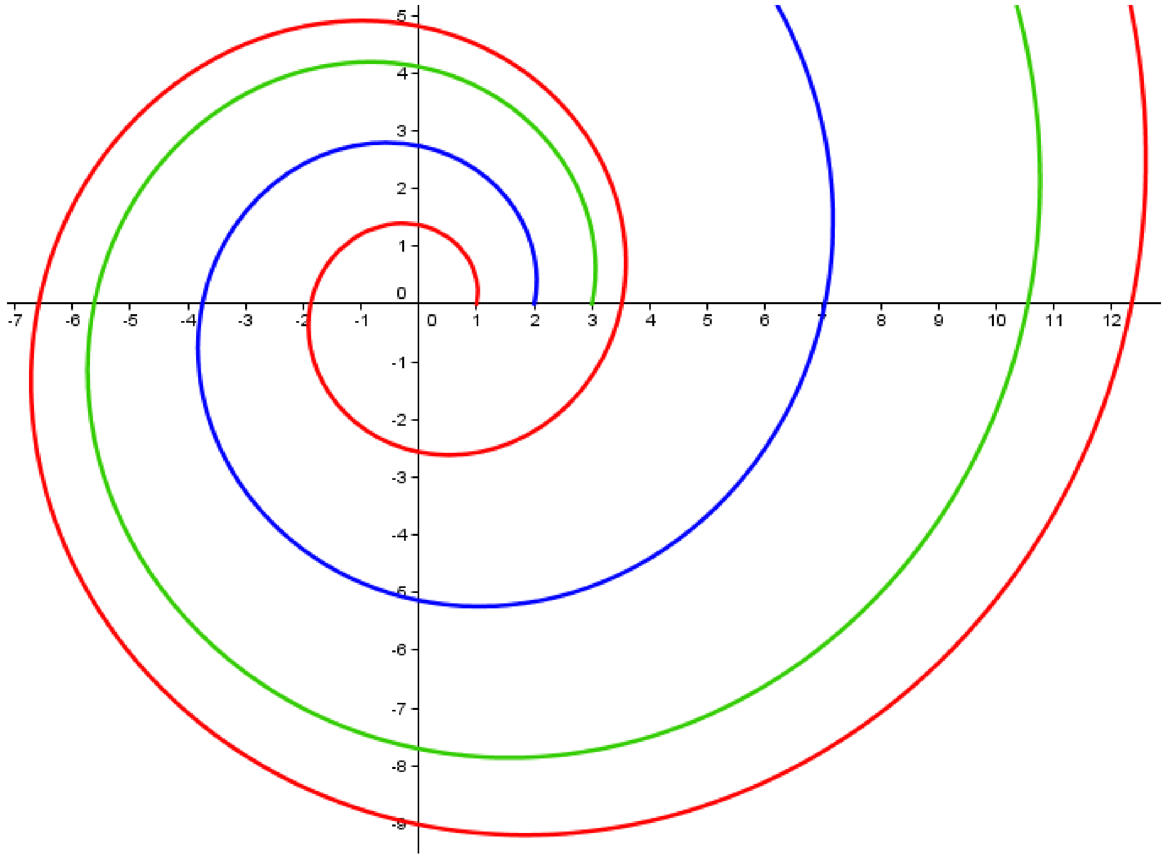
Tomando logaritmos neperianos en la ecuación en coordenadas polares obtenemos:

$$\ln r = \ln(r_0\, e^{k\theta}) \qquad \ln r = \ln r_0 + \ln e^{k\theta} \qquad \ln\frac{r}{r_0} = \ln e^{k\theta} \qquad \ln\frac{r}{r_0} = k\,\theta \;\Rightarrow\; \theta = \frac{1}{k}\ln\frac{r}{r_0}$$

es decir, el ángulo es proporcional al logaritmo del radio, de ahí el nombre de *espiral logarítmica.*

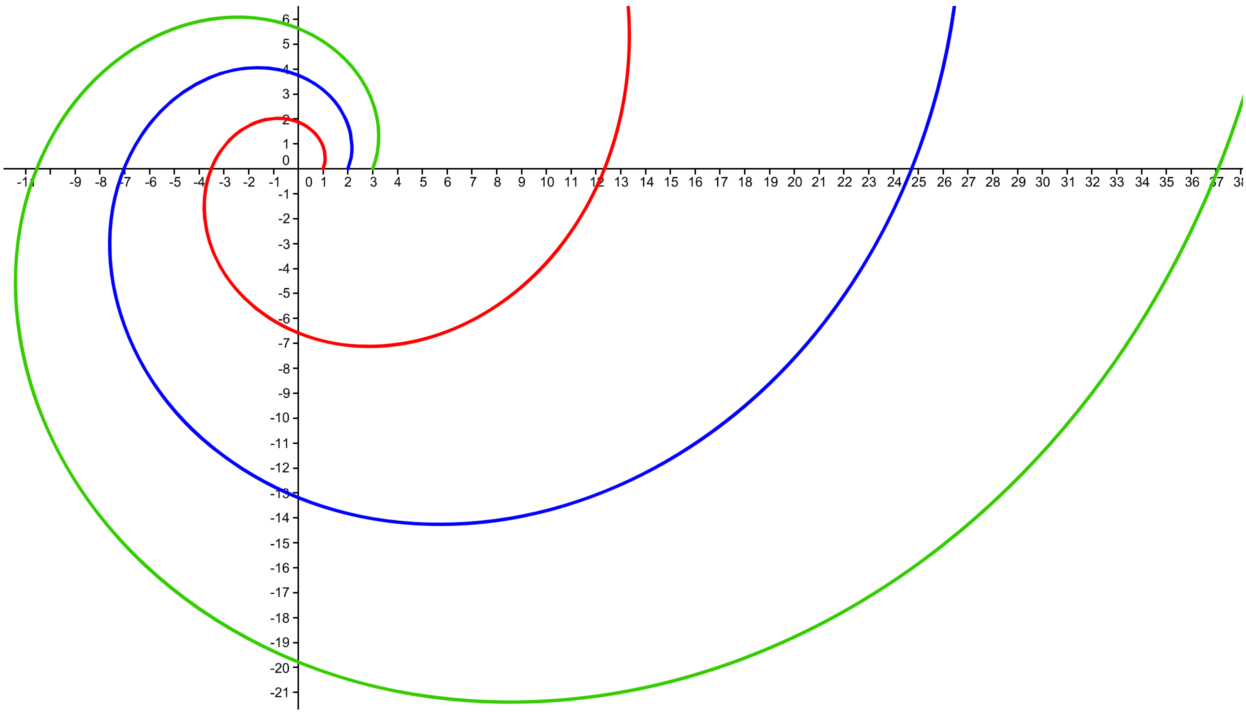
A continuación se representan espirales logarítmicas para $k = 0'2$ y radios iniciales 1, 2 y 3.

$r = e^{0'2\theta}$ (en rojo) $\qquad r = 2e^{0'2\theta}$ (en azul) $\qquad r = 3e^{0'2\theta}$ (en verde)

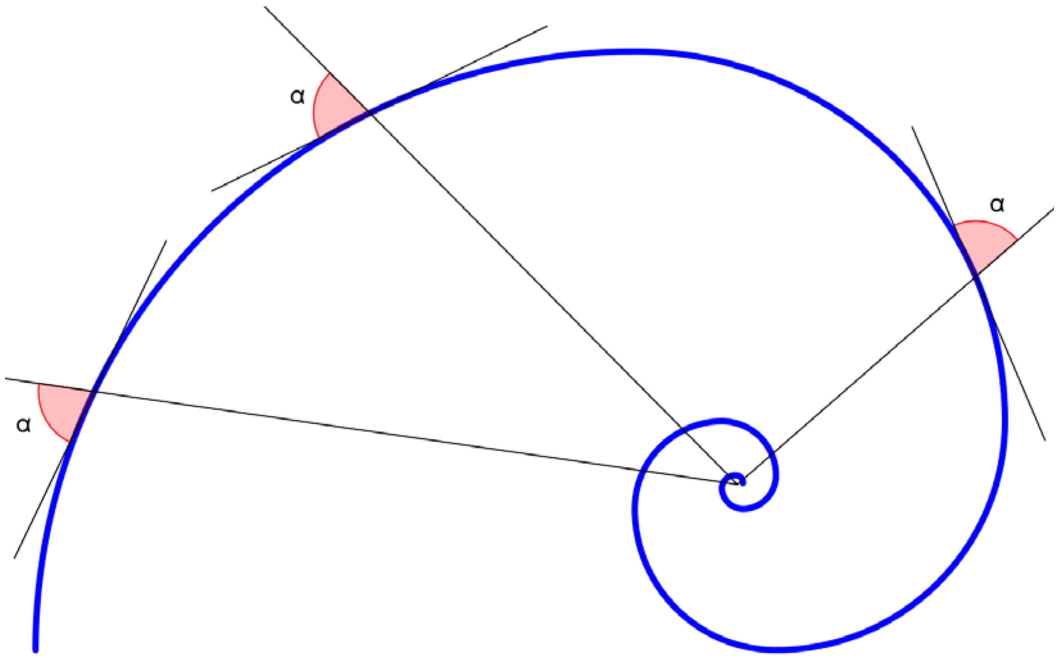


A continuación se representan espirales logarítmicas para $k = 0'4$ y radios iniciales 1, 2 y 3.

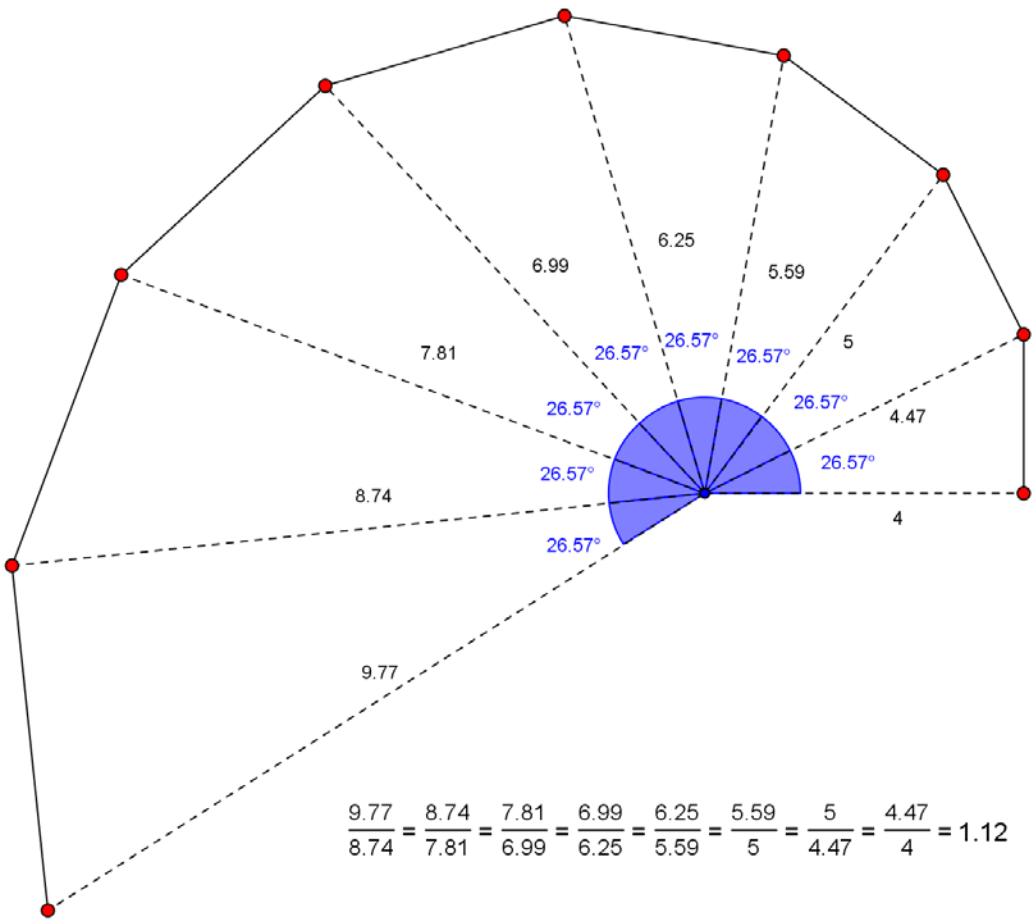
$r = e^{0'4\theta}$ (en rojo) $\quad$ $r = 2e^{0'4\theta}$ (en azul) $\quad$ $r = 3e^{0'4\theta}$ (en verde)



- Una propiedad importante de la espiral logarítmica, que la diferencia de otros tipos de espirales, es que es *equiangular*. El nombre de equiangular viene de que el ángulo que forma en cualquier punto de la espiral logarítmica el radio vector (segmento que va desde cualquier punto de la espiral hasta el centro de la misma) con la tangente en dicho punto siempre es constante.

