Movimiento Armónico Simple (M.A.S.)

Escucho y Olvido
Veo y Recuerdo
Hago y Comprendo

Confucio

Un poco de historia. Galileo

En diferentes documentos se relata cómo Galileo descubrió el funcionamiento del péndulo. En el año 1583, a la edad de 19 años, cuando asistía a una misa en el Duomo (catedral de la ciudad italiana de Pisa y cuya torre de campanario es la célebre torre inclinada) observó el balanceo de una lámpara de aceite que colgaba del techo mediante un largo cable. Cuando la lámpara comenzó a oscilar y describía arcos grandes se movía rápidamente. Más tarde, cuando la oscilación había disminuido y el arco que describía era más pequeño la lámpara iba más despacio, pero el tiempo total de cada oscilación completa era siempre exactamente el mismo. ¿Cómo descubrió Galileo este hecho? Simplemente usando como patrón de medida su propio pulso, es decir, contando sus pulsaciones cada vez, para asegurar que cada oscilación tenía lugar en el mismo periodo de tiempo. Cuando Galileo llegó a su casa comenzó a experimentar con bolitas de plomo atadas a hilos de diferentes longitudes y descubrió que, cualquiera que fuese el peso del plomo la bolita necesitaba el mismo tiempo para completar un viaje de ida y vuelta y que solo el cambio en la longitud del hilo afectaba al tiempo de la oscilación. Esta observación condujo al invento del péndulo, usado en los relojes y otros instrumentos para medir con precisión el tiempo. El tipo de movimiento que Galileo estaba estudiando se llama *Movimiento Armónico Simple*, que a partir de ahora escribiremos como M.A.S.

Movimiento oscilatorio. Movimiento Armónico Simple (M.A.S.)

Cuando se perturba un sistema y este pierde su posición de equilibrio estable se producen oscilaciones. Se dice que el movimiento de un cuerpo es *oscilatorio cuando efectúa movimientos en uno y otro sentido alrededor de un punto fijo. Un movimiento que se repite a sí mismo se denomina periódico, siendo el* ***período*** *el tiempo necesario para que se produzca cada repetición. Una partícula oscila cuando se mueve periódicamente con respecto a la posición de equilibrio.* Sistemas que desarrollan movimientos periódicos son por ejemplo:

- El movimiento de un cuerpo suspendido de un resorte (muelle).
- El movimiento de la Luna alrededor de la Tierra.
- El movimiento de un péndulo oscilando con pequeña amplitud.
- El movimiento del balancín de un reloj.
- La oscilación de las moléculas de un cuerpo sólido alrededor de posiciones fijas en la red, aunque este movimiento no puede observarse de modo directo.
- La vibración de las cuerdas de los instrumentos musicales al producir los sonidos.

Además de los ejemplos anteriores, el movimiento periódico se presenta en muchos tipos de movimiento ondulatorio.

- En una onda sonora, ya que las moléculas del aire oscilan a lo largo de la línea de propagación de la onda.
- La luz y otras ondas electromagnéticas están caracterizadas por la oscilación de vectores de campo eléctrico y magnético perpendiculares a la línea de propagación de la onda. Los electrones de una antena radiante o receptora oscilan rápidamente.

De todos los movimientos oscilatorios, el más importante es el ***Movimiento Armónico Simple (M.A.S.)****, debido a que, además de ser el movimiento más simple de describir matemáticamente, constituye una aproximación muy cercana de muchas oscilaciones encontradas en la naturaleza.*

Entre las características más importantes del *M.A.S.* destacan:

1. *Es un movimiento periódico, es decir, en intervalos de tiempo iguales el móvil adquiere la misma posición y las mismas características de movimiento.*
2. *Es un movimiento oscilatorio o de vaivén a ambos lados de una posición central de equilibrio.*
3. *La máxima separación del cuerpo en su movimiento, contada a partir de su posición de equilibrio se llama Amplitud y es siempre la misma.*

Sistemas físicos oscilantes

Sistema masa-muelle

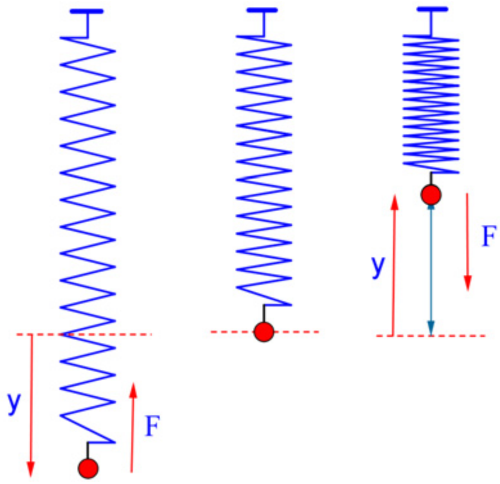
Consideremos un muelle de masa despreciable suspendido verticalmente de un punto fijo. Si colgamos un cuerpo de masa "m" del extremo libre del muelle, el cuerpo oscila arriba y abajo repitiendo su movimiento cada cierto tiempo. A medida que pasa el tiempo, su movimiento va disminuyendo y sus desplazamientos se hacen más cortos *pero el cuerpo sigue tardando exactamente el mismo tiempo en cada ciclo*. Es un aparato perfecto para llevar la cuenta del tiempo y su movimiento se llama M.A.S.

Cuando el muelle está estirado tiende a tirar de la masa hacia su posición original. Cuanto más se desplace la masa mayor será la fuerza que tire y a la inversa cuando el muelle está comprimido trata de empujar la masa hacia su posición original. Cualquiera que sea la dirección en la que se mueva la masa aparece una fuerza para oponerse al desplazamiento. En cada punto de su movimiento, la fuerza neta es proporcional y de dirección opuesta a la distancia "y" desde la posición de equilibrio de la masa. ***Situaremos el origen del desplazamiento en la posición de equilibrio, prescindiendo de la influencia del peso***.

Cuando el cuerpo se desplaza una cantidad "y" de su posición de equilibrio, el muelle ejerce una fuerza $-ky$ que viene dada por la ***Ley de Hooke***:

$$\boldsymbol{F = -ky}$$

donde la constante de proporcionalidad $\boldsymbol{k}$ se denomina *constante elástica del muelle* y es característica de la rigidez de éste. El signo menos indica que se trata de una fuerza restauradora, es decir, se opone al sentido del desplazamiento respecto al punto de equilibrio.



Aplicando la segunda ley de Newton $(F_y = ma_y)$ al sistema formado por la partícula de masa *m* y el muelle de constante elástica *k* tenemos:

$$\left.\begin{aligned} F &= ma_y = m\frac{d^2y}{dt^2} \\ F &= -k\,y \end{aligned}\right\} \qquad -ky = ma_y \qquad a_y = -\frac{k}{m}y \qquad \acute{o} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m}y$$

donde se observa que la aceleración es proporcional al desplazamiento y tiene sentido contrario.

Esta ecuación diferencial se refiere no solo al caso de una masa colgada de un muelle, sino a cualquier sistema físico que al ser perturbado tiende a recuperar su posición de equilibrio con una fuerza proporcional a la perturbación sufrida. Por ejemplo: la presión del aire en un tubo de órgano, el ángulo de un péndulo o la rotación de una cuerda de reloj. Estos sistemas y muchos otros adoptan oscilaciones armónicas que pueden ser demasiado rápidas para ser vistas o demasiado lentas para visualizarlas. Sin embargo, independientemente de la frecuencia, cada una de ellas puede ser representada por la misma ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m}y$.

Esta es la característica que define el M.A.S. y puede utilizarse para identificar sistemas que presentan esta clase de movimiento, es decir, *siempre que la aceleración de un objeto sea proporcional a su desplazamiento pero con sentido opuesto, el objeto se moverá con M.A.S.*

Veamos ahora cómo se puede obtener experimentalmente el valor del desplazamiento *"y"* en función del tiempo.

La ecuación $\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m}y$ requiere que $y(t)$ sea una función cuya segunda derivada sea la misma función pero negativa excepto por un factor constante $\frac{k}{m}$. Conocemos dos funciones cuya segunda derivada tienen esta propiedad que son las funciones seno y coseno. Por ejemplo:

$$\frac{d}{dt}sen\,\omega t = \omega \cos\omega t \qquad y \qquad \frac{d^2}{dt^2}sen\omega t = \frac{d}{dt}(\omega\cos\omega t) = -\omega^2 sen\omega t$$

La segunda derivada de un seno (o de un coseno) nos da de nuevo la función original multiplicada por un factor negativo $-\omega^2$. Esta propiedad no sufre ninguna alteración si multiplicamos a la función seno por cualquier constante. Elegimos que la constante sea A, de modo que el valor máximo de "y" será A.

Podemos entonces escribir una solución de la ecuación $\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m}y$ como:

$$y = Asen(\omega t + \varphi)$$

Por lo que la constante φ puede adquirir cualquier combinación de soluciones seno y coseno.

La solución de la ecuación $\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m}y$ en la forma más general posible es $y = Asen(\omega t + \varphi)$ con las constantes A, ω y φ todavía desconocidas.

Si una partícula se mueve a lo largo del eje Y, por definición decimos que tiene un movimiento armónico simple cuando su desplazamiento "y" respecto a la posición de equilibrio está dado en función del tiempo por una ecuación del tipo:

$$\boldsymbol{y(t) = A\,sen(\,\omega t + \varphi\,)}$$

donde A, ω y φ son constantes.

- ***y*** es la ***elongación*** o distancia de la partícula a la posición de equilibrio.
- $\boldsymbol{\omega}$ es la ***frecuencia angular***.
- $\boldsymbol{\omega t + \varphi}$ se denomina ***fase del movimiento***.
- $\boldsymbol{\varphi}$ es la ***fase inicial*** o constante de fase. Su valor determina la posición de la partícula en el instante inicial, $t = 0$.
- ***A*** representa el desplazamiento máximo y se denomina ***Amplitud***.

Las constantes A y φ están todavía indeterminadas y por lo tanto son arbitrarias, lo que significa que cualquier elección de A y φ satisfará la ecuación $\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m}y$ de modo que es posible una gran variedad de movimientos del oscilador, todos con la misma ω.

Para determinar las constantes A, ω y φ derivamos la ecuación $y = Asen(\omega t + \varphi)$ dos veces con respecto al tiempo.

$$\frac{dy}{dt} = \omega A\cos(\omega t + \varphi) \qquad y \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 Asen(\omega t + \varphi)$$

Sustituyendo en la igualdad $\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m}y$ obtenemos:

$$-\omega^2 Asen(\omega t+\varphi) = -\frac{k}{m} Asen(\omega t+\varphi) \quad \rightarrow \quad \omega^2 = \frac{k}{m} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

lo que significa que la ecuación $y = Asen(\omega t+\varphi)$ es, de hecho, una solución de la ecuación del movimiento de un oscilador armónico.

La amplitud A y la fase inicial del movimiento φ se pueden calcular a partir de las condiciones iniciales del movimiento, esto es, de los valores de la elongación y_0 y de la velocidad v_0 cuando $t=0$.

$$t=0 \quad \begin{cases} y_0 = Asen\varphi & y_0^2 = A^2 sen^2\varphi \quad \textbf{\textit{(1)}} \\ v_0 = A\omega\cos\varphi & v_0^2 = A^2\omega^2\cos^2\varphi \quad \dfrac{v_0^2}{\omega^2} = A^2\cos^2\varphi \quad \textbf{\textit{(2)}} \end{cases}$$

Sumando miembro a miembro (1) y (2) obtenemos el valor de la amplitud:

$$y_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} = A^2 sen^2\varphi + A^2\cos^2\varphi \qquad y_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} = A^2(sen^2\varphi + \cos^2\varphi) = A^2$$

$$\boldsymbol{A = \sqrt{y_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}}$$

Dividiendo miembro a miembro (1) entre (2) obtenemos el valor de la fase inicial del movimiento:

$$\frac{y_0^2}{\frac{v_0^2}{\omega^2}} = \frac{A^2 sen^2\varphi}{A^2\cos^2\varphi} = tg^2\varphi \qquad tg\varphi = \frac{y_0}{\frac{v_0}{\omega}} = \frac{y_0\omega}{v_0} \qquad \boldsymbol{\varphi = arctg\frac{y_0\omega}{v_0}}$$

Si en la ecuación $y = Asen(\omega t+\varphi)$ incrementamos el tiempo “t” en $\frac{2\pi}{\omega}$, la función resultante es:

$$y = Asen\left(\omega\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi\right) = Asen(\omega t + 2\pi + \varphi) = Asen(\omega t+\varphi)$$

lo que significa que la función se vuelve a repetir después de un tiempo $\boldsymbol{\frac{2\pi}{\omega}}$.

Esta cantidad es lo que en adelante llamaremos el ***Período del movimiento*** *y lo representaremos con la letra* ***T***. *El periodo es el tiempo que emplea el objeto para realizar una oscilación completa alrededor de su posición de equilibrio.* Su unidad es el segundo ***(seg)***.

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad \rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

Todos los movimientos dados por la ecuación $\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m}y$ tienen el mismo período de oscilación y este depende solamente de la masa de la partícula y de la constante k del muelle, característica de su rigidez. El tiempo requerido para hacer un ciclo completo no depende de la amplitud de las oscilaciones.

La ***Frecuencia*** *de un oscilador es el número de vibraciones completas por unidad de tiempo*. Se representa por la letra $\boldsymbol{f}$ y *es el número de oscilaciones por segundo***.** La *frecuencia* es el recíproco del período y está dada por:

$$f = \frac{1}{T} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

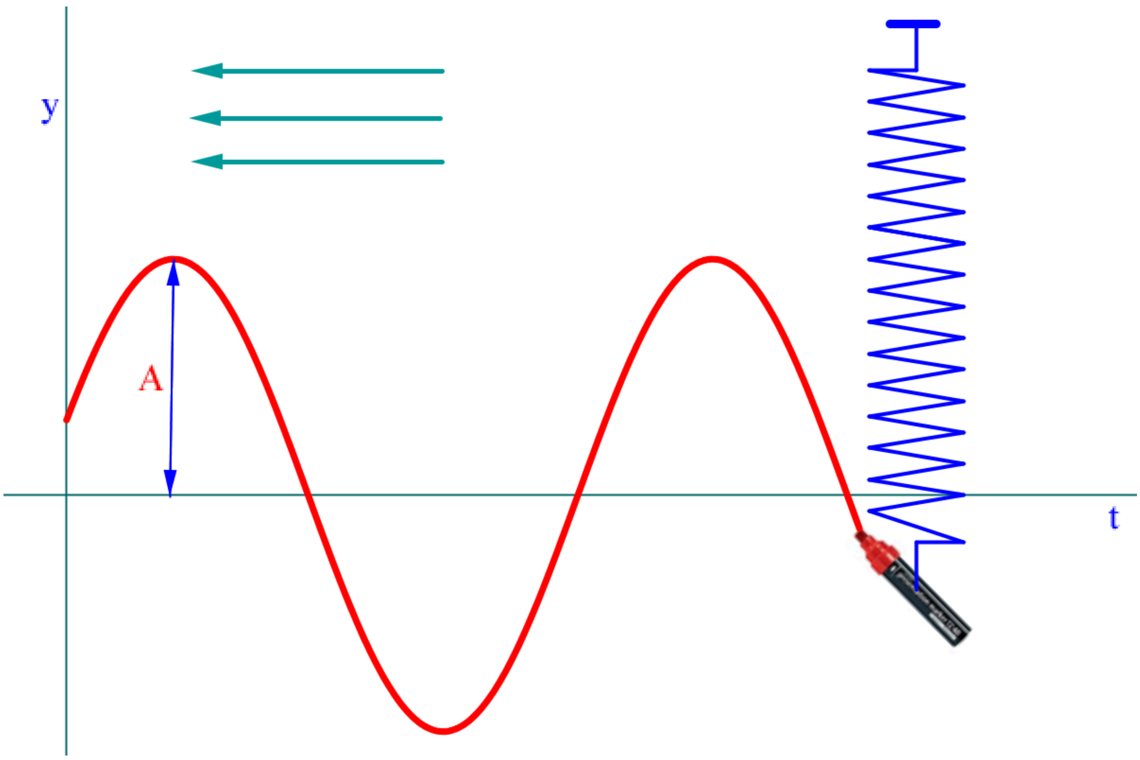
La unidad de frecuencia es el ciclo por segundo ***(ciclo/seg)*** que recibe el nombre de ***Herzios (Hz)***. Por ejemplo, si el tiempo necesario para una oscilación completa es $0'25$ seg, la frecuencia es de 4 Hz. *Cuanto más rígido sea el muelle, es decir, valor de k más grande, mayor será la frecuencia. Cuanto mayor sea la masa menor será la frecuencia.*

Dado que $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, como $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ se deduce que $f = \frac{1}{2\pi}\omega \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega = 2\pi f}$.

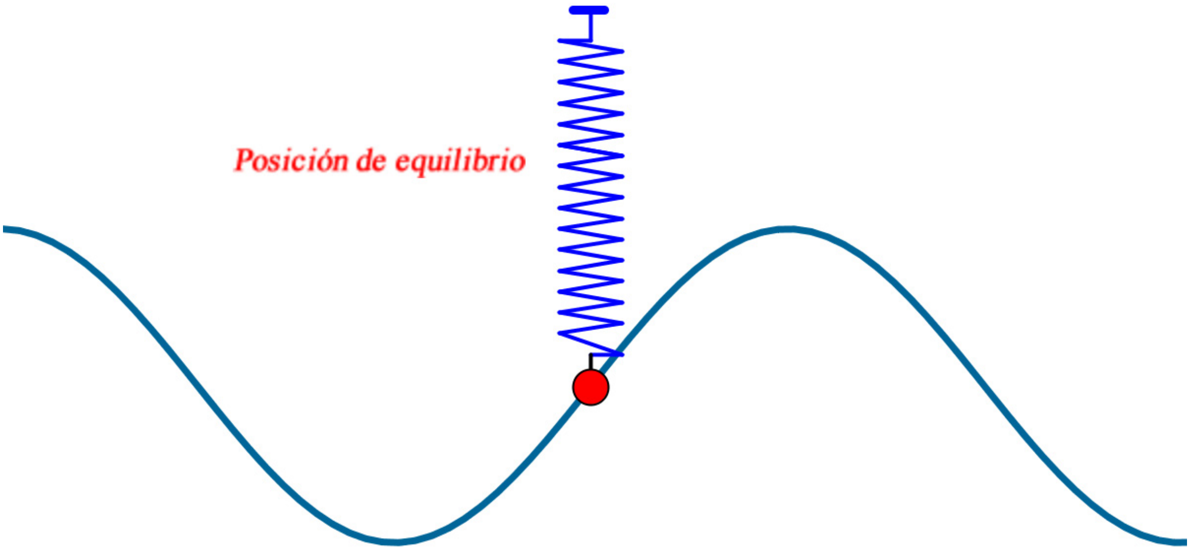
Esta cantidad se denomina ***Frecuencia angular***. Tiene la dimensión del recíproco del tiempo (lo mismo que la velocidad angular) y su unidad es el $\boldsymbol{\frac{radián}{segundo}}$. Más adelante veremos su significado.

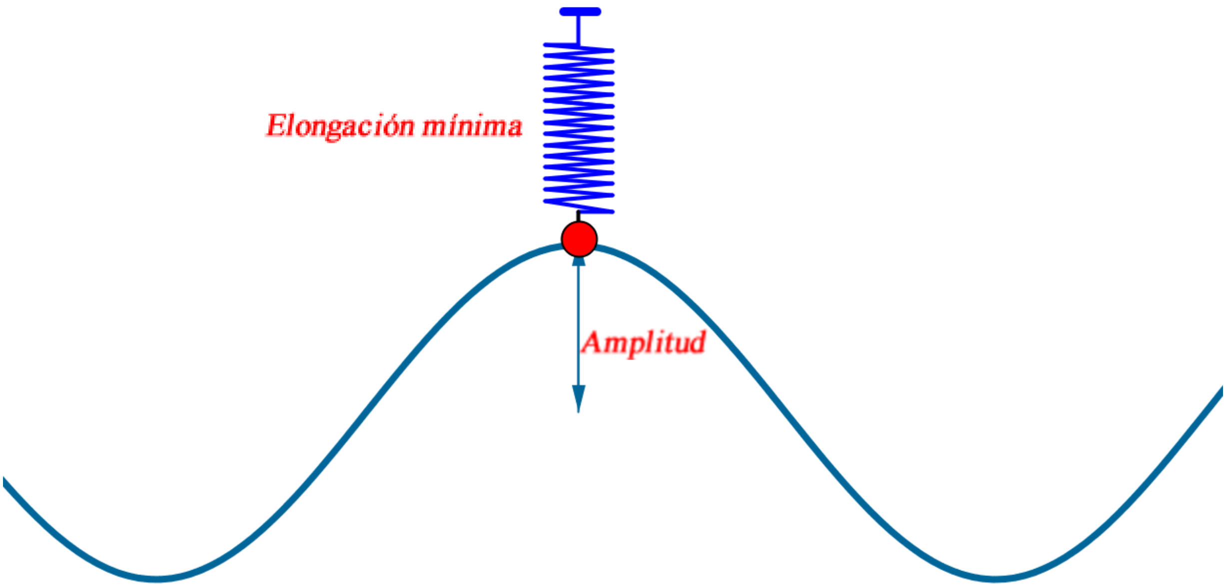
Dado que los valores de la función seno oscilan entre -1 y $+1$, los valores de la elongación *"y"* estarán comprendidos entre $-A$ y $+A$.

