Iteración
Fractales
Dimensión

Escucho y Olvido
Veo y Recuerdo
Hago y Comprendo
Confucio

Iteración. Fractales

Iteración

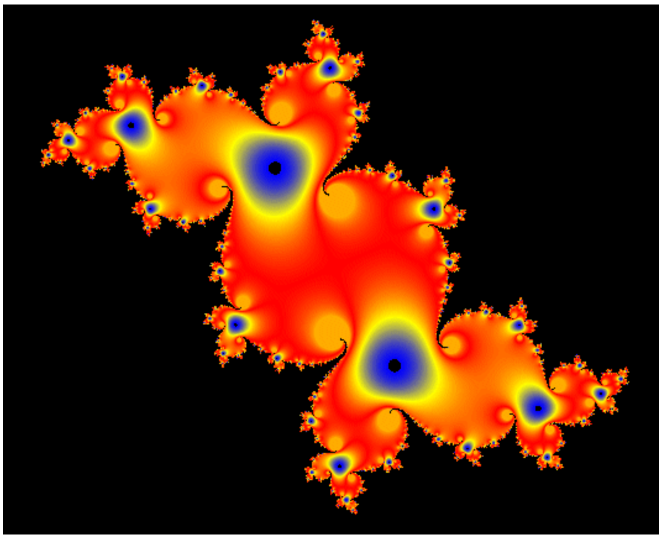
La Iteración está en el principio de toda la Geometría Fractal. Iterar consiste en aplicar repetidamente un mismo procedimiento geométrico o una misma función al resultado obtenido de la etapa anterior. Este proceso de iteración se puede aplicar bien a objetos geométricos o bien a operaciones sencillas y puede describirse como un mecanismo de retroalimentación que se repite un número n de veces. En el fondo se trata exclusivamente de hacer miles o millones de veces las mismas operaciones, en las que el dato de partida de cada paso es el resultado obtenido en el paso anterior, y esto es lo que realizan a la perfección los ordenadores.

Gastón Julia, matemático francés, estudió las iteraciones de funciones sencillas como $x \rightarrow x^2 + c$, donde "c" es una constante, pero en lugar de utilizar números reales utilizó números complejos $z \rightarrow z^2 + c$ siendo $z = a + bi$. Un número complejo $z = 3 + 4i$ consta de dos componentes, una real y otra imaginaria y se puede representar mediante un punto en un plano.

Para un valor concreto de "c"

$$z_0^2 + c = z_1 \quad z_1^2 + c = z_2 \quad z_2^2 + c = z_3 \quad z_3^2 + c = z_4 \quad z_4^2 + c = z_5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$$

Julia pintó de blanco los puntos del plano correspondientes a valores de z que en la iteración se alejaban cada vez más del origen, se iban a infinito, y pintó de negro los puntos del plano que se mantenían en una región acotada del plano complejo. Pensaba Julia que la frontera debería ser una línea simple, sin embargo cual no sería su sorpresa cuando sobre su papel, pensemos que esto ocurría durante la primera guerra mundial y aún no había ordenadores, fueron apareciendo figuras extrañas de una complicada belleza. *La Geometría Euclídea no servía para describirlas.*



En matemáticas el proceso de Iteración consiste en, dado un valor inicial, se introduce en una fórmula (transformación iterativa) y se obtiene un valor final que a su vez se vuelve a introducir en la misma fórmula. Un valor inicial puede ser un punto, un conjunto de puntos o una figura y la transformación que se aplica puede venir expresada por fórmulas o por una serie de pasos a ejecutar en cada etapa de la iteración. Esta operación puede repetirse infinitamente. Un ejemplo muy sencillo de iteración es la sucesión de Fibonacci

$$1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 21 , 34 , 55 , 89 ,\ldots\ldots\ldots$$

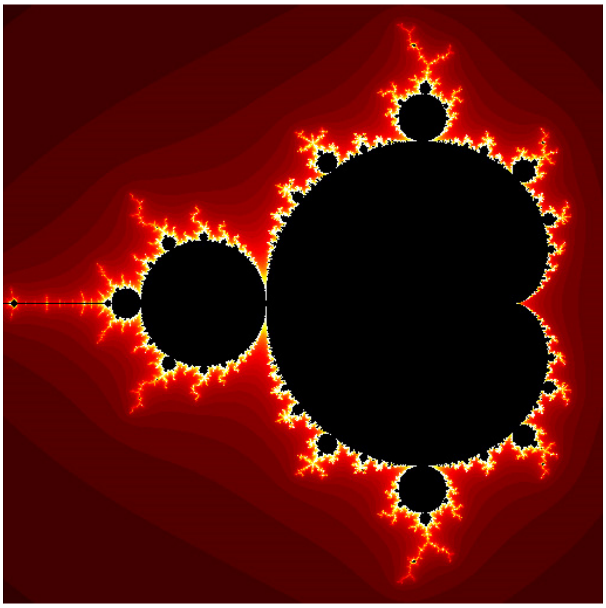
cuyos términos se obtienen considerando $a_0 = 1, a_1 = 1$ y $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ siendo $n \geq 1$, es decir, cada término se obtiene sumando los dos anteriores.

Los objetos fractales, en general, son producidos por procesos de iteración.

Fractales

El matemático francés Benoit Mandelbrot (1924-2010), padre de la geometría fractal, acuñó la palabra fractal en la década de los 70. La palabra fractal proviene del latín "fractus" y significa *quebrado o fracturado*.

Descubrió en 1979, y utilizando ya ordenadores, que iterando la misma función podía generar en el plano complejo una especie de mapa de todos los conjuntos de Julia, el famoso *Conjunto de Mandelbrot*.



Este fractal, probablemente el objeto más complicado de las matemáticas, es un conjunto de puntos del plano complejo. Cada punto está coloreado de un color distinto en función del número de iteraciones que hay que realizar para garantizar que el resultado está acotado. La rugosidad de la frontera, lejos de suavizarse al hacer sucesivas ampliaciones, nos muestra unas formas cada vez más complicadas y atrayentes que de vez en cuando nos reproducen el original, y todo ello realizando la sencilla operación matemática de iterar esta función compleja: se toma un número complejo, se eleva al cuadrado y se le suma el número inicial. Este proceso se repite con el número obtenido.

$$z_0^2 + c = z_1 \quad z_1^2 + c = z_2 \quad z_2^2 + c = z_3 \quad z_3^2 + c = z_4 \quad z_4^2 + c = z_5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En las tres últimas décadas miles de matemáticos y de informáticos se han dedicado a iterar otras funciones obteniendo un espectacular muestrario de figuras fractales muchas de las cuales nos recuerdan de una forma increíble a objetos de la naturaleza, como la que obtuvo *Michael Barnsley*.

En 1987 Michael Barnsley, fundador de la empresa Iterated Systems junto con Alan Sloan, descubrió que era posible controlar el contenido de una imagen fractal de forma precisa y hacerla parecer increíblemente similar a una imagen del mundo real. Un ejemplo temprano de aproximación a una imagen real basado en fractales lo constituye el clásico helecho fractal. Michael Barnsley consiguió, mediante un sencillo programa, una réplica casi exacta de una hoja de helecho. Hoy con un simple ordenador personal podemos jugar a ingenieros genéticos generando simulaciones de las ramificaciones de nuestras propias plantas o creando nuestros propios paisajes fractales.

Los fractales constituyen un nuevo lenguaje para describir las formas del *caos*, la cara más frecuente de la naturaleza.

En el año 2006 *Mandelbrot* explicó: "En general, salvo unas pocas excepciones, las formas de la naturaleza son rugosas, irregulares, no homogéneas ni simples. En su libro *Introduction to The Fractal Geometry of Nature* escribe:

Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos, las cortezas de los árboles no son lisas y los relámpagos no viajan en una línea recta.

Existen formas en la naturaleza como las nubes, las montañas, las líneas costeras, las hojas, los árboles, los copos de nieve, el sistema circulatorio etc. que no pueden describirse fácilmente con la geometría euclídea tradicional. La geometría fractal proporciona una descripción y un modelo matemático para estas forma de la naturaleza. Pero ¿qué es un fractal?

Un fractal es un objeto que exhibe recursividad, o autosimilitud, a cualquier escala, es decir, si enfocamos una zona cualquiera de un objeto fractal, por ejemplo, si utilizamos un zoom para amplificar la imagen, notaremos que dicha zona resulta ser una réplica a menor escala de la figura principal.

Según Benoit Mandelbrot un objeto es *autosimilar o autosemejante si sus partes tienen la misma forma o estructura que el todo*, aunque pueden presentarse a diferentes escalas y pueden estar ligeramente deformadas. La medición depende de la escala escogida para realizar la observación y en los fractales esa escala significa autosimilitud. Autosimilitud tan perfecta que sería imposible distinguir una instantánea de un fractal a escala 1 que otra hecha a escala 200, simplemente por la autorrecurrencia que muestran los objetos fractales, por su simetría dentro de una escala, por su pauta en el interior de una pauta. Los objetos fractales están formados por copias más o menos exactas de partes de sí mismos. No basta con una sola de las características anteriores para definir un fractal. La recta real no es un fractal ya que a pesar de poseer autosimilitud carece del resto de características. En general, un objeto fractal posee las siguientes características:

- *Es demasiado irregular para ser descrito en términos geométricos tradicionales.*
- *Posee detalle a cualquier escala de observación.*
- *Es autosimilar (la autosimilitud puede ser exacta, aproximada o estadística).*
- *Su dimensión no es entera y suele ser un número irracional.*
- *Se define mediante un simple algoritmo recursivo.*

La relación de los fractales con el infinito es peculiar como lo ilustra la llamada *paradoja de la costa*. Quien intente medir, por ejemplo, la costa de España obtendrá un resultado distinto en función del grado de detalle al que aspire: si tiene en cuenta sólo el contorno de las bahías o si va midiendo cada roca, cada piedrecita, cada grano de arena. En un fractal ideal, el litoral o cualquier contorno rugoso llegará a hacerse infinito. Esta propiedad hace que los fractales no quepan en la geometría y el cálculo convencionales. Ha habido que crear para ellos matemáticas nuevas. Una curva no rugosa, no fractal, tiene dimensión 1. Una superficie, como un cuadrado, tiene dimensión 2. Pero ¿qué pasa con una curva fractal? (los matemáticos llaman curva a cualquier cosa que se dibuje sin levantar el lápiz). Una curva fractal es infinita, y a pesar de eso no llena superficie alguna. La solución matemática pasa por dar a los fractales una dimensión mayor que uno y menor que dos.

Los fractales nos ayudan a modelar el tráfico en redes de comunicaciones, a comprimir las señales de audio y vídeo, a entender la forma en que crecen los tejidos o evolucionan determinadas poblaciones, o en el análisis de los patrones sísmicos. Incluso existen métodos de análisis bursátil y de mercado que se basan en los fractales.

Un *fractal natural* es un elemento de la naturaleza que puede ser descrito mediante la geometría fractal. Las nubes, las montañas, el sistema circulatorio, las líneas costeras o los copos de nieve son fractales naturales. *Esta representación es aproximada, pues las propiedades atribuidas a los objetos fractales ideales, como el detalle infinito, tienen límites en el mundo natural.*

La geometría fractal tiene su origen en el concepto de proceso iterativo introducido por Newton y Leibniz hace 300 años. Nosotros vamos a estudiar algunos de los fractales que presentan una *autosimilitud exacta*, como el conjunto o polvo de Cantor, la curva y el copo de nieve de Koch o el triángulo y la alfombra de Sierpinski, que son algunos de los fractales más conocidos.