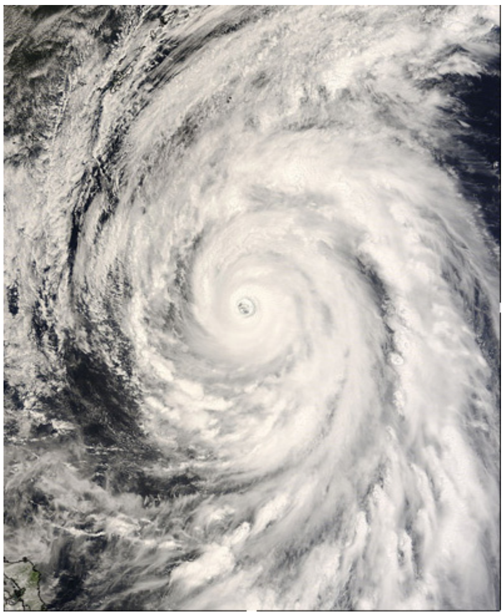


- La espiral logarítmica está presente en el crecimiento de numerosos organismos vivos. Las dos ideas que inspiran este crecimiento son las de rotación más dilatación. Cuando los fenómenos de rotación y dilatación se unen dan lugar a una espiral, que es una curva que surge a partir de un punto que gira y que al mismo tiempo se aleja del punto de origen. Según se aleja del centro la espiral se va haciendo cada vez más ancha y este aumento se produce de manera continua y uniforme. Su borde exterior describe una curva que es siempre igual a sí misma. La separación de las espiras aumenta al crecer el ángulo, es decir, el radio vector crece de forma exponencial respecto del ángulo de giro, por eso también recibe el nombre de espiral geométrica.
- *La espiral logarítmica es la única curva que verifica que su evoluta (envolvente de las normales a la curva), su involuta, su caústica y su podaria son, a su vez, espirales logarítmicas*. Por ello la expresión latina "*eadem mutata resurgo*" significa que, *aunque me cambien, es decir, si trazan mi involuta, mi cáustica, mi evoluta o mi podaria siempre volveré a aparecer semejante a mi misma*. Esta autosemejanza relaciona directamente a la espiral logarítmica con los fractales.
- El halcón se aproxima a su presa según una espiral logarítmica, ya que su mejor visión está en ángulo con su dirección de vuelo.
- Una aproximación a la espiral logarítmica se construye trazando sucesivos triángulos rectángulos semejantes, de tal forma que la hipotenusa de uno es un cateto del siguiente. Posteriormente se unen los vértices consecutivos. Esta construcción se basa en una propiedad ya descubierta por Bernuilli: mientras el ángulo de giro crece en progresión aritmética (sumando siempre la misma cantidad), el radio correspondiente crece en progresión geométrica (multiplicando siempre el radio anterior por un mismo número). La espiral logarítmica también se llama *espiral geométrica*, porque el radio vector que une el vértice con un punto de la espiral, crece en progresión geométrica, mientras el ángulo que forma el radio vector lo hace en progresión aritmética.



La Espiral Logarítmica y los Huracanes, Tifones, Borrascas, Tornados y Galaxias

La galaxia *M101* a 25 millones de años luz de la Tierra y el tifón *Rammasun* no parecen tener mucho en común. Rammasun tiene aproximadamente unos mil kilómetros de largo, mientras que M101 (Galaxia Remolino) se expande unos 170.000 años luz, haciéndolos muy desiguales en escala, sin mencionar los diferentes entornos físicos que controlan su formación y desarrollo. Pero en verdad son sorprendentemente parecidos: *con sus brazos, ambos exhiben la forma de una bella y simple curva matemática conocida como espiral logarítmica, una espiral que crece de forma geométrica conforme se distancia del centro.*

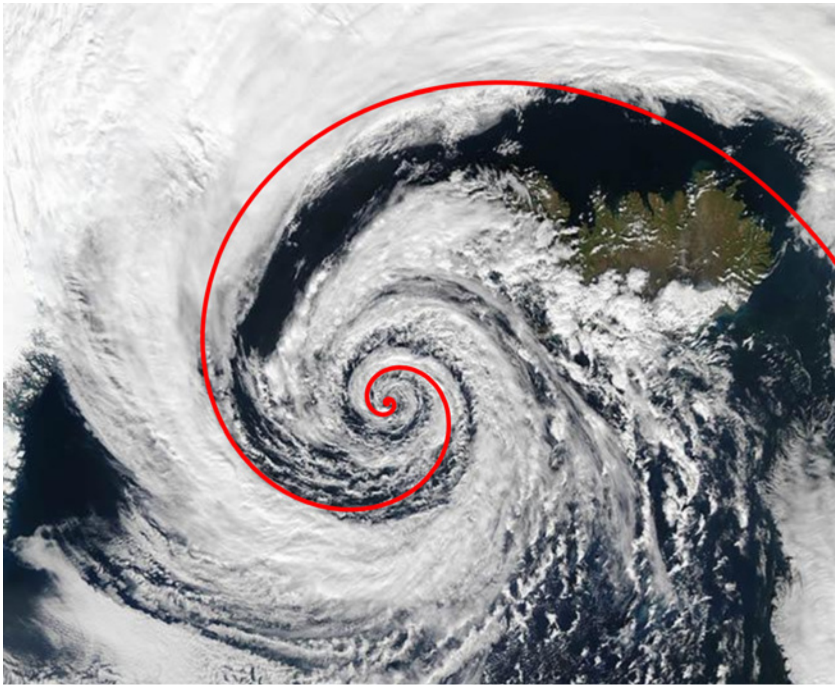


El ***Huracán Irene*** que azotó la costa este de EEUU el 28 de agosto de 2011 sigue un patrón que se aproxima a la forma de una espiral logarítmica de ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = 0'45\cos(-t)\,e^{0'45\,t} \\ y = 0'45\,\mathrm{sen}(-t)\,e^{0'45\,t} \end{array}\right\}$$

El patrón que sigue la imagen correspondiente a una ***Borrasca sobre Islandia*** se aproxima a la forma de una espiral logarítmica de ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = 0'1\cos(-t)\,e^{0'35\,t} \\ y = 0'1\,\mathrm{sen}(-t)\,e^{0'35\,t} \end{array}\right\}$$

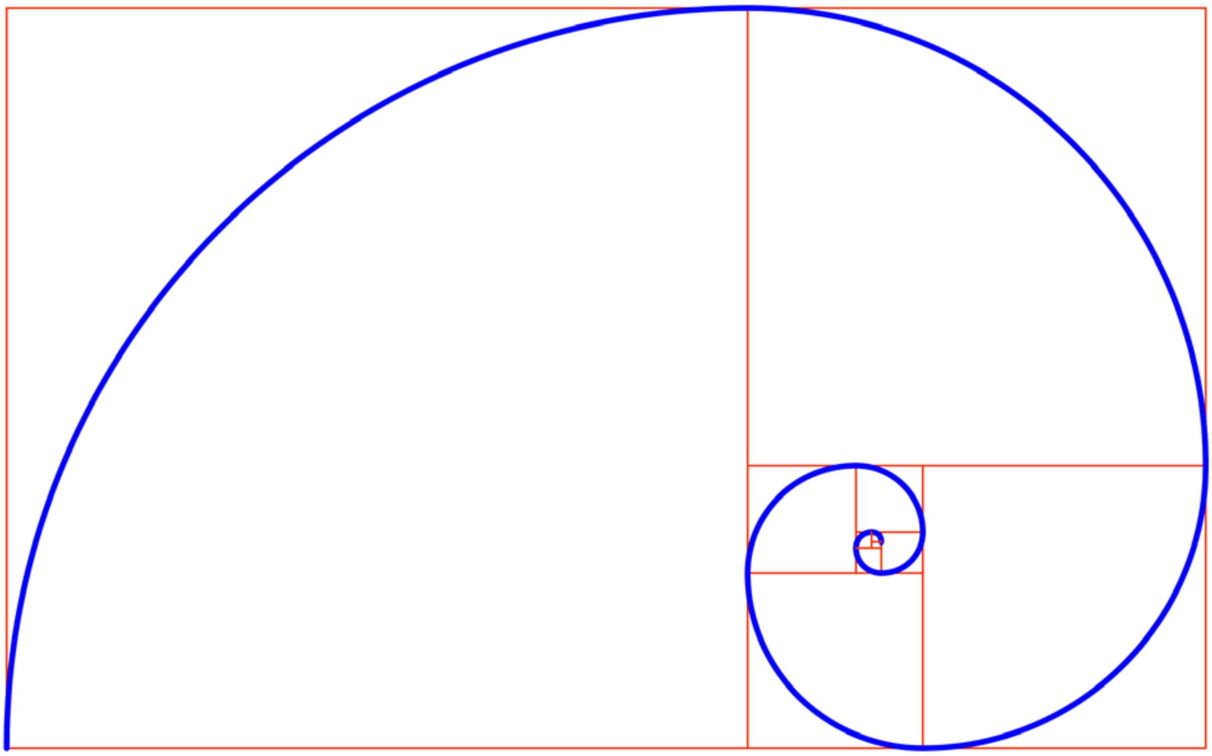


La Espiral de Durero. Aproximación a la espiral Logarítmica

En 1525 Albert Durero publica la obra titulada *"Instrucción sobre la medida con regla y compás de figuras planas y sólidas"*. En este libro Albert Durero pretende enseñar a los artistas, pintores y matemáticos de la época diversos métodos para dibujar figuras geométricas y en concreto muestra cómo dibujar con regla y compás algunas espirales entra las cuales está una que pasará a la historia como *"la Espiral de Durero"*. Durero se siente muy influenciado por el mundo helénico y este hecho le impone la restricción de utilizar exclusivamente la regla y el compás, por lo que se limitará a investigar la representación aproximada de la espiral no uniforme mediante arcos de circunferencia.

Según el diccionario María Moliner "*una espiral es una línea curva desarrollada en un plano alrededor de un punto, del cual se aleja gradualmente, de modo que no llega a cerrarse*". Una espiral es una curva que presenta *autosimilitud*, es decir, no se altera cuando cambia su tamaño, tanto si aumenta como disminuye. Si en cada uno de los cuadrados de los rectángulos áureos de la figura anterior trazamos arcos de circunferencia de radio el lado del cuadrado obtenemos la espiral de *Durero*, que no es ni una *espiral de Arquímedes* ni una *espiral Logarítmica* ya que ninguna de las dos se puede trazar con regla y compás.

La espiral Logarítmica se distingue de la espiral de Arquímedes por el hecho de que en la espiral Logarítmica las distancias entre sus brazos se incrementan en progresión geométrica, mientras que en una espiral de Arquímedes estas distancias son constantes. *La espiral de Durero es casi una espiral logarítmica*, de salto angular 90º y razón geométrica el número de oro *y es una de las espirales gnómicas basadas en el número de oro*. *Esta espiral no se ajusta de manera perfecta a los fenómenos naturales de desarrollo de numerosos seres vivos, tanto animales como vegetales, como muchos autores han querido ver a lo largo de la historia*.



Una de las espirales de Durero más originales y actuales es la de las ***escaleras del Vaticano*** que aparecen en la imagen. Esto demuestra que hoy en día también hay estructuras que se basan en el número áureo.

La Sucesión de Fibonacci. La Espiral de Fibonacci y el número de oro

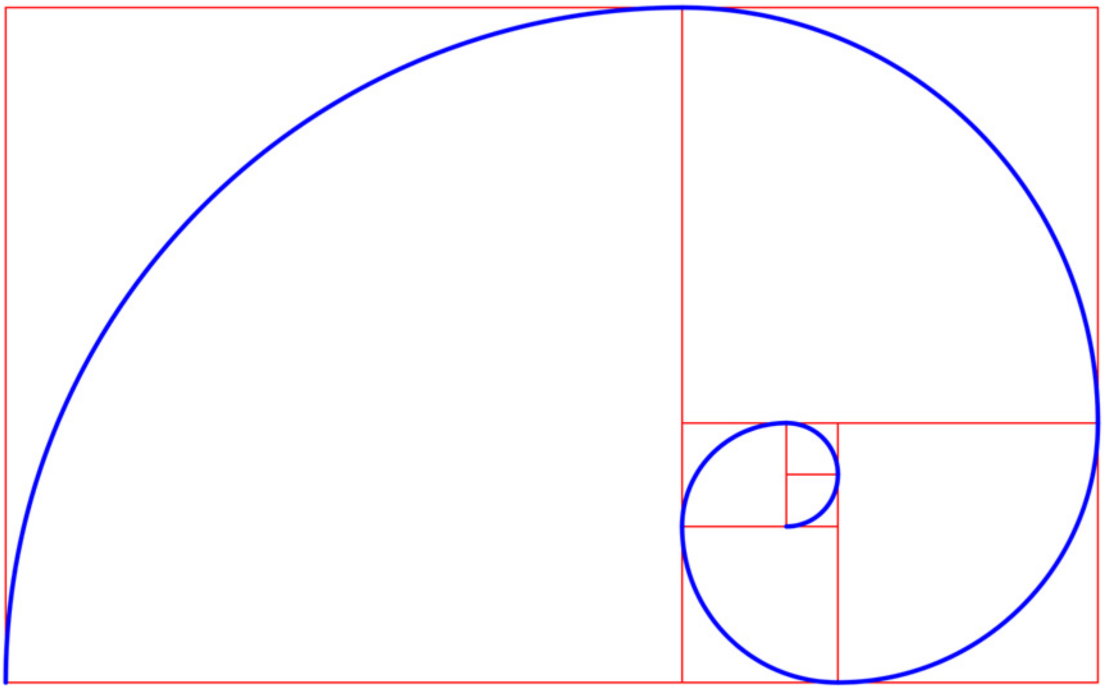
En el siglo XIX el matemático francés *François Édouard Anatole Lucas* rescató de la oscuridad la ahora famosa sucesión de Fibonacci, sobrenombre con el que se conoció a *Leonardo de Pisa* (1170-1240). La sucesión de Fibonacci es aquella en la que cada número de la sucesión es el resultado de la suma de los dos anteriores y que apareció en un libro perdido del matemático italiano como consecuencia de un problema de reproducción de conejos.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, ……..