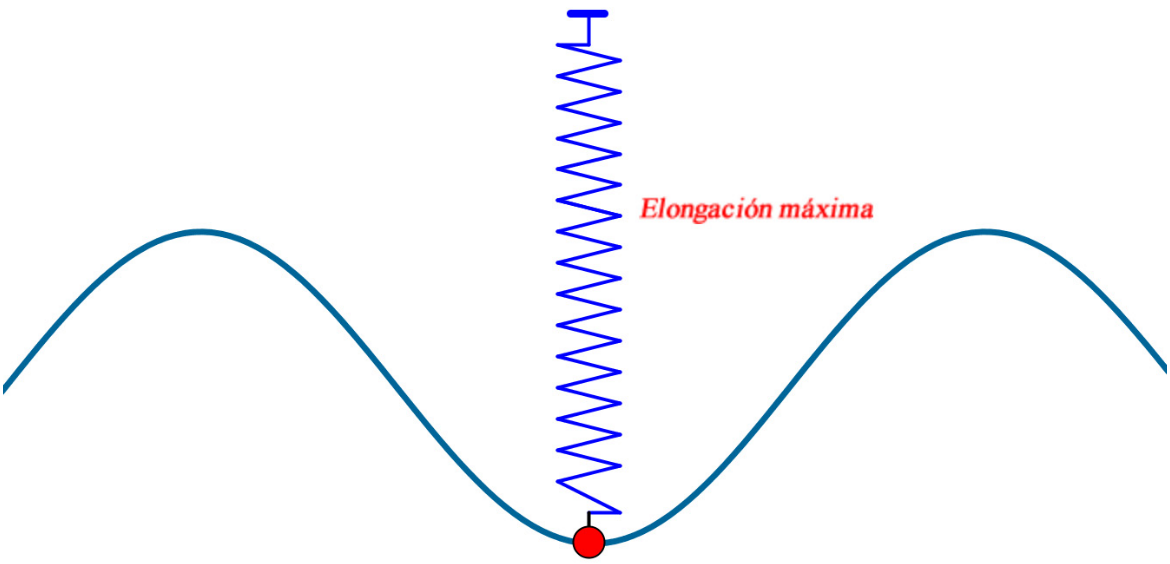
El siguiente dibujo muestra cómo se puede obtener experimentalmente el desplazamiento *"y"* en función del tiempo *"t"* para una masa colgada de un muelle. Para comprobar este experimento enganchamos a la masa colgada del muelle un rotulador cuya posición, siempre la misma, sea perpendicular a un rollo de papel que se mueve perpendicularmente al rotulador hacia la izquierda y con velocidad constante. El rotulador va dibujando el desplazamiento vertical *"y"* en función del tiempo *"t"* (en este caso se considera el desplazamiento positivo cuando el muelle se comprime). Debido al movimiento del muelle, *el rotulador solamente se mueve verticalmente*. El hecho de que el papel sobre el que se dibuja la gráfica se mueva *con velocidad constante* hacia la izquierda hace que *dicha gráfica coincida con una sinusoide.*



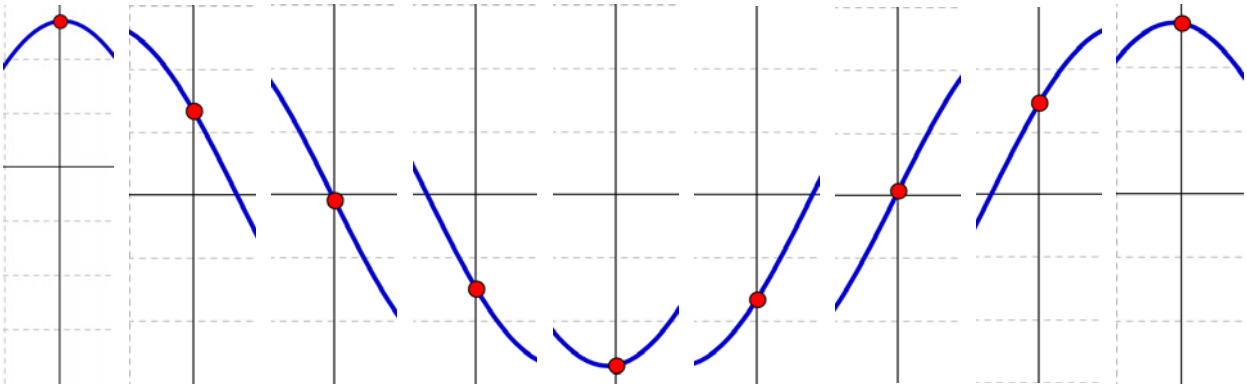
En un muelle, de cuyo extremo cuelga una masa, vemos que en la posición de equilibrio, la velocidad es máxima y la aceleración nula, mientras que en los extremos la aceleración es máxima y la velocidad nula.







Si en la vertical del muelle con el rotulador tomamos sucesivamente varias fotografías obtenemos la siguiente secuencia de fotogramas:

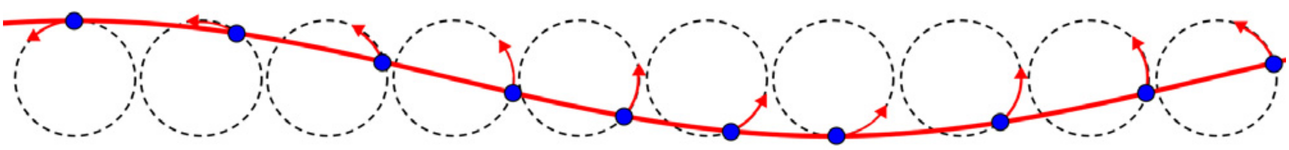


Decimos que un medio está perturbado o que está oscilando, cuando una propiedad física de él (la presión, la densidad, la temperatura, su geometría, etc.) varía con el tiempo. El movimiento ondulatorio estudia la propagación de una perturbación a través del espacio.

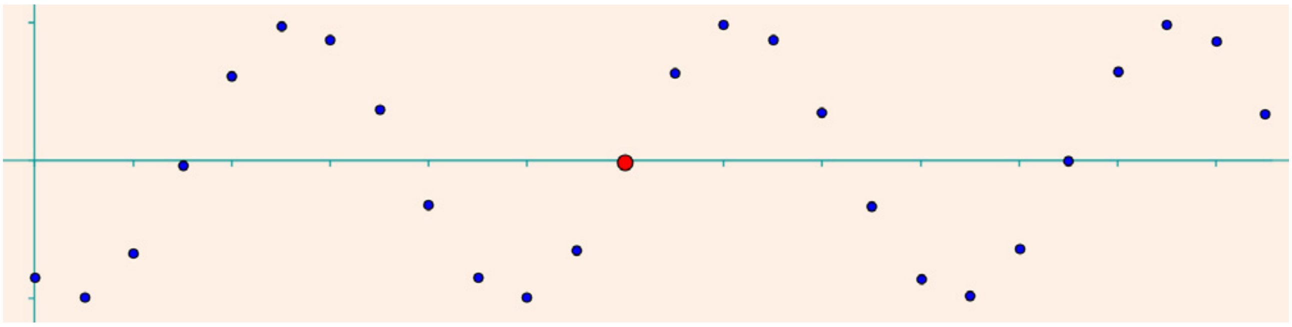
Quizás el más intuitivo se observa cuando lanzamos una piedra a un estanque: la perturbación producida en el lugar donde impacta contra el agua se transmite a las partículas de agua circundantes formándose unas ondas concéntricas que avanzan por la superficie. Si colocásemos un corcho flotando veríamos que, en cuanto sea alcanzado por la onda, se pone a vibrar en su plano vertical sin desplazarse lateralmente. El corcho oscila arriba y abajo pero no se desplaza en la dirección de avance de la onda.

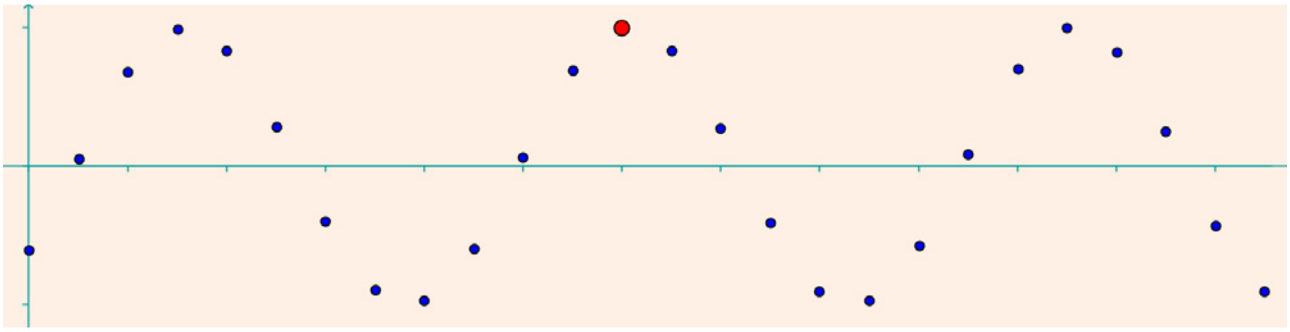
El movimiento de las partículas del agua en la superficie, en la que se está propagando una onda, es una combinación de desplazamientos transversales y longitudinales y da como resultado que las partículas en la superficie se muevan en trayectorias casi circulares. Cada partícula se desplaza horizontal y verticalmente desde su posición de equilibrio.

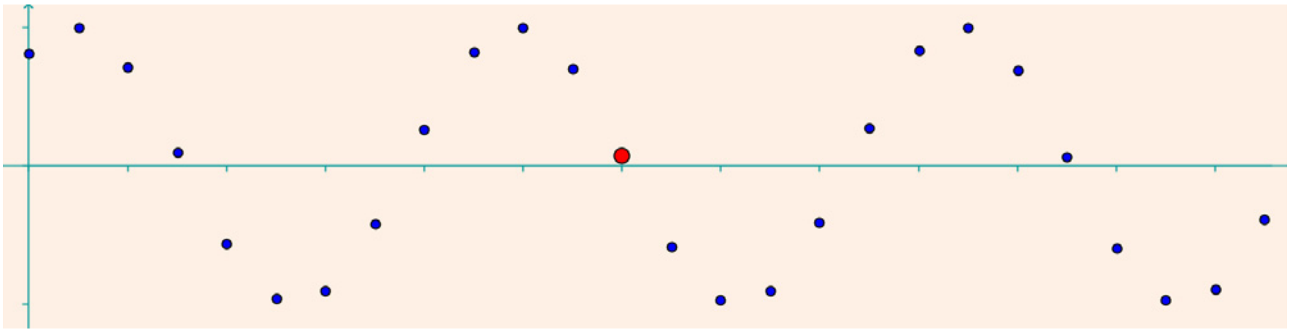
Pero las olas no son ondas longitudinales ni transversales. En vez de ello cada partícula del agua de la superficie da vueltas alrededor de un pequeño círculo, cada uno de ellos levemente desplazado del siguiente, dando en conjunto la familiar ondulación de la superficie del agua.

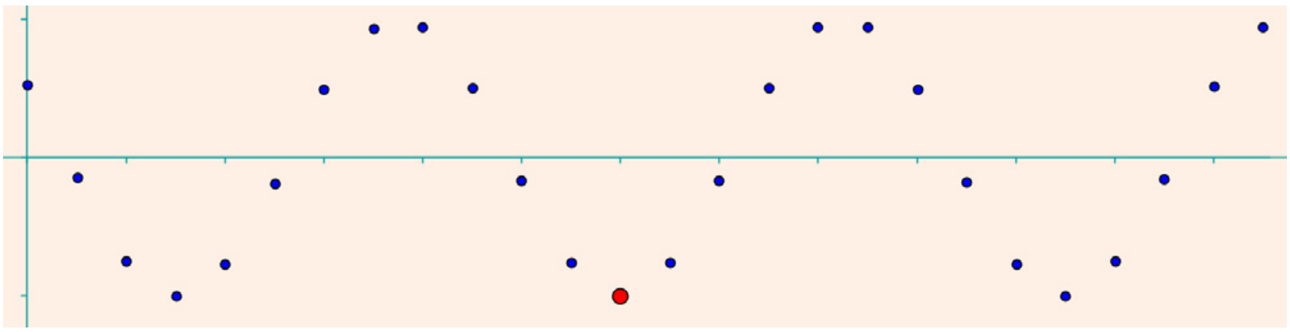


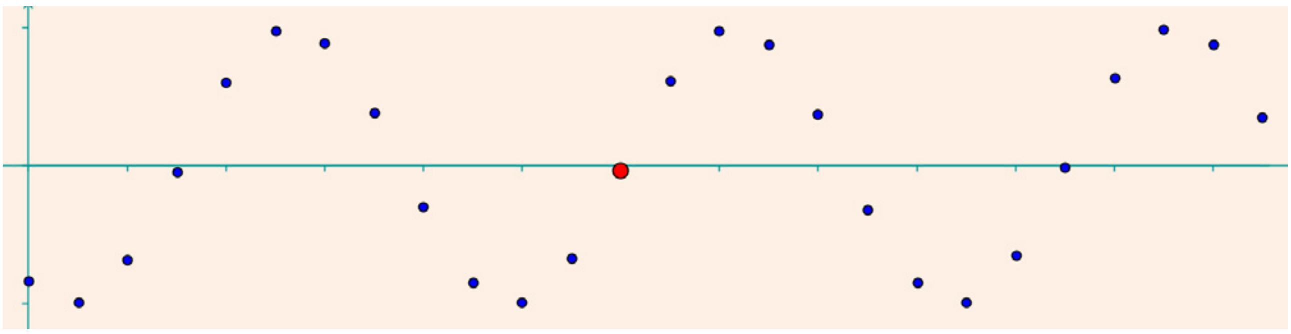
En los fenómenos ondulatorios se transmite la vibración o perturbación y la energía que lleva asociada, pero no hay transporte de materia lo que significa que una onda transporta energía a través del espacio sin que se desplace materia. El hecho de que nos parezca que las partículas se desplazan con la onda es una mera ilusión. A continuación se observan varias fotografías de una onda armónica en distintos instantes. En rojo se representa una de las partículas que vibran y que nos permite identificarla en los diferentes momentos.











Ejemplo: Movimiento de un bote sobre las olas

Un bote se balancea arriba y abajo. El desplazamiento vertical del bote viene dado, por la función

$$y = 1'2\,sen\left(0'5t + \frac{\pi}{6}\right)$$

Si el desplazamiento viene dado en metros y el tiempo en segundos, calcular:

a) La amplitud, frecuencia angular, fase inicial o constante de fase, frecuencia y periodo del movimiento.

b) ¿Dónde se encuentra el bote cuando $t = 1seg$?

c) Determinar la velocidad y la aceleración en cualquier tiempo.

d) Calcular los valores iniciales de la posición, la velocidad y la aceleración del bote.

Solución

a) $A = 1'2m \qquad \omega = 0'5\,\frac{rad}{seg} \qquad \varphi = \frac{\pi}{6}rad \qquad T = \frac{2\pi}{0'5} = 4\pi = 12'6seg \qquad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{4\pi} = 0'0796Hz$

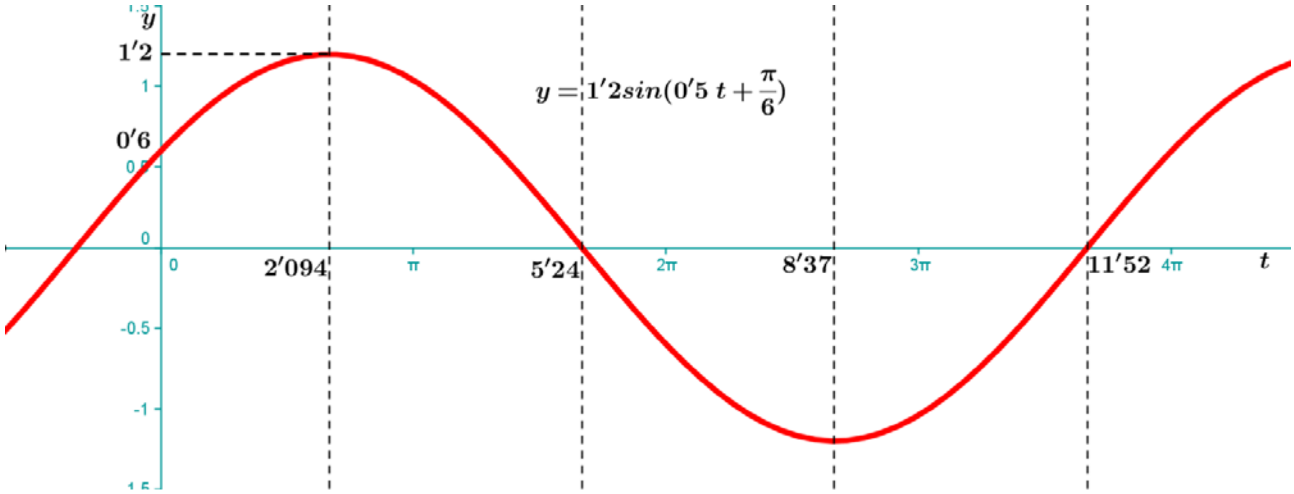
b) $y(1) = 1'2\,sen\left(0'5\cdot 1 + \frac{\pi}{6}\right) = 1'024m$

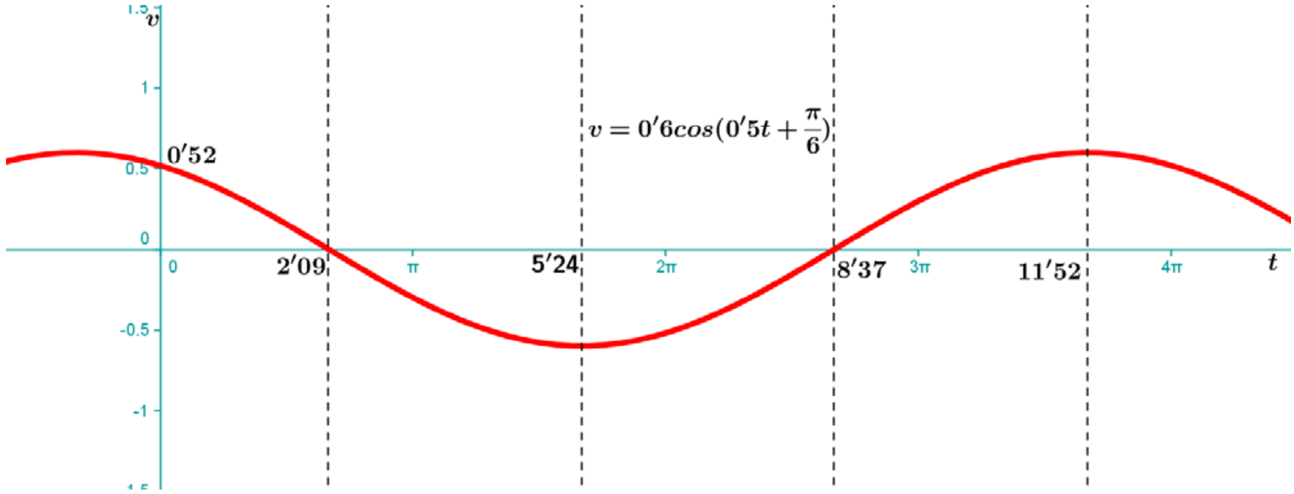
c) $v = \frac{dy}{dt} = 1'2\cdot 0'5\cos\left(0'5t + \frac{\pi}{6}\right) = 0'6\cos\left(0'5t + \frac{\pi}{6}\right) \qquad a = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -0'3sen\left(0'5t + \frac{\pi}{6}\right)$

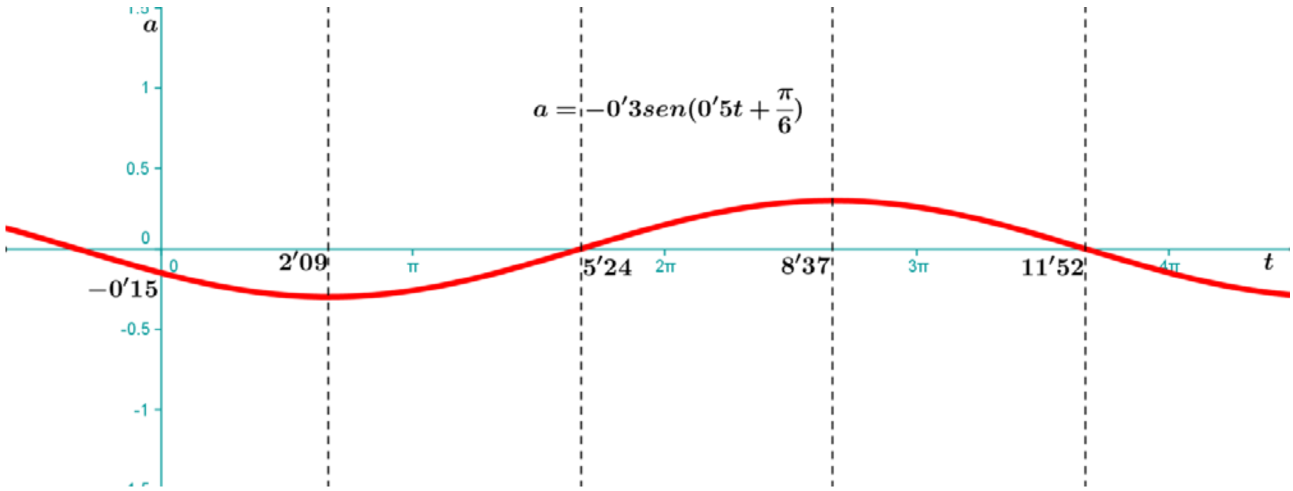
d) Haciendo $t = 0$

$$y(0) = 1'2\,sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0'6m \qquad v(0) = 0'6\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0'52\frac{m}{seg} \qquad a(0) = -0'3sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = -0'15\frac{m}{seg^2}$$