Tipos de Fractales y Autosimilitud

Fractales Lineales

- *La autosimilitud es perfecta, es decir, cada porción de un objeto tiene exactamente las mismas características del objeto completo.*
- *Su dimensión fractal es fácil de calcular*

  $$n^{o} \text{ de copias} = (\text{escala o razón de semejanza})^{\text{dimensión}}$$
- *Se crean a partir de un generador o de un algoritmo de repetición*
- *Ejemplos de este tipo de fractales son los estudiados a continuación: Polvo de Cantor, triángulo y alfombra de Sierpinski y curva y copo de nieve de Koch*

Fractales Complejos

- *La autosimilitud es estadística, es decir, cada región de un objeto conserva, de manera estadísticamente similar, sus características globales.*
- *Su dimensión fractal es difícil de calcular y normalmente se calcula utilizando programas informáticos.*
- *Se crean a partir de un número complejo por iteraciones en el plano complejo.*
- *Ejemplos de este tipo son el conjunto de Mandelbrot y el conjunto de Julia cuyas imágenes se reproducen al final del tema.*

Fractales Caóticos

- *La autosimilitud es estadística.*
- *Se requieren unos métodos de medición más complejos que la dimensión fractal.*
- *Se generan a partir de sistemas de ecuaciones diferenciales.*
- *Un ejemplo de este tipo es el Atractor de Lorenzt, que modela el clima metereológico.*

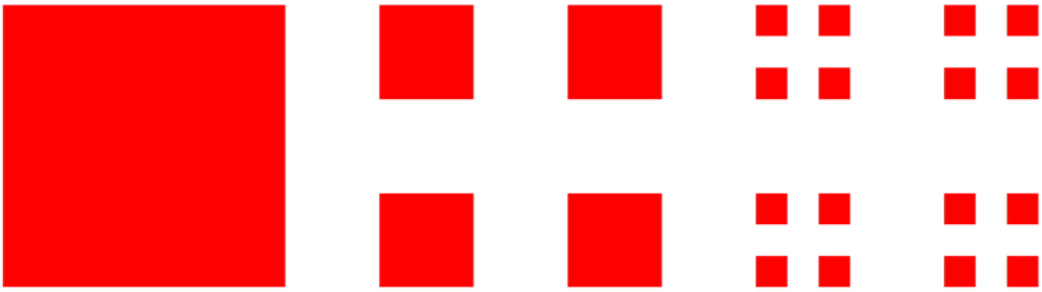
El conjunto o polvo de Cantor

Georg Cantor (1845-1918) estableció una sucesión de segmentos conocida como el conjunto o polvo de Cantor. Se forman partiendo de un segmento de longitud fija. Dividimos el segmento en tres partes iguales y eliminamos el tercio de segmento central. Cada uno de los segmentos resultantes lo dividimos en tres partes iguales y eliminamos el tercio de segmento central y así sucesivamente. A las pocas ***iteraciones*** obtenemos un conjunto de puntos que recibe el nombre de *"polvo de Cantor"* en honor del matemático Georges Cantor que en 1883 lo descubrió. Este conjunto está considerado como precursor de los Fractales.

Paso	0	1	2	3	....	n
nº segmentos	1	2				
longitud de cada segmento	1	$\frac{1}{3}$				
longitud total	1	$\frac{2}{3}$				

Polvo de Cantor bidimensional

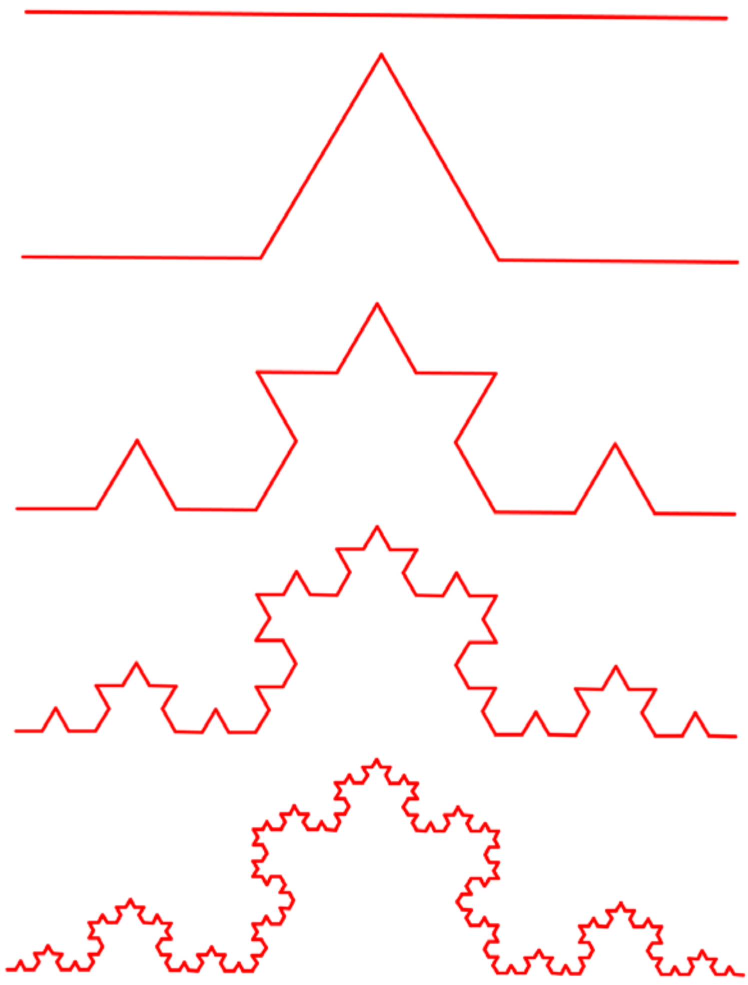
El cuadrado de Cantor sigue el mismo proceso de construcción que el conjunto o polvo de Cantor y lo único que varía es su proyección al plano bidimensional. Se parte de un cuadrado. El primer paso consiste en dividirlo en 9 cuadrados iguales (lo que se consigue dividiendo cada lado en tres partes iguales). Eliminamos el cuadrado central y los cuadrados que se encuentran en el centro de cada lado, es decir, nos quedamos con 4 cuadrados. El segundo paso de la construcción consiste en hacer lo mismo que hemos hecho en el primer paso sobre cada uno de los 4 cuadrados obtenidos en el paso anterior. El proceso se repite infinitas veces y se obtiene como resultado final el objeto fractal conocido como cuadrado de Cantor, cuya *superficie tiende a cero a medida que crece el número de iteraciones*.



Paso	0	1	2	3	…………	n
nº de cuadrados	1	4				
perímetro total	1	$\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$				
superficie total	1	$\frac{4}{9}$				

Curva de Koch

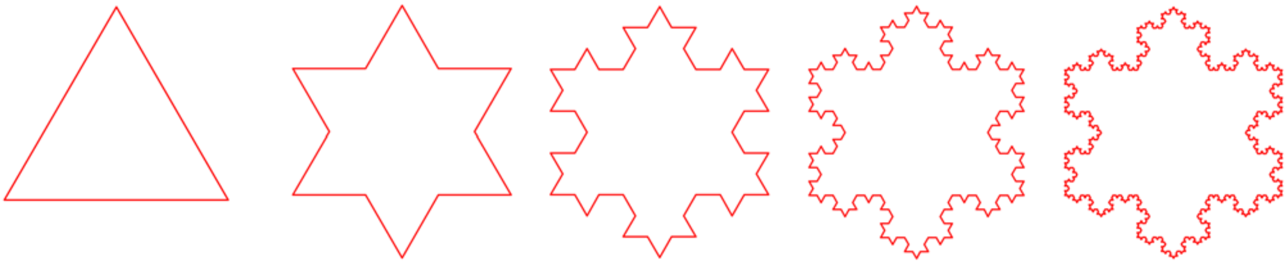
Uno de los primeros fractales fue definido por Helge von Koch (1870-1924) en 1904 y es conocido como **curva de Koch**. Su construcción se realiza mediante un proceso iterativo que se inicia con un segmento. Koch construyó la curva tomando como base un segmento de longitud 1. El primer paso consiste en dividir este segmento en tres intervalos iguales y construir un triángulo equilátero sobre el intervalo central, eliminando la base de dicho triángulo. El segundo paso consiste en hacer lo mismo que hemos hecho en el primer paso sobre cada uno de los 4 intervalos que han resultado en el paso anterior. El proceso se repite infinitas veces. La curva de Koch es la curva a la que se van aproximando las sucesivas poligonales que resultan en cada paso. Si repetimos el proceso indefinidamente podemos deducir que *la longitud de la curva Koch tiende a infinito, a medida que crece el número de iteraciones*.



Paso	0	1	2	3	....	n
nº de segmentos	1	4				
longitud de cada segmento	1	$\frac{1}{3}$				
longitud total	1	$\frac{4}{3}$				

Copo de nieve de Koch

Este otro fractal fue ideado por Koch de forma similar al anterior. Su construcción se realiza mediante un proceso iterativo que se inicia con un triángulo equilátero en el que finalmente cada uno de sus lados queda sustituido por lo que se llama una curva de Koch. Partimos de un triángulo equilátero de lado 1. El primer paso consiste en dividir cada uno de los lados del triángulo equilátero en tres intervalos iguales y construir un triángulo equilátero sobre el intervalo central. El segundo paso consiste en hacer lo mismo que hemos hecho en el primer paso sobre cada uno de los 12 intervalos que han resultado en el paso anterior. El proceso se repite infinitas veces. El Copo de nieve de Koch es la superficie a la que se van aproximando las sucesivas superficies que resultan en cada paso. Si repetimos el proceso indefinidamente podemos deducir que *la superficie del Copo de nieve de Koch es finita a medida que crece el número de iteraciones, pero el perímetro tiende a infinito.*



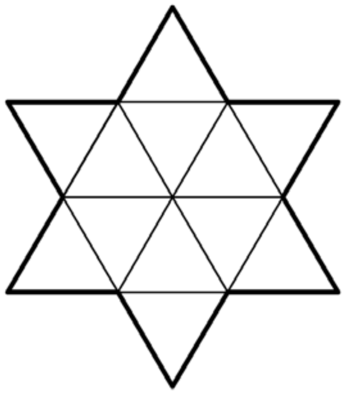
La curva de Koch presenta las mismas características que la costa de una isla. Cuando se quiere medir una línea fractal con una unidad o con un instrumento de medida determinado, siempre habrá objetos más finos que escaparán a la sensibilidad de la regla o el instrumento utilizado, y también a medida que aumenta la sensibilidad del instrumento aumentará la longitud de la línea.

En su libro “The Fractal Geometry of Nature”, Mandelbrot se refiere a una experiencia que había realizado el metereólogo inglés Lewis Fry Richardson (1881-1953), quien trató de medir la longitud de la costa occidental de Gran Bretaña y la de la frontera entre España y Portugal. Richardson notó que el resultado dependía fuertemente de la escala del mapa utilizado: un mapa con una escala 1:10 000 000 (1cm es 100 km) muestra menos detalles que un mapa con una escala 1:100 000 (1cm es 1 km), y como en éste podemos observar más detalles al hacer la medición, la costa será más larga. Si esto lo repetimos, podría llevar a la conclusión que dicha costa es infinitamente larga. Mandelbrot se preguntó (1967): ¿Cuál es la longitud de la costa británica? Él cuenta que la longitud de la costa entre España y Portugal tenía dos medidas distintas: en una enciclopedia en España se escribía 616 millas y una enciclopedia en Portugal anotaba 758 millas. ¿Cuál era la correcta?

Hoy se sabe que las líneas costeras tienen estructura fractal, para lo cual se han realizado modelos matemáticos sobre los efectos de la erosión y se obtienen por simulación en computadoras costas fractales con características próximas a las costas verdaderas y con dimensiones fractales $d \approx 4/3 \approx 1'33$. El mar ataca la costa y la deforma. Transcurrido un tiempo bastante grande, la costa adopta la forma que optimiza la resistencia a la erosión y dicha forma es fractal.