La sucesión de Fibonacci tiene una propiedad sorprendente: *si dividimos dos términos consecutivos de la sucesión, siempre el mayor entre el menor, obtenemos, al tomar cada vez más términos el número de oro*.

$$\frac{1}{1}=1 \quad \frac{2}{1}=2 \quad \frac{3}{2}=1'5 \quad \frac{5}{3}=1'66 \quad \frac{8}{5}=1'6 \quad \frac{13}{8}=1'625 \quad \frac{21}{13}=1'615 \;\ldots\ldots\ldots\; \lim_{n\to\infty}\frac{t_n}{t_{n-1}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi$$

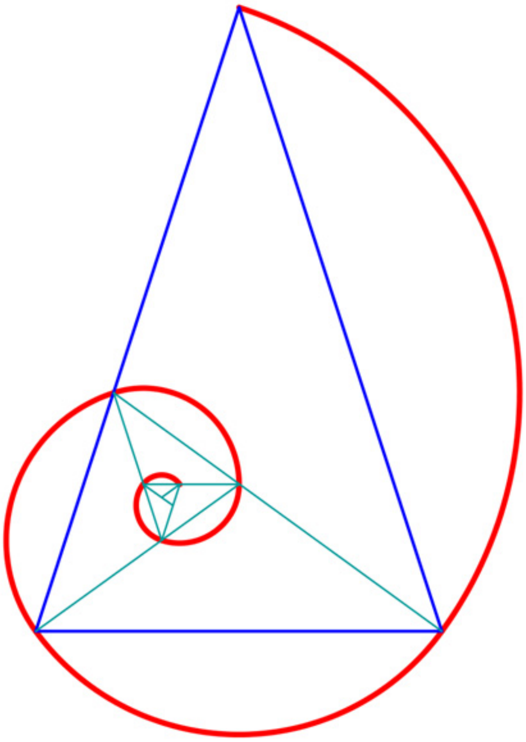
Para dibujar la espiral de Fibonacci comenzamos dibujando dos pequeños cuadrados de lado una unidad, que estén unidos por uno de sus lados. A partir de ahí se forma un rectángulo, cuyo lado mayor, que es 2, sirve como lado de un nuevo cuadrado que unimos a los anteriores. Nuevamente obtenemos un rectángulo de dimensiones 3 x 2 y a partir de aquí, el proceso se reitera sucesivamente añadiendo cuadrados cuyos lados son los números de la sucesión de Fibonacci ya que cada cuadrado tiene como lado la suma de los lados de los dos cuadrados construidos anteriormente.



Esta curva, al igual que pasa con la espiral de Durero, es una aproximación de la llamada *espiral equiangular o espiral logarítmica*.

La espiral logarítmica es el único tipo de espiral que mantiene su forma al ser reescalada y aumenta su tamaño en cada cuarto de vuelta en aproximadamente 1.618034 veces el tamaño anterior. Esta cifra corresponde al número de oro que es el número asociado a la sucesión de Fibonacci.

Espiral en el Triángulo Áureo



Al igual que ocurre con el rectángulo áureo, que al sustraerle un cuadrado de su interior se forma otro rectángulo áureo, en el triángulo áureo sucede lo mismo, es decir, si seguimos trazando bisectrices iremos obteniendo sucesivos triángulos áureos más reducidos en el interior del primero.

El proceso consiste en ir sustrayendo al triángulo áureo un gnomon áureo y así ir obteniendo una sucesión de triángulos áureos en los que podemos generar una espiral que converge en un punto de manera similar al "ojo de Dios" visto anteriormente.

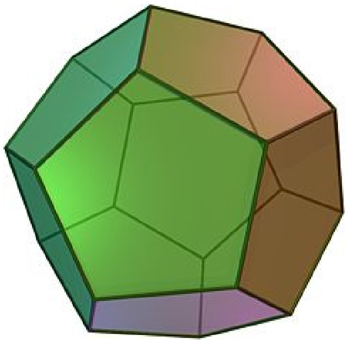
La espiral se construye uniendo mediante arcos de circunferencia los vértices consecutivos de estos triángulos. Los sucesivos arcos que componen la espiral se dibujan tomando como centro el vértice correspondiente al ángulo mayor de cada uno de los triángulos isósceles y como radio la longitud del lado menor. Esta espiral aumenta su longitud en cada cuarto de vuelta aproximadamente $1'618034$ veces el tamaño anterior, es decir que el factor de crecimiento es el número áureo.

Poliedros

Si tres rectángulos áureos iguales se cortan en el espacio perpendicularmente entre sí por su punto medio y unimos sus vértices se forma un *Icosaedro regular*. El poliedro dual del Icosaedro, que es el poliedro que se forma uniendo los puntos medios de sus caras es el *Dodecaedro regular*, que está formado por *Pentágonos regulares* y como hemos visto anteriormente su relación con el número áureo es evidente.

Esta relación se manifiesta a la hora de calcular su superficie y su volumen, cuyas expresiones para una arista igual a la unidad son:

$$S = \frac{15\Phi}{\sqrt{3-\Phi}} \qquad V = \frac{5\Phi^2}{6-2\Phi}$$



Los cristales de Piritas llamados *Piritoedros* tienen una estructura dodecaedral y sus caras son pentágonos perfectos.

La principal aplicación del Dodecaedro en Arquitectura la encontramos en la generación de las llamadas ***cúpulas geodésicas***. Una cúpula geodésica no es más que una triangulación de la superficie esférica y permiten cubrir grandes superficies a través de estructuras estables y poco pesadas.

Una forma de generar una cúpula geodésica es a partir del Dodecaedro Regular. Si unimos el centro geométrico del Dodecaedro con el centro de una cara y prolongamos dicha recta hasta cortar a la esfera circunscrita, obtenemos un vértice que al unirlo con los cinco vértices de dicha cara, da lugar a cinco nuevas caras que son triángulos isósceles. Realizando esta operación con las doce caras del Dodecaedro obtenemos una primera transformación del poliedro original la cual nos recuerda al Duodecedron Elevatus de Leonardo da Vinci en "De Divine Proportione". Repitiendo este proceso con los puntos medios de las nuevas aristas obtendríamos una superficie geodésica de 240 caras. Todos los vértices deben de coincidir con la superficie de la esfera, ya que si no coinciden no es una geodésica. Las cúpulas geodésicas suelen construirse sobre todo a partir de un Icosaedro, más que con un Dodecaedro.

El concepto de la *Cúpula Geodésica* fue patentadas en 1947 por el arquitecto americano ***Richard Buckminster Fuller*** (1895-1983). Su obra más famosa fue la *esfera del pabellón USA en la Exposición Universal de Montreal* de 1967. Este pabellón esférico futurista de 76 m de diámetro y 41,5 m de altura alcanzó fama mundial. Fuller fue una figura polémica que defendía la posibilidad de construir grandes espacios (barrios, ciudades) abovedados con este tipo de cúpulas. En su honor se ha llamado *fullerenos* a la tercera forma alotrópica del carbono (las otras dos son el diamante y el grafito) descubiertas en 1985.

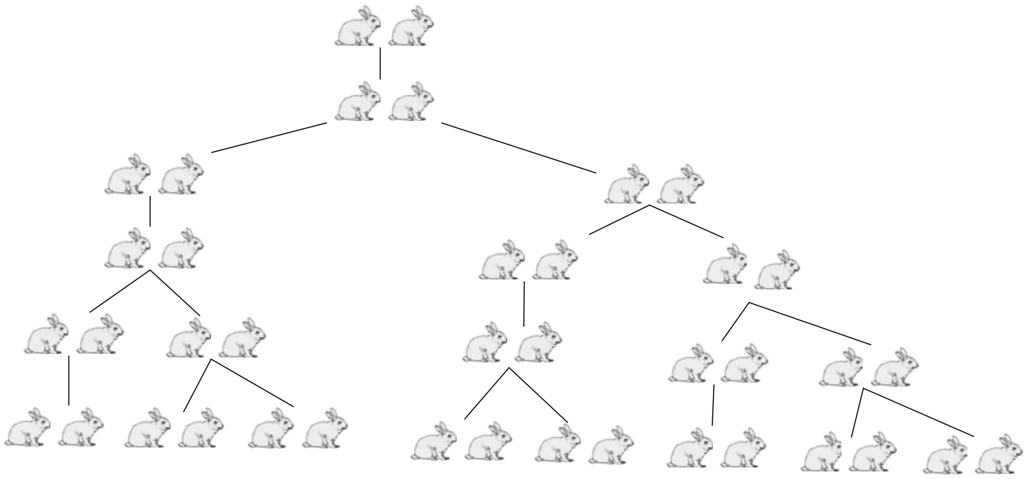
Tal vez el más conocido ejemplo de su uso en el Mundo Real es el edificio *Spaceship Earth* de Epcot, en Orlando.

En los últimos años se ha descubierto un nuevo tipo de cristales formados por figuras tridimensionales que también mantienen la proporción divina en su geometría dando lugar de nuevo a un empaquetamiento muy estable en el espacio.

El número de oro en la Biología

¿Dónde aparece la sucesión de Fibonacci?

En 1202 Fibonacci se preguntaba cuántos conejos habría en una granja al cabo de un año si comenzaba con una sola pareja. Supongamos, decía, que se encierra a una pareja de conejos recién nacidos (macho y hembra) en un lugar aislado, sabiendo que están preparados para procrear al mes de existencia y dar a luz a una nueva pareja (siempre macho y hembra) tras un mes de gestación. ¿Cuántas parejas habrá al cabo de un año? Al finalizar el primer mes la pareja original está dispuesta para procrear, pero sigue habiendo una única pareja. Al finalizar el segundo mes tendremos la pareja original y su primera pareja de hijos. Al finalizar el tercer mes tendremos la pareja original, la primera pareja de hijos que ya está a punto para procrear y una segunda pareja de hijos.

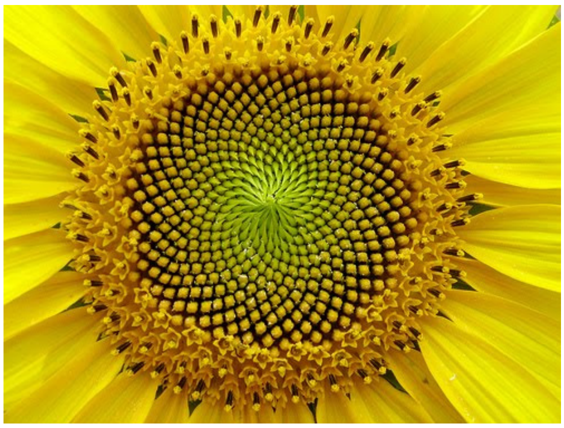


- *Continúa calculando el número de parejas a lo largo de los meses y comprueba que coincide con los términos de la sucesión de Fibonacci. ¿Cuántos conejos habrá al cabo de un año?*

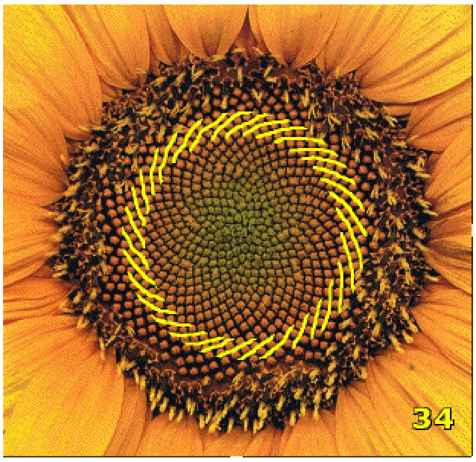
La Biología y la sucesión de Fibonacci

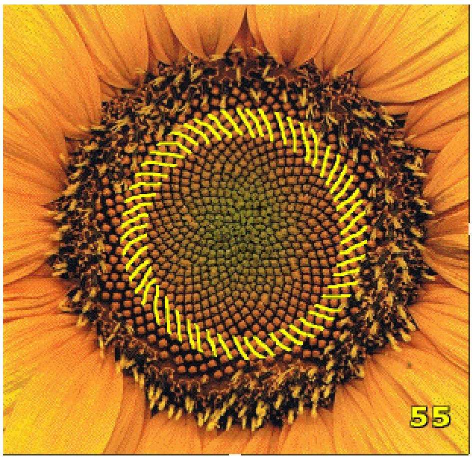
Como muy bien nos enseña la filotaxia, las ramas y las hojas de las plantas se distribuyen buscando siempre recibir el máximo de luz para cada una de ellas. Por eso ninguna hoja nace justo en la vertical de la anterior. La distribución de las hojas alrededor del tallo de las plantas se produce siguiendo secuencias basadas exclusivamente en estos números.

El número de espirales en numerosas flores y frutos también se ajusta a parejas consecutivas de términos de esta sucesión: las pipas de girasol forman espirales en sentidos contrarios. El número de espirales que hay en cada sentido son términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci, siendo las combinaciones más frecuentes: 21 y 34, 34 y 55, 89 y 144. En el girasol de la derecha el número de espirales que hay en el sentido de las agujas del reloj es de 34 y en sentido contrario es de 21.