Cuando comenzamos a contar el tiempo ($t = 0seg$) el bote se encuentra a $0'6m$ de altura respecto de la posición de equilibrio (mar en calma), la velocidad es de $0'52\,\frac{m}{seg}$ y la aceleración es de $-0'15\,\frac{m}{seg^2}$. Cuando $t = 2'09seg$ el bote se encuentra a la máxima altura y por tanto la elongación es máxima. Esta máxima altura se llama Amplitud y es de $A = 1'2m$, la velocidad se anula y la aceleración es máxima y negativa. Para $t = 5'24seg$ el bote se encuentra en la posición de equilibrio ($y = 0$), la velocidad es máxima pero negativa y la aceleración nula. Para $t = 8'37seg$ el bote se encuentra en la posición más baja, la velocidad es nula y la aceleración es máxima y positiva, etc. Todo lo anterior queda reflejado en las siguientes gráficas:


y
1'2
0'6
2'094
5'24
8'37
11'52
t
$y = 1'2sin(0'5\ t + \frac{\pi}{6})$


v
0'52
2'09
5'24
8'37
11'52
t
$v = 0'6cos(0'5t + \frac{\pi}{6})$


a
−0'15
2'09
5'24
8'37
11'52
t
$a = -0'3sen(0'5t + \frac{\pi}{6})$

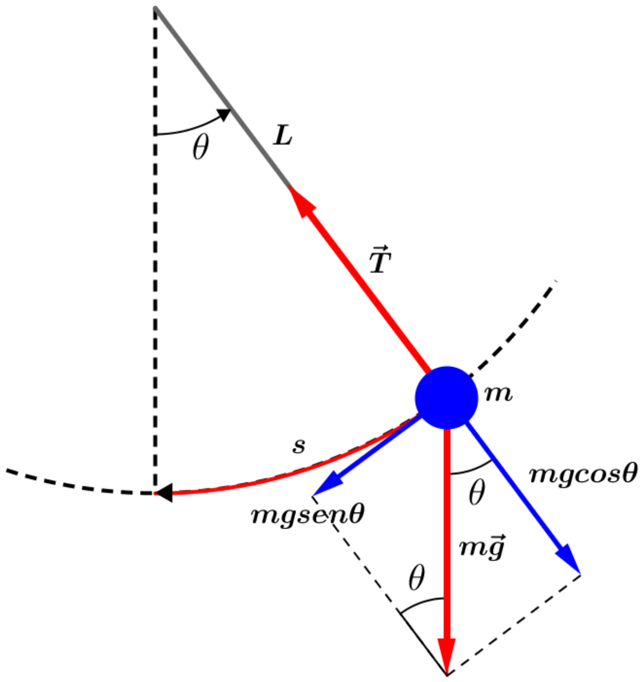
Péndulo Simple

Hay sistemas que no están sometidos estrictamente a una fuerza del tipo de la ley de Hooke $F = -kx$, pero que pueden considerarse como si estuvieran sometidos a una fuerza de ese tipo, como por ejemplo el *Péndulo Simple*. *El péndulo es un ejemplo sencillo de M.A.S.*

El péndulo simple se llama así porque consta de un cuerpo de masa m suspendido de un punto fijo mediante un hilo inextensible de longitud fija L y masa despreciable comparada con la masa del cuerpo. Naturalmente es imposible la realización práctica de un péndulo simple, pero sí es accesible a la teoría.

El sistema que acabamos de describir se llama *péndulo simple o matemático,* en contraposición con los *péndulos reales, únicos que pueden construirse y cuyos movimientos podemos observar.*

El péndulo realiza un M.A.S. cuando se desplaza ligeramente de su posición de equilibrio (punto que corresponde con la posición de energía potencial mínima) y se deja evolucionar libremente bajo la acción de la gravedad.



Si la cuerda forma un ángulo θ con la vertical, supondremos que las únicas fuerzas que actúan sobre el cuerpo de masa m son el peso y la tensión en la cuerda, es decir, ignoraremos el rozamiento con el aire y la reacción de posibles ondas de presión emitidas al aire circundante.

Las componentes del peso son dos: una de valor $mg\cos\theta$ a lo largo de la cuerda y otra de valor $mg\,sen\theta$ tangencial al arco circular en el sentido de θ decreciente. La fuerza tangencial del peso es una fuerza recuperadora dirigida en dirección opuesta al desplazamiento. Si "s" es la longitud del arco medido desde la parte inferior de la circunferencia hasta la masa, se verifica que el arco s es igual producto del ángulo θ por el radio L, es decir: $s = \theta L$.

La fuerza correspondiente a la componente del peso que se encuentra a lo largo de la cuerda se anula con la tensión de la cuerda, por lo que si se considera únicamente la fuerza correspondiente al desplazamiento tangencial a la trayectoria y aplicando la 2ª ley de Newton se obtiene:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mgsen\theta \qquad mL\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgsen\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}sen\theta$$

En la ecuación diferencial se observa que la masa no aparece, lo que significa que *el movimiento de un péndulo no depende de su masa*.

Vamos a suponer que la longitud del péndulo L es mucho mayor que el arco s y que el desplazamiento angular θ es suficientemente pequeño, con lo que se puede hacer la aproximación $sen\theta \cong \theta$. Esta aproximación se puede hacer porque, haciendo un desarrollo en serie de la función $sen\,x$ y cortando este desarrollo en el primer término, la diferencia entre x y $sen\,x$ es sólo de un 1% cuando $\theta \approx 15^{\circ}$.

Por tanto, si el péndulo no oscila con demasiada amplitud, su ecuación de movimiento angular es la de un M.A.S. ya que

$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$ tiene la misma forma que la ecuación diferencial de un M.A.S. $\frac{d^2y}{dt^2} = -ky$.

Si la solución de la ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dt^2} = -ky$ es $y = A\,sen(\omega t + \varphi)$ la solución para la ecuación diferencial del péndulo $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$ será:

$$\boldsymbol{\theta = \theta_0 sen(\omega t + \varphi)}$$

Para determinar la frecuencia angular ω y el periodo T del péndulo derivamos dos veces la ecuación diferencial.

$\frac{d\theta}{dt} = \theta_0 \omega\, cos(\omega t + \varphi)$ y $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta_0 sen(\omega t + \varphi)$. Sustituyendo en $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$ obtenemos:

$$-\omega^2\theta_0 sen(\omega t + \varphi) = -\frac{g}{L}\theta \qquad -\omega^2\theta_0 sen(\omega t + \varphi) = -\frac{g}{L}\theta_0 sen(\omega t + \varphi) \qquad \omega^2 = \frac{g}{L} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}}$$

Como $\boldsymbol{T} = \frac{2\pi}{\omega} = \boldsymbol{2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$ *significa que la frecuencia y el periodo de un péndulo dependen de su longitud y de g, pero no de la masa y son independientes de la amplitud de la oscilación, para* θ *pequeños*. Esto es importante, porque significa que *todos los péndulos de igual longitud oscilarán del mismo modo*.

El péndulo simple suele utilizarse en la práctica para gran cantidad de aplicaciones que se podrían dividir en dos bloques:

- ***Medir tiempos***. Su periodo es constante (salvo rozamientos y variaciones de L por las condiciones termodinámicas o de g por la latitud o altitud) y es fácil visualizar el número de oscilaciones.
- ***Medir g***. Las medidas de g con este método son bastante precisas, lo que es importante porque cambios locales de g pueden dar información valiosa sobra la localización de recursos minerales o energéticos.

El Péndulo Cicloidal. Péndulo Isócrono

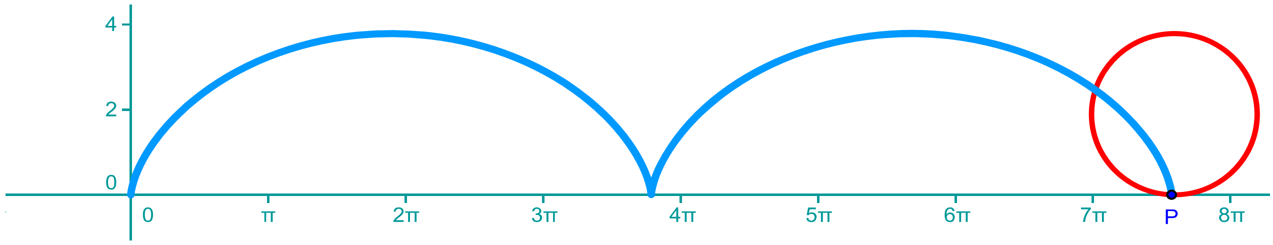
El periodo de las oscilaciones del péndulo simple es el mismo sólo para pequeñas amplitudes, sin embargo existe un péndulo especial en el que el periodo es independiente de la amplitud. Este péndulo se llama *Péndulo Cicloidal*, porque como explica *Huygens* en su libro *"Horologium oscillatorium",* que fue el autor de este descubrimiento, dicho péndulo está basado en una propiedad de la curva geométrica llamada *Cicloide*. En el libro Huygens escribe:

> *«El péndulo simple no puede ser considerado como una medida del tiempo segura y uniforme, porque las oscilaciones amplias tardan más tiempo que las de menor amplitud; con ayuda de la geometría he encontrado un método, hasta ahora desconocido, de suspender el péndulo, pues he investigado la curvatura de una determinada curva que se presta admirablemente para lograr la deseada uniformidad. Una vez que hube aplicado esta forma de suspensión a los relojes, su marcha se hizo tan pareja y segura, que después de numerosas experiencias sobre la tierra y sobre el agua, es indudable que estos relojes ofrecen la mayor seguridad a la astronomía y a la navegación. La línea mencionada es la misma que describe en el aire un clavo sujeto a una*

rueda cuando ésta avanza girando; los matemáticos la denominan <u>cicloide</u>, y ha sido cuidadosamente estudiada porque posee muchas otras propiedades; pero yo la he estudiado por su aplicación a la medida del tiempo ya mencionada, que descubrí mientras la estudiaba con interés puramente científico, sin sospechar el resultado.»

Christian HUYGENS: *Horologium oscillatorium* (1673)

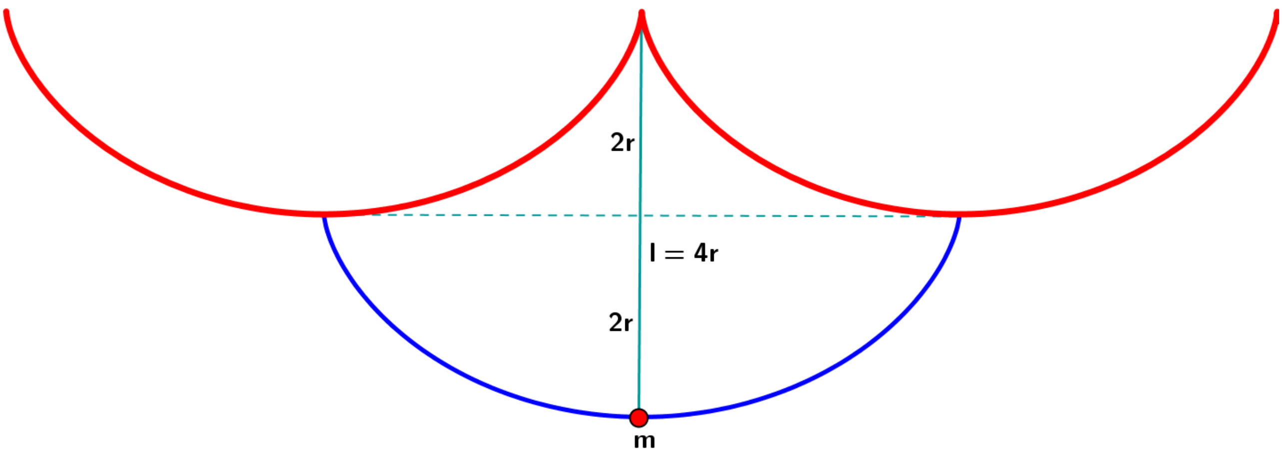
*La **Cicloide** es la curva trazada por un punto de una circunferencia cuando ésta gira sobre una línea sin deslizarse por ella.*



Si invertimos esta curva obtenemos la Cicloide invertida en la que las oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio son rigurosamente isócronas en una trayectoria cicloidal como la anteriormente descrita.

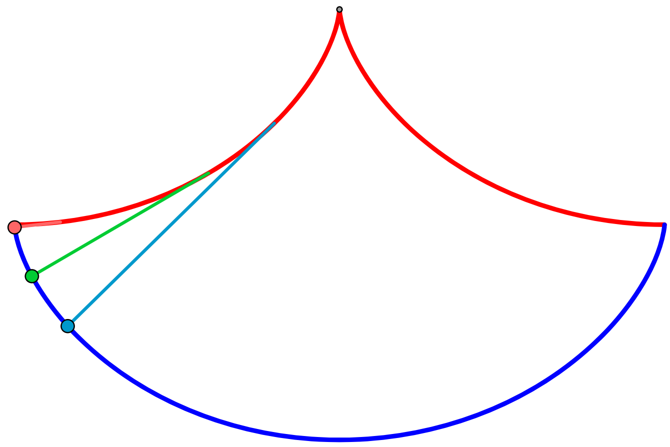
El periodo de las oscilaciones, que es independiente de la amplitud de las mismas, viene dado por la expresión $T = 2\pi\sqrt{\frac{4r}{g}}$, donde r es el radio de la circunferencia que genera la cicloide. Por consiguiente, *el péndulo rigurosamente isócrono deberá ser tal que la masa pendular describa una trayectoria cicloidal*.

El péndulo cicloidal puede construirse (a la manera de Huygens) suspendiendo el hilo entre dos contornos sólidos que tienen la forma de arcos de cicloide tangentes en su punto de unión. Al oscilar el péndulo, el hilo se ciñe a uno u otro de esos dos contornos cicloidales, y la longitud efectiva del péndulo queda así disminuida en una proporción que depende de la amplitud de las oscilaciones. Huygens demostró que si la circunferencia que genera los dos contornos cicloidales tiene precisamente un radio que es la cuarta parte de la longitud del hilo de suspensión del péndulo ($l = 4r$) entonces la masa del péndulo describe un arco de cicloide cuya circunferencia generatriz tiene el mismo radio r.

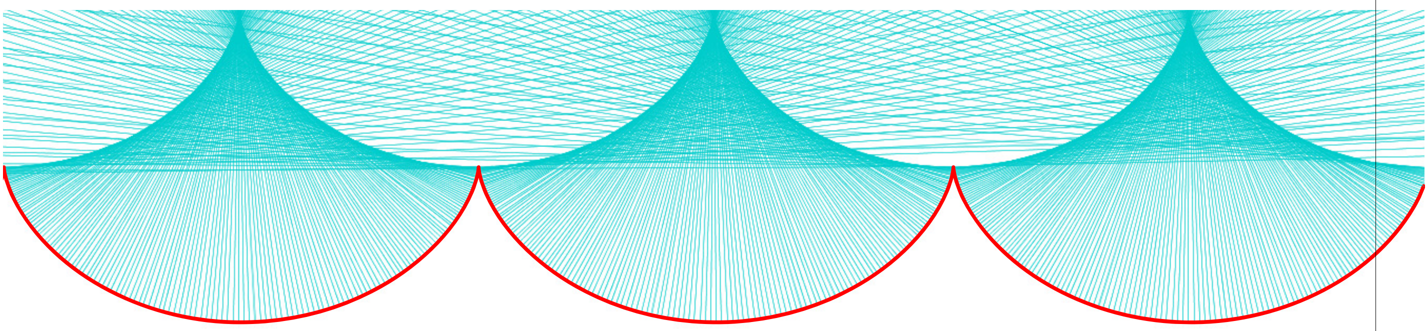


Un péndulo construido de acuerdo con estos principios es rigurosamente isócrono, y el periodo de sus oscilaciones es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{4r}{g}}$$



La envolvente del haz de rectas normales a una curva (rectas perpendiculares a la curva en cada uno de sus puntos) se llama Evoluta de una curva y corresponde al lugar geométrico de sus centros de curvatura. La Evoluta de una Cicloide es otra Cicloide.



Consideraciones generales de los osciladores armónicos

Cuando un oscilador armónico es perturbado, la perturbación produce una fuerza que lo empuja de nuevo a la posición inicial donde la fuerza es cero, pero la inercia lo mantiene en movimiento hasta que la fuerza de recuperación lo detiene y lo hace retornar nuevamente. Esta es la esencia del oscilador armónico simple. Si fuera realmente simple continuaría el movimiento para siempre, como una máquina de movimiento continuo, pero los osciladores reales no son simples ya que siempre actúan otras fuerzas (rozamiento, resistencia del aire, etc.) que tienden a ralentizar sus movimientos. Este es el motivo por el cual de vez en cuando se debe dar cuerda a los relojes o cambiar sus pilas. El rozamiento convierte la energía en calor y esa energía debe ser reemplazada para mantener el reloj en funcionamiento, pero incluso cuando la cuerda del reloj se va acabando el periodo de tiempo para cada uno de sus ciclos permanece constante. Este hecho en concreto fue descubierto por Galileo Galilei quien observó que *un péndulo tarda el mismo tiempo en completar cada oscilación aunque su movimiento esté extinguiéndose*.

Galileo también observó que todos los péndulos de la misma longitud oscilan con la misma frecuencia independientemente de sus masas. Galileo, que descubrió la ley de caída de los cuerpos se dio cuenta de que un péndulo es igual que un cuerpo que cae. Si todos los cuerpos caen con el mismo ritmo, independientemente de sus masas, entonces todos los péndulos de la misma longitud deberían oscilar con el mismo ritmo independientemente de sus masas. ¿Por qué el periodo de un péndulo no depende de su masa? La pregunta la contestó Isaac Newton. Gracias a la ley de caída de los cuerpos de Galileo, Newton se dio cuenta de que todos los objetos caen a la superficie de la Tierra con la misma aceleración constante. Entonces, desde un punto de vista conceptual, vio la conexión entre péndulos de masas diferentes y cuerpos cayendo libremente. En cierto sentido, utilizando péndulos de diferentes masas, Newton puso a prueba la ley de caída de los cuerpos sin la ventaja del vacío.

Con los osciladores armónicos, los relojeros fueron capaces de aportar precisión y uniformidad con la medición del tiempo. Una hora en Cambridge llegó a durar exactamente lo mismo que en Venecia. El movimiento armónico que regula la precisión de un reloj del abuelo es el principio que sustenta la precisión de los modernos relojes de cuarzo en los que millones de oscilaciones por segundo marcan la hora con increíble precisión.

El M.A.S. se puede encontrar en una enorme variedad de fenómenos físicos: muelles con masa, péndulos, tubos de órganos, circuitos eléctricos, átomos en un retículo cristalino, etc. ***El M.A.S. es la respuesta de la naturaleza al estímulo sobre cualquier sistema en equilibrio estable, por eso es tan importante.***

En el M.A.S. la frecuencia y el periodo son independientes de la amplitud. El hecho de que la frecuencia del M.A.S. sea independiente de la amplitud tiene importantes consecuencias en muchos campos. En el campo de la música, por ejemplo, significa que el tono de una nota que se toca en un piano, que corresponde a la frecuencia, no depende de la fuerza con la que se toca la nota, es decir, de la intensidad de la misma, que corresponde a la amplitud. Si las variaciones de amplitud tuviesen un gran efecto sobre la frecuencia, los instrumentos musicales no serían armoniosos. Una vez que se ha dado una nota, el tono del sonido permanece igual aunque disminuyan las vibraciones.

Los movimientos periódicos quedan descritos en función del tiempo por una función armónica, seno o coseno. Si la descripción de un movimiento requiriese más de una función armónica, en general sería un movimiento armónico, pero no un M.A.S. ***Es muy importante conocer el Movimiento Armónico Simple, ya que el teorema de Fourier establece que cualquier clase de movimiento periódico puede considerarse como la superposición de movimientos armónicos simples***.