Paso	0	1	2	3	………..	n
perímetro	1	$\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$				
superficie	1	$\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$				

Cálculo de la superficie por semejanza

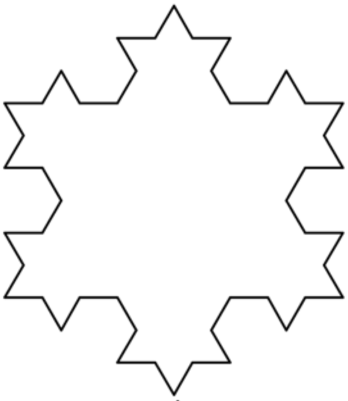


El perímetro de la primera iteración es:

$$\frac{12}{9}=\frac{4}{3}=1'33333 \quad \text{veces el perímetro inicial.}$$

La superficie de la primera iteración es:

$$\frac{12}{9}=\frac{4}{3}=1'33333 \quad \text{veces la superficie inicial.}$$

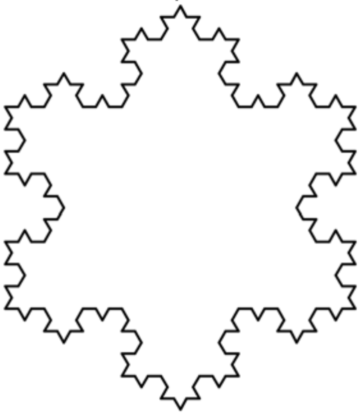


El perímetro de la segunda iteración es:

$$\frac{48}{27}=\left(\frac{4}{3}\right)^2=1'77777 \quad \text{veces el perímetro inicial.}$$

La superficie de la segunda iteración es:

$$\frac{120}{81}=\frac{40}{27}=1'48148 \quad \text{veces la superficie inicial.}$$

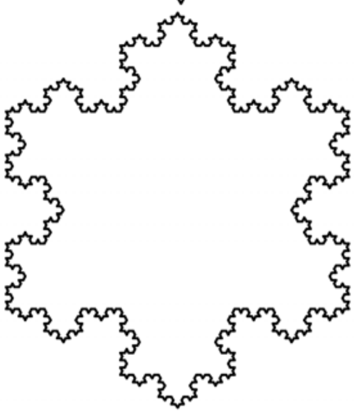


El perímetro de la tercera iteración es:

$$\frac{192}{81}=\left(\frac{4}{3}\right)^3=2'37037 \quad \text{veces el perímetro inicial.}$$

La superficie de la tercera iteración es:

$$\frac{1128}{729}=\frac{376}{243}=1'54733 \quad \text{veces la superficie inicial.}$$



El perímetro de la cuarta iteración es:

$$\frac{768}{243}=\left(\frac{4}{3}\right)^4=3'16049 \quad \text{veces el perímetro inicial.}$$

La superficie de la cuarta iteración es:

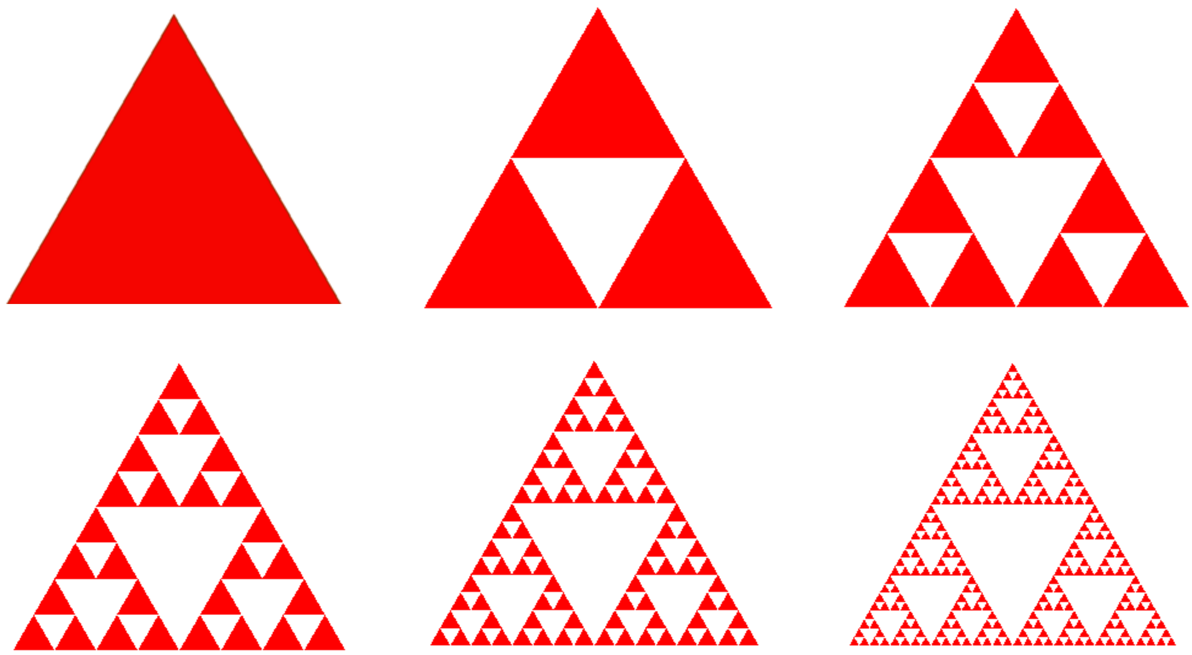
$$\frac{10344}{6561}=\frac{3448}{2187}=1'57658 \quad \text{veces la superficie inicial.}$$

La Longitud tiende a ∞.

La Superficie tiende a $\frac{8}{5}\approx 1'6$ veces la superficie inicial.

El triángulo de Sierpinski

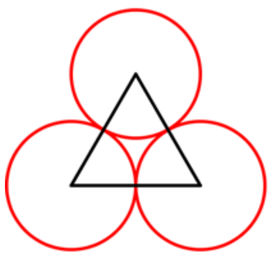
El matemático polaco Waclaw Sierpinski (1882-1969) creó el triángulo fractal más famoso del mundo. Su construcción se realiza mediante un proceso iterativo que se inicia con un triángulo equilátero. El primer paso consiste en dividir el triángulo equilátero inicial en cuatro triángulos equiláteros iguales y eliminar el triángulo central. El segundo paso consiste en aplicar el mismo método a cada uno de los 3 triángulos anteriores. Al repetir el proceso indefinidamente (iteración) se obtiene como resultado final el objeto fractal conocido como triángulo de Sierpinski.



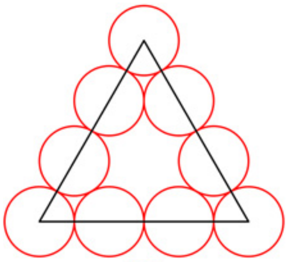
El resultado final es <u>*una superficie que tiende a cero y un perímetro que tiende a infinito a medida que aumenta el número de iteraciones*</u>. ¿Cómo puede una figura bidimensional tener una superficie que tiende a cero? Bien, eso es justamente uno de los aspectos más atractivos de los fractales.

Paso	0	1	2	3	…………	n
nº de triángulos	1	3				
perímetro total	1	$\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$				
superficie total	1	$\frac{3}{4}$				

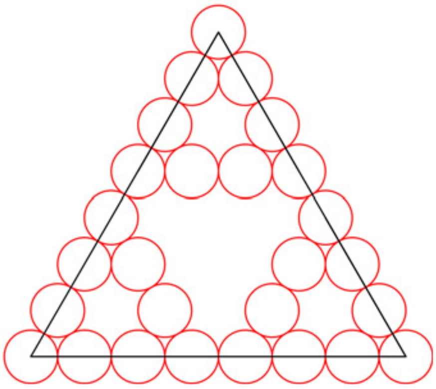
<u>*Problema*</u>: *Si realizamos la escultura del triángulo de Sierpinski con latas de bebida y el diámetro de cada lata es de 66 mm., contesta a las siguientes preguntas:*



a) ¿Cuánto mide el lado del triángulo?
b) ¿Cuánto mide la altura del triángulo?
c) ¿Cuánto mide la altura de la figura?
d) ¿Cuántas latas necesitamos?

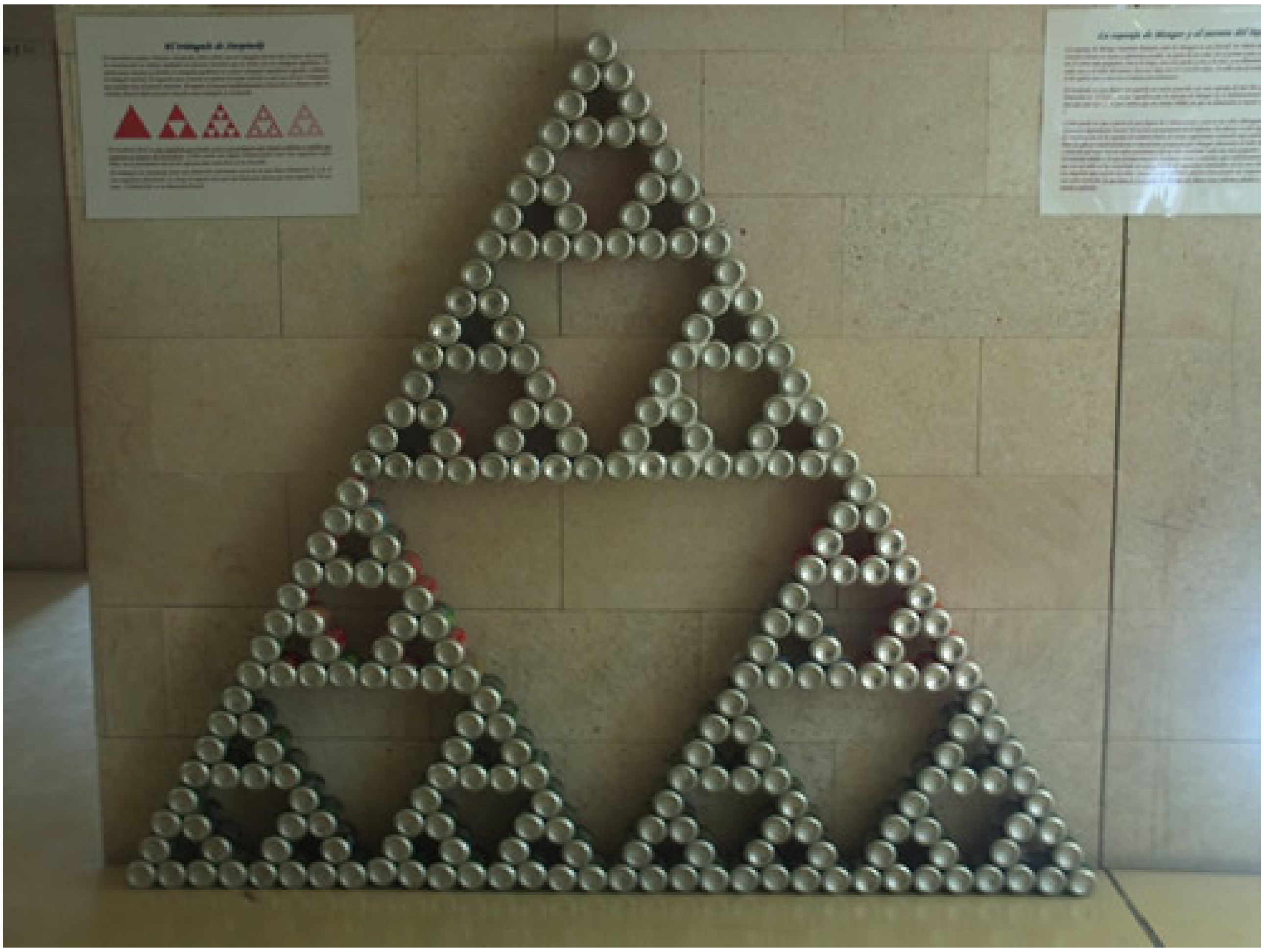


a) ¿Cuánto mide el lado del triángulo?
b) ¿Cuánto mide la altura del triángulo?
c) ¿Cuánto mide la altura de la figura?
d) ¿Cuántas latas necesitamos?