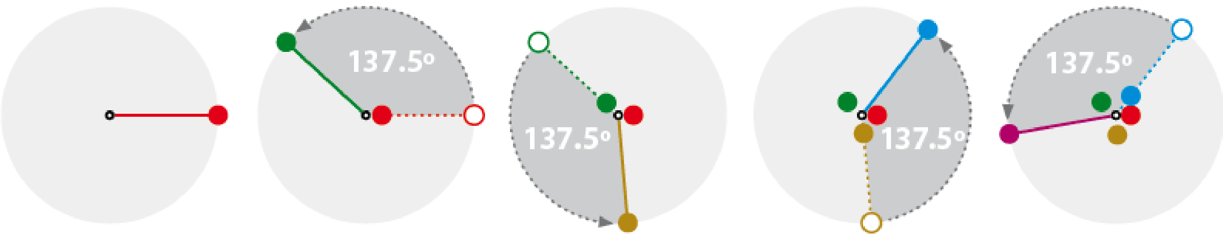


En el girasol siguiente el número de espirales que hay en el sentido de las agujas del reloj es de 34 y en sentido contrario 55, que corresponden a dos números de la sucesión de Fibonacci.

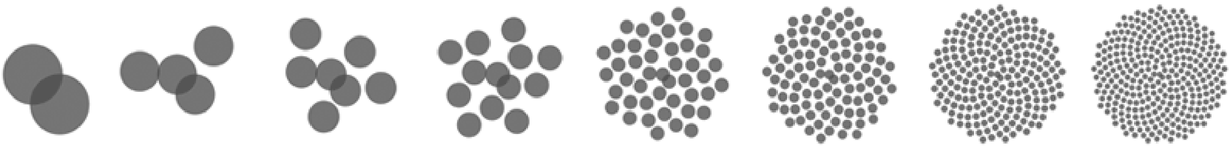




Cuando nace una semilla, parte del punto central del girasol y va siendo empujada hacia el exterior por las nuevas semillas. Al nacer, la semilla elige una trayectoria radial con un ángulo determinado. La elección de este ángulo es fundamental para empaquetar eficientemente las semillas sin que queden huecos. Este ángulo es el ángulo de oro visto anteriormente.



Aportamos una primera pipa de color rojo. Giramos 137,5º. Añadimos una segunda pipa de color verde y hacemos que la anterior se vaya hacia el centro. Giramos otros 137,5º, añadimos una tercera pipa de color tostado y hacemos que la anterior se vaya hacia el centro, hasta tocar con la primera. Giramos otros 137,5º…y así sucesivamente, pipa tras pipa, iríamos obteniendo paulatinamente unas distribuciones como las que aparecen en las siguientes figuras.

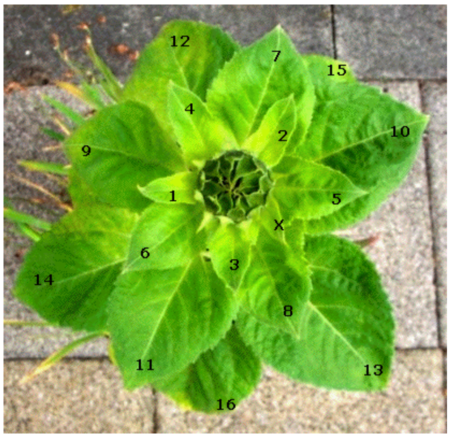


De este modo llegamos a la estructura característica en la que están dispuestas todas las pipas en su girasol, que es la más compacta posible.

¿Por qué encontramos el número Φ tantas veces, al estudiar el crecimiento de los vegetales? La respuesta está en los empaques: encontrar la mejor manera de ordenar los objetos para minimizar espacio perdido. Si te preguntasen cuál es la mejor forma de empacar objetos, seguramente responderías que depende de la forma de los objetos, ya que los objetos cuadrados quedarían mejor en estructuras cuadradas, mientras que los redondos se ordenan mejor en una estructura hexagonal. Pero, ¿cómo ordenar las hojas alrededor de un tallo, o las semillas en una flor, cuando ambas siguen creciendo? Al parecer, la Naturaleza usa el mismo patrón para disponer las semillas en una flor, los pétalos en sus bordes, y el lugar de las hojas en un tallo. Aún más, todos estos ordenamientos siguen siendo eficaces a medida que la planta crece. Este patrón corresponde a un ángulo de rotación a partir del punto central, mediante el cual los nuevos elementos (hojas, pétalos) se van organizando a medida que crecen.

Los botánicos han demostrado que las plantas crecen a partir de un pequeño grupo de células situado en la punta de cada sección que crece: ramas, brotes, pétalos y otras. Este grupo se llama meristema. Las células crecen y se ordenan en espiral: cada una se "dirige" a una dirección manteniendo un cierto ángulo en relación al punto central. Lo asombroso es que un solo ángulo puede producir el diseño de organización óptimo, sin que importe cuánto más va a crecer la planta. De modo que, por ejemplo, una hoja situada en el inicio de un tallo será tapada lo menos posible por las que crecen después, y recibirá la necesaria cantidad de luz solar. Y ese ángulo de rotación corresponde a una fracción decimal del número áureo: 0.618034".

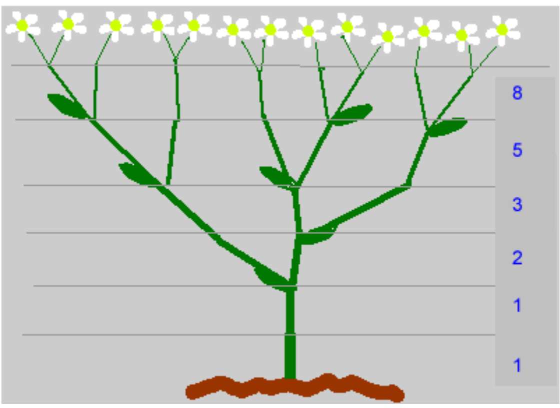
El ángulo que separa cada una de las hojas numeradas de la siguiente planta, medido en el sentido de las agujas del reloj, coincide con el ángulo áureo (137’5º). Esto no es ningún misterio, sino una necesidad de las plantas, ya que de esta manera se aseguran, que a medida que crece el tallo, las hojas no se superpondrán una sobre la otra y aprovecharán mejor la luz del Sol.



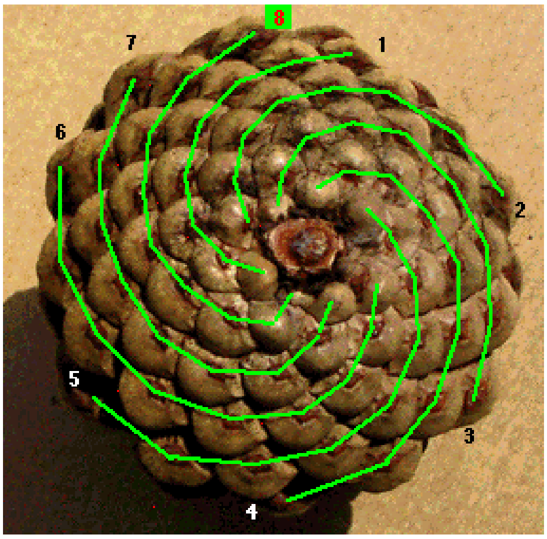
El número áureo también aparece en la disposición de los pétalos de algunas plantas como los ***cactus*** o las ***rosas***.

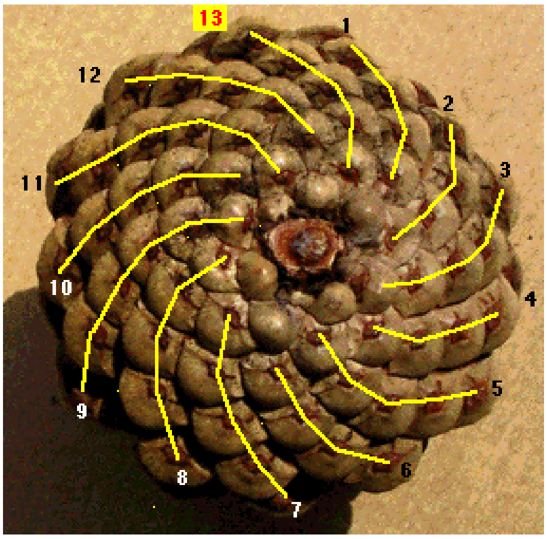
Parece que el mundo vegetal tenga programado en sus códigos genéticos del crecimiento los términos de la sucesión de Fibonacci.

En la plata ***Achillea Ptarmica*** también aparece la sucesión de Fibonacci

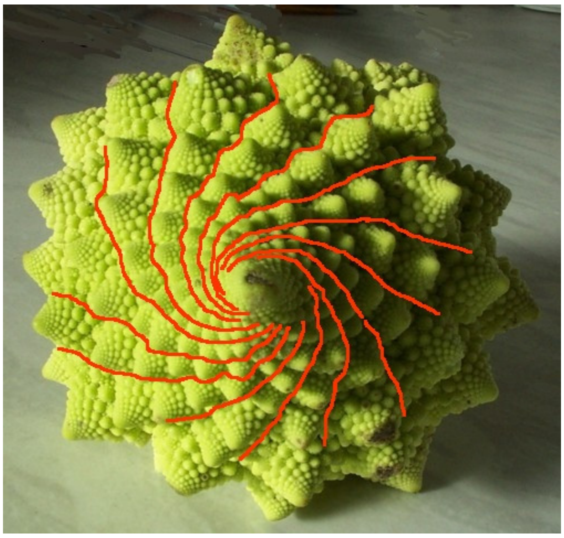
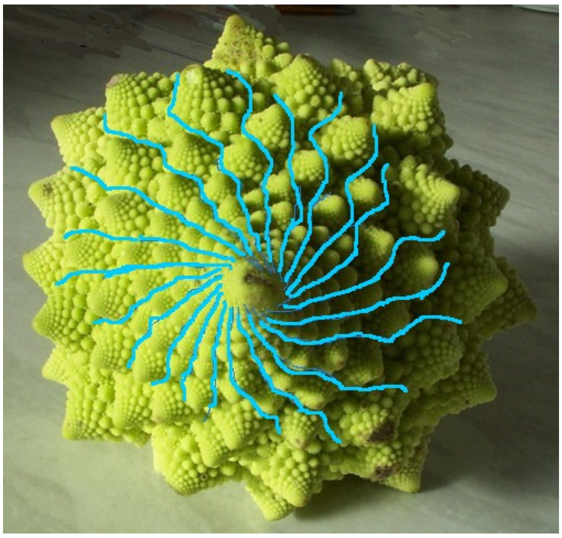


También se da este crecimiento en las piñas de las ***coníferas*** cuyo número de espirales más habitual en cada sentido son las parejas 5-8 y 8-13.





En vegetales como el ***Romanescu***, que es un tipo de coliflor, el número de espirales que hay en el sentido de las agujas del reloj es de 13 y en sentido contrario 21.

La mayoría de flores poseen 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 u 89 pétalos. El Lirio tiene 3 pétalos, algunos Ranúnculos 5 o bien 8. Las margaritas también obedecen a esta secuencia y acomodan sus semillas en forma de 21 y 34 espirales. Da la impresión de que por la forma de crecer los vegetales o de acomodar sus semillas lleven programado en sus códigos genéticos los términos de la sucesión de Fibonacci, sin embargo *solo se trata de los resultados de la evolución, una cuestión meramente práctica que coincide con los números de la sucesión de Fibonacci*.

Los Erizos

Si a un erizo le quitamos todas las púas que le protegen y que forman parte de él, queda a la luz una estructura pentagonal muy clara en cuanto al crecimiento de este animal.