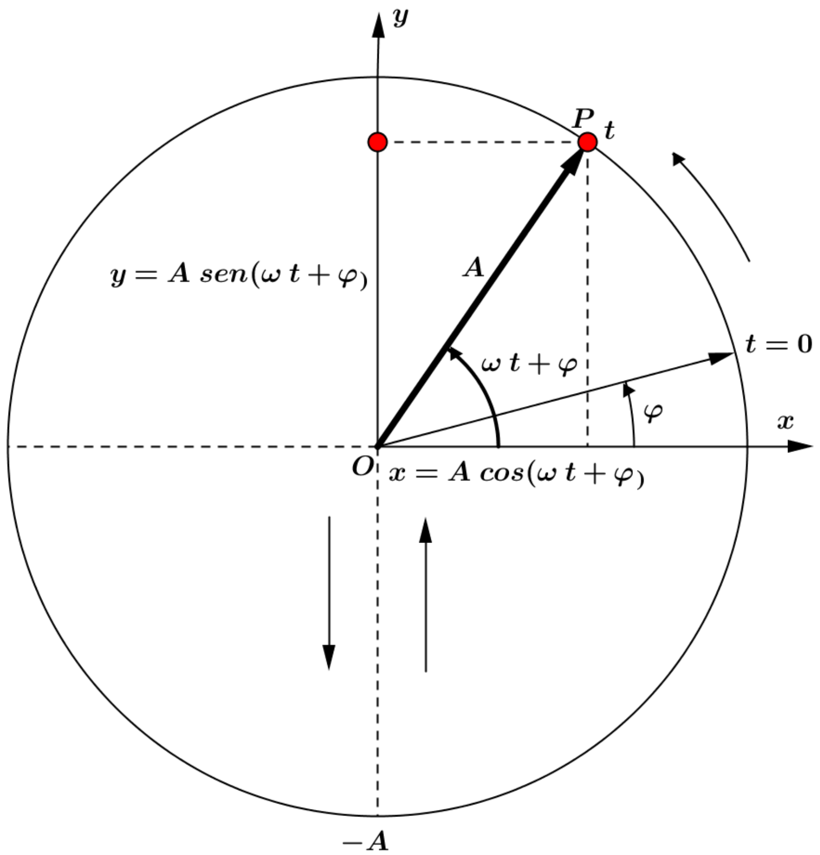
Relación entre el M.A.S. y el Movimiento Circular Uniforme (M.C.U.)

Existe una relación matemática sencilla, pero importante, entre el M.A.S. y el movimiento circular con velocidad constante. Podemos dar una interpretación geométrica sencilla a las ecuaciones que describen un M.A.S. considerándolo como la proyección de un movimiento circular uniforme sobre uno de sus diámetros. Esta representación resulta útil para describir algunas características del M.A.S. y para determinar el resultado de superponer dos M.A.S. En esta representación, llamada de Fresnel, se considera un punto que gira con velocidad angular ω alrededor de una circunferencia de radio A. El vector que va desde el centro de la circunferencia hasta la posición instantánea del punto sobre la circunferencia se denomina *vector rotatorio*. Mientras el vector rotatorio gira con velocidad angular ω, su proyección sobre un diámetro de la circunferencia sigue un M.A.S.

Cuando la partícula ha recorrido un ángulo $\omega t+\varphi$ la proyección sobre el eje de las "y" es:

$$sen(\omega t+\varphi)=\frac{y}{A} \quad \rightarrow \quad y(t)=A\,sen(\,\omega t+\varphi)$$

que coincide con la ecuación del movimiento armónico simple, por tanto, *la proyección sobre una recta de una partícula P que se mueve con movimiento circular uniforme es un M.A.S.*



y es la ***Elongación*** o distancia de la partícula que vibra a la posición de equilibrio en cualquier instante.

A es la ***Amplitud*** o elongación máxima.

$\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular de la partícula.

$\boldsymbol{\varphi}$ es la constante de fase o ***Fase inicial***. Es el ángulo que ha recorrido la partícula en el instante en que comenzamos a contar el tiempo ($t=0$).

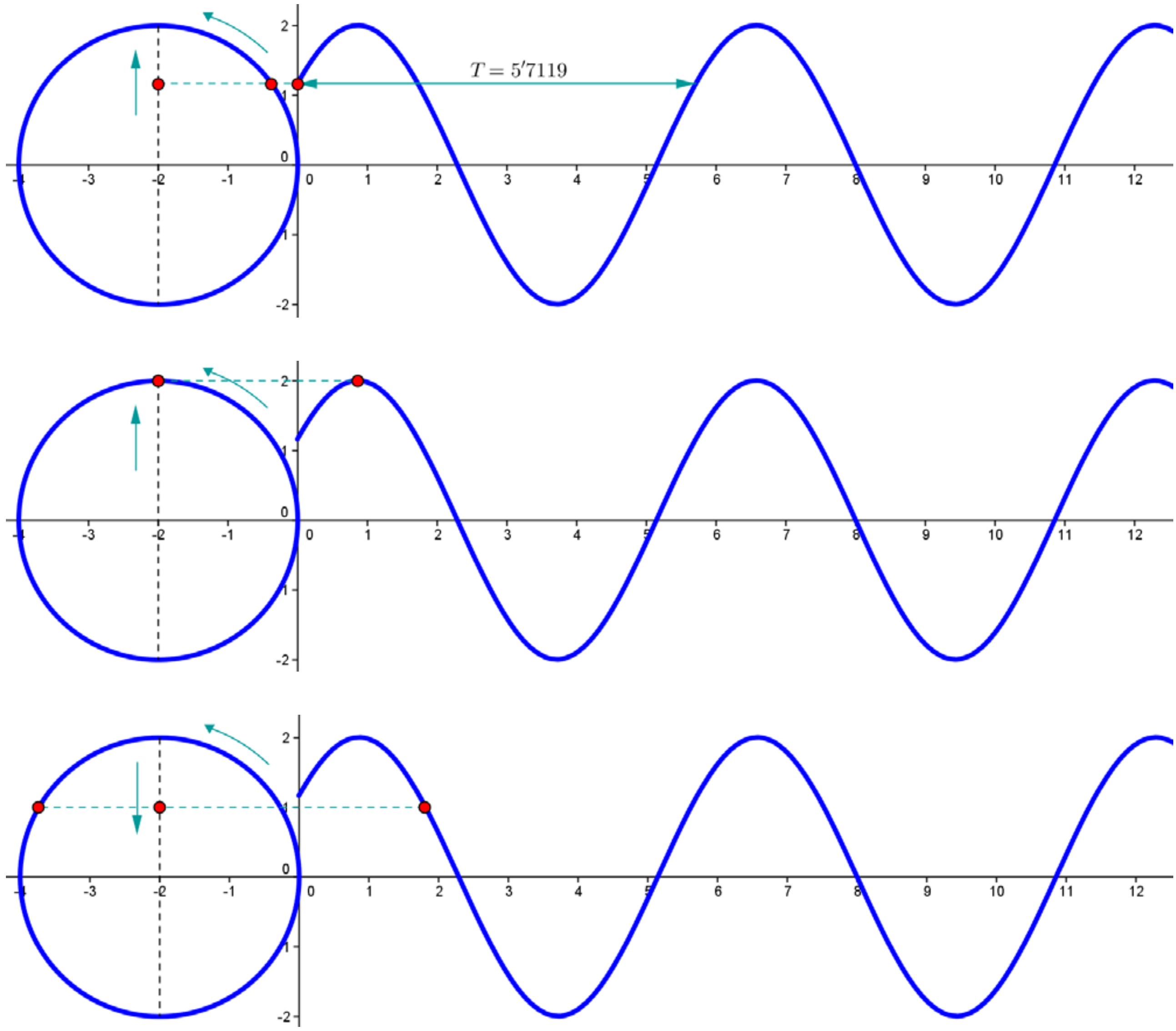
$\boldsymbol{\omega t+\varphi}$ es la ***Fase*** o ángulo recorrido por la partícula en un instante de tiempo t.

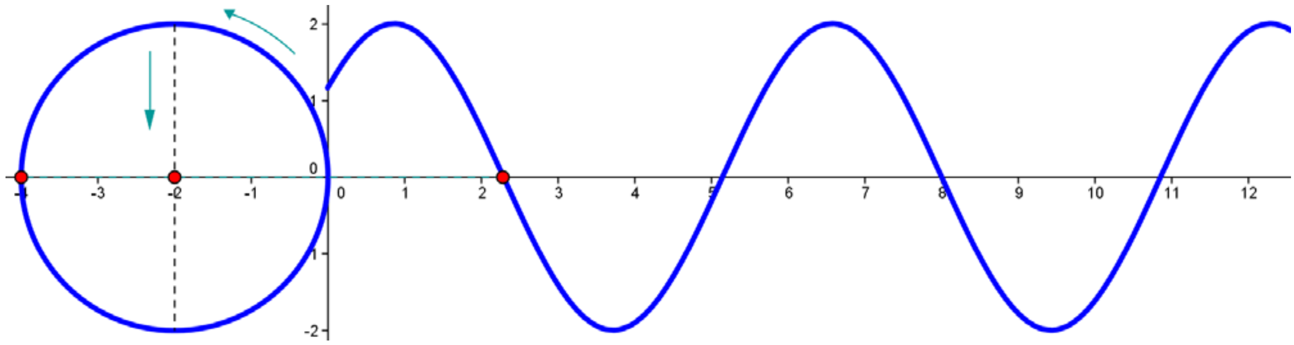
La frecuencia y el período del movimiento circular uniforme son los mismos que la frecuencia y el período correspondientes al M.A.S. De acuerdo con esto, *el M.A.S. es el movimiento que describe sobre uno de los diámetros de la trayectoria circular la proyección de un cuerpo que se mueve con un M.C.U.*

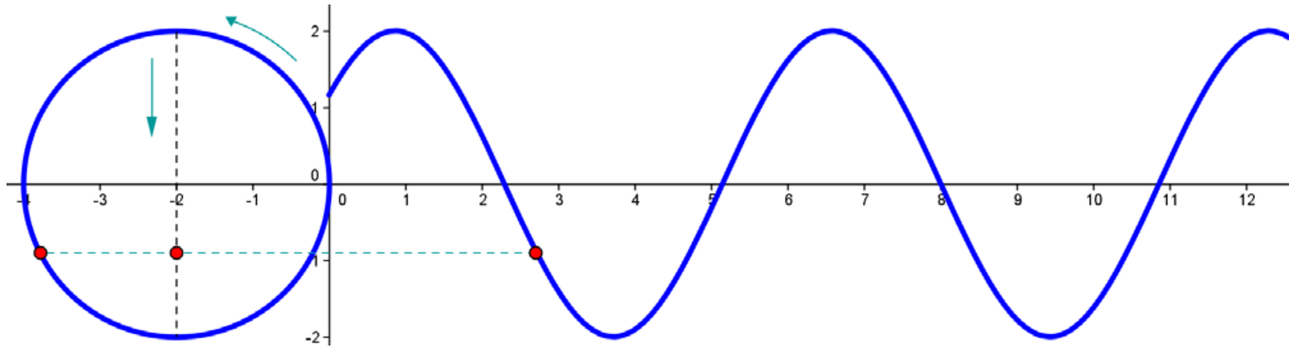
La proyección del movimiento circular sobre el eje y es $y(t) = A\,sen(\,\omega t + \varphi) = A\cos\left(\omega t + \varphi - \dfrac{\pi}{2}\right)$

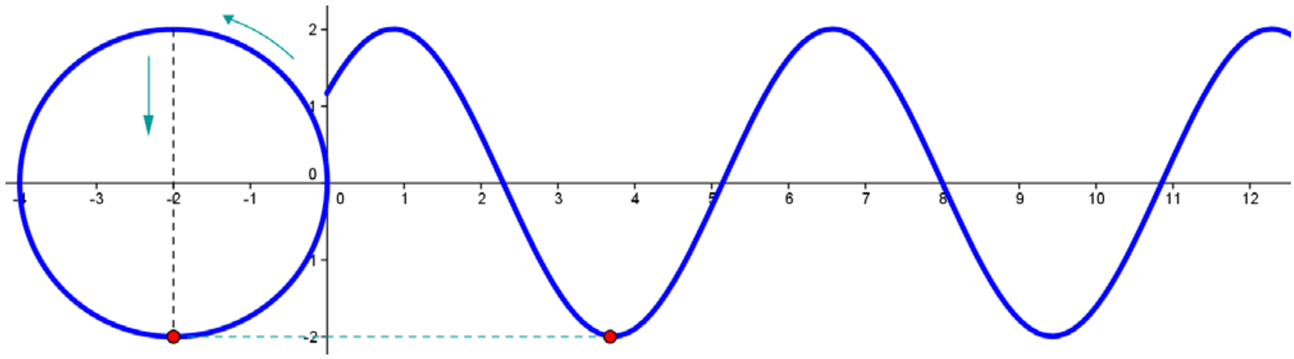
ya que $sen\alpha = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$ por ser ángulos complementarios, por lo tanto podemos considerar el movimiento circular de una partícula como la combinación de dos movimientos armónicos simples perpendiculares que tiene la misma amplitud y frecuencia pero que poseen un diferencia de fase relativa de $\pi/2$.

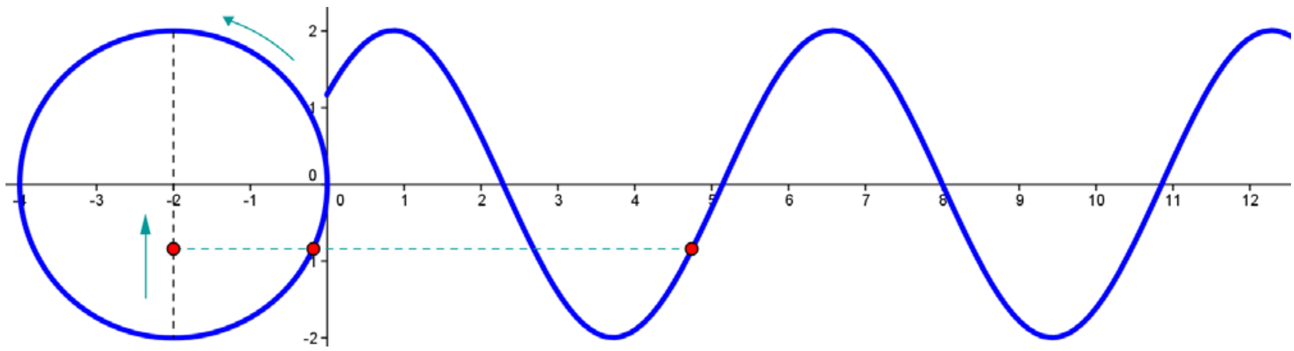
Ejemplo $\boldsymbol{y = 2\,sen\,(1'1\,t + 2'62)}$ $\boldsymbol{A = 2}$ $\boldsymbol{\omega = 1'1}$ $\boldsymbol{\varphi = 2'62}$ $\boldsymbol{T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{1'1} = 5'7119}$

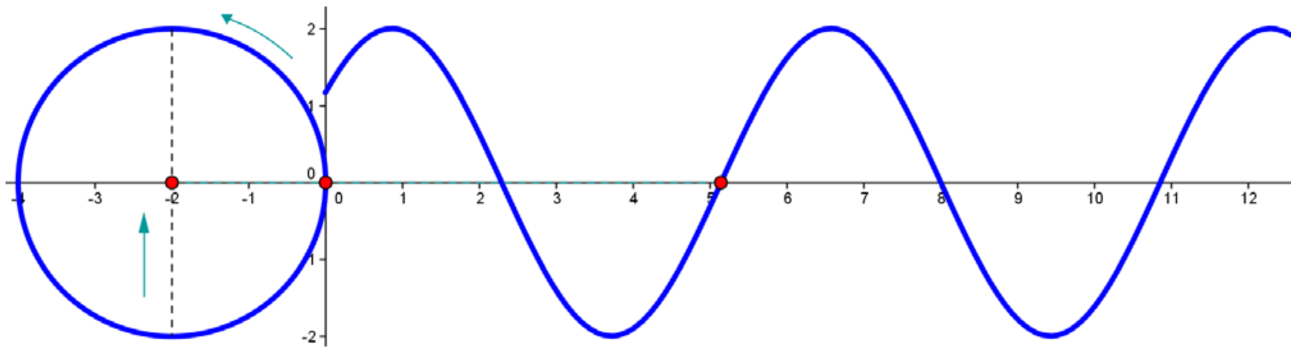












Composición de movimientos armónicos simples. Desfase

Consideremos la superposición o interferencia de dos M.A.S. bajo la hipótesis siguiente: *la resultante de dos o más oscilaciones armónicas es simplemente la suma de las oscilaciones aisladas.*

La palabra ***interferencia*** se emplea para describir el efecto producido al combinar dos ondas que se desplazan simultáneamente a través de un medio. Cuando dos ondas de igual, dirección y frecuencia interfieren forman una onda resultante que es la suma de las dos ondas que interfieren.

El ***Desfase*** *entre dos ondas es la diferencia entre sus fases*. El desfase puede existir entre dos ondas de cualquier tipo, pero en este caso nos referiremos tan solo al existente entre dos ondas sinusoidales de la misma frecuencia. El desfase se puede expresar como:

- *Un ángulo en radianes*. El ángulo de desfase se suele representar mediante el símbolo φ.
- *Un tiempo en segundos*. El tiempo de desfase lo vamos a representar con el símbolo δ.
- *Una distancia en metros*.

Existen dos modos de medir el desfase entre dos ondas que tienen la misma frecuencia angular ω:

Mediante una gráfica $y = f(x)$

El ángulo de desfase δ lo mediremos en radianes mediante la diferencia entre las fases de las dos ondas, es decir, $\delta = \varphi_2 - \varphi_1$.

Mediante una gráfica $y = f(t)$

Hay dos maneras de calcular el tiempo de desfase δ ó t_d:

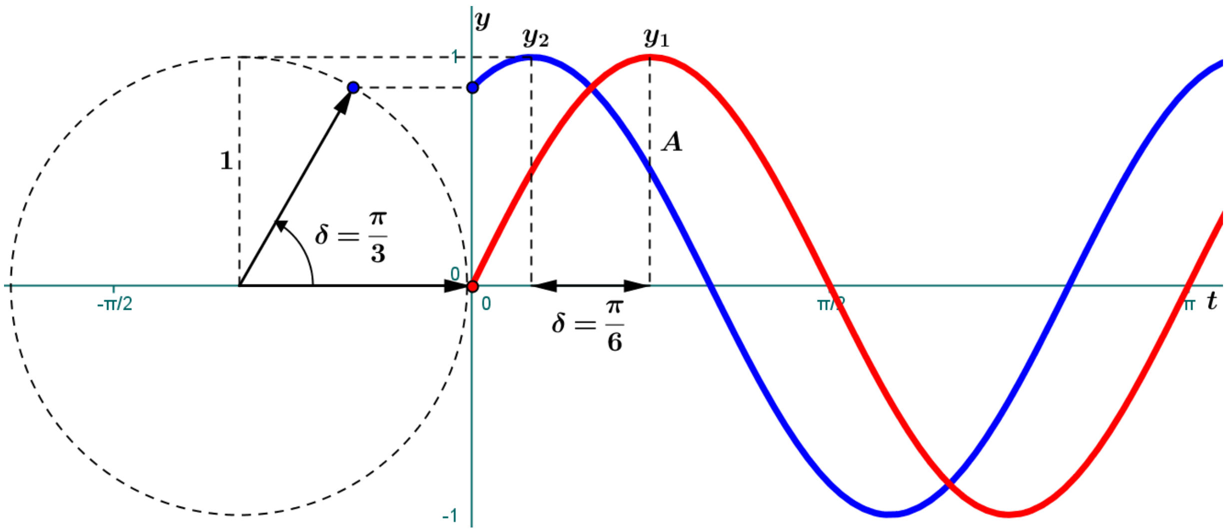
a) *Como la diferencia temporal, en segundos,* existente entre un punto de una de las ondas y el equivalente a la otra onda. Viene dado por la expresión:

$$t_d = \delta = \frac{\varphi\ rad}{\omega\ rad/seg} = \frac{\varphi}{\omega}\ seg$$

b) *Como el ángulo de desfase φ, en radianes*. Para calcular el desfase como un ángulo hay que multiplicar el tiempo de desfase por la frecuencia angular de las ondas. Si las ondas tienen la misma frecuencia el cálculo del desfase se obtiene como la diferencia entre las fases de las dos ondas, $\delta = \varphi_2 - \varphi_1$.

Ejemplo: Sean las funciones $\boldsymbol{y_1(t) = sen\,2t}$ e $\boldsymbol{y_2(t) = sen\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)}$.

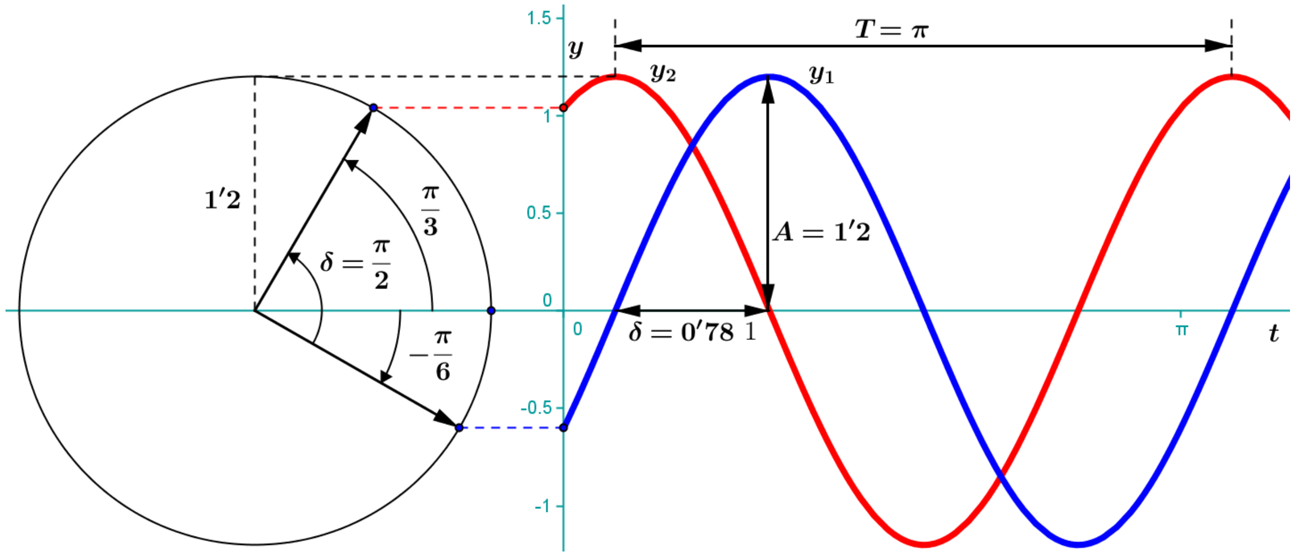
$A = 1$ y $\omega = 2$. El desfase es: $\delta = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\pi}{3} rad$ ó $t_d = \delta = \frac{\pi/3}{2} - \frac{0}{2} = \frac{\pi}{6}$ seg.