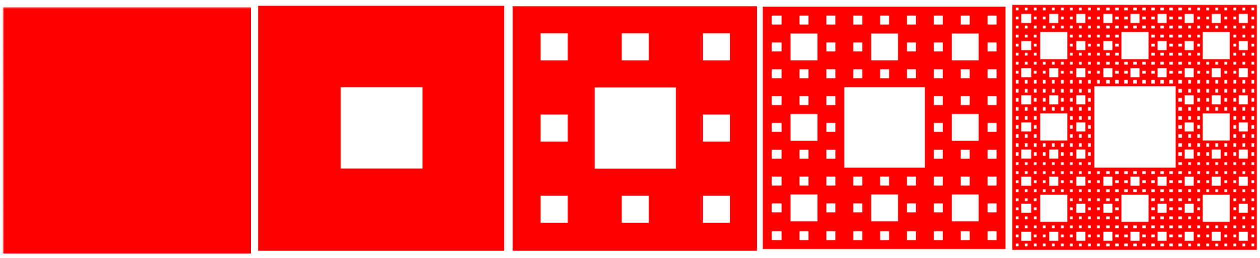
a) ¿Cuánto mide el lado del triángulo?
b) ¿Cuánto mide la altura del triángulo?
c) ¿Cuánto mide la altura de la figura?
d) ¿Cuántas latas necesitamos?
e) Si hacemos una nueva figura formada por tres figuras como éstas, contesta a los apartados anteriores.

Escultura realizada por los alumnos de 3º ESO D del curso académico 2010/2011



La alfombra de Sierpinski

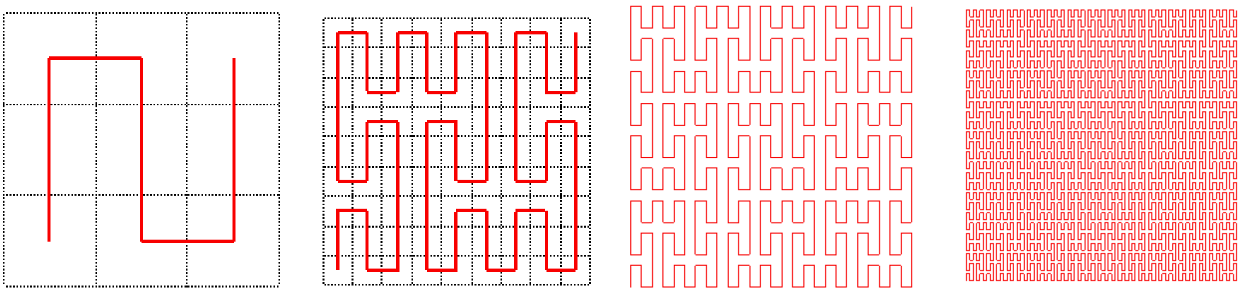
La alfombra de Sierpinski es un fractal que fue propuesto por Wacław Sierpiński en 1916. Su construcción se realiza mediante un proceso iterativo que se inicia con un cuadrado. Se parte de un cuadrado de lado igual a 1. El primer paso consiste en dividirlo en 9 cuadrados iguales (lo que se consigue dividiendo cada lado en tres partes iguales) y eliminar el cuadrado central, es decir, nos quedamos con 8 cuadrados. El segundo paso de la construcción consiste en hacer lo mismo que hemos hecho en el primer paso sobre cada uno de los 8 cuadrados obtenidos en el paso anterior. El proceso se repite infinitas veces y se obtiene como resultado final el objeto fractal conocido como alfombra de Sierpinski. El resultado final es una superficie repleta de agujeros de diferentes tamaños, con *una superficie que tiende a cero a medida que aumenta el número de iteraciones*. ¿Cómo puede una figura bidimensional tener una superficie que tiende acero? Bien, eso es justamente uno de los aspectos más atractivos de los fractales.



Paso	0	1	2	3	………..	n
nº de cuadrados	1	8				
perímetro total	1	$\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$	$\frac{80}{36}=\frac{20}{9}$			
superficie total	1	$\frac{8}{9}$				

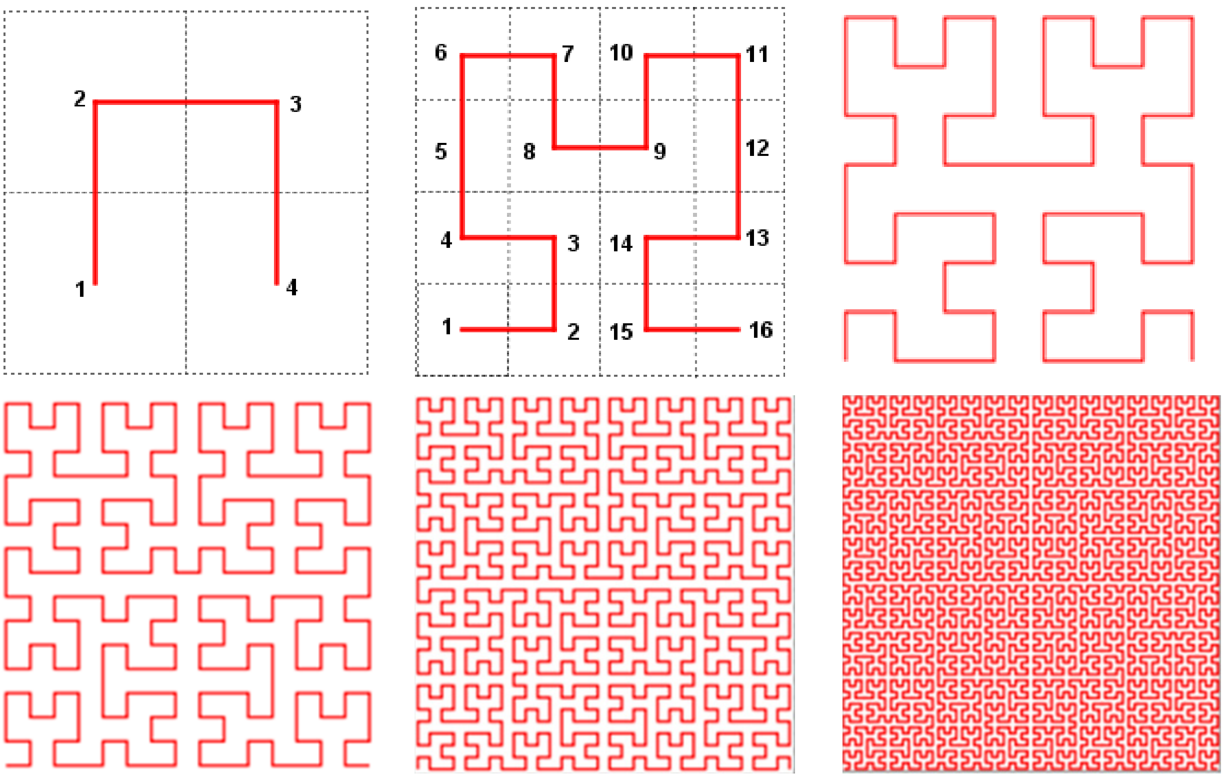
Curva de Peano

Es un tipo de curva que rellena un cuadrado. Su construcción se realiza siguiendo estos pasos: a) Se parte incialmente de un cuadrado unidad al que se le hacen 9 subdivisiones iguales. Después se unen los centros de cada subdivisión con una línea de forma que se vayan recorriendo subdivisiones contiguas en todo momento, comenzando por la esquina inferior izquierda. b) Una vez hecho esto, a cada una de las subdivisiones del cuadrado se le aplica el mismo procedimiento que al cuadrado anterior, de modo que se tienen otras nueve subdivisiones por cada subdivisión anterior. El recorrido se hace de forma análoga al anterior (siempre recorriendo subdivisdiones contiguas), pero además se deben recorrer primero las nueve subdivisiones de la primera subdivisión del recorrido anterior y continuar por por la subdivisión siguiente.



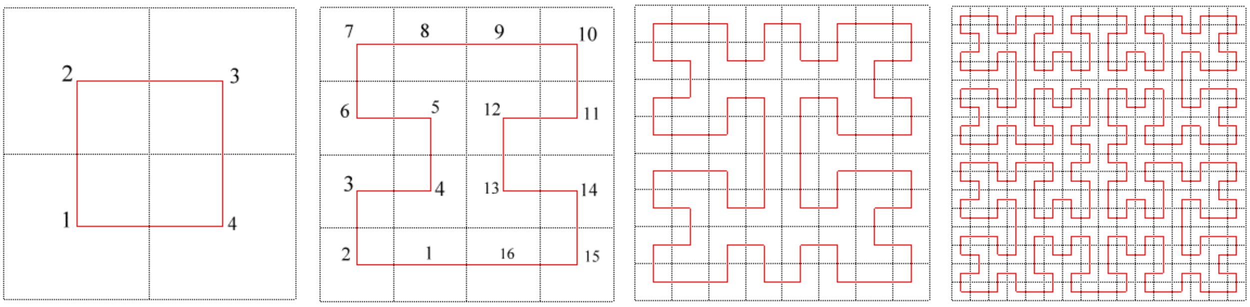
Curva de Hilbert

Este tipo de curva rellena un cuadrado unidad, de tal forma que el inicio de la curva estaría en la esquina inferior izquierda y el final en la parte inferior derecha. Su construcción se realiza siguiendo estos pasos: a) Se parte de un cuadrado unidad que se divide en 4 subdivisiones iguales. Después cada subdivisión se numera de forma que dos números consecutivos se asocien a dos subdivisones contiguas. b) Posteriormente, con cada subdivisión se realiza el mismo procedimiento que en el paso anterior, teniendo en cuenta además que la numeración debe hacerse de forma que las primeras subdivisiones que se recorran sean las correspondientes al primer cuadrado recorrido en el paso anterior.

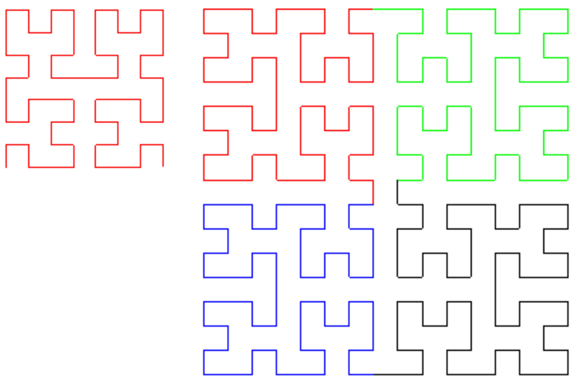


Curva de Moore

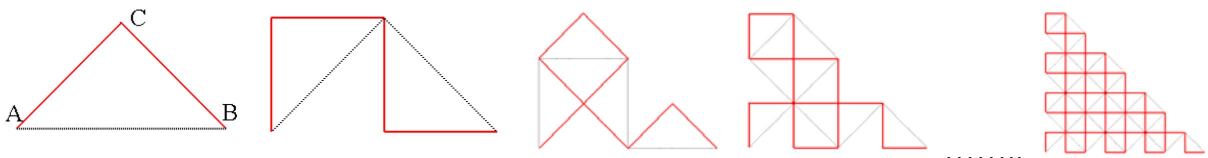
Es un caso particular de la curva de Hilbert. Su definición es igual, pero la curva de Moore impone como condicón inicial adicional que la curva debe ser cerrada. Esto quiere decir que al dividir el cuadrado inicial en 4 subdivisiones y numerarlo, la última subdivisión recorrida debe unirse a la primera. En las siguientes iteraciones debe preservarse esta condición, de modo que siempre se obtenga una curva cerrada.



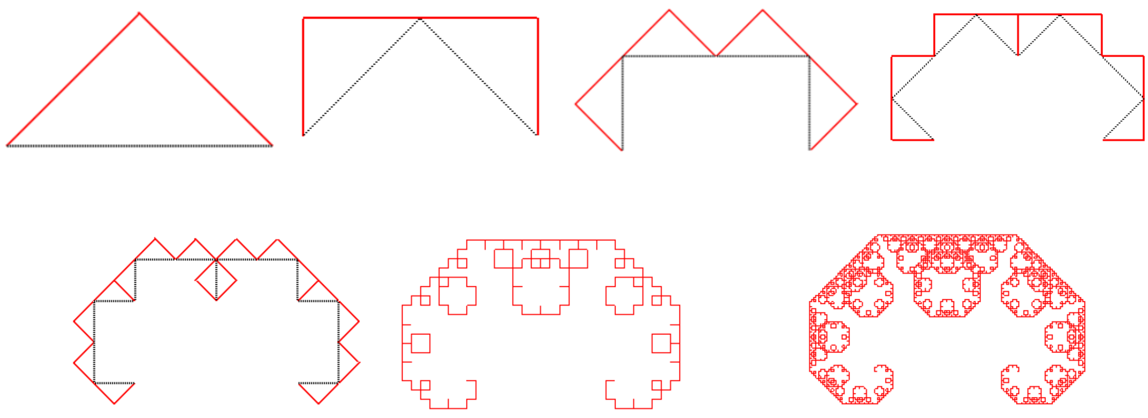
La curva de Moore guarda una estrecha relación con la curva de Hilbert, cumpliéndose la relación de que una curva de Moore de orden n (n-ésima iteración) puede obtenerse a partir de cuatro curvas de Hilbert de orden n-1 unidas, como se puede ver en este ejemplo en el que tenemos la curva de Hilbert de orden 3 y la curva de Moore de orden 4.