El Nautilus y el número de oro

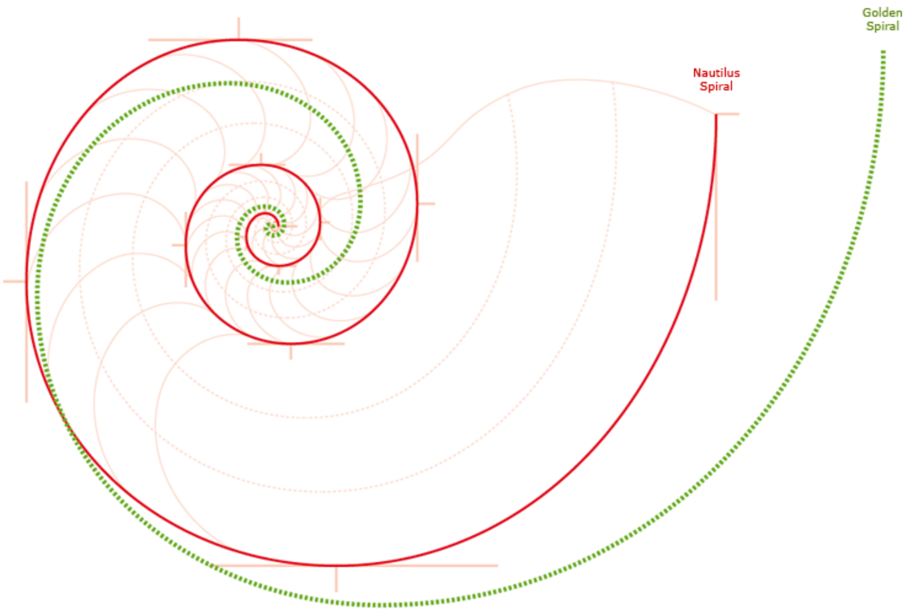
En Biología son frecuentes las estructuras que se aproximan a la espiral logarítmica. Hace millones de años había especies de animales como los ***Ammonites*** con conchas en forma de espiral que taponaban los espacios que iban quedando vacíos a medida que crecían. La siguiente imagen es la de una concha, conocida en los arrecifes de coral del sur del Pacífico como ***Nautilus pompilius***. La palabra "*nautilo*" proviene de la palabra "barco" en griego. Cuando las primeras conchas llegaron a la Europa renacentista, los asombrados coleccionistas pensaron que las perfectas espirales reflejaban el orden mayor del universo. El Nautilus es un cefalópodo, como el pulpo o la sepia, que habita en una concha en forma de espiral formada por varias cámaras unidas por tabiques. A medida que el Nautilus crece, pasa de una cámara a otra dejando tras sí compartimentos vacíos. Como un submarino, varía la cantidad de gas en los espacios vacíos para ajustar su flotabilidad y usa la propulsión a chorro para nadar

Vive sobre los arrecifes coralinos profundos del cálido Pacífico sur occidental a 610 m bajo las aguas y resistir grandes presiones hidrostáticas, debido a que las paredes aumentan de grosor de forma proporcional al radio de la concha. Para completar una vuelta necesita 18 cámaras.
Si damos un corte transversal a la concha, veremos que está formada por compartimentos separados entre sí mediante tabiques que se comunican entre sí por un sifón.

Los ***Nautilus***, como hacían los ***Amonites***, van sellando los tabiques de las cámaras a medida que construyen otra mayor para albergar su cuerpo que va creciendo, y ese caparazón sin bicho, lleno de gas más ligero que el agua, lo utilizan a modo de boya para flotar. El animal ocupa siempre el último compartimento, que es de mayor tamaño. Al ir creciendo el molusco abandona el compartimento anterior, que queda sellado, y crea uno nuevo semejante al anterior con la misma forma pero de proporciones mayores, y lo hace de tal manera que sus cámaras aumentan de tamaño de forma continua pero su forma es invariable. Las sucesivas vueltas van aumentando en anchura, en proporción constante e invariable. El borde de la concha describe una curva que es siempre igual a si misma. A esta curva se le llama *Espiral Logarítmica o Equiangular*.

En estos momentos los científicos están alertando del peligro que supone el hecho de que los pescadores estén matando nautilus a millones. La causa hay que encontrarla en el aumento de las ventas mundiales de joyas y adornos fabricados con la brillante concha.

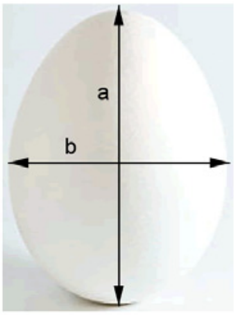
En algunos textos se afirma que la espiral de Fibonacci o la espiral áurea (es lo mismo), está en la base de la forma del Nautilus, pero realmente no es así, como se observa en las siguientes imágenes, aunque podemos considerar válida la aproximación.



El Huevo de la gallina, la Alcachofa y el número de oro

Si dividimos la altura máxima de un huevo de gallina o de una sección de alcachofa entre su anchura máxima vamos a obtener siempre un número que está comprendido entre el número de oro y su raíz cuadrada.

$$\sqrt{\Phi} < \frac{a}{b} < \Phi$$



El cuerpo humano y el número de oro

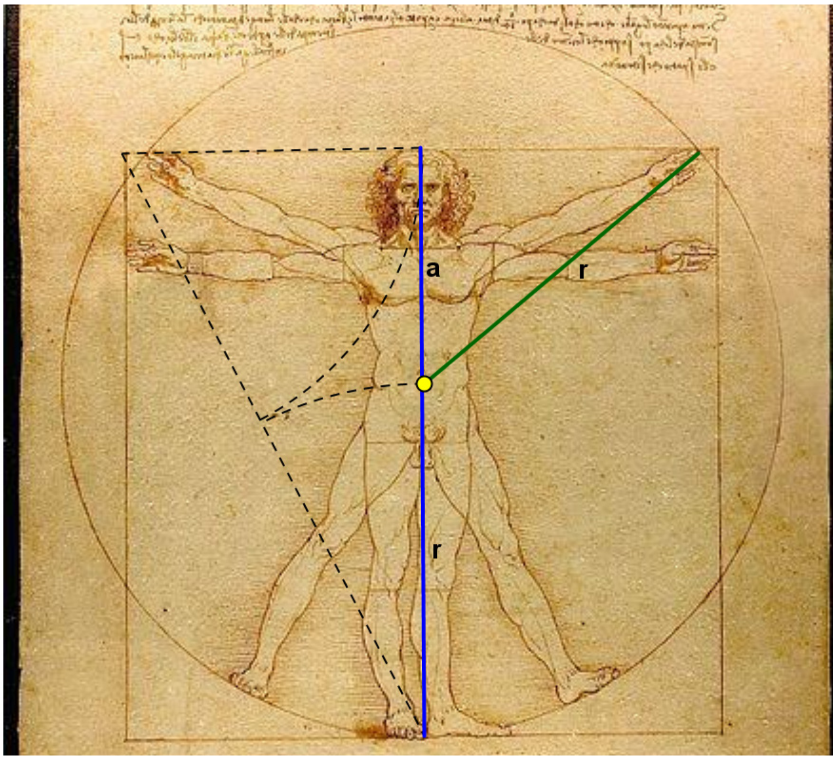
El Hombre de Vitrubio

Luca Pacioli (1445-1517) y *Leonardo da Vinci* (1452-1519) fueron los responsables de poner el número de oro en la órbita de la belleza y el arte dándole el nombre de *divina proporción*.

El Hombre de Vitruvio es un famoso dibujo de *Leonardo da Vinci*, inspirado por *Vitruvio*, arquitecto de *Julio César* en la antigua Roma, y que ilustra la obra de *Luca Pacioli* titulada *De divina proportione*, en la que se explican las proporciones que han de guardar las construcciones de índole artística, basadas en las relación áurea.

El *Hombre de Vitruvio r*epresenta una figura masculina desnuda en dos posiciones sobreimpresas de brazos y piernas e inscrita en un círculo y un cuadrado. Vitruvio dice que la altura de un hombre es igual a la envergadura, y que un hombre tumbado al extender brazos y piernas describe un círculo. *Luca Pacioli* propone un hombre perfecto en el que las relaciones entre las distintas partes de su cuerpo sean proporciones áureas. Estirando manos y pies y haciendo centro en el ombligo se dibuja la circunferencia. El cuadrado tiene por lado la altura del cuerpo, que coincide, en un cuerpo armonioso, con la longitud entre los extremos de los dedos de ambas manos cuando los brazos están extendidos y formando un ángulo de 90º con el tronco.

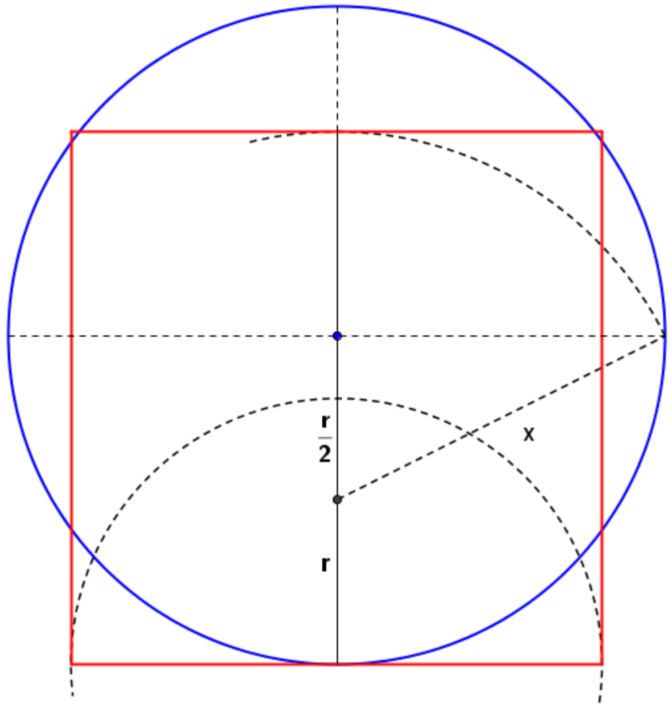
Leonardo da Vinci encontró una solución original basada en que el cuadrado y el círculo tienen centros diferentes. Los genitales son el centro del cuadrado y el ombligo el centro del círculo. Las proporciones ideales del cuerpo humano que se desprenden de esa figura corresponden a la razón áurea entre el lado del cuadrado y el radio del círculo.



$$\frac{\text{lado del cuadrado}}{\text{radio del círculo}} = \frac{\text{altura del hombre}}{\text{distancia desde el ombligo hasta el suelo}} = \frac{r+a}{r} = \Phi = 1'618........$$

Construcción de un cuadrado a partir de un círculo

A continuación veamos la demostración en la que *el lado del cuadrado y el radio del círculo se encuentran en razón Áurea.* Sea *r* el radio del círculo y *l* el lado del cuadrado. De la figura de la derecha se deduce:



$$x^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + r^2 \qquad x^2 = \frac{r^2}{4} + r^2 = \frac{5r^2}{4}$$

$$x = \frac{\sqrt{5}}{2} r$$

$$l = x + \frac{r}{2} = \frac{\sqrt{5}\,r}{2} + \frac{r}{2} = \frac{r(1+\sqrt{5})}{2}$$

$$\frac{l}{r} = \frac{\frac{r(1+\sqrt{5})}{2}}{r} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$$

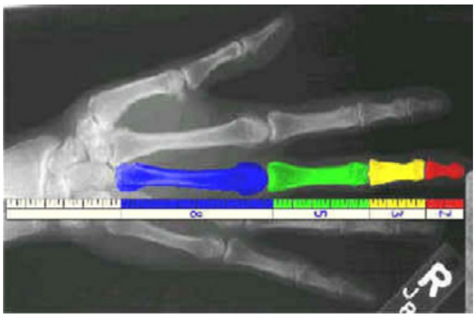
En esta construcción observamos que los vértices superiores del cuadrado y la circunferencia se encuentran muy cercanos. Sin embargo, en el *Hombre de Vitruvio* de Leonardo da Vinci, el vértice superior del cuadrado y la circunferencia se encuentran relativamente separados, lo cual parece indicar que Leonardo da Vinci no realizó su dibujo del *Hombre de Vitruvio* con la intención de que el lado del cuadrado y el radio de la circunferencia se hallasen en razón áurea.

Hacia el año 1850, el alemán Zeysig efectuó medidas sobre miles de cuerpos humanos y encontró que estadísticamente las proporciones del cuerpo masculino, para un cuerpo sanamente desarrollado, oscilan en torno a la razón media:

$$\frac{\text{altura total (h)}}{\text{Distancia vertical entre el ombligo y la planta de los pies (n)}} = \frac{13}{8} = 1'625$$

Zeysig no solo midió la razón $\frac{h}{n}$ en los adultos, sino que también estudió su variación durante el crecimiento y observó que en los recién nacidos el ombligo divide el cuerpo en dos partes iguales, de modo que la razón $\frac{h}{n}$ tiende gradualmente hacia su valor definitivo.

El número de oro en el cuerpo humano



El número de oro se encuentra muy presente en el cuerpo humano.

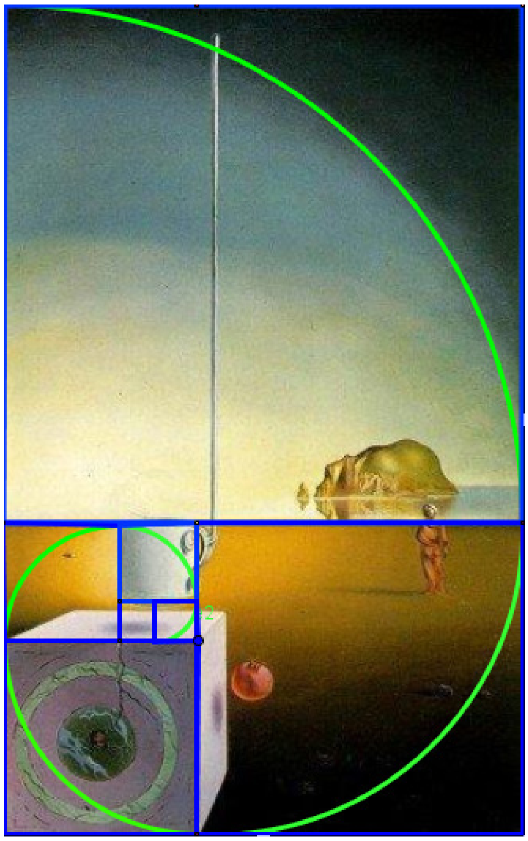
En la ***mano***, por ejemplo, el largo de las falanges respeta la sucesión de Fibonacci, como se aprecia en la radiografía contigua.