Ejemplo: Sean las funciones $y_1 = 1'2\,sen\left(2t - \frac{\pi}{6}\right)$ y $y_2 = 1'2\,sen\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$.

$A = 1'2$, $\omega = 2$, $\varphi_1 = -\frac{\pi}{6}$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$, el periodo es $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi\,seg$, y el desfase entre ellas

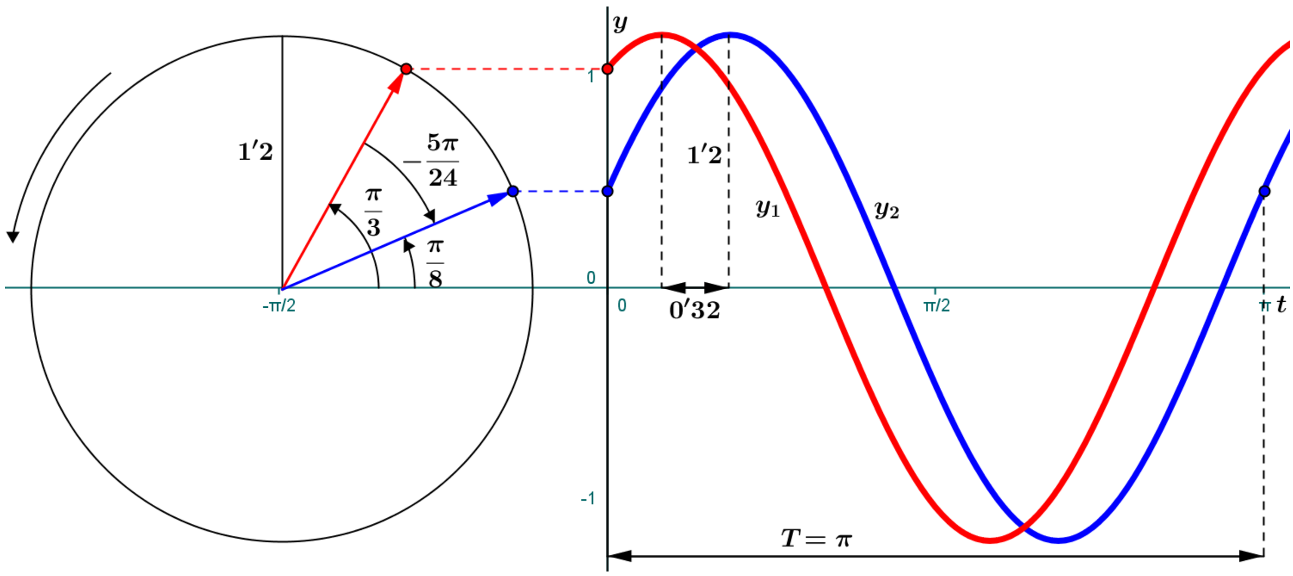
$$\delta = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2} rad \quad \text{ó} \quad t_d = \delta = \frac{\varphi_2}{\omega_2} - \frac{\varphi_1}{\omega_1} = \frac{\frac{\pi}{3}}{2} - \left(\frac{-\frac{\pi}{6}}{2}\right) = 0'7853\,seg.$$



Ejemplo: Sean las funciones $y_1 = 1'2\,sen\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$ y $y_2 = 1'2\,sen\left(2t + \frac{\pi}{8}\right)$.

El desfase en radianes entre las dos funciones es: $\delta = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{3} = \frac{-5\pi}{24}\, rad$

El desfase en segundos entre las dos funciones es: $\delta = \frac{\frac{\pi}{8}}{2} - \frac{\frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{16} - \frac{\pi}{6} = \frac{-5\pi}{48} = 0'32\,seg$



Superposición de dos M.A.S. de la misma dirección y la misma frecuencia

Dos fuerzas proporcionales al desplazamiento pueden actuar simultáneamente sobre un mismo cuerpo y el resultado es la superposición del M.A.S que producen independientemente cada uno.

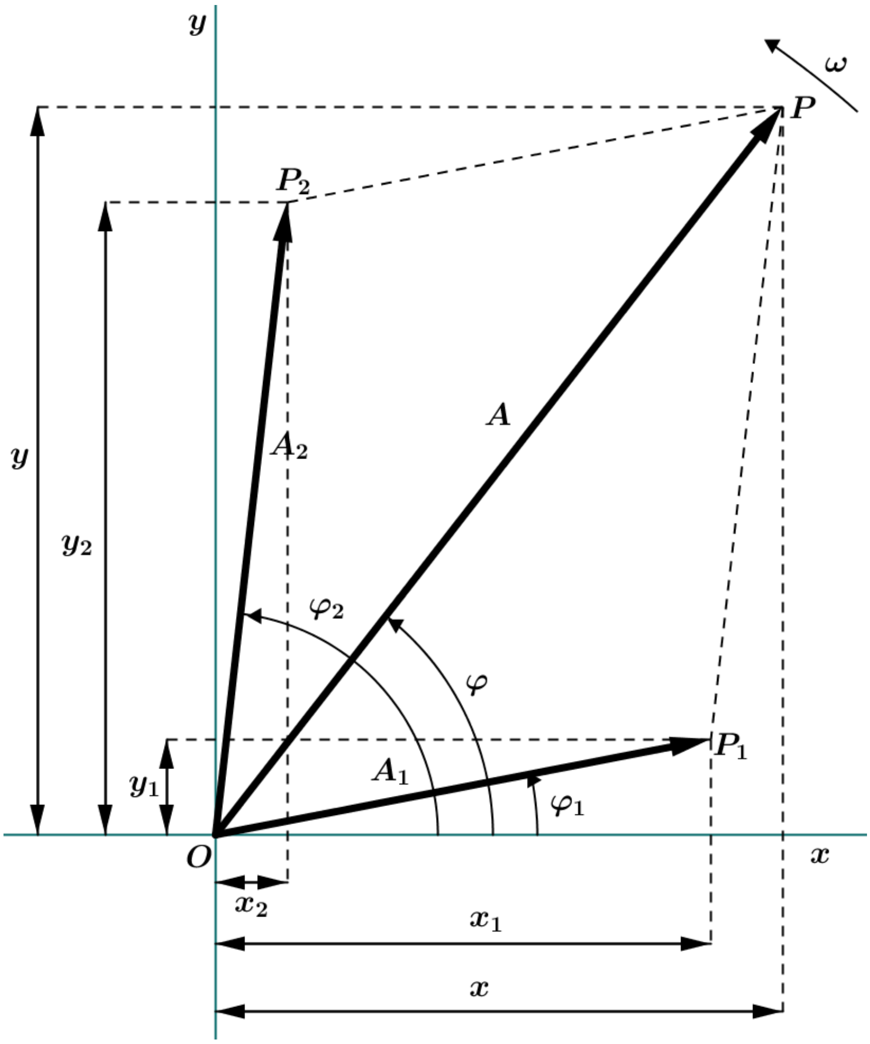
Vamos a estudiar la superposición o interferencia de dos M.A.S. de la misma dirección y frecuencia, el primero con amplitud A_1 *y fase inicial* φ_1 *y el segundo con amplitud* A_2 *y fase inicial* φ_2*, que producen un desplazamiento de una partícula a lo largo de una misma línea.* El desplazamiento de la partícula producido por cada M.A.S. está dado por:

$$y_1 = A_1\, sen(\omega t + \varphi_1) \qquad y_2 = A_2\, sen(\omega t + \varphi_2)$$

La superposición de estos dos M.A.S. da como resultado un M.A.S. en el que el desplazamiento resultante de la partícula está dado por la suma de $y_1 + y_2$.

$$y = y_1 + y_2 = A_1\, sen(\omega t + \varphi_1) + A_2\, sen(\omega t + \varphi_2)$$

Vamos a demostrar que el desplazamiento resultante, ***y****, corresponde a un M.A.S. de ecuación* $\boldsymbol{y = A\, sen(\omega t + \varphi)}$. La amplitud $\boldsymbol{A}$ y la fase $\boldsymbol{\varphi}$ se obtienen a partir de la siguiente figura para el instante inicial de tiempo $t = 0$.

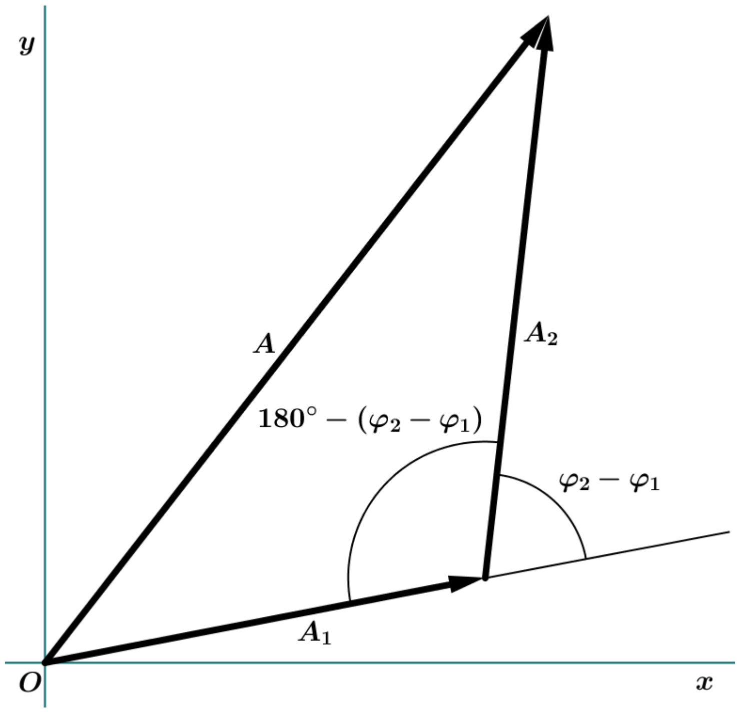


De la figura se deduce, analizando los triángulos, que $y = y_1 + y_2$ y $x = x_1 + x_2$.

La componente "y" del vector suma $\overrightarrow{OP}$ de los vectores rotantes $\overrightarrow{OP_1}$ y $\overrightarrow{OP_2}$ es justamente la suma las componentes "y" de $\overrightarrow{OP_1}$ y $\overrightarrow{OP_2}$. Por otra parte, ya que el ángulo entre los vectores rotantes $\overrightarrow{OP_1}$ y $\overrightarrow{OP_2}$ tiene un valor fijo de $\varphi_2 - \varphi_1$, el vector $\overrightarrow{OP}$ tiene una magnitud constante A, y rota también alrededor de O con una velocidad angular constante ω. Por consiguiente el vector rotante $\overrightarrow{OP}$ genera un movimiento armónico simple de frecuencia angular ω, y podemos escribir

$$\boldsymbol{y = A\,sen(\omega t + \varphi)}$$

Aplicando el Teorema del Coseno al triángulo formado por los vectores $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{P_1P}$ y $\overrightarrow{OP}$ calculamos el valor de la amplitud resultante A.



$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos[180º - (\varphi_2 - \varphi_1)]$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2[-\cos(\varphi_2 - \varphi_1)]} \qquad \boldsymbol{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}}$$

La fase inicial del movimiento resultante φ la obtenemos calculando $tg\varphi$ en la primera figura.

$$tg\,\varphi = \frac{y}{x} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{A_1 sen\,\varphi_1 + A_2\,sen\,\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

por tanto:

$$\boldsymbol{\varphi = arctg\frac{A_1 sen\varphi_1 + A_2 sen\varphi_2}{A_1 cos\varphi_1 + A_2 cos\varphi_2}}$$

Ejemplo

$$y_1 = 0'5sen\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) \quad \rightarrow \quad A_1 = 0'5 \quad \omega_1 = 2 \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{2} = \pi \quad \varphi_1 = -\frac{\pi}{3}$$

$$y_2 = sen\left(2t - \frac{\pi}{6}\right) \quad \rightarrow \quad A_2 = 1 \quad \omega_2 = 2 \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{2} = \pi \quad \varphi_2 = -\frac{\pi}{6}$$

El desfase entre los dos M.A.S. es:

$$\delta = \varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6} rad \quad \text{ó} \quad \delta = \frac{\varphi_2}{\omega_2} - \frac{\varphi_1}{\omega_1} = -\frac{\frac{\pi}{6}}{2} - \frac{-\frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{12} = 0'26seg$$

La amplitud del M.A.S. resultante la calculamos a través de la fórmula:

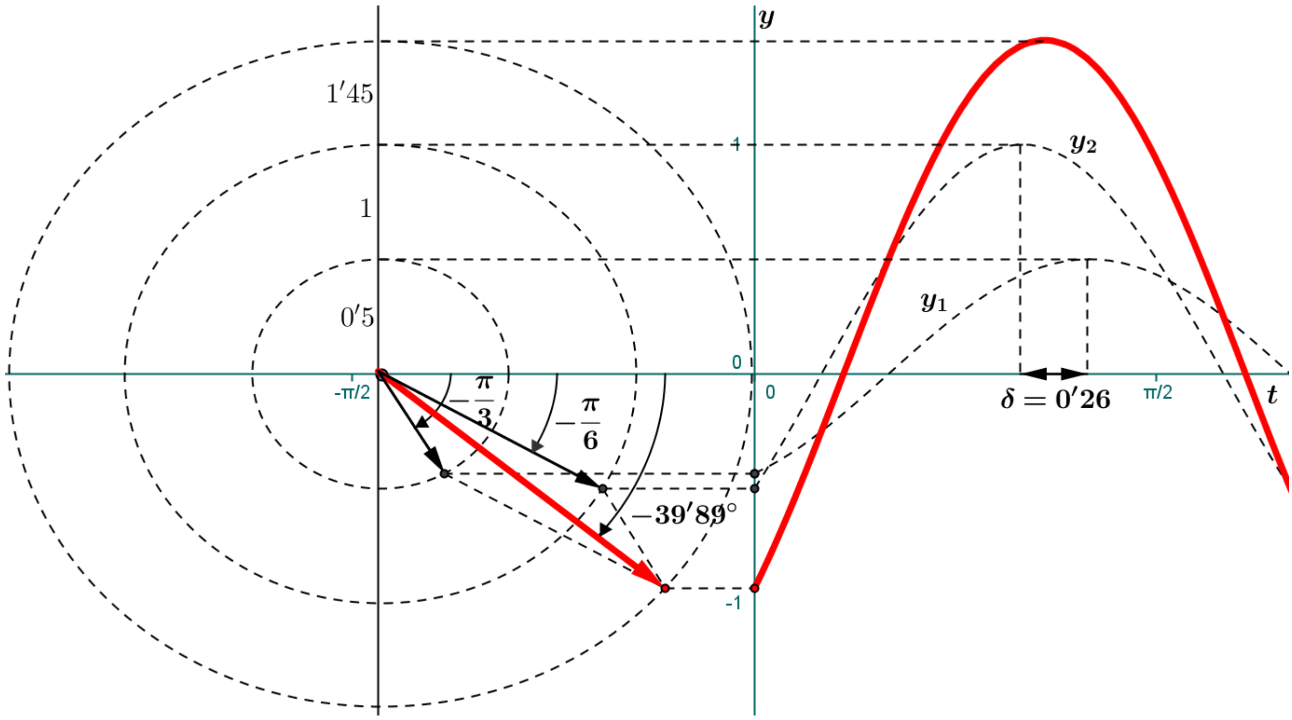
$$\mathrm{A} = \sqrt{0'5^2 + 1^2 + 2 \cdot 0'5 \cdot 1 \cos\left(-\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)} = 1'45$$

La fase del M.A.S. resultante la calculamos a través de la fórmula:

$$\varphi = arctg \frac{0'5sen\left(-\frac{\pi}{3}\right) + sen\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{0'5\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = -0'6963 rad = -39'89^{\circ}$$

El desfase entre los dos M.A.S. es:

$$\delta = \varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6} rad \quad \text{ó} \quad \delta = \frac{\varphi_2}{\omega_2} - \frac{\varphi_1}{\omega_1} = \frac{-\pi/6}{2} - \frac{-\pi/3}{2} = \frac{\pi}{12} seg = 0'26 seg$$



Casos particulares

a) Si $\boldsymbol{\varphi_1 = \varphi_2}$ entonces $\varphi = \varphi_1$ y se dice que los dos movimientos están en fase. ***Dos M.A.S. están en fase si la diferencia de fase es cero ó un múltiplo entero de 2π radianes***, es decir, $\boldsymbol{\varphi_2 - \varphi_1 = k \cdot 2\pi}$ $\;k \in Z$.

La amplitud del M.A.S. resultante es:

$$\boldsymbol{A} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos 0} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} = \sqrt{(A_1 + A_2)^2} = \boldsymbol{A_1 + A_2}$$

A este tipo de interferencia se la denomina ***constructiva***. En el caso de que $A_1 = A_2$ entonces $A = 2A_1$. A este tipo de interferencia e denomina ***completamente constructiva***.

Como $\varphi_1 = \varphi_2$, la fase inicial del M.A.S. resultante es:

$$\boldsymbol{\varphi} = arctg\,\frac{A_1 sen\varphi_1 + A_2 sen\varphi_1}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_1} = arctg\,\frac{(A_1 + A_2)\,sen\varphi_1}{(A_1 + A_2)\cos\varphi_1} = arctg\,(tg\varphi_1) = \boldsymbol{\varphi_1}$$

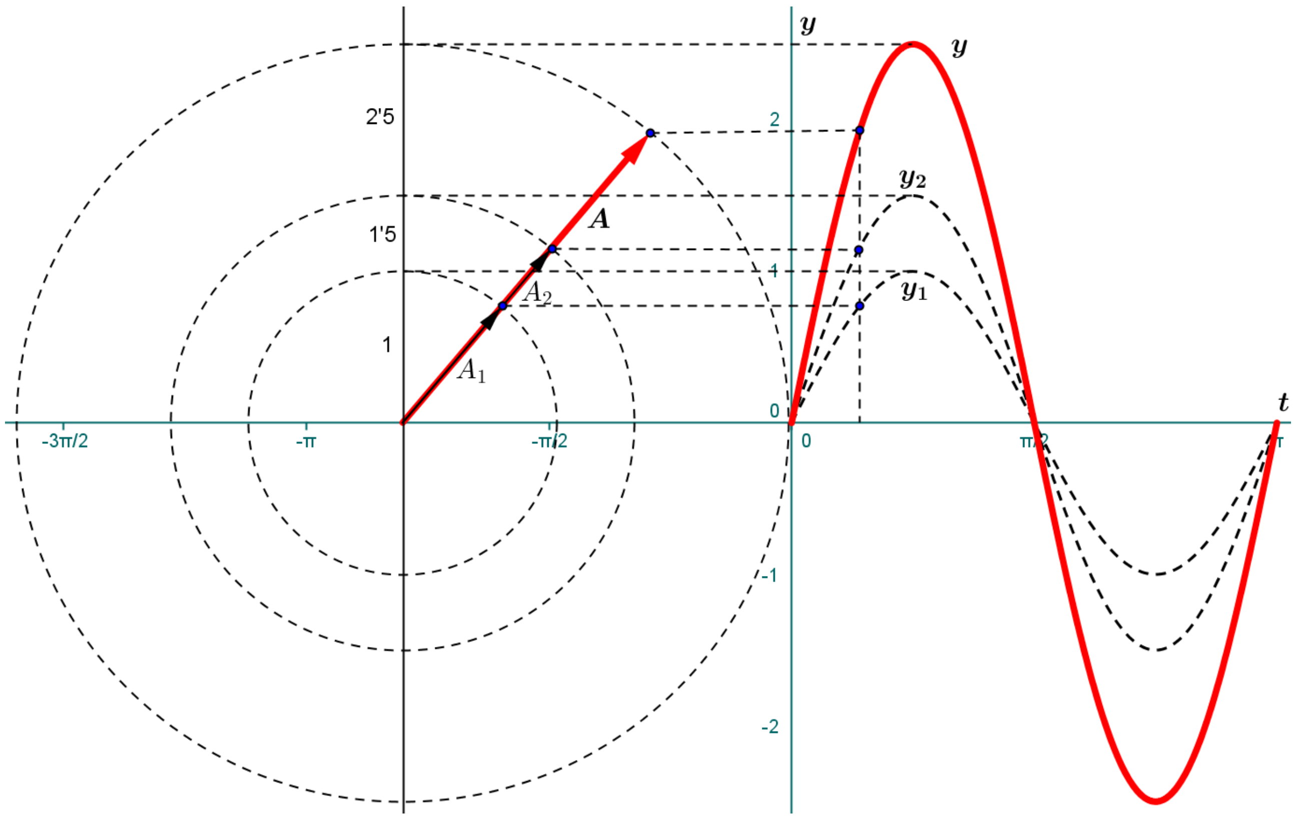
El M.A.S. resultante tendrá la misma dirección, la misma frecuencia y su amplitud será la suma de las dos.