Curva de Polya

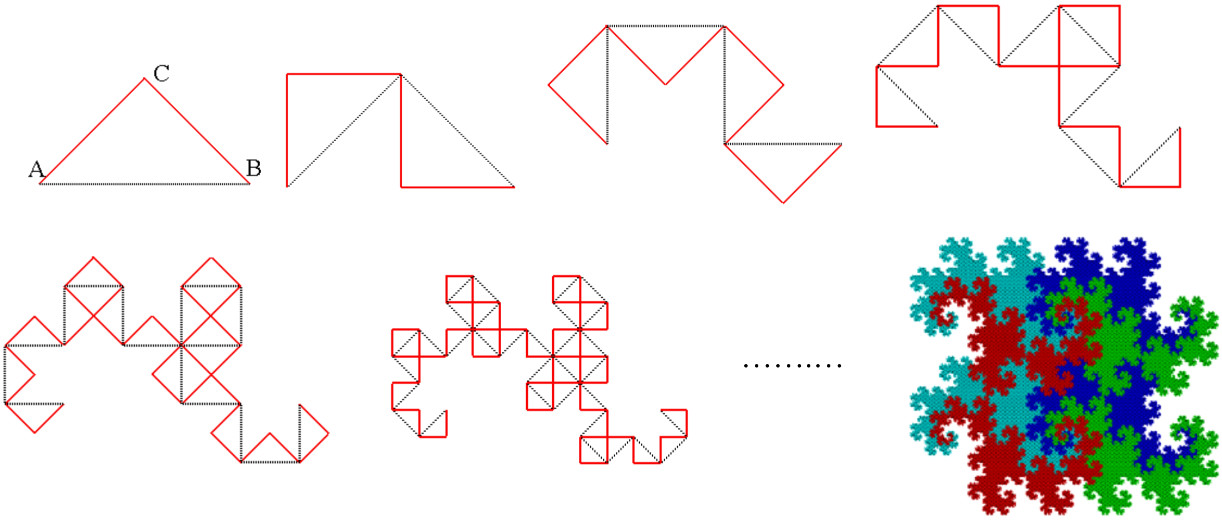


Curva de Lévy

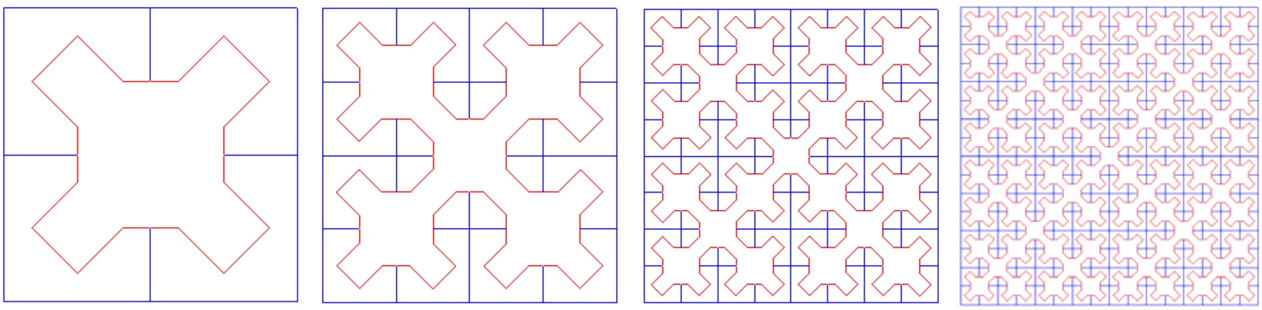


Curva del Dragón

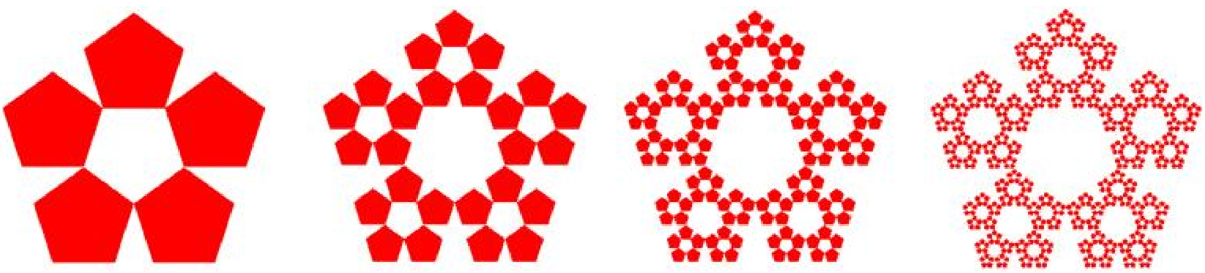
La curva del dragón posee una propiedad notable como es la de poder pavimentar el plano.



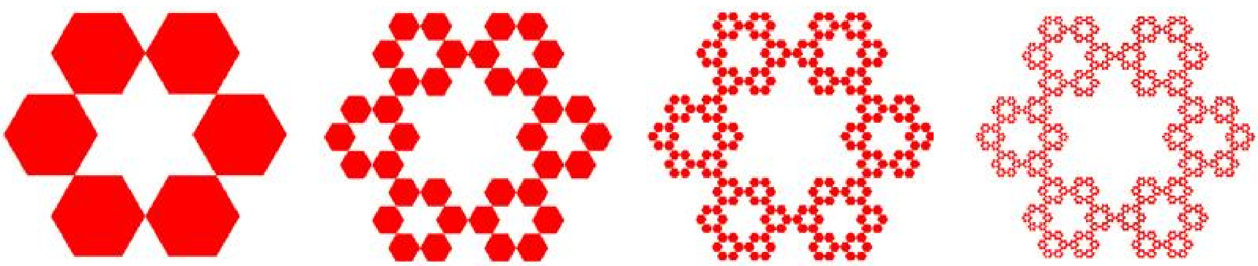
Curva de Sierpinski



Pentágono de Sierpinski

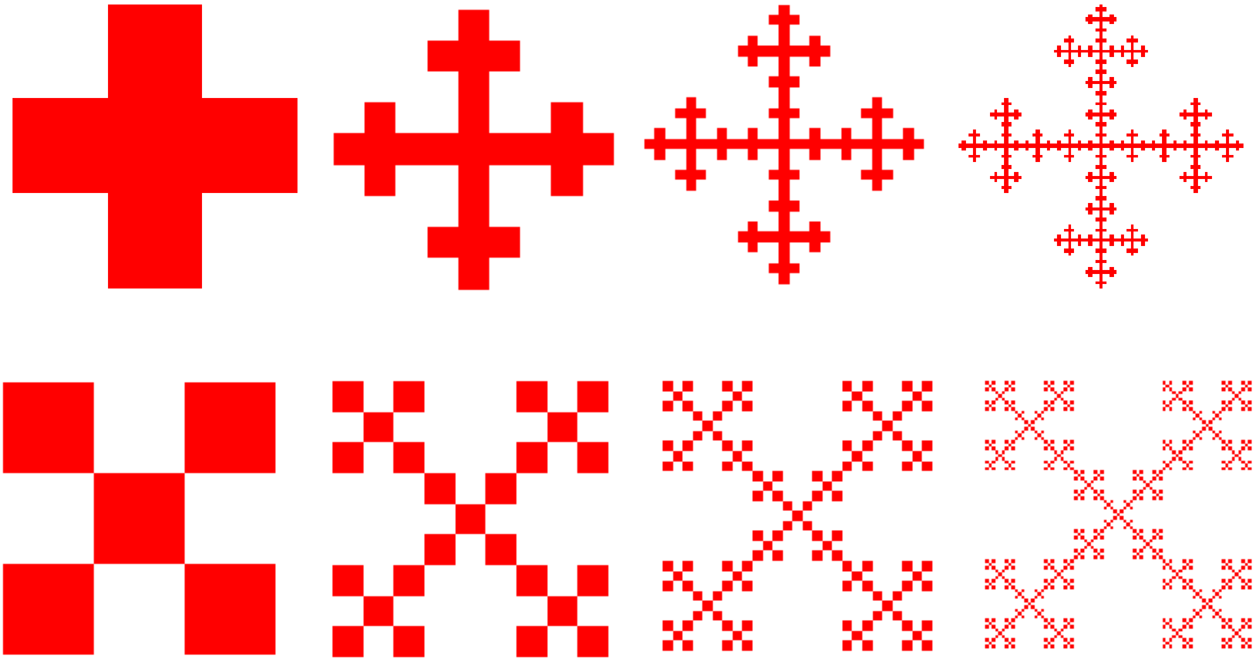


Hexágono de Sierpinski

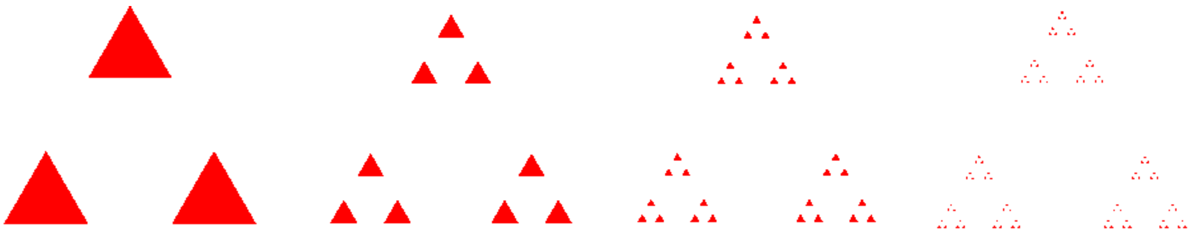


El Hexágono de Sierpinski es muy interesante, ya que como se puede ver en las imágenes, las partes centrales de las sucesivas iteraciones forman un copo de nieve de Koch

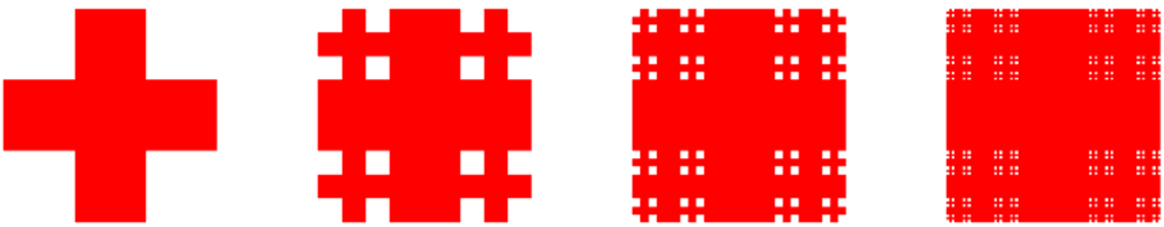
Fractal de Vicsek



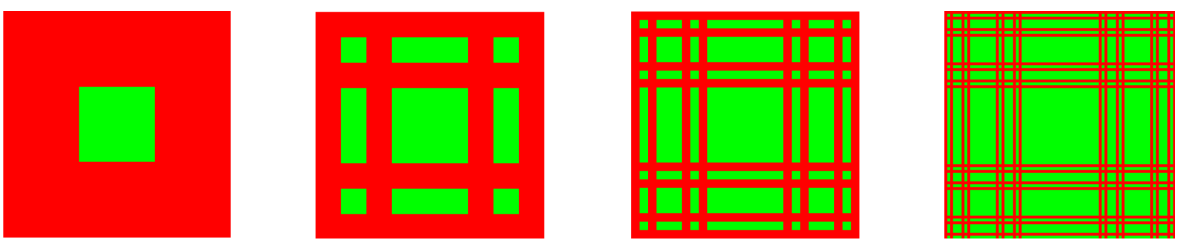
El triángulo de Cantor



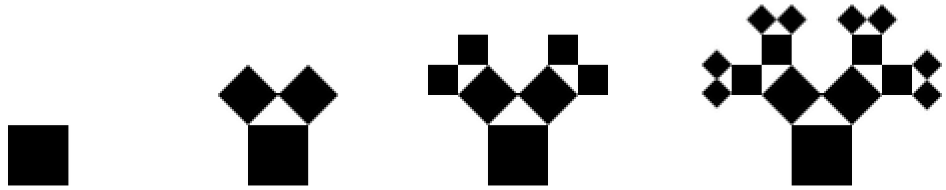
El complementario del cuadrado de Cantor