- La relación entre la altura de un ser humano y la altura de su ombligo es el número Φ.
- La relación entre la distancia del hombro a la punta de los dedos y la distancia del codo a la punta de los dedos, es, aproximadamente claro, el número Φ.
- La relación entre la altura de la cadera y la altura de la rodilla es el número Φ.
- La relación entre el primer hueso de los dedos (metacarpiano) y la primera falange, o entre la primera y la segunda, o entre la segunda y la tercera, es el número Φ.
- La relación entre el diámetro de la boca y el de la nariz el número Φ.
- Cuando la tráquea se divide en sus bronquios, si se mide el diámetro de los bronquios por el de la tráquea se obtiene el número Φ, o el de la aorta con sus dos ramas terminales (ilíacas primitivas).
- Está comprobado que la mayor cantidad de números Φ en el cuerpo y el rostro hacen que la mayoría de las personas reconozcan a esos individuos como lindos, bellos y proporcionados.

Salvador Dalí y el número de oro

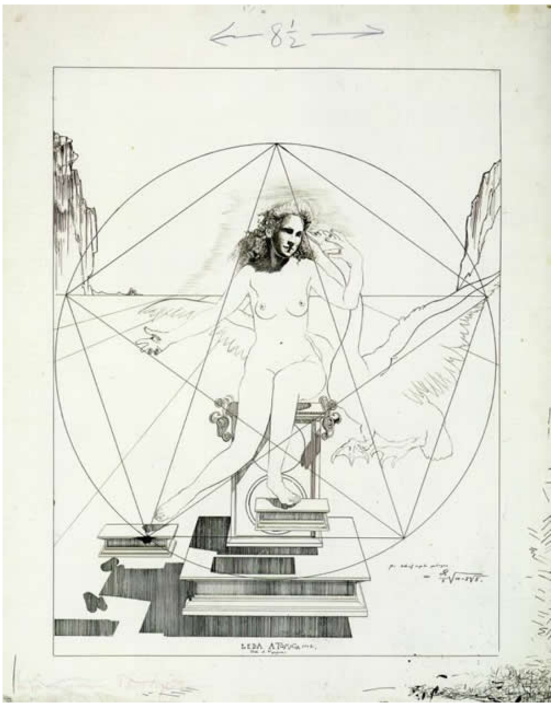
Salvador Dalí es el pintor que mejor entendió y más aplicó la proporción áurea en sus obras. *Dalí* abandona el surrealismo en los años 40 y crea un nuevo estilo, *el misticismo nuclear*, en el que unirá religión y ciencia. Las matemáticas tendrán un importante papel en su nueva etapa. *Dalí* decía: *"Creo en Dios pero no tengo la fe. Por las matemáticas y por las ciencias particulares sé que es indiscutible que Dios tiene que existir".* Parte de esa fe se la darán las proporciones divinas del número de oro Φ. *Dalí* decía*: "Por eso yo ahora, que voy siempre a contrapelo de mi época, estoy buscando el arquetipo Vitruniano que después lo pasó Luca Paccioli de "La Divina Proporción"*. La obra de *Luca Paccioli,* el autor renacentista que escribió el tratado de "*La Divina Proporción*" apasiona a Dalí, pero quien realmente le enseña a aplicar el número de oro en la pintura fue el matemático y filósofo rumano *Matila Ghyka*. *Salvador Dalí* conoce en Estados Unidos, en una de sus estancias en los años 40 del siglo XX, a *Matila Ghyka* y es este matemático quien retoma la obra de *Luca Paccioli* sobre "*La Divina Proporción*", que se había perdido a lo largo de la historia.

En Estados Unidos pintará el primer cuadro en el que aplica "*la divina proporción*". Utilizará la división en rectángulos áureos y trazará la *Espiral de Durero*. Así surge el cuadro ***La semitaza ambulante con anexo inexplicable de 5 metros de longitud***.



Algo se sale de lo normal en el cuadro, y es ese anexo inexplicable del título que brota del asa de la taza, que obliga a prolongar el lienzo hacia arriba, y que es en realidad completamente explicable, pese a la estupenda ironía del pintor catalán: resulta que las dimensiones del cuadro están en razón áurea, siendo el anexo el elemento que justifica tales dimensiones. Como no podía ser menos en Dalí, tema y estructura están ligados: si observamos la sombra negra de la parte alta del cuadro veremos que es el arranque de una espiral áurea que controla toda la composición del cuadro y que termina precisamente en la base de la taza. Siempre nos podremos preguntar qué fue primero, si la espiral o el anexo.

El cuadro de Dalí, ***Leda atómica***, pintado en 1949, sintetiza siglos de tradición matemática y simbólica, especialmente pitagórica. Se trata de una filigrana basada en la proporción áurea, pero elaborada de tal forma que no es evidente para el espectador. En el boceto de 1947 se advierte la meticulosidad del análisis geométrico realizado por Dalí basado en el pentagrama místico pitagórico.



Leda, que una vez más es Gala, parece estar sentada sobre un pedestal. Pero no. Es atómica porque Dalí quería representar las modernas teorías físicas que mostraban la discontinuidad de la materia y la ausencia de contacto entre las partículas subatómicas. Así, se puede observar que ella no toca el pedestal, ni éste su base; que todo flota armónicamente y que incluso el agua flota sobre la arena sin tocarla.

Pero es en un boceto donde se aprecia el método de composición, ya que la proporción dorada aparece también entre la diagonal y el lado de un pentágono regular, en el cual se inserta la escena principal del lienzo. Más en concreto, Dalí traza un pentagrama o pentalfa, una estrella trazada dentro de los tres triángulos isósceles del pentágono, que los pitagóricos usaban como símbolo secreto para reconocerse como miembros de la secta. En la parte inferior derecha del boceto, Dalí deja constancia de su intención anotando los cálculos de Φ.

El matemático rumano *Matila Ghyka* le explica a Dalí los detalles de un poliedro platónico, el Dodecaedro, que *Dalí* utiliza para una de sus obras místicas más importantes, ***La última cena***. En este cuadro, Dalí incluye la proporción áurea 2 veces. Si calculamos el cociente entre la longitud y la altura del cuadro obtenemos el número de oro. *Dalí* pinta un Dodecaedro formado por 12 pentágono áureos. En el centro del Dodecaedro inscribe el cuerpo de Cristo. Además, los apóstoles están dispuestos utilizando esta proporción.

De los poliedros regulares el que está formado por pentágonos regulares es el *Dodecaedro*, por lo que su relación con el número de oro es evidente. Esta relación se manifiesta a la hora de calcular su superficie y su volumen, cuyas expresiones para una arista igual a la unidad son:

$$S = \frac{15\Phi}{\sqrt{3-\Phi}} \qquad V = \frac{5\Phi^2}{6-2\Phi}$$

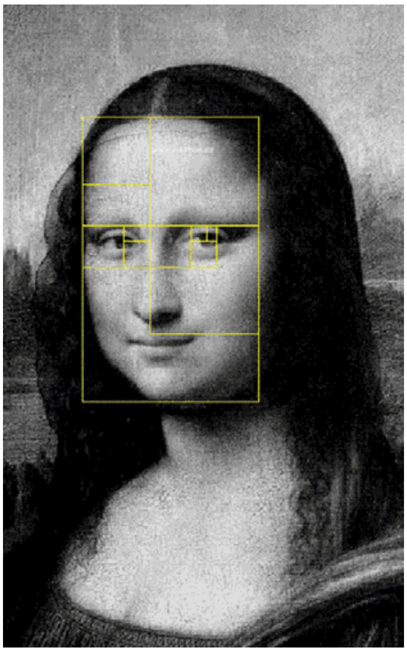
Velázquez y el número de oro

En una especie de conferencia de prensa, en la que estaban *Dalí* y *Cocteau*, le preguntaron a *Cocteau ¿si se hubiera quemado el Museo de Prado qué hubiera salvado usted*? y *Cocteau* mirando a *Dalí* respondió "*pues yo hubiera salvado el fuego*" y *Dalí* comentó "*pues Dalí se llevaría nada menos que el aire, y específicamente el aire contenido en las Meninas de Velázquez que es el aire de mejor calidad que existe".*

¿Cómo consigue el movimiento de ese aire en esa estancia? Una de las interpretaciones es que lo hace apoyándose en el desarrollo de una espiral áurea, la espiral de Durero, que entra por la ventana y acaba en la paleta y el pincel de Velázquez.

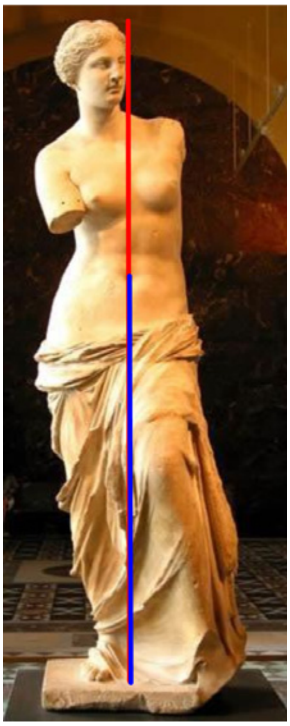
Leonardo da Vinci y el número de oro

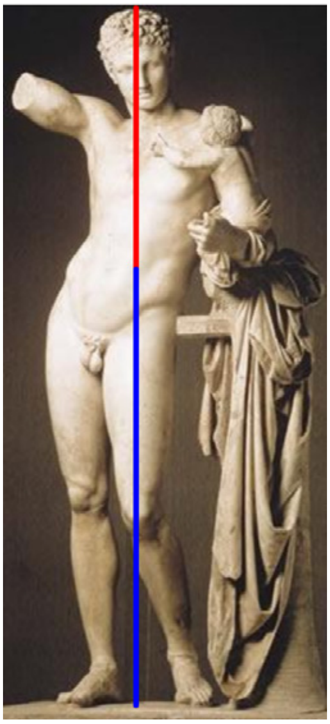
Leonardo Da Vinci utilizó las proporciones del rectángulo áureo para plasmarlas sobre la cara de la *Mona Lisa*.

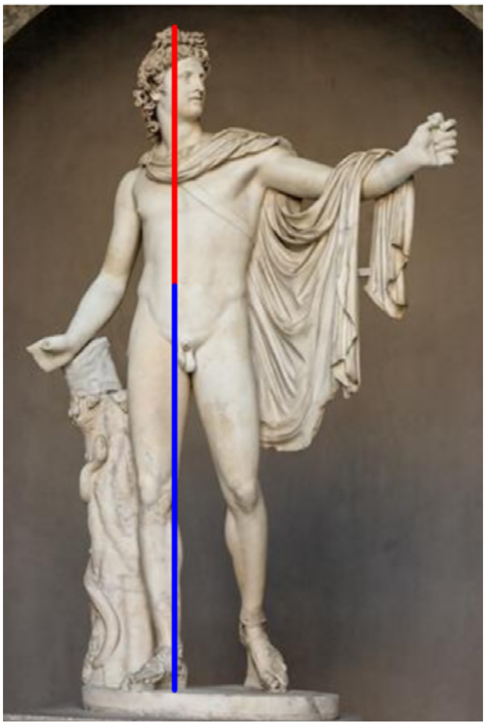


La Venus de Milo, Hermes Praxiteles y Apolo de Belvedere

Existen relaciones basadas en la sección áurea en algunas de las más célebres estatuas griegas. En las tres esculturas que siguen, si dividimos la altura de la escultura entre la distancia desde el ombligo hasta el suelo obtenemos el número de oro.



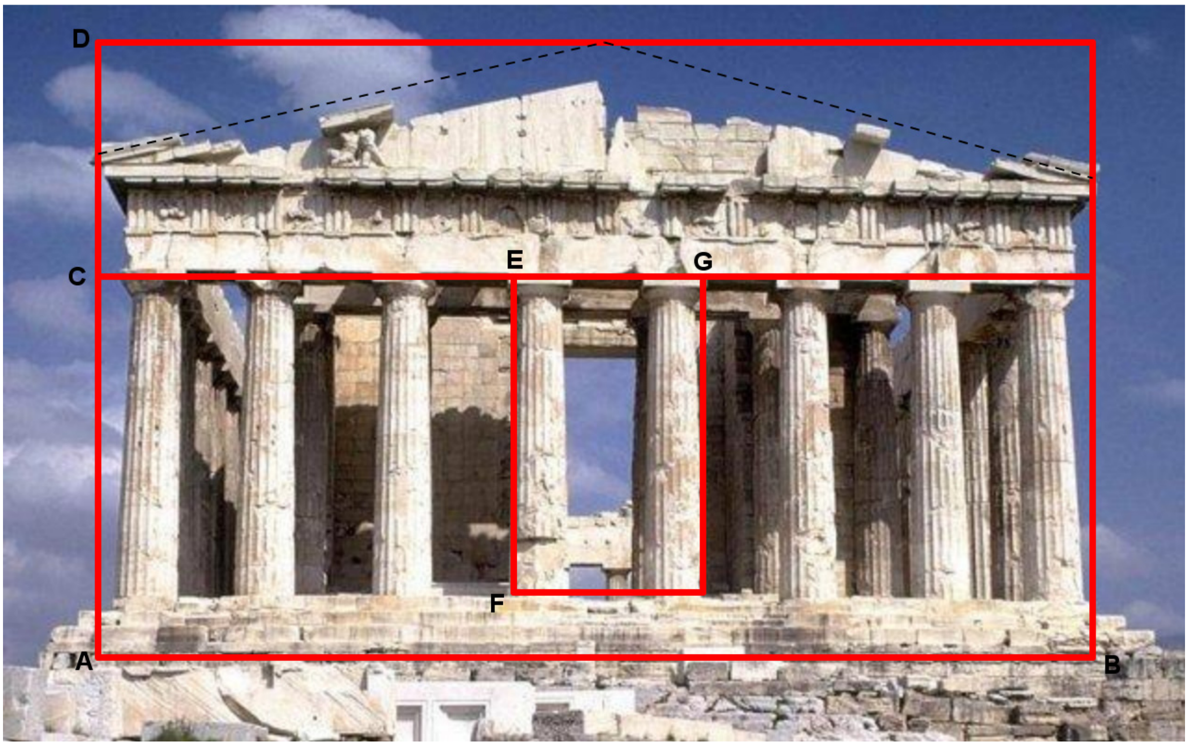




El número de oro en la Arquitectura

El Partenón

El Partenón es un templo griego situado en la Acrópolis de Atenas y dedicado a la diosa Atenea. Sus proporciones están relacionadas entre sí por medio de la razón áurea. A principio del siglo XX, el matemático norteamericano *Mark Barr* propuso vincular el número áureo con *Fidias*, arquitecto que construyó el Partenón de Atenas y del que tomó prestada su inicial *Phi*, Φ, el símbolo con el que hoy conocemos al número áureo.