Ejemplo

$$y_1 = sen\,2t \quad \rightarrow \quad A_1 = 1 \quad \omega_1 = 2 \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{2} = \pi \quad \varphi_1 = 0$$

$$y_2 = 1'5 sen\,2t \quad \rightarrow \quad A_2 = 1'5 \quad \omega_2 = 2 \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{2} = \pi \quad \varphi_2 = 0$$

$$A = 1 + 1'5 = 2'5 \qquad \varphi = 0 \qquad y = y_1 + y_2 = sen\,2t + 1'5\,sen\,2t = 2'5\,sen\,2t$$



b) Si $\boldsymbol{\varphi_2 = \varphi_1 + \pi}$ entonces se dice que los dos movimientos están en oposición de fase o contrafase. ***Dos M.A.S. están en oposición de fase si la diferencia de fase es un múltiplo impar de veces π radianes, es decir, $\varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\pi$*** $k \in Z$.

En este caso, los vectores rotatorios son opuestos y la amplitud del M.A.S. resultante es:

$$\boldsymbol{A} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(2k+1)\pi} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} = \sqrt{(A_1 - A_2)^2} = \boldsymbol{A_1 - A_2}$$

es decir, es igual a la diferencia de las amplitudes de los dos M.A.S.

La fase inicial del M.A.S. resultante es:

$$\varphi = arctg\ \frac{A_1 sen\,\varphi_1 + A_2 sen(\varphi_1 + \pi)}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos(\varphi_1 + \pi)} = arctg\ \frac{A_1 sen\,\varphi_1 - A_2 sen\,\varphi_1}{A_1\cos\varphi_1 - A_2\cos\varphi_1}$$

$$\varphi = arctg\ \frac{(A_1 - A_2)\,sen\,\varphi_1}{(A_1 - A_2)\cos\varphi_1} = arctg\ (tg\varphi_1) = \varphi_1$$

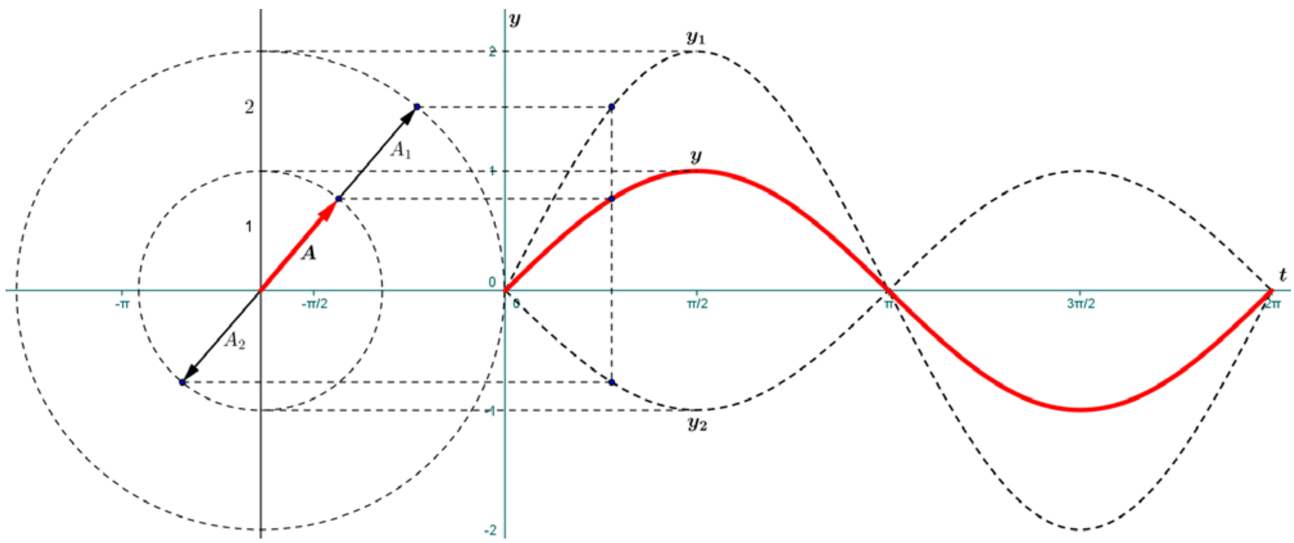
Los dos M.A.S. interfieren atenuándose ya que sus amplitudes se restan. El M.A.S. resultante tendrá la misma dirección y la misma frecuencia.

<u>Ejemplo</u>

$$y_1 = 2sen\,t \quad \rightarrow \quad A_1 = 2 \quad \omega_1 = 1 \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \quad \varphi_1 = 0$$

$$y_2 = sen(t+\pi) \quad \rightarrow \quad A_2 = 1 \quad \omega_2 = 1 \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \quad \varphi_2 = \pi$$

$$A = 2 - 1 = 1 \qquad \varphi = 0 \qquad y = y_1 + y_2 = 2sen\,t + sen(t+\pi) = sen\,t$$



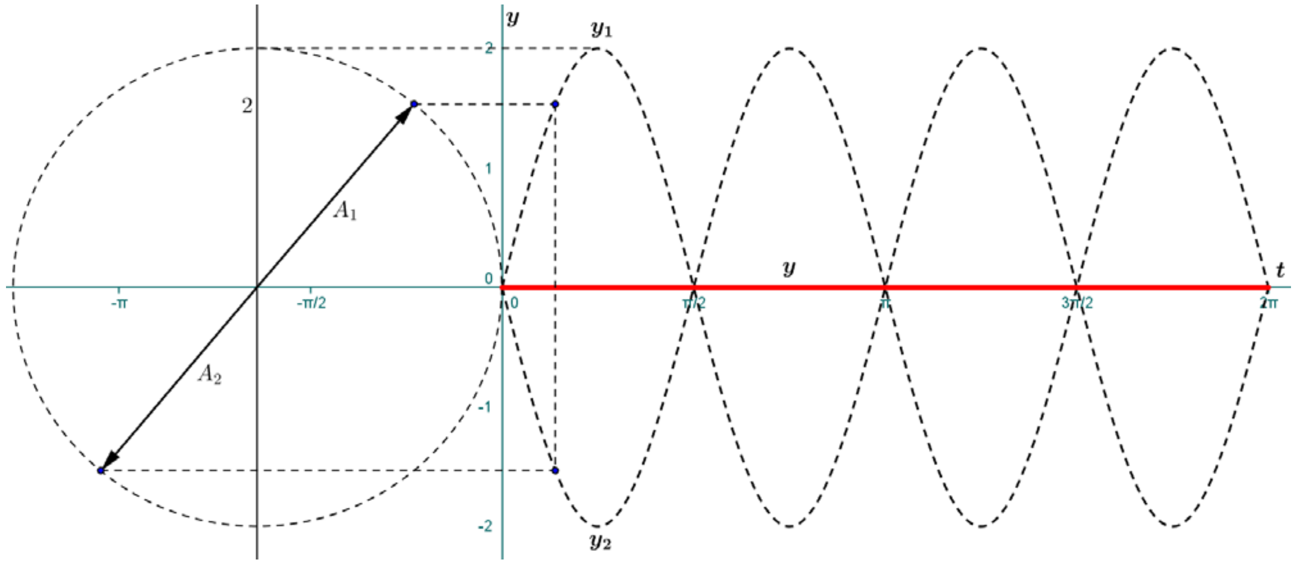
En particular, ***si*** $\boldsymbol{A_1 = A_2}$ *los dos M.A.S. se cancelan mutuamente en cada punto y* ***se dice que la interferencia es destructiva****.*

Ejemplo

$$y_1 = 2\,sen\,2t \quad \rightarrow \quad A_1 = 2 \quad \omega_1 = 2 \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{2} = \pi \quad \varphi_1 = 0$$

$$y_2 = 2sen(2t - \pi) \quad \rightarrow \quad A_2 = 2 \quad \omega_2 = 2 \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{2} = \pi \quad \varphi_2 = \pi$$

$$A = 2 - 2 = 0 \qquad \varphi = 0 \qquad y = y_1 + y_2 = 2sen\,2t + 2sen(2t - \pi) = 0$$



c) Si $\boldsymbol{\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}}$ entonces se dice que los dos movimientos están en cuadratura. ***Dos M.A.S. están en cuadratura si la diferencia de fase es un múltiplo impar de veces*** $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$ ***radianes, es decir,*** $\boldsymbol{\varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}}$ $\;k \in Z$.

En este caso la amplitud del M.A.S. resultante es:

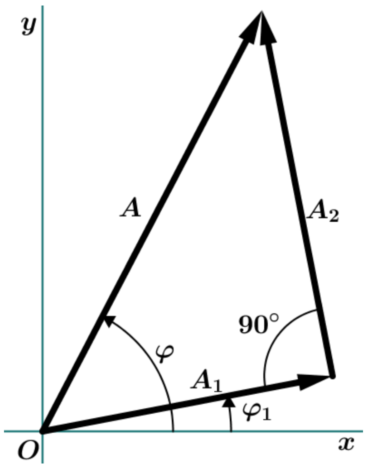
$$\boldsymbol{A} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(2k+1)\frac{\pi}{2}} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cdot 0} = \sqrt{\boldsymbol{A_1^2 + A_2^2}}$$

La fase inicial del M.A.S. resultante, como se observa en la figura adjunta, es:

$$tg(\varphi - \varphi_1) = \frac{A_2}{A_1}$$

$$\varphi - \varphi_1 = arctg\frac{A_2}{A_1}$$

$$\boldsymbol{\varphi = \varphi_1 + arctg\frac{A_2}{A_1}}$$



Ejemplo

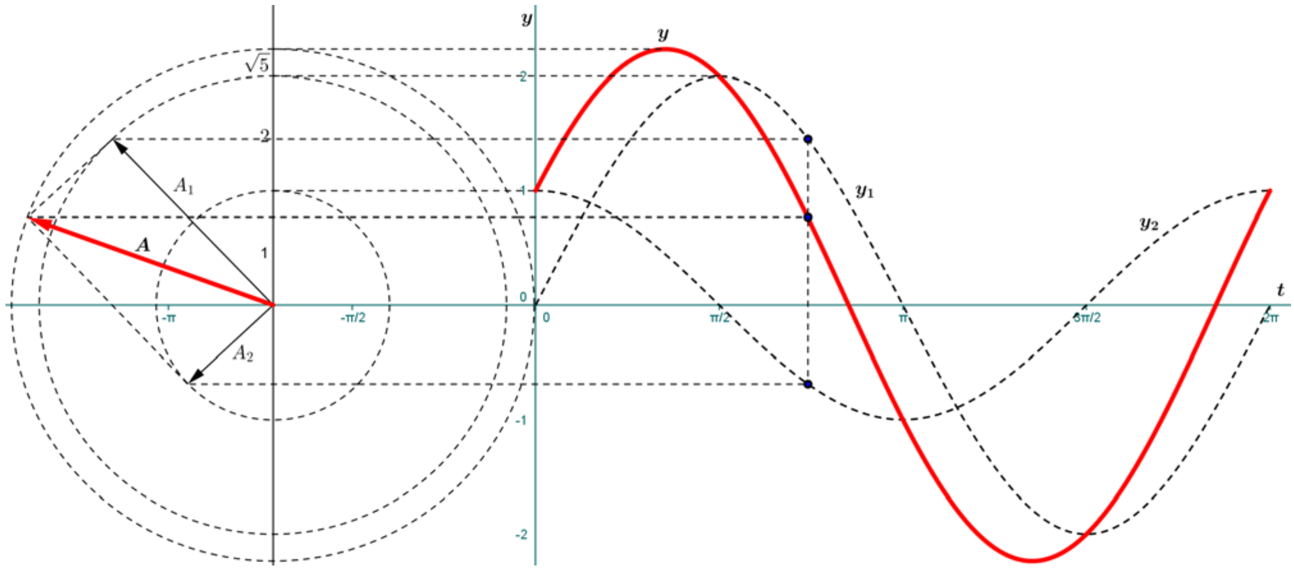
$$y_1 = 2sen\,t \quad \rightarrow \quad A_1 = 2 \quad \omega_1 = 1 \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \quad \varphi_1 = 0$$

$$y_2 = sen\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \rightarrow \quad A_2 = 1 \quad \omega_2 = 1 \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} = 2'236$$

$$tg\varphi = \frac{2sen0 + sen\frac{\pi}{2}}{2\cos 0 + \cos\frac{\pi}{2}} = \frac{0+1}{2+0} = 0'5 \quad \Rightarrow \quad \varphi = arctg\,0'5 = 0'4636 = 26'56^{o}$$

$$y = y_1 + y_2 = 2sen\,t + sen\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{5}\,sen\left(t + 0'4636\right)$$



d) Si $\boldsymbol{\varphi_2 \neq \varphi_1}$ ***y*** $\boldsymbol{\varphi_2 \neq \varphi_1 + (2k+1)\pi}$ ***y*** $\boldsymbol{\varphi_2 \neq \varphi_1 + (2k+1)\frac{\pi}{2}}$

Ejemplo *Una partícula está sometida, simultáneamente, a dos M.A.S. de la misma dirección y frecuencia. Si las ecuaciones de los dos M.A.S. son los descritos a continuación, describir el movimiento resultante.*

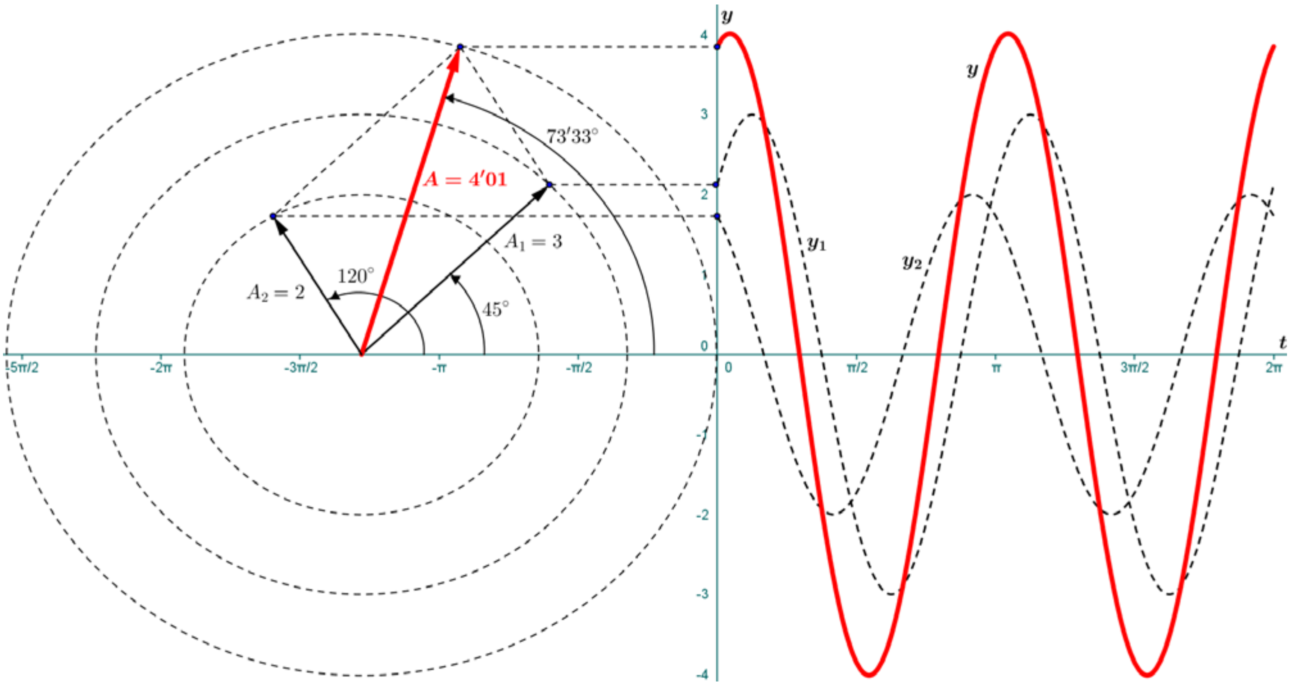
$$y_1 = 3sen\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) \quad \rightarrow \quad A_1 = 3 \quad \omega_1 = 2 \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{2} = \pi \quad \varphi_1 = 0$$

$$y_2 = 2sen\left(2t + \frac{2\pi}{3}\right) \quad \rightarrow \quad A_2 = 2 \quad \omega_2 = 2 \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{2} = \pi \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{9 + 4 + 12\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)} = 4'01$$

$$tg\varphi = \frac{3sen\frac{\pi}{4} + 2sen\frac{2\pi}{3}}{3\cos\frac{\pi}{4} + 2\cos\frac{2\pi}{3}} = 3'436 \quad \Rightarrow \quad \varphi = arctg\, 3'436 = 1'2876 = 73'33^{o}$$

$$y = y_1 + y_2 = 3sen\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) + 2sen\left(2t + \frac{2\pi}{3}\right) = 4'01 sen\left(2t + 1'2876\right)$$



Ejemplo *Una partícula está sometida, simultáneamente, a dos M.A.S. de la misma dirección y frecuencia. Si las ecuaciones de los dos M.A.S. son los descritos a continuación, describir el movimiento resultante.*

$$y_1 = 5sen\left(3t + \frac{\pi}{3}\right) \quad \rightarrow \quad A_1 = 5 \quad \omega_1 = 3 \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{3}$$

$$y_2 = 3sen\left(3t + \frac{\pi}{5}\right) \quad \rightarrow \quad A_2 = 3 \quad \omega_2 = 3 \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{5}$$

La amplitud y la fase inicial del movimiento resultante son:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = \sqrt{5^2 + 3^2 + 2\cdot 5\cdot 3\cos\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{3}\right)} = 7'836$$

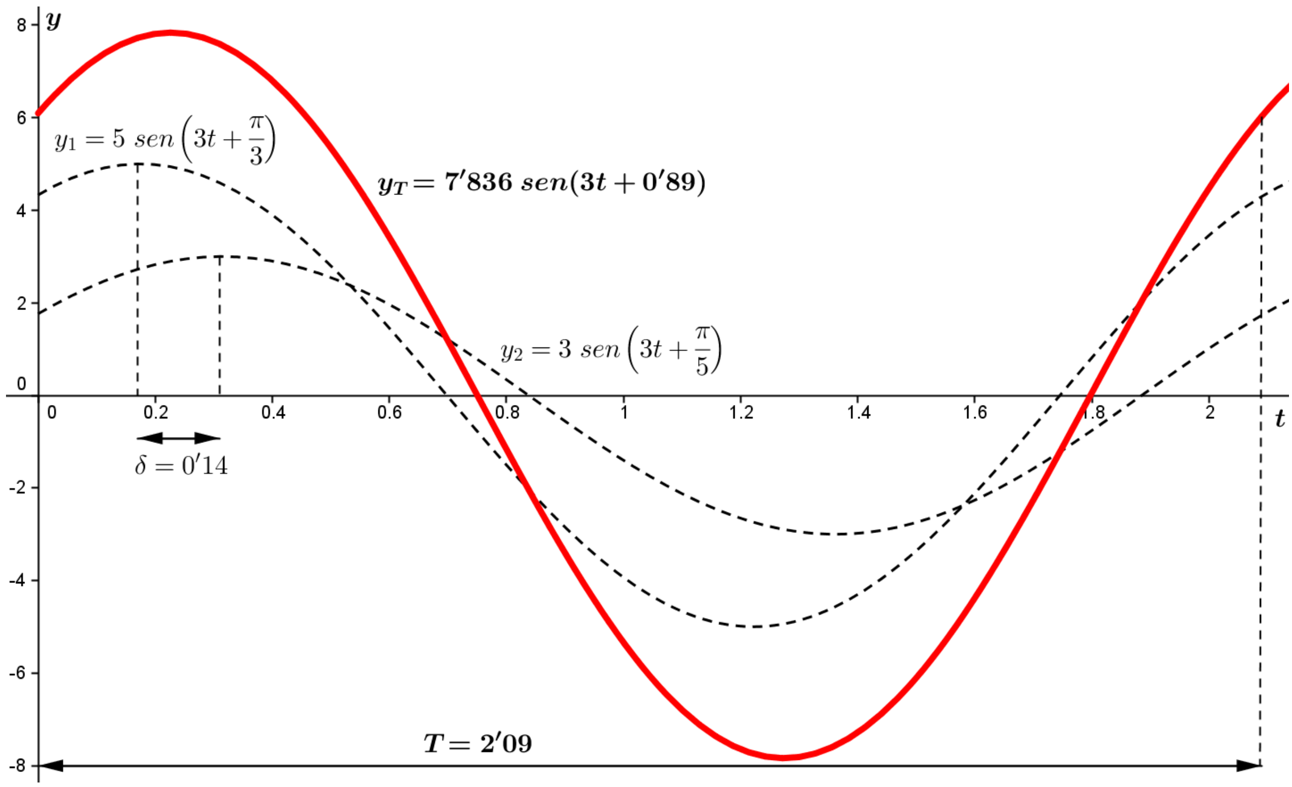
$$\varphi = arctg\frac{A_1sen\varphi_1 + A_2sen\varphi_2}{A_1cos\varphi_1 + A_2cos\varphi_2} = arctg\frac{5sen\frac{\pi}{3} + 3sen\frac{\pi}{5}}{5\cos\frac{\pi}{3} + 3\cos\frac{\pi}{5}} = 0'89$$