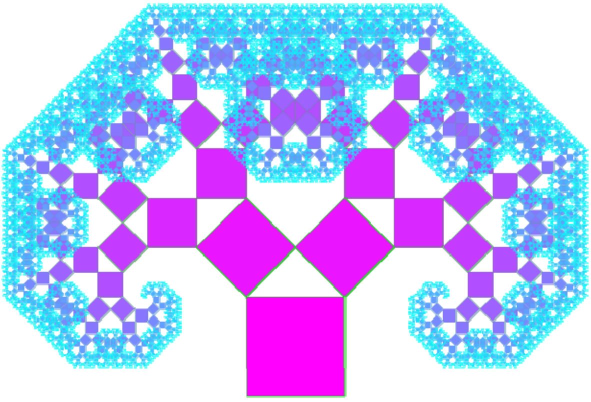


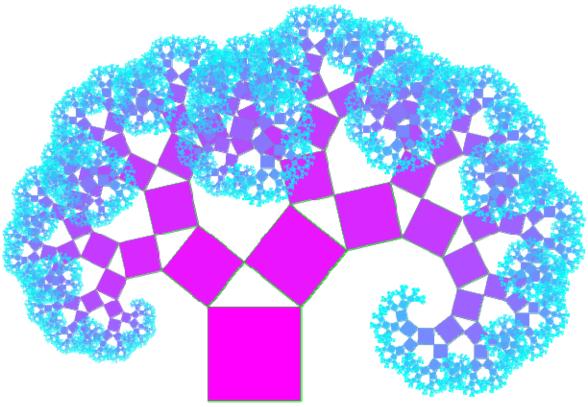
El tapiz de Cantor



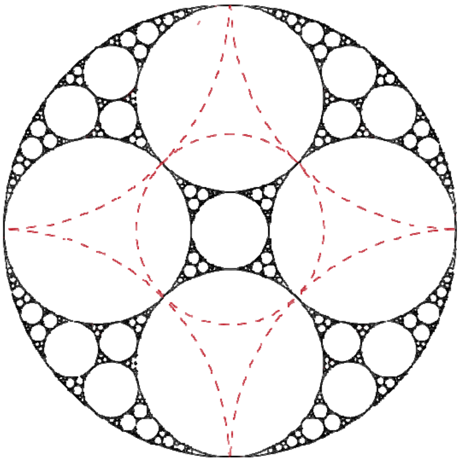
Fractal Árbol de Pitágoras



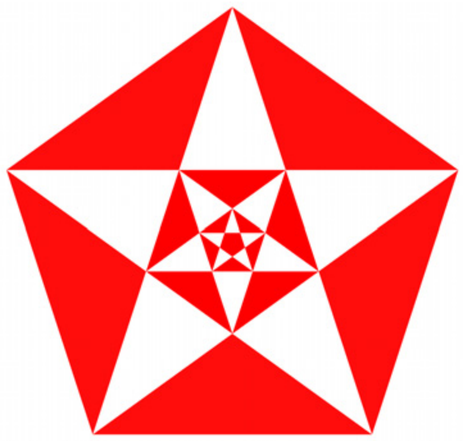




Fractal de Apolonio

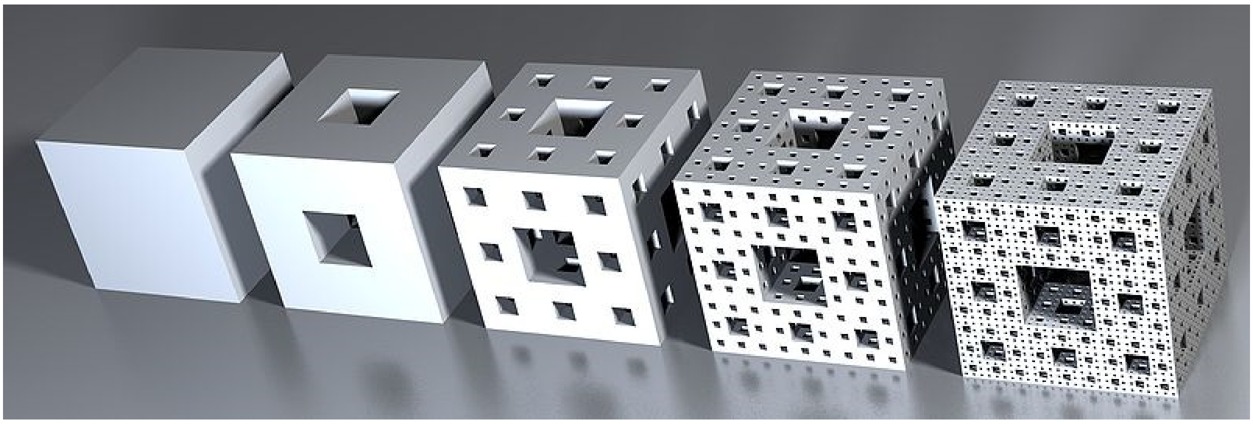


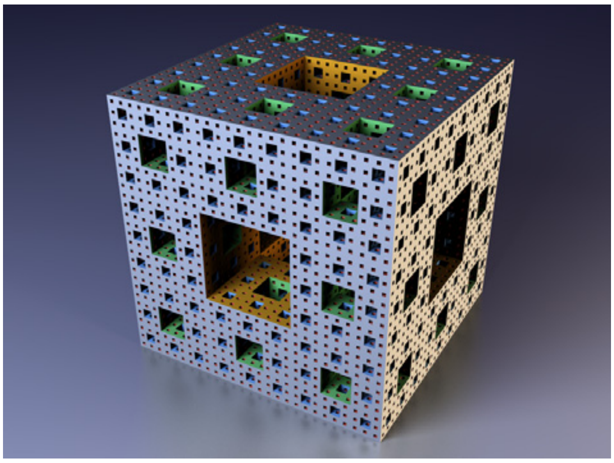
Iteración Pentagonal

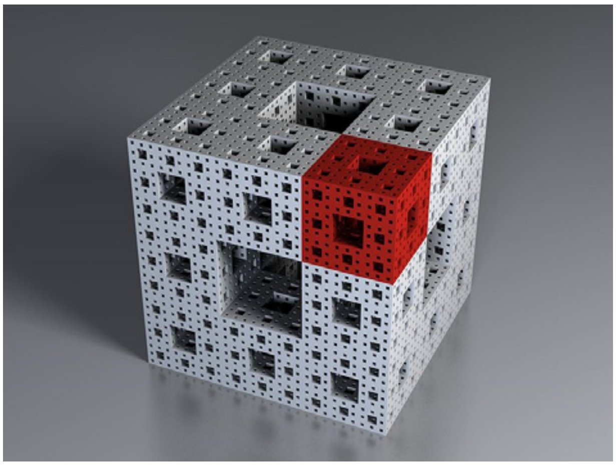


La Esponja de Menger

Existen objetos sumamente complejos que pueden ser definidos matemáticamente utilizando un conjunto de reglas relativamente simples. La esponja de Menger es uno de ellos. Se trata de un conjunto fractal descrito por primera vez en 1926 por Karl Menger, y es una “versión tridimensional” de la “alfombra de Sierpinski”. Este inocente cubo posee algunas características absolutamente desconcertantes: ¡*su superficie tiende a infinito y su volumen tiende a cero*!







La esponja de Menger, también llamada cubo de Menger, es un fractal descrito por Menger en 1926, y se trata de la versión tridimensional de la alfombra de Sierpinski. La esponja de Menger se obtiene aplicando a un cubo un proceso similar al utilizado para crear la alfombra de Sierpinski. En el primer paso, se divide el cubo inicial en 27 cubos más pequeños, tres a lo largo, tres a lo ancho y tres a lo alto, y se eliminan los cubos centrales de cada cara y el cubo del centro. Eso nos deja con $27-6-1=20$ cubos. A cada uno de estos cubos más pequeños se les aplica una y otra vez el mismo procedimiento.

El resultado es una figura que guarda un cierto parecido con una esponja de mar (de ahí su nombre) y cuya dimensión es $d = \dfrac{\log 20}{\log 3} = 2'7268....$, lo que significa que la esponja de Menger no es bidimensional ni tridimensional (es más que una superficie pero menos que un cuerpo sólido) ya que su dimensión es tal que $2 < d < 3$.

Paso	0	1	2	3	....	n
nº de cubos	1	20				

Iteración 1

Superficie $\dfrac{64}{54} = \dfrac{64}{6 \cdot 3^2} \approx 1'1851$ *veces la superficie del cubo inicial*

Volumen $\dfrac{20}{3^3} = \dfrac{20}{27} \approx 74'0741\,\%$ *del volumen inicial*

Iteración 2

Superficie $\dfrac{1056}{486} = \dfrac{1056}{6 \cdot 3^4} \approx 2'1728$ *veces la superficie del cubo inicial*

Volumen $\dfrac{20^2}{9^3} = \dfrac{20^2}{27^2} \approx 54'869\,\%$ *del volumen inicial*

Iteración 3

Superficie $\dfrac{18048}{4374} = \dfrac{18048}{6 \cdot 3^6} \approx 4'1262$ *veces la superficie del cubo inicial*

Volumen $\dfrac{20^3}{27^3} \approx 40'644\,\%$ *del volumen inicial*

Iteración 4

Superficie $\dfrac{2018304}{39366} = \dfrac{2018304}{6 \cdot 3^8} \approx 51'270$ *veces la superficie del cubo inicial*

Volumen $\dfrac{20^4}{81^3} = \dfrac{20^4}{27^4} \approx 30'1068\,\%$ *del volumen inicial*

Iteración 5

Superficie $\dfrac{39186432}{354294} = \dfrac{39186432}{6 \cdot 3^{10}} \approx 110'6042$ *veces la superficie del cubo inicial*

Volumen $\dfrac{20^5}{243^3} = \dfrac{20^5}{27^5} \approx 22'3014\,\%$ *del volumen inicial*

Iteración 6

Superficie $\dfrac{774291456}{3188646} = \dfrac{774291456}{6 \cdot 3^{12}} \approx 242'8276$ *veces la superficie del cubo inicial*

Volumen $\dfrac{20^6}{729^3} = \dfrac{20^6}{27^6} \approx 16'5195\,\%$ *del volumen inicial*