En la figura se puede comprobar que $\frac{AB}{AD} = \Phi \quad \frac{AD}{AC} = \Phi \quad \frac{AC}{CD} = \Phi \quad \frac{EF}{EG} = \Phi$

La sección áurea y la Gran Pirámide de Keops

La gran pirámide de Keops se construyó hace 4500 años aproximadamente y se incluyó entre las Siete Maravillas del Mundo, siendo la más antigua y sin embargo la única que se conserva en la actualidad.

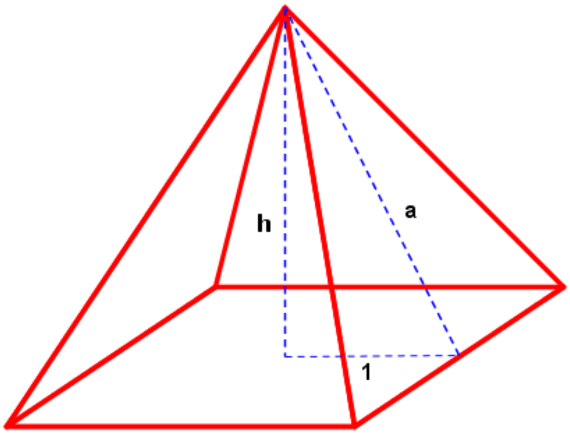
Según el historiador griego Herodoto, la Gran Pirámide de Giza se construyó de modo que la superficie de una cara fuese igual a la de un cuadrado que tuviese por lado la altura de la pirámide. Es decir: la apotema de la pirámide (la distancia que va desde la cúspide de la pirámide hasta el punto medio de una de las aristas horizontales) se eligió de modo que ***la superficie de cada una de las caras triangulares fuese igual al cuadrado de la altura***. Esto es algo bastante sencillo de calcular (se pueden conseguir las medidas necesarias por el método de prueba y error, por ejemplo), y para nada implica conocer la sección áurea. ¿Entonces? ¿Por qué se verifica el esquema de arriba? La contestación es sencilla: por pura casualidad.

Si escribimos matemáticamente lo dicho por Herodoto, tenemos:

$$\text{Área de una cara} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{2a}{2} = a = h^2$$

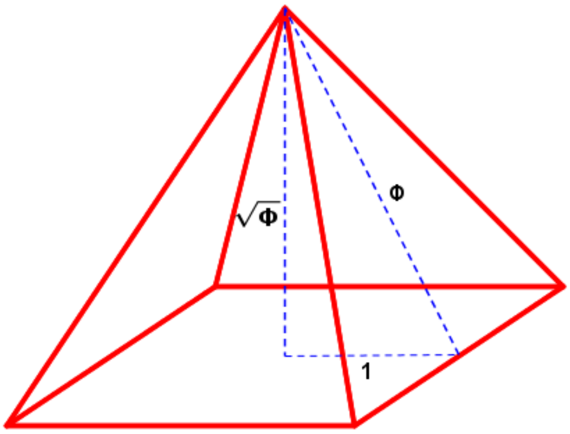
Ahora, si aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de la figura, tenemos:

$$a^2 = 1^2 + h^2 \quad \rightarrow \quad a^2 = 1^2 + a$$

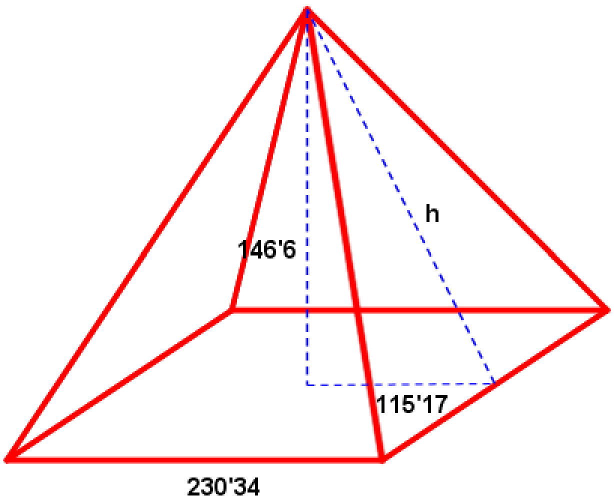


Resolviendo esta ecuación tenemos que $a^2 - a - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \Phi \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{\Phi}$

- Lo que nos dice Herodoto es que si consideramos que el lado de la base de la pirámide tiene de longitud dos, entonces su apotema vale Φ y su altura la raíz cuadrada de Φ.
- El cociente entre el área total de la pirámide y el área lateral es el número de oro.
- El cociente entre el área lateral y el área de la base es también el número de oro.



Veamos todo lo anterior con las dimensiones reales de la pirámide de Keops realizadas por el egiptólogo británico *Sir William Matthew Flinders Petrie*, que hizo el estudio más detallado realizado hasta el momento: altura original = 146,61m y lado del cuadrado de la base 230,347 m. Sobre el cuadrado de la base se apoyan 4 triángulos equiláteros.



El área del cuadrado de la base es $A_B = 230'34 \cdot 230'34 = 53056'5156 \text{ m}^2$

De la figura se deduce que:

$$h^2 = 146'6^2 + 115'17^2 = 34755'6889 \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{34755'6889} = 186'4287 \text{ m}$$

El área de un triángulo equilátero es $A_t = \dfrac{230'34 \cdot 186'4287}{2} = 21470'99338 \text{ m}^2$

El área lateral de la pirámide es $A_L = 4A_t = 4 \cdot 21470'99338 = 85883'97352 \text{ m}^2$

El área total de la pirámide es $A_T = A_B + 4A_t = 53056'5156 + 85883'97352 = 138940'4891 \text{ m}^2$

Si calculamos la relación entre las distintas áreas obtenemos el número de oro.

$$\frac{A_T}{A_L} = \frac{138940'4891}{85883'97352} = 1'617769.... \approx \Phi \qquad \frac{A_L}{A_B} = \frac{85883'97352}{53056'5156} = 1'618726...... \approx \Phi$$

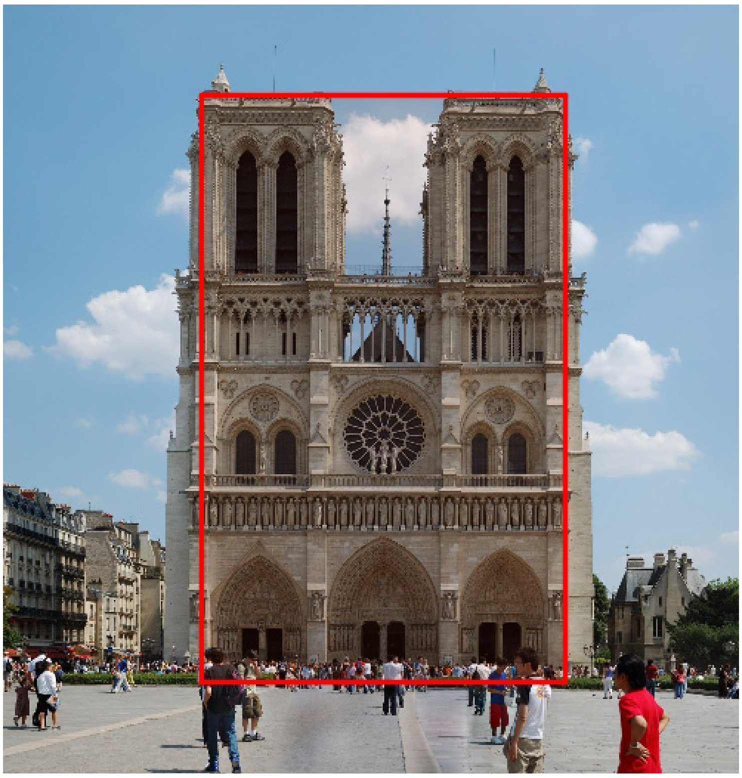
Además también se verifica que:

$$\frac{146'6}{115'17} = 1'272900929..... = \sqrt{\Phi} \qquad \frac{186'4287}{115'17} = 1'618726..... = \Phi$$

Otras representaciones

Rectángulos con la proporción áurea se encuentran presentes en numerosas construcciones, esculturas y pinturas. Entre las más conocidas destacan los cuadros de *La Mona Lisa* de *Leonardo da Vinci*, *Las Meninas* de *Velázquez, el edificio* de la *ONU* en Nueva York, la fachada de la *Universidad de Salamanca*, etc. etc.

Una de las más significativas es la catedral ***Notre Dame de París***, como se observa en la siguiente fotografía, en la que si dividimos la altura entre el ancho del rectángulo obtenemos el número de oro.



Otra construcción a destacar es la ***Iglesia Santa María de Novella en Florencia***. Si dividimos el frontón superior en dos triángulos rectángulos observaremos que cada uno de ellos es la mitad de un rectángulo de oro. Si nos fijamos en el gran rectángulo que se encuentra justo debajo del frontón veremos que sus lados están en proporción áurea. En el interior de este rectángulo se pueden ver otros muchos, todos son áureos.

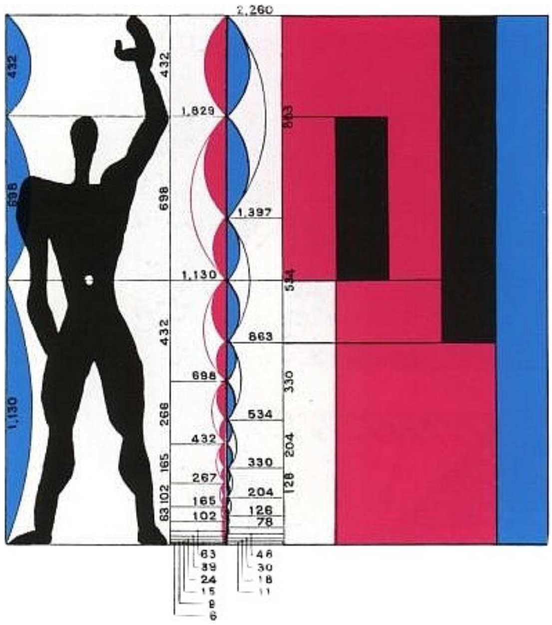
En la ***fachada de la Universidad de Salamanca*** (la más antigua de España) el número áureo preside sus proporciones.

Le Corbusier

Charles-Édouard Jeanneret-Gris, llamado Le Corbusier, era de origen suizo pero nacionalizado francés. Entre los años 1942 y 1948 desarrolló el *Modulor* como respuesta al *Hombre de Vitrubio*. El *Modulor* era un sistema de medidas en el que cada magnitud se relaciona con las demás según la *Proporción Áurea* y a la vez se corresponde con las medidas del cuerpo humano.

Estatua de El Modulor realizada a partir de las medidas ideales sugeridas por Le Corbusier en su libro homónimo.

El hombre con la mano levantada mide 226 cm y su mitad se encuentra en el ombligo a 113 cm. del suelo.



En cierta manera, es una búsqueda antropométrica de un sistema de medidas del cuerpo humano en que cada magnitud se relaciona con la anterior por el número áureo, todo con la finalidad de que sirvan como medida base en las partes de la arquitectura. Las medidas parten de dos cantidades: una es la medida del hombre con la mano levantada (226 cm.) y la otra es su mitad, que es la altura desde el ombligo (113 cm.).

Partimos de la primera medida (226 cm.). La multiplicamos por el número de oro. El número que resulta de esta operación lo volvemos a multiplicar por el número de oro y así sucesivamente. Ahora partimos de la misma medida (226 cm.). La dividimos por el número de oro. El número que resulta de esta operación lo volvemos a dividir por el número de oro y así sucesivamente. El resultado final es una serie de infinitos términos que llamaremos la serie azul.

$$2'26\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}=3'66 \qquad 3'66\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}=5'92 \qquad 5'92\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}=9'57 \ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2'26:\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1'40 \qquad 1'40:\frac{1+\sqrt{5}}{2}=0'86 \qquad 0'86:\frac{1+\sqrt{5}}{2}=0'53 \ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

La serie azul, en metros es: ….., 9’57, 5’92, 3’66, **2’26**, 1’40, 0’86, 0’53, 0’33, 0’20 …...