El desfase entre y_1 e y_2 es: $\delta = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{3} = \frac{-2\pi}{15} rad$

$$\delta = \frac{\varphi_2}{\omega_2} - \frac{\varphi_1}{\omega_1} = \frac{\frac{\pi}{5}}{3} - \frac{\frac{\pi}{3}}{3} = \frac{\pi}{15} - \frac{\pi}{9} = \left|\frac{-2\pi}{45}\right| = 0'14\, seg$$

La función que representa el movimiento resultante es la suma de las dos funciones.

$$y_T = y_1 + y_2 = 5sen\left(3t + \frac{\pi}{3}\right) + 3sen\left(3t + \frac{\pi}{5}\right) = 7'836\sin(3t + 0'89) \qquad T = \frac{2\pi}{3} = 2'09\ seg$$



Ejemplo *Una partícula está sometida, simultáneamente, a dos M.A.S. de la misma dirección y frecuencia. Si las ecuaciones de los dos M.A.S. son los descritos a continuación, describir el movimiento resultante.*

$$y_1 = 3sen\,2t \quad \rightarrow \quad A_1 = 3 \quad \omega_1 = 2 \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{2} = \pi \quad \varphi_1 = 0$$

$$y_2 = 3sen\left(2t + \frac{\pi}{5}\right) \quad \rightarrow \quad A_2 = 3 \quad \omega_2 = 2 \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{2} = \pi \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{5}$$

La amplitud y la fase inicial del movimiento resultante son:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = \sqrt{3^2 + 3^2 + 2\cdot 3\cdot 3\cos\left(\frac{\pi}{5} - 0\right)} = 5'7$$

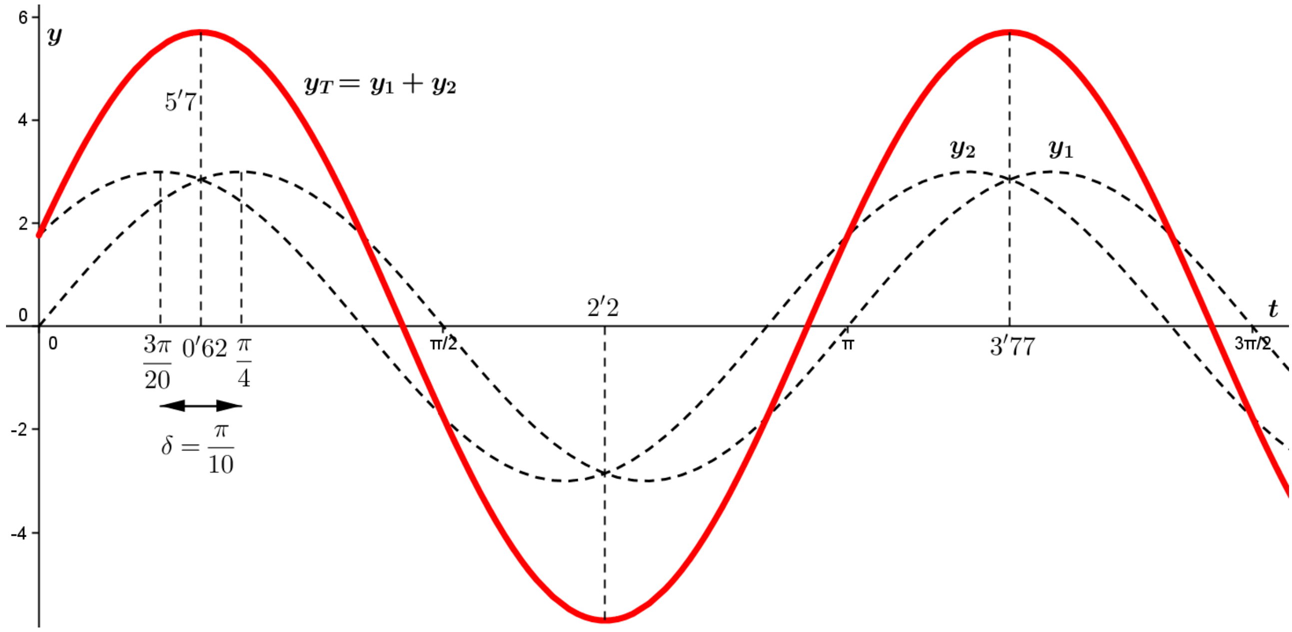
$$\varphi = arctg\frac{A_1sen\varphi_1 + A_2sen\varphi_2}{A_1cos\varphi_1 + A_2cos\varphi_2} = arctg\frac{3sen\,0 + 3sen\frac{\pi}{5}}{3\cos 0 + 3\cos\frac{\pi}{5}} = arctg\,0'32 = 0'314 = 18^{\circ}$$

La función que representa el movimiento resultante es la suma de las dos funciones.

$$y_T = y_1 + y_2 = 5'7\sin(2t + 0'314) \qquad T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

El desfase entre y_1 e y_2 es: $\delta = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{5} - 0 = \frac{\pi}{5} rad$ ó $\delta = \frac{\varphi_2}{\omega_2} = \frac{\frac{\pi}{5}}{2} = \frac{\pi}{10} seg$

Como se observa en la gráfica $\boldsymbol{\delta} = \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{20} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{10}} seg$.



Podemos calcular para qué valores de t la elongación del movimiento resultante será máxima (Amplitud). Derivamos la función del M.A.S. resultante e igualamos a cero.

$$y' = 5'7063 \cdot 2\cos(2t + 0'314141) = 0 \qquad \cos(2t + 0'314141) = 0$$

$$2t + 0'314141 = \arccos 0 = \frac{\pi}{2} \pm k\pi$$

$$2t + 0'314141 = \frac{\pi}{2} \pm k\pi \qquad t = \frac{\pi}{5} \pm k \cdot \frac{\pi}{2} = 0'6283 \pm k \cdot \frac{\pi}{2}$$

Para estos valores de t la elongación es máxima, positiva o negativa, como se observa a continuación:

Para $k = 0 \rightarrow t = 0'6283 \rightarrow y(0'6283) = 5'7063\, sen\left(2 \cdot 0'6283 + 0'314141\right) = 5'7063$

Para $k = 1 \rightarrow t = 0'6283 + \frac{\pi}{2} = 2'2 \rightarrow y(2'2) = -5'7063$

Para $k = 2 \rightarrow t = 0'6283 + \pi = 3'77 \rightarrow y(3'77) = 5'7063$

Para $k = 3 \rightarrow t = 0'6283 + \frac{3\pi}{2} = 5'34 \rightarrow y(5'34) = -5'7063$

Ejemplo *Una partícula está sometida, simultáneamente, a dos M.A.S. de la misma dirección y frecuencia. Si las ecuaciones de los dos M.A.S. son los descritos a continuación, describir el movimiento resultante.*

$$y_1 = 3\,sen\frac{t}{2} \quad \rightarrow \quad A_1 = 3 \quad \omega_1 = \frac{1}{2} \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi \quad \varphi_1 = 0$$

$$y_2 = 2\,sen\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{5}\right) \quad \rightarrow \quad A_2 = 2 \quad \omega_2 = \frac{1}{2} \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{5}$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 3^2 + 2^2 + 2\cdot 3\cdot 2\cos\left(\frac{\pi}{5} - 0\right) = 13 + 12\cos\frac{\pi}{5} = 22'708$$

$$A = \sqrt{22'708} = \boldsymbol{4'765}$$

$$tg\,\varphi = \frac{A_1 sen\varphi_1 + A_2 sen\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} = \frac{3\,sen\,0 + 2\,sen\left(\frac{\pi}{5}\right)}{3\cos 0 + 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)} = 0'2545$$

$$\varphi = arctg\,(0'2545) = \boldsymbol{0'2492\,rad} = \boldsymbol{14'2786}\,^{\circ}$$

La ecuación del M.A.S. resultante es: $\boldsymbol{y = 4'765\ sen\left(\frac{t}{2} + 0'2492\right)}$

El desfase entre y_1 e y_2 es: $\delta = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{5} - 0 = \frac{\pi}{5}rad$ ó $\delta = \frac{\varphi_2}{\omega_2} = \frac{\frac{\pi}{5}}{0'5} = \frac{2\pi}{5}seg$

La elongación para $t = \frac{5\pi}{4}$ es: $y\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 4'765\,sen\left(\frac{\frac{5\pi}{4}}{2} + 0'2492\right) = 3'8166$

La elongación para $t = \frac{9\pi}{4}$ es: $y\left(\frac{9\pi}{4}\right) = 4'765\,sen\left(\frac{\frac{9\pi}{4}}{2} + 0'2492\right) = -2'85$

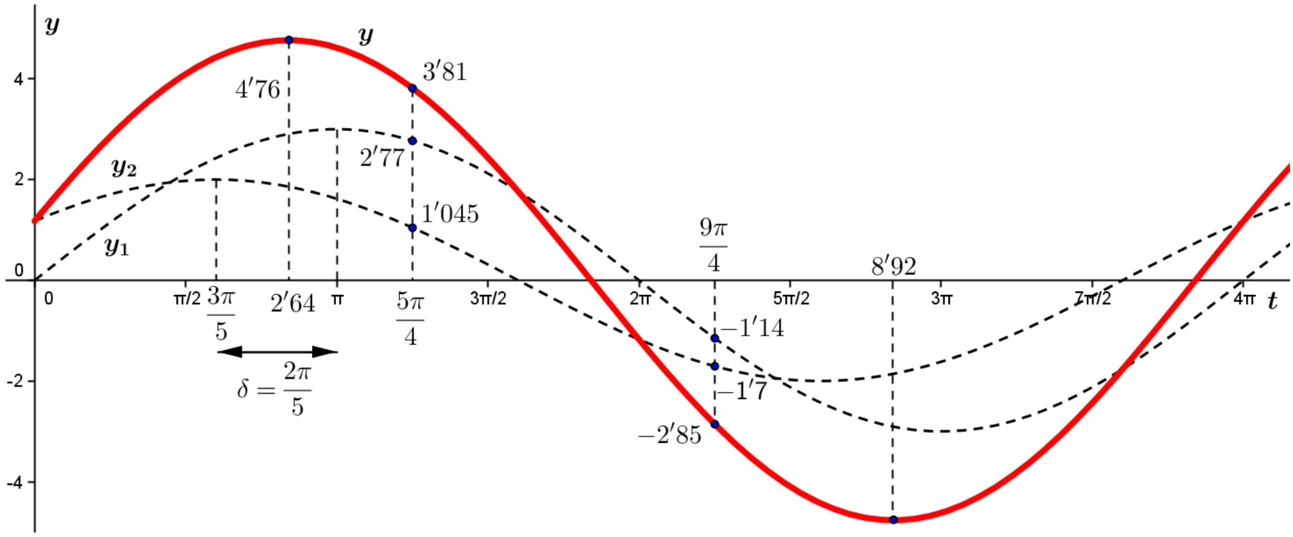
Para calcular cuáles son los valores de t para los que la elongación del movimiento resultante es máxima (Amplitud), derivamos la función correspondiente al M.A.S. resultante e igualamos a cero.

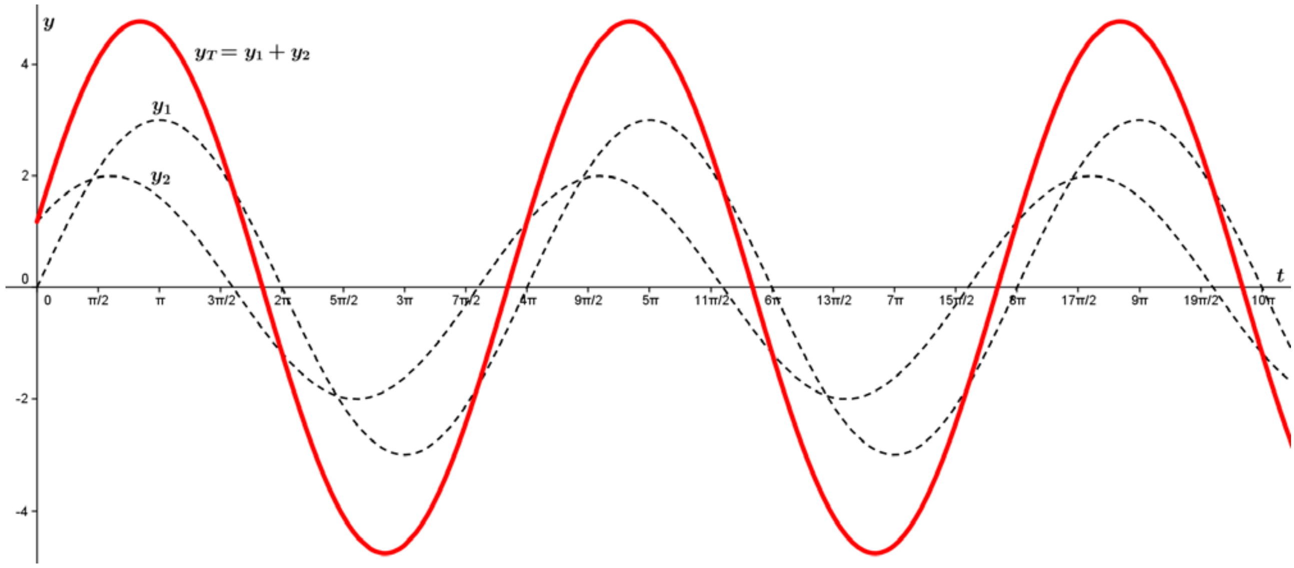
$$y' = 4'765\cdot 0'5\cos\left(\frac{t}{2} + 0'2492\right) = 0 \qquad \cos\left(\frac{t}{2} + 0'2492\right) = 0$$

$$\frac{t}{2} + 0'2492 = \arccos 0 = \frac{\pi}{2} \pm k\pi \qquad t = -0'4984 + \pi \pm k\pi = 2'6431 \pm 2k\pi$$

$$\text{Para} \quad k=0 \quad \rightarrow \quad t=2'6431 \quad \rightarrow \quad y(2'6431)=4'765\, sen\left(\frac{2'6431}{2}+0'2492\right)=4'765$$

$$\text{Para} \quad k=1 \quad \rightarrow \quad t=8'9262 \quad \rightarrow \quad y(8'9262)=4'765\, sen\left(\frac{8'9262}{2}+0'2492\right)=-4'765$$





Superposición de dos M.A.S. de la misma dirección y distinta frecuencia

Para el estudio de dos M.A.S. de distinta frecuencia conviene recordar la definición de función periódica. Una ***Función Periódica f(t)***, cumple la siguiente propiedad para todo valor de t:

$$f(t) = f(t+T)$$

donde a la constante T se la denomina ***Periodo de la función***.

Generalizando lo anterior podemos obtener $f(t) = f(t+nT) \quad con \;\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, etc.$

Ejemplo ¿Cuál es el período de la función $f(t) = \cos\frac{t}{3} + \cos\frac{t}{4}$?

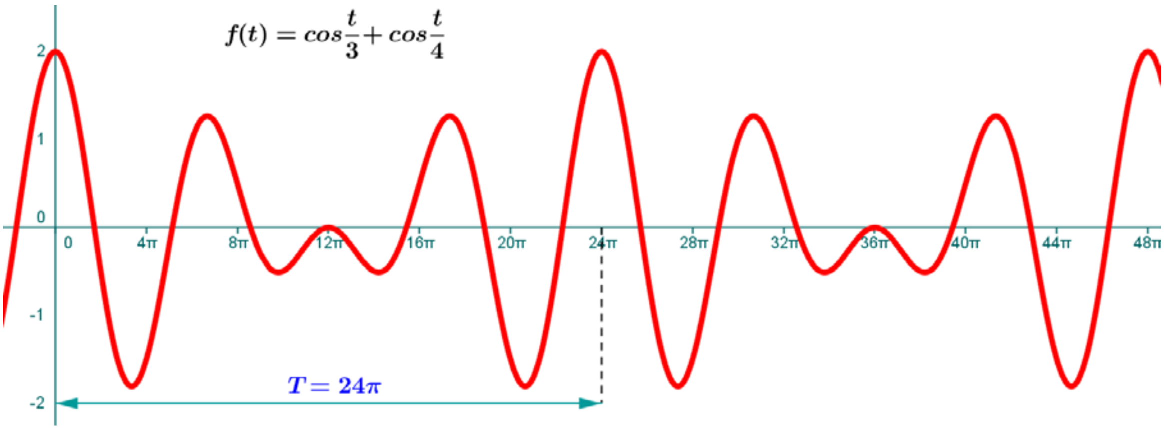
Si $f(t)$ es periódica se debe cumplir:

$$f(t+T) = \cos\frac{t+T}{3} + \cos\frac{t+T}{4} = f(t) = \cos\frac{t}{3} + \cos\frac{t}{4}$$

Sabemos que se verifica $\cos(x+2\pi k) = \cos x$ con $k \in Z$ (enteros), por tanto para que se cumpla la igualdad se requiere que:

$$\frac{T}{3} = 2\pi k_1 \quad y \quad \frac{T}{4} = 2\pi k_2 \quad \text{es decir} \quad T = 6\pi k_1 = 8\pi k_2 \;\; \text{con} \;\; k_1 \, y \, k_2 \in Z$$

El mínimo valor para T se obtiene cuando $k_1 = 4 \; y \; k_2 = 3$, es decir, $T = 24\pi$ como se observa en la siguiente gráfica:

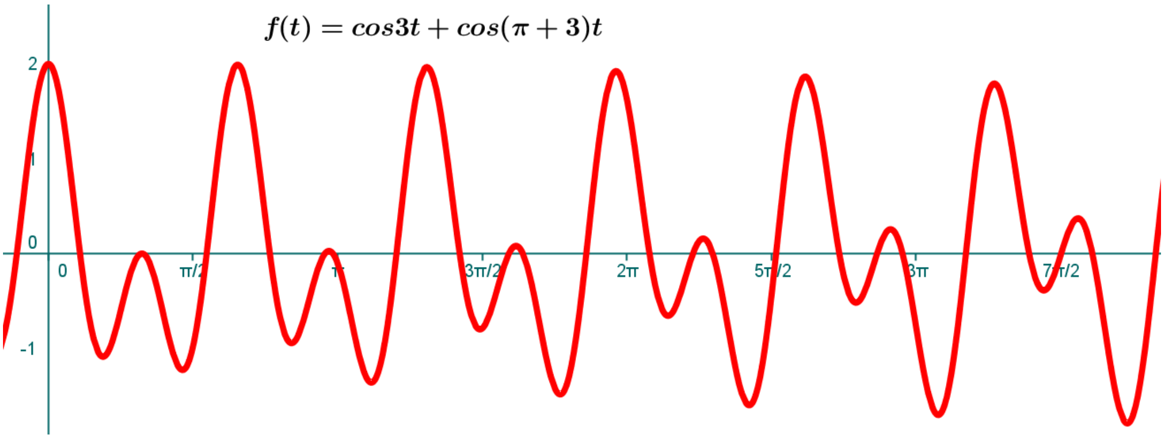


Vamos a estudiar cuáles son las condiciones que tienen que cumplir las funciones seno y coseno para que cualquier suma de funciones seno y coseno resulte una función periódica.

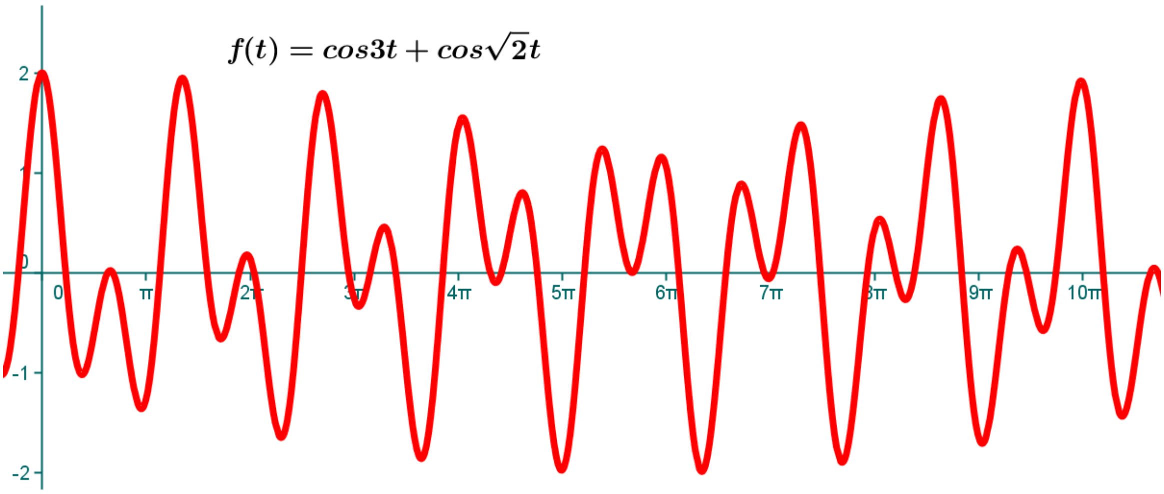
Consideremos la función $f(t) = \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)$. Para que sea periódica tenemos que encontrar dos enteros *m* y *n* tales que

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 T &= 2\pi m \\ \omega_2 T &= 2\pi n \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} \;\; \text{debe ser un número racional.}$$

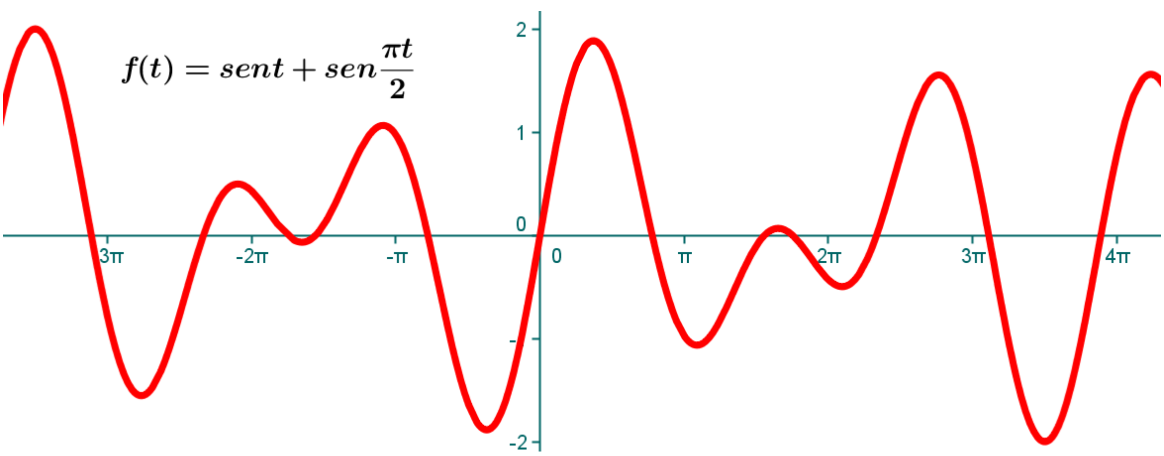
Ejemplo La función $f(t)=\cos 3t+\cos(\pi+3)t$ no es periódica, ya que $\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{3}{3+\pi}$ no es un número racional.