……………………… ………………………

……………………… ………………………

Iteración n-ésima

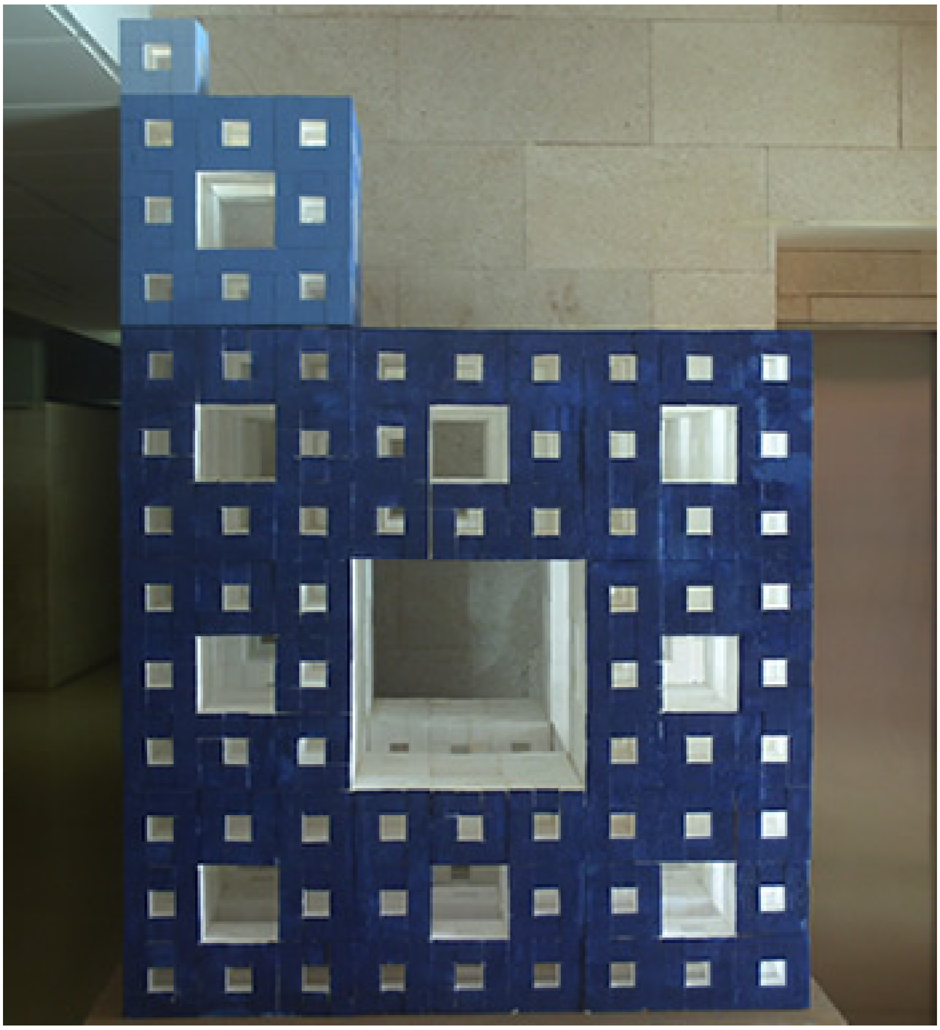
Superficie $\rightarrow \dfrac{\cdots\cdots}{6\cdot 3^{2n}} \rightarrow \infty$

Volumen $\rightarrow \dfrac{20^n}{3^{3n}} = \dfrac{20^n}{27^n} = \left(\dfrac{20}{27}\right)^n \rightarrow 0$

La esponja de Menger, el secreto del infinito

¿Cómo puede ser que a partir de una figura de 3 dimensiones, como es un cubo, obtengamos un "monstruo" de dimensión ligeramente menor? El secreto se encuentra en el infinito. En efecto, si solo repitiésemos el proceso de construcción de la esponja un número finito de veces, seguiríamos teniendo una cantidad finita de cubos. Pero al aplicar indefinidamente el mecanismo propuesto por Menger obtenemos el cubo inicial horadado una y otra vez por una "red de tubos prismáticos de sección cuadrada" cada vez más pequeños, que conforman una red interna similar a la que conforman nuestros capilares, venas y arterias, pero infinitamente más compleja. Lo que era un cubo se ha convertido en una colección de segmentos orientados en las tres dimensiones posibles, un esqueleto que a pesar de estar compuesto por infinitas piezas, estas poseen un "espesor" que tiende a cero con cada iteración, lo que hace de *la esponja de Menger un objeto cuyo volumen tiende a cero y la superficie tiende a infinito.*

Escultura realizada por alumnos del I.E.S. Chabàs del curso académico 2010/2011



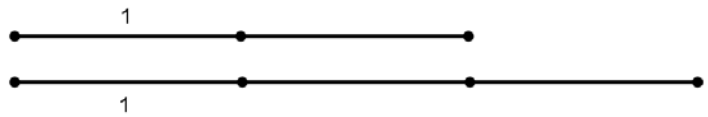
Fórmulas de las longitudes y superficies en el paso n

	Paso n
Conjunto de Cantor	Longitud $\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$
Cuadrado de Cantor	Perímetro total $\left(\frac{4}{3}\right)^n \to \infty$ Superficie total $\left(\frac{4}{9}\right)^n \to 0$
Curva de Koch	Perímetro total $\left(\frac{4}{3}\right)^n \to \infty$
Copo de nieve de Koch	Perímetro total $\left(\frac{4}{3}\right)^n \to \infty$ Superficie total $\to \frac{8}{5}$
Triángulo de Sierpinski	Perímetro total $\left(\frac{3}{2}\right)^n \to \infty$ Superficie total $\left(\frac{3}{4}\right)^n \to 0$
Alfombra de Sierpinski	Perímetro total $\to \infty$ Superficie total $\left(\frac{8}{9}\right)^n \to 0$
Esponja de Menger	Superficie total $\to \infty$ Volumen total $\left(\frac{20}{27}\right)^n \to 0$

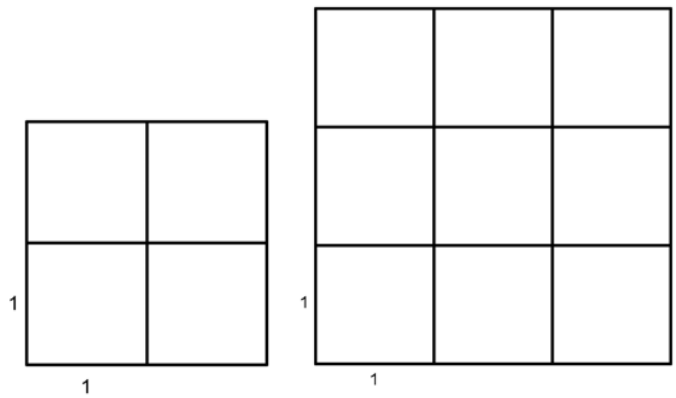
Dimensión Fractal

En geometría un punto no tiene dimensión alguna porque no tiene longitud, anchura o profundidad, una línea es unidimensional (tiene una sola dimensión) porque solo tiene longitud, un plano es bidimensional porque tiene longitud y anchura (largo y ancho) y un cubo es tridimensional porque tiene longitud, anchura y profundidad (largo, ancho y alto). Este es el concepto que normalmente asociamos a la *dimensión euclídea o dimensión topológica*. Podemos también definir la dimensión como el grado de libertad de movimientos en el espacio, entendiendo esa libertad como el número de direcciones perpendiculares diferentes que podamos tomar. En el espacio que conocemos contamos con tres direcciones perpendiculares: arriba-abajo, izquierda-derecha, adelante-atrás. Por ello decimos que es tridimensional. Podemos definir otros espacios. Por ejemplo un tren se mueve en un espacio unidimensional (a no ser que descarrile), un barco se mueve en un espacio bidimensional (salvo que naufrague) y un avión se mueve en un espacio tridimensional (siempre que esté volando). Un espacio de 10 puntos es de dimensión cero, ya que desde un punto cualquiera es imposible moverse en ninguna dirección, ya que no hay nada entre ese punto y los demás puntos que componen el espacio.

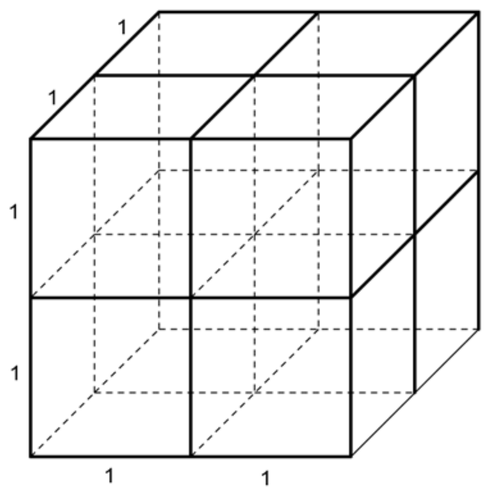
Si tomamos un segmento de longitud 1 y lo duplicamos tendremos dos segmentos iguales al original. Decimos que la razón de semejanza es 2. Si el segmento original lo triplicamos tendremos 3 segmentos iguales al original. Decimos que la razón de semejanza es 3.



Si duplicamos los lados de un cuadrado de lado 1 tendremos 4 cuadrados iguales al original. La razón de semejanza es 2 y la superficie es la del cuadrado original multiplicada por la razón de semejanza al cuadrado 2^2. Si triplicamos los lados de un cuadrado de lado 1 tendremos 9 cuadrados iguales al original. La razón de semejanza es 3 y la superficie es la del cuadrado original multiplicada por la razón de semejanza al cuadrado 3^2.



Si duplicamos el largo, ancho y alto de un cubo de lado 1 tendremos 8 cubos iguales al original. La razón de semejanza es 2 y el volumen es el del cubo original multiplicado por la razón de semejanza al cubo 2^3. Si triplicamos el largo, ancho y alto de un cubo de lado 1 tendremos 27 cubos iguales al original. La razón de semejanza es 3 y el volumen es el del cubo original multiplicado por la razón de semejanza al cubo 3^3.



Al duplicar los lados de una figura, el número de figuras iguales a la original es igual a 2 elevado a un número que es igual a la dimensión de la figura. Al triplicar los lados de una figura, el número de figuras iguales a la original es igual a 3 elevado a un número que es igual a la dimensión de la figura, etc. Todo lo anterior lo podemos resumir en la siguiente tabla:

		Duplicar	***Triplicar***	***Cuadruplicar***	***General***
Figura	***Dimensión***	***nº de copias***	***nº de copias***	***nº de copias***	***nº de copias***
Línea	1	$2 = 2^1$	$3 = 3^1$	$4 = 4^1$	…..
Cuadrado	2	$4 = 2^2$	$9 = 3^2$	$16 = 4^2$	…..
Cubo	3	$8 = 2^3$	$27 = 3^3$	$64 = 4^3$	…..
……………	.....	…..	…..	…..	…..
Fractal	d	$n = 2^d$	$n = 3^d$	$n = 4^d$	$n = k^d$

La fórmula que relaciona el número de copias (n) o figuras iguales a la original con la dimensión de la figura (d) es:

$$\textit{nº de copias} = \textit{escala}^{\,\textit{dimensión}} \qquad \text{es decir} \qquad n = k^d$$

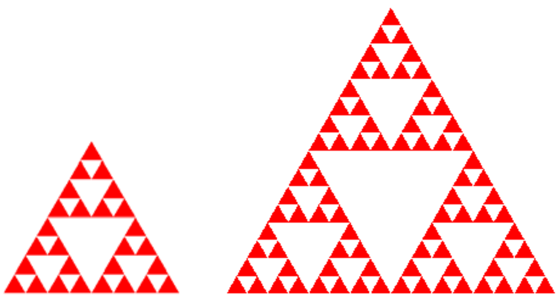
Tenemos que encontrar a qué número hay que elevar k para que nos de n. Este número se llama logaritmo de n en base k y su cálculo resulta muy fácil con la calculadora.

$$\mathbf{d = \frac{\log n}{\log k}}$$

Algunas dimensiones fractales

Triángulo de Sierpinski

Vamos usar esta fórmula para calcular la dimensión fractal del triángulo de Sierpinski. En dicho triángulo, al duplicar la longitud de los lados ($k = 2$), que es la razón de semejanza o escala, se obtiene otro triángulo de Sierpinski semejante al primero, que contiene a su vez 3 triángulos iguales al primero, es decir $n = 3$ (nº de copias).

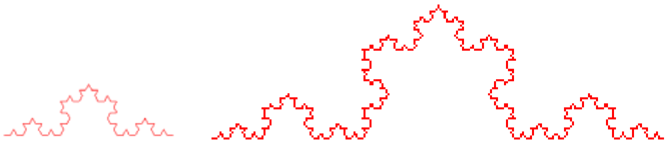


Aplicandola fórmula tenemos: $2^d = 3$ $\qquad d = \frac{\log 3}{\log 2} = 1'584962500$ que es un número irracional.

El triángulo de Sierpinski tiene una dimensión intermedia entra la de una línea (dimensión 1) y la de una superficie (dimensión 2). Ocupa el espacio más que una línea pero menos que una superficie. El número $1'584962500$ *es su dimensión fractal.*

Curva de Koch

En la curva de Koch se necesitan 4 copias $(n=4)$ para construir la figura a una escala 3 veces mayor $(k=3)$.