Operando de la misma manera con la segunda medida (113 cm.) se obtiene la serie roja.

$$1'13\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1'83 \qquad 1'83\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}=2'96 \qquad 2'96\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}=4'79 \ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$1'13 : \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 0'70 \qquad 0'70 : \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 0'43 \qquad 0'43 : \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 0'26 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

La serie roja, en metros, es: .... 4’79, 2’96, 1’83, **1’13**, 0’70, 0’43, 0’26, 0’16, 0’10 …....

Si observamos cada una de las dos series son sucesiones de Fibonacci y permiten miles de combinaciones armónicas.

El *Modulor* es aplicable al diseño funcional y estético en arquitectura. El matemático rumano Matila Ghyka recogió las aportaciones de Le Corbusier en libro “El número de oro”, en el que explicaba que el rectángulo áureo ha entrado triunfalmente en arquitectura a través de los planos recientes del más célebre apóstol y representante de las nuevas tendencias. Con el *Modulor*, Le Corbusier retomó el antiguo ideal de establecer una relación directa entre las proporciones de los edificios y las del hombre.

La Unidad Habitacional de Marsella (1947) fue el terreno en el que el Modulor fue puesto a prueba tanto en el diseño funcional como en la cuestión estética. Es el mejor ejemplo de sus teorías sobre la humanización de la arquitectura. Levanta un bloque urbano que se basta a sí mismo como ciudad, proporcionando todas las necesidades elementales a sus usuarios. En ella, Le Corbusier diseñó todos los espacios partiendo de las proporciones del sistema *Modulor*.

La Ville Saboye (1930) en Poissy (Francia) a las afueras de París es un ejemplo del empleo de la proporción áurea tanto en el exterior como en el interior del edificio es hoy día cada museo y monumento nacional de Francia. Es uno de los mejores ejemplos del racionalismo debido al funcionalismo, a la gran simplicidad de formas, a los volúmenes elementales y a sus exactas proporciones.

El número de oro y las tarjetas de crédito

El número de oro también se ha usado en el diseño del DNI, tarjetas de crédito, en la construcción de muebles, marcos para ventanas, camas, etc. y en las cajetillas de tabaco.

A la divina proporción

A ti, maravillosa disciplina,
media, extrema razón de la hermosura,
que claramente acata la clausura
viva en la malla de tu ley divina.

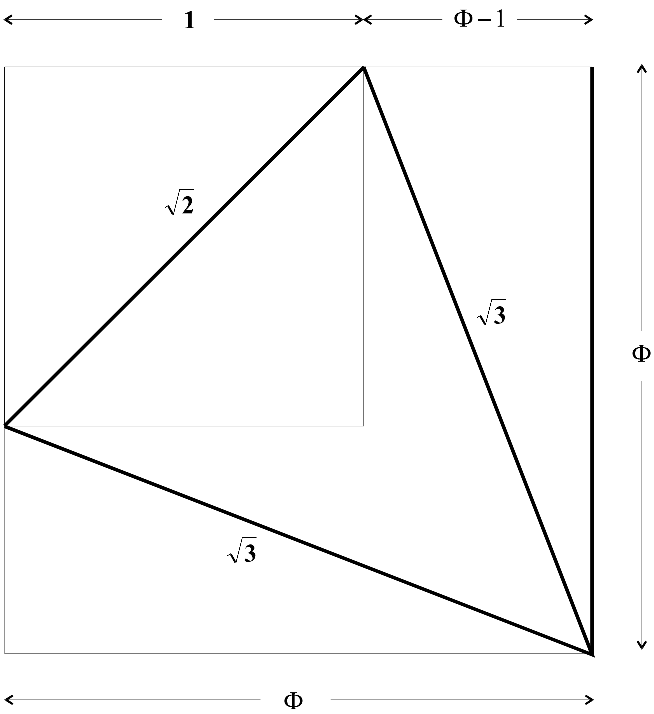
A ti, cárcel feliz de la retina,
áurea sección, celeste cuadratura,
misteriosa fontana de mesura
que el Universo armónico origina.

A ti, mar de los sueños, angulares,
flor de las cinco formas regulares,
dodecaedro azul, arco sonoro.

Luces por alas un compás ardiente.
Tu canto es una esfera transparente.
A ti, divina proporción de oro.

Rafael Alberti

Relación entre los números 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y Φ



Los tres problemas clásicos

Muchos problemas se han hecho famosos por su dificultad. Otros se han hecho famosos por el tiempo que llevaban planteados, o bien por la originalidad de sus planteamientos y conclusiones, o por la importancia de sus resultados.

Hay un grupo conocido con el nombre de "los tres problemas clásicos", planteados por los griegos en el siglo sexto antes de Cristo. ¡Hasta el siglo pasado no han podido ser resueltos! Los griegos se dedicaron a hacer el estudio de las construcciones con regla y compás. Con estas herramientas algunos número reales se pueden construir y otros no, y sobre ello tratan los tres problemas clásicos.

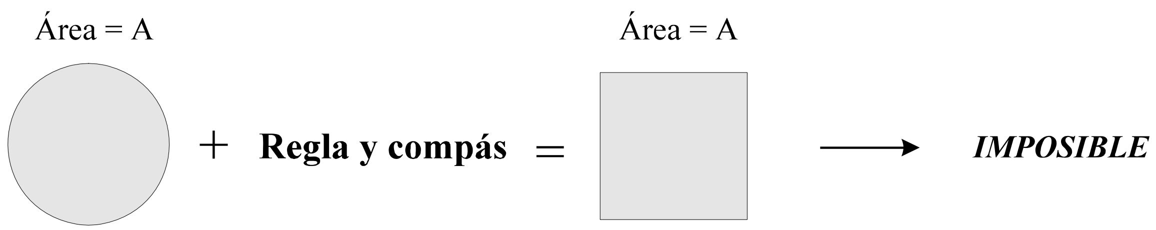
- *Cuadratura del círculo*

Cuadrar una figura es hallar un cuadrado equivalente, es decir, de la misma área que la figura dada. Uno de los problemas en que se ocuparon los geómetras griegos es el de construir, con regla y compás, un cuadrado que tenga la misma área que un círculo dado.

Todos los grandes matemáticos, desde la Antigüedad, se han ocupado del problema de la cuadratura del círculo. Desde los griegos, el problema quedó formulado como sigue: Dado un círculo, hallar el lado de un cuadrado de igual área que el círculo utilizando solamente regla y compás. La regla mencionada es una regla no graduada, que sólo sirve para trazar rectas. Como el área de un cuadrado de lado L es L^2 *y el área de un círculo de radio r es* $\pi\mathrm{r}^2$*, se trata de encontrar un L tal que* $\mathrm{L}^2 = \pi\mathrm{r}^2$*, es decir,* $\mathrm{L} = \mathrm{r}\sqrt{\pi}$.

Por consiguiente, el problema de la cuadratura de un círculo equivale a la construcción de un segmento de longitud $r\sqrt{\pi}$. Este segmento será construible únicamente si el número π es construible.

Ahora bien, en el siglo XIX *Lindemann (1882)* demostró que los números trascendentes, como el número π, no son construibles. Desde ese momento, el viejo problema de la cuadratura del círculo quedo resuelto en sentido negativo, es decir, quedó demostrado la imposibilidad de resolver este problema.



➢ *Duplicación del cubo*

Uno de los problemas de los que se ocuparon los geómetras griegos, como el de la cuadratura del círculo, fue el de obtener una construcción, con regla y compás, que proporcionara el lado de un cubo cuyo volumen fuera el doble del de un cubo dado.

Si el cubo de partida tiene de arista a, su volumen es: $V = a^3$

En un cubo cuyo volumen sea el doble del anterior y cuya arista sea **x** se tiene:

$$2V = x^3 \quad \Rightarrow \quad V = \frac{x^3}{2}$$

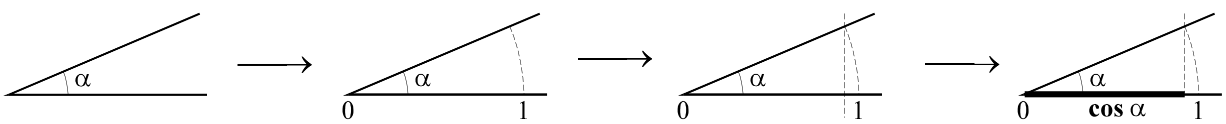
Igualando las dos expresiones tenemos: $a^3 = \dfrac{x^3}{2} \Rightarrow x = a \cdot \sqrt[3]{2}$

Ello equivale a obtener una construcción geométrica de un cubo cuya arista sea igual a $\sqrt[3]{2}$ veces la longitud de la arista **a** del cubo de partida.

Ahora bien, las construcciones del tipo considerado sólo proporcionan longitudes que pertenecen a una clase de números que se obtienen, esencialmente, sumando, restando, multiplicando, dividiendo y extrayendo raíces cuadradas. Como $\sqrt[3]{2}$ no pertenece a esta clase de números, *la duplicación del cubo es imposible.*

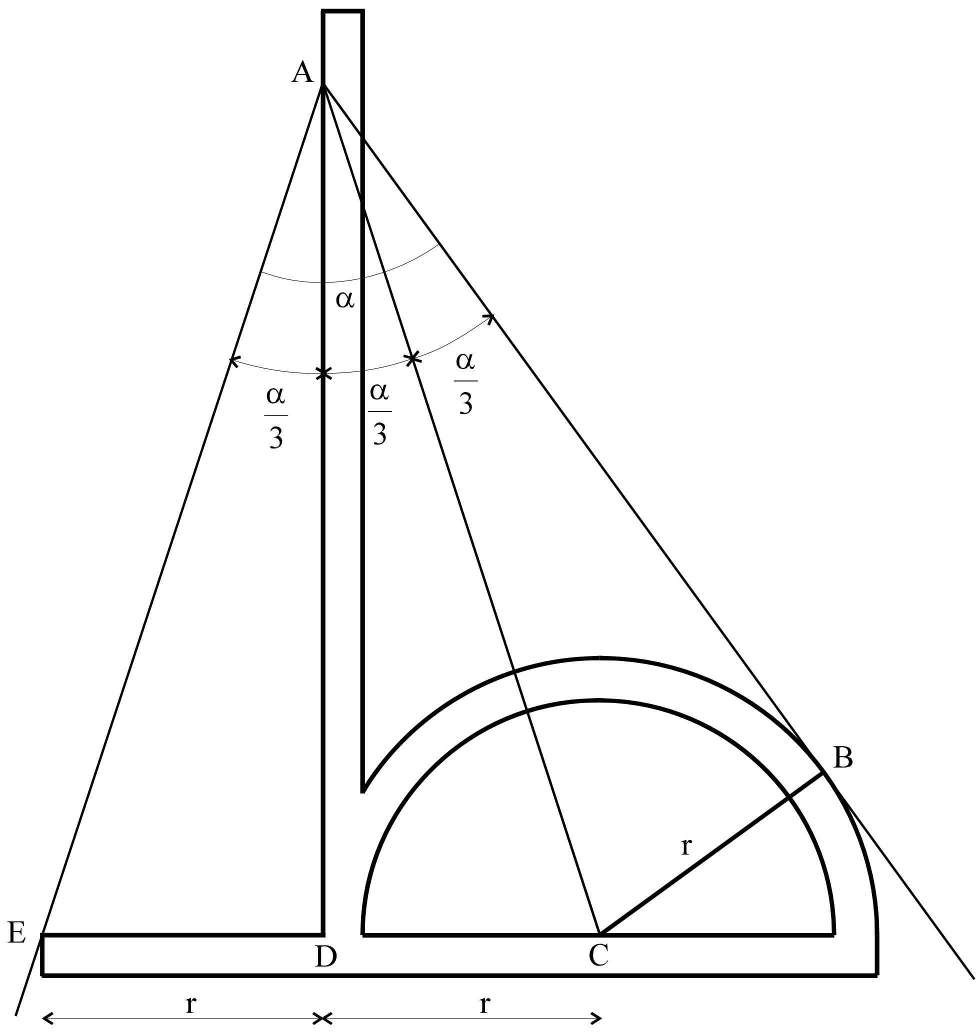
➢ *Trisección del ángulo*

Sabemos bisecar un ángulo, pero ¿sabríamos dividirlo en tres ángulos iguales? Uno de los problemas abordados por los geómetras griegos (como la duplicación del cubo y la cuadratura del círculo) es el de dividir un ángulo en tres partes iguales con regla y compás, es decir, trisecar el ángulo. Si un ángulo es construible, su coseno también lo es:



Si hubiese un método para trisecar el ángulo se podría hacer en particular con un ángulo de 60º, así que su tercera parte 20º, tendría que ser construible y por lo que se deduce de las figuras anteriores también tendría que ser construible su coseno. Pero esto es falso, porque mediante una serie de consideraciones sobre extensiones cuadráticas, se deduce que $\cos 20^{o}$ no es un número construible, porque la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ no tiene soluciones racionales. *Por tanto, la trisección de un ángulo es imposible en general.*

Sin embargo, es posible construir, con regla y compás, un aparato que hace posible trisectar el ángulo, como se observa en el dibujo siguiente:



Los tres ángulos son iguales por la semejanza de los triángulos rectángulos ABC, ADC y ADE.