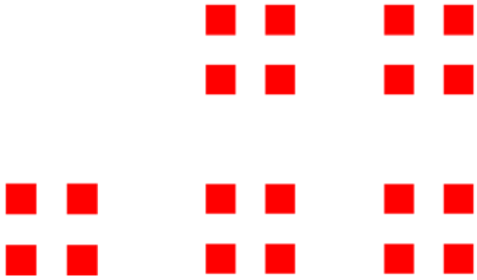


$$4 = 3^d \qquad d = \frac{\log 4}{\log 3} = 1'261859......$$

El número $1'261859507$ *es un número irracional y es su dimensión fractal.*

Polvo de Cantor

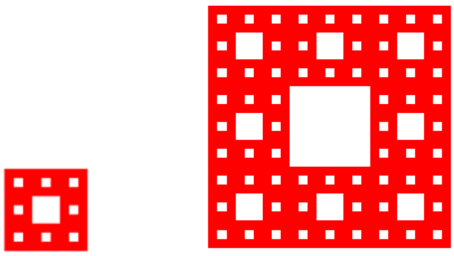
Al triplicar la longitud del cuadrado $(k=3)$ que es la razón de semejanza, se obtiene otro cuadrado de Cantor semejante al primero, que contiene a su vez 4 cuadrados iguales al primero (nº de copias), es decir $n=4$.



$$4 = 3^d \qquad d = \frac{\log 4}{\log 3} = 1'261859507.....$$

Alfombra de Sierpinski

Al triplicar la longitud del cuadrado $(k=3)$ que es la razón de semejanza, se obtiene otro cuadrado de Sierpinski semejante al primero, que contiene a su vez 8 cuadrados iguales al primero (nº de copias), es decir $n=8$.



$$8 = 3^d \qquad d = \frac{\log 8}{\log 3} = 1'892789.....$$

Esponja de Menger

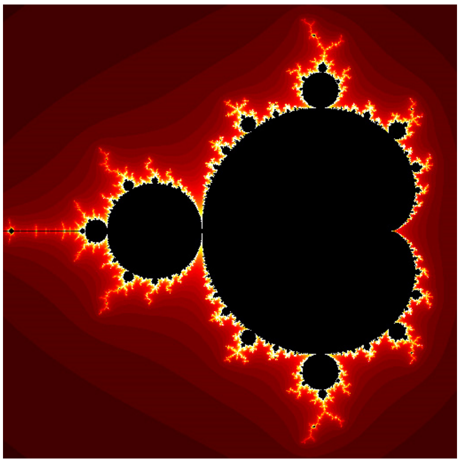
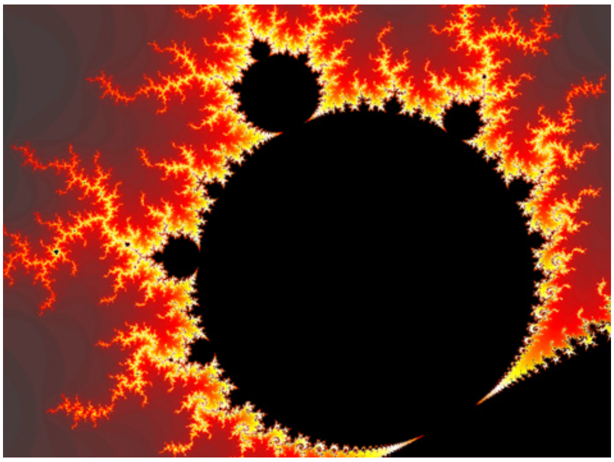
Al triplicar la longitud del cubo $(k=3)$ que es la razón de semejanza, se obtiene otro cubo semejante al primero, que contiene a su vez 20 cubos iguales al primero (nº de copias), es decir $n=20$.

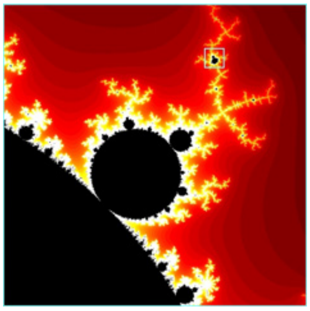
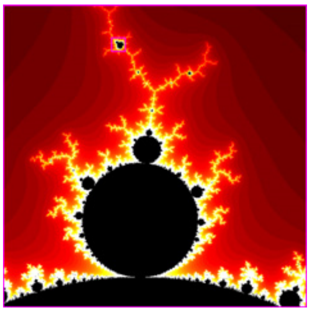
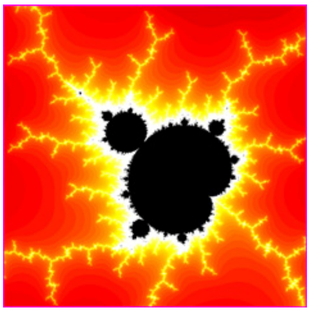
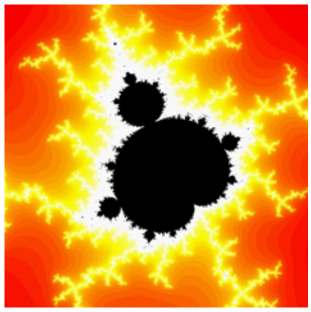
$$20 = 3^d \qquad d = \frac{\log 20}{\log 3} = 2'726833.....$$

La esponja de Menger tiene una dimensión intermedia entra la de una superficie (dimensión 2) y la del espacio tridimensional (dimensión 3). Ocupa el espacio más que una superficie pero menos que el espacio tridimensional. El número $2'726833.....$ *es su dimensión fractal.*

Conjunto de Mandelbrot

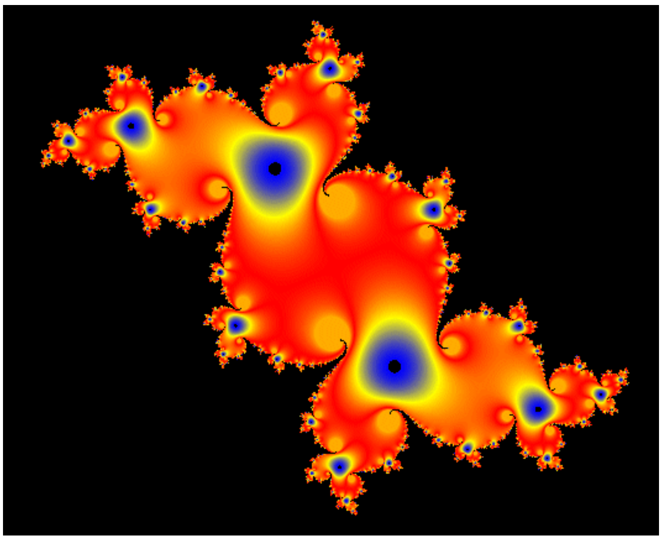
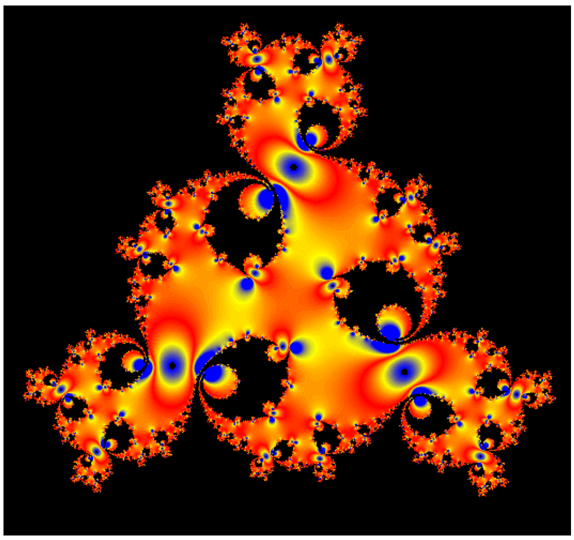
El *conjunto de Mandelbrot* es el más conocido de los conjuntos fractales, y el más estudiado. Se conoce así en honor al científico Benoît Mandelbrot, que investigó sobre él en la década de los setenta. Benoit Mandelbrot nació en Varsovia el 20 de noviembre de 1924 y murió en el año 2010.

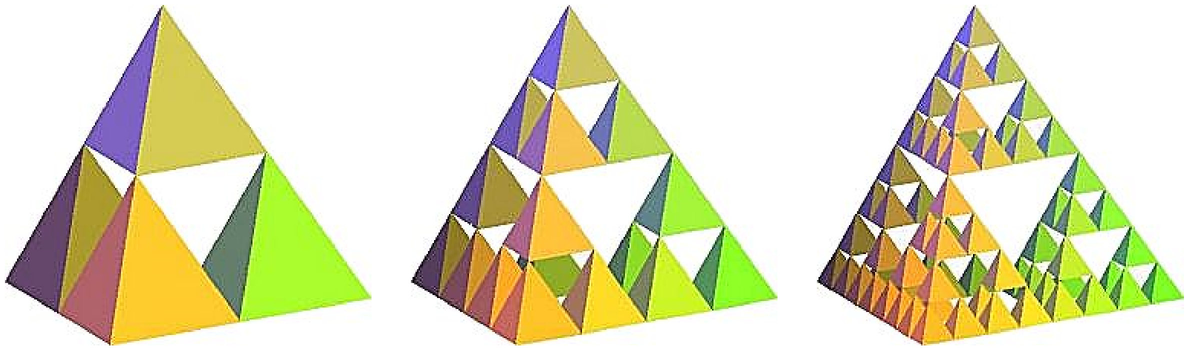
Conjunto de Julia

Gaston Maurice Julia (1893-1978) es el creador de uno de los fractales más conocidos, después del conjunto de Mandelbrot.

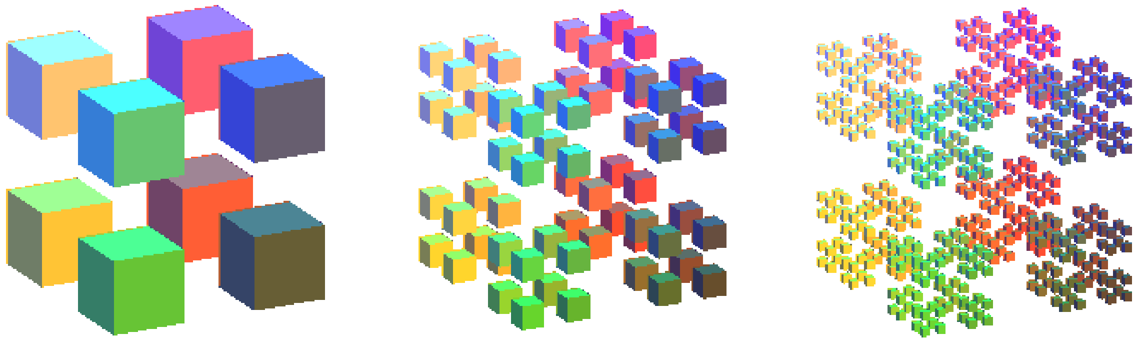



Ejemplos de estructuras fractales

El Tetraedro de Sierpinski

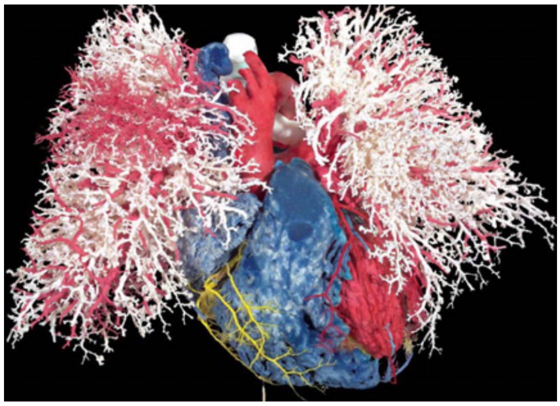


Polvo de Cantor tridimensional



Romanescu brócoli

Árboles arterial y venoso



Helechos

Rayos

Ramas de árboles

Nubes

Montañas

Acantilado

Árboles

Cuenca hidrográfica de un río

Raíz de una planta del tomate

En todos los ejemplos correspondientes a las fotografías anteriores la naturaleza se presenta de una manera imposible de describir con la geometría clásica. Su descripción corresponde a la geometría fractal.