Ejemplo La función $f(t)=\cos 3t+\cos\sqrt{2}t$ no es periódica, ya que $\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{3}{\sqrt{2}}$ no es un número racional.



Ejemplo La función $f(t)=sen\,t+sen\frac{\pi t}{2}$ no es periódica, ya que $\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{1}{\pi/2}=\frac{2}{\pi}$ no es un número racional.



$A_1 \neq A_2$ y $\omega_1 \neq \omega_2$

Dos M.A.S. vienen descritos por las ecuaciones $y_1 = A_1\, sen(\omega_1 t + \varphi_1)$ *e* $y_2 = A_2\, sen(\omega_2 t + \varphi_2)$. El ángulo $(\omega_2 - \omega_1)t$ entre los vectores rotantes $\overrightarrow{OP_1}$ *y* $\overrightarrow{OP_2}$ ahora no es constante, por lo que el vector resultante $\overrightarrow{OP}$ no tiene longitud constante y no rota con velocidad angular constante. En consecuencia *el movimiento resultante* $y = y_1 + y_2$ *no es un M.A.S. Si analizáramos los vectores rotatorios nos encontraríamos algo parecido a la suma vectorial de las agujas del reloj, donde cada una se mueve a su propio ritmo.*

Al tener los dos M.A.S. distinta frecuencia, la función resultante la obtenemos sumando las dos funciones.

$$y = y_1 + y_2 = A_1\, sen(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\, sen(\omega_2 t + \varphi_2) = A\, sen(\omega t + \varphi)$$

donde la amplitud del movimiento resultante es:

$$\boldsymbol{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 cos\left[(\omega_2 - \omega_1)t + (\varphi_2 - \varphi_1)\right]}}$$

Se dice entonces que la amplitud es modulada y *"oscila"* entre los siguientes valores

$$A = A_1 + A_2 \quad \text{cuando} \quad (\omega_2 - \omega_1)t + (\varphi_2 - \varphi_1) = 2k\pi \quad \text{y}$$

$$A = |A_1 - A_2| \quad \text{cuando} \quad (\omega_2 - \omega_1)t + (\varphi_2 - \varphi_1) = (2k+1)\pi\,.$$

El periodo de modulación está dado por: $\boldsymbol{T_M = \dfrac{2\pi}{|\omega_2 - \omega_1|}}$

La fase inicial φ se obtiene cuando $t = 0\, seg$.

$$\boldsymbol{\varphi = arctg \frac{A_1 sen\varphi_1 + A_2 sen\varphi_2}{A_1 cos\varphi_1 + A_2 cos\varphi_2}}$$

<u>*Ejemplo*</u> *Una partícula está sometida, simultáneamente, a dos M.A.S. de la misma dirección y distinta frecuencia y amplitud. Si las ecuaciones de los dos M.A.S. son los descritos a continuación, describir el movimiento resultante.*

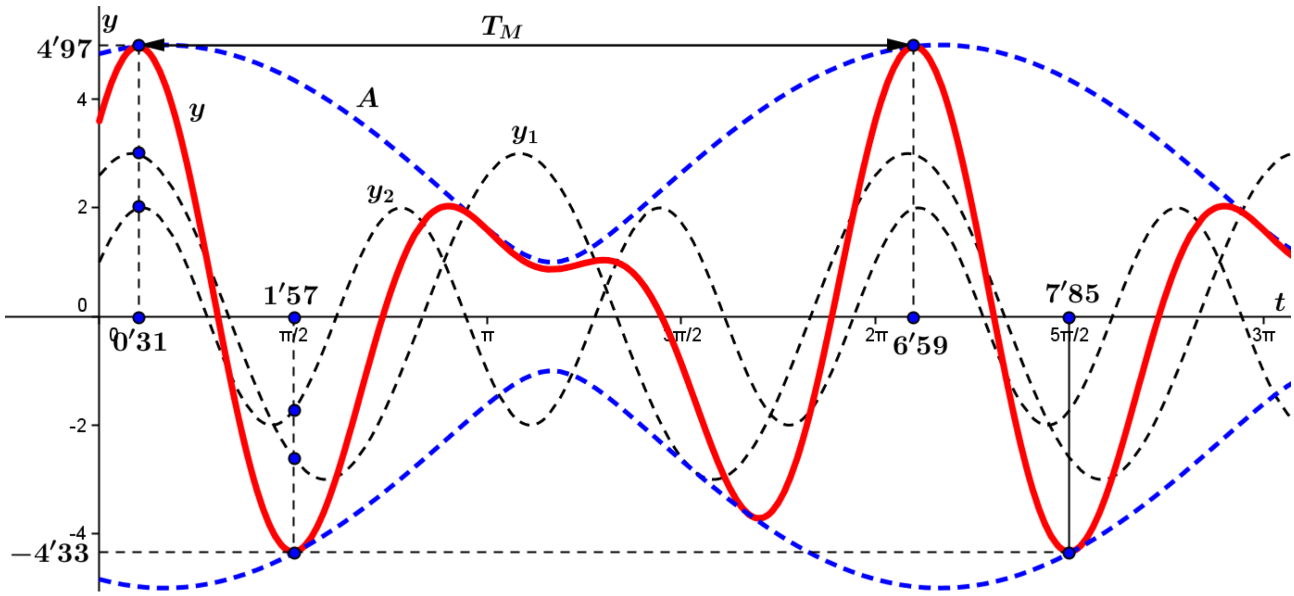
$$y_1 = 3sen\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) \quad \rightarrow \quad A_1 = 3 \quad \omega_1 = 2 \quad T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{3}$$

$$y_2 = 2\,sen\left(3t + \frac{\pi}{6}\right) \quad \rightarrow \quad A_2 = 2 \quad \omega_2 = 3 \quad T_2 = \frac{2\pi}{3} = 1'336 \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{6}$$

$$y = y_1 + y_2 = 3sen\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) + 2\,sen\left(3t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$A=\sqrt{3^2+2^2+12\cos\left[(3-2)t+\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)\right]}=\sqrt{13+12\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)}$$

La amplitud (de color azul en la gráfica) se dice que es modulada y varía entre $3+2=5$ y $|3-2|=1$.



<u>$A_1=A_2=A$ y $\omega_1\neq\omega_2$</u>

$$y=y_1+y_2=A\,sen(\omega_1 t+\varphi_1)+A\,sen(\omega_2 t+\varphi_2)=A\left[sen(\omega_2 t+\varphi_2)+sen(\omega_1 t+\varphi_1)\right]$$

Aplicando la transformación de suma de senos en producto $sen\,x+sen\,y=2sen\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$$y=A\left[2sen\left(\frac{\omega_1 t+\varphi_1+\omega_2 t+\varphi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega_1 t+\varphi_1-(\omega_2 t+\varphi_2)}{2}\right)\right]$$

$$y=2A\cos\left(\frac{\omega_1 t+\varphi_1-(\omega_2 t+\varphi_2)}{2}\right)sen\left(\frac{\omega_1 t+\varphi_1+\omega_2 t+\varphi_2}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{y=2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t+\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)sen\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t+\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)}$$

El resultado es el producto de dos funciones que dependen del tiempo (es decir *una función modula a la otra*). <u>*La oscilación resultante no es un movimiento armónico simple*</u>, aunque las modulaciones si son armónicas y la frecuencia angular viene dada por la expresión $\overline{\omega}=\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ *que es la frecuencia promedio de las dos oscilaciones*.

La amplitud de la vibración resultante varía con el tiempo y viene dada por la fórmula:

$$A_M = 2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t+\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right) = 2A\cos\left(\omega_M\, t+\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)$$

donde a la expresión $\omega_M = |\omega_1-\omega_2|$ se la denomina ***frecuencia de modulación***.

Esta amplitud se llama ***Amplitud modulada***, y su valor, que depende de la frecuencia de modulación, varía entre los valores extremos 0 y $2A$ (consecuencia del valor del coseno). En la oscilación resultante hay momentos en los que las dos oscilaciones se superponen en forma constructiva y otros momentos en los que se superponen en forma destructiva. La resultante tendrá momentos de amplitud doble y momentos de amplitud nula.

Conclusión

El movimiento resultante de sumar dos o más movimientos armónicos simples de diferente frecuencia angular se conoce como **vibración pulsante**. *Esta vibración se caracteriza porque la frecuencia del movimiento es proporcional al promedio de las frecuencias involucradas, pero la amplitud del movimiento varía con el tiempo generando lo que se conoce como* **envolvente de la onda**.

Ejemplo *Una partícula está sometida, simultáneamente, a dos M.A.S. de la misma dirección, misma amplitud y distinta frecuencia. Si las ecuaciones de los dos M.A.S. son los descritos a continuación, describir el movimiento resultante.*

$$y_1 = 2\,sen\left(2t+\frac{\pi}{3}\right) \quad\rightarrow\quad A_1=2 \qquad \omega_1=2 \qquad T_1=\frac{2\pi}{2}=\pi \qquad \varphi_1=\frac{\pi}{3}$$

$$y_2 = 2\,sen\left(3t+\frac{\pi}{6}\right) \quad\rightarrow\quad A_2=2 \qquad \omega_2=3 \qquad T_2=\frac{2\pi}{3}=1'336 \qquad \varphi_2=\frac{\pi}{6}$$

$$y = 2\,sen\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)+2\,sen\left(3t+\frac{\pi}{6}\right) = 2\left[sen\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)+sen\left(3t+\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$y = 2\left[2\,sen\left(\frac{2t+\frac{\pi}{3}+3t+\frac{\pi}{6}}{2}\right)\cos\left(\frac{2t+\frac{\pi}{3}-\left(3t+\frac{\pi}{6}\right)}{2}\right)\right] = 4\,sen\left(\frac{5t+\frac{3\pi}{6}}{2}\right)\cos\left(\frac{-t+\frac{\pi}{6}}{2}\right)$$

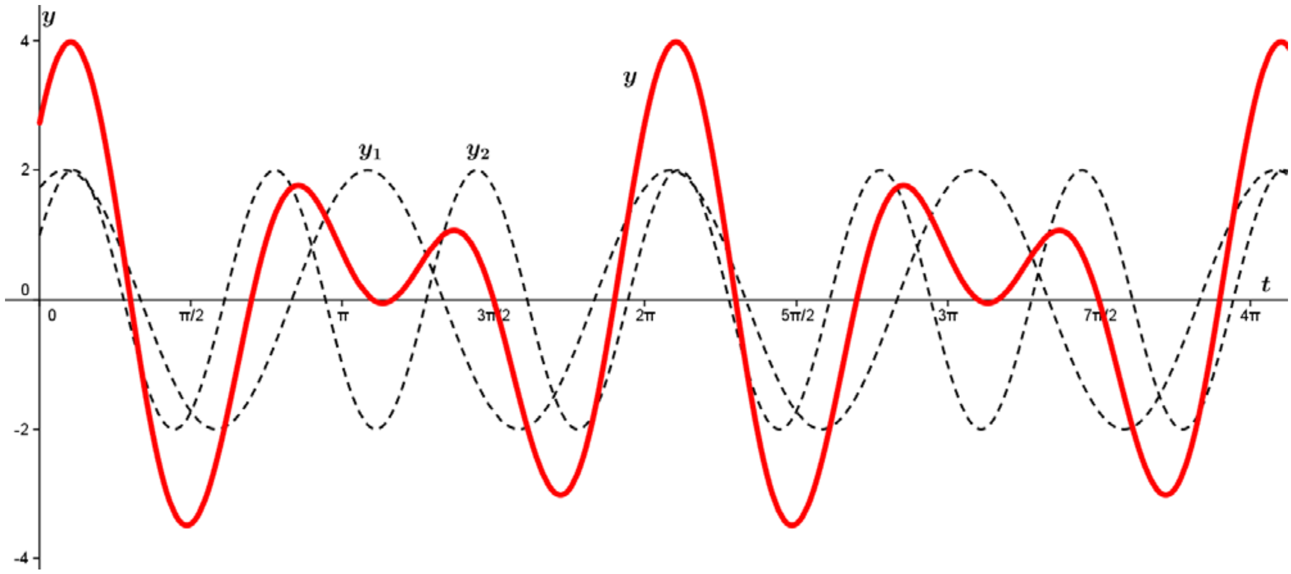
$$y = 4\,sen\left(\frac{5}{2}t+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{-1}{2}t+\frac{\pi}{12}\right) = 4\cos\left(\frac{-1}{2}t+\frac{\pi}{12}\right)sen\left(\frac{5}{2}t+\frac{\pi}{4}\right)$$

Por lo tanto la amplitud total es $A = 4\cos\left(\frac{-1}{2}t+\frac{\pi}{12}\right)$

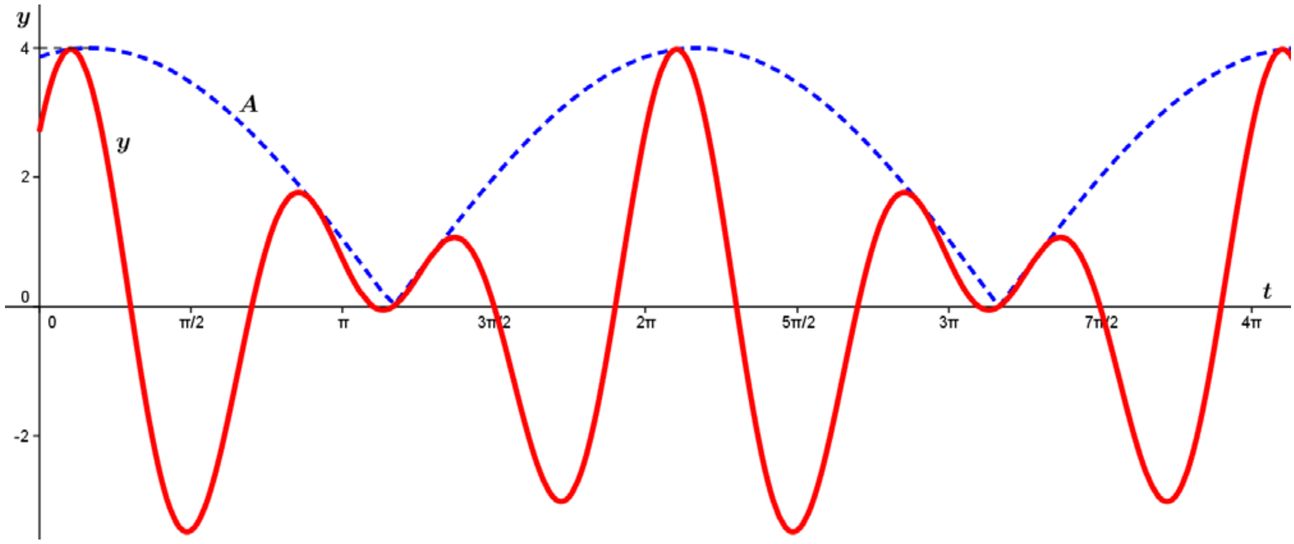
La amplitud también la podemos calcular a través de la fórmula que hemos obtenido al principio:

$$\boldsymbol{A} = \sqrt{2^2+2^2+8\cos\left[(3-2)t+\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)\right]} = \sqrt{8+8\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)}$$

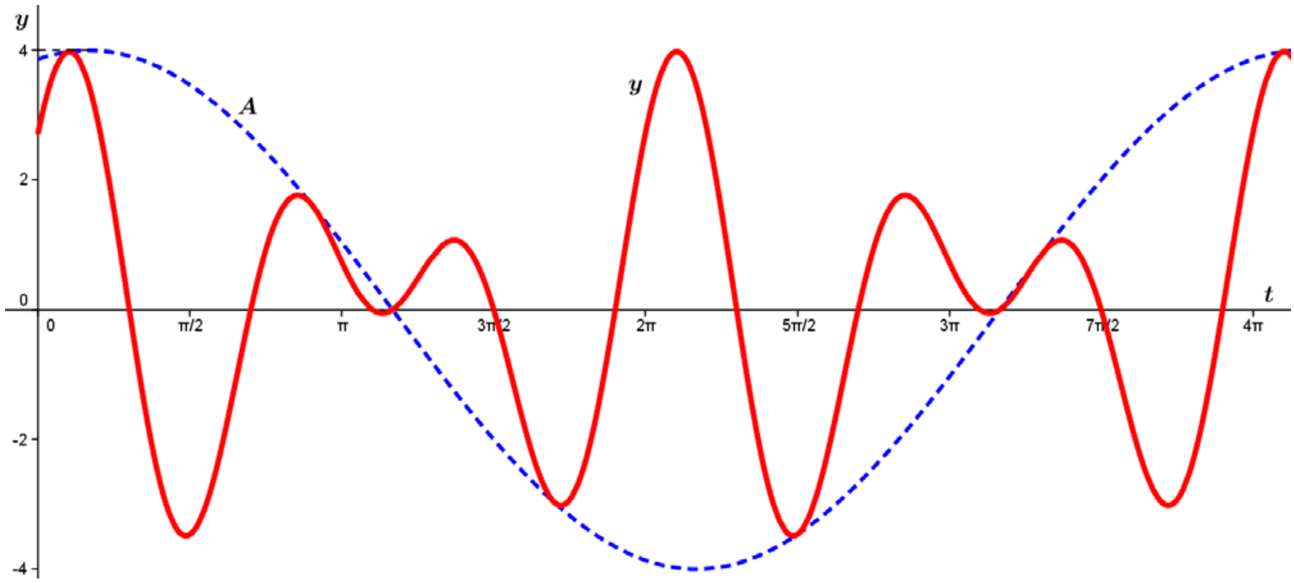
que varía entre $2+2=4 \;\; y \;\; |2-2|=0$



En la siguiente gráfica se observa las pulsaciones de este tipo de movimiento con la modulación de la amplitud en color azul. Para la amplitud $\boldsymbol{A}=\sqrt{8+8\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)}$



Para la amplitud $A=4\cos\left(\frac{-1}{2}t+\frac{\pi}{12}\right)$



$A_1 = A_2 = A$ y $\omega_1 \approx \omega_2$

Si ω_1 y ω_2 son casi iguales entonces $\omega_M << \omega_1$ y $\overline{\omega} \approx \omega_1$ y la amplitud fluctuará lentamente.

Imaginemos, para simplificar, que en el instante inicial las dos ondas que llegan a un punto se encuentran en fase. Como la frecuencia de una de ellas es ligeramente superior a la de la otra, aquella que tiene la frecuencia ligeramente mayor se irá retardando, aumentando el desfase respecto de la otra hasta encontrarse en oposición de fase, punto en el que la amplitud de la onda resultante será nula. Posteriormente las dos ondas se encontrarán en fase de nuevo y se sumarán las amplitudes de las dos ondas, etc.

Esto se puede comprobar al activar al mismo tiempo dos fuentes de sonido que tienen casi la misma frecuencia, por ejemplo de 300Hz y 304Hz. Nuestro sistema auditivo percibirá un único sonido correspondiente a una onda con una frecuencia de 302Hz, promedio de las dos, y cuya amplitud varía con una frecuencia de 4Hz. Sin embargo el sonido resultante crece repetidamente y después decae en lugar de permanecer constante. Estas variaciones repetidas en amplitud se denominan ***pulsaciones*** o ***batidos***. Las pulsaciones se perciben para diferencias en las frecuencias de hasta 15 ó 20 Hz. Si la diferencia es mayor comienzan nuevamente a percibirse los dos sonidos simultáneamente.

A medida que las frecuencias de los sonidos se hacen más cercanas, la frecuencia de pulsación se hace más lenta. Es por esto que un músico puede afinar una guitarra con otra fuente de sonido simplemente escuchando las pulsaciones mientras incrementa o disminuye la tensión de la cuerda. Al final, las pulsaciones se hacen tan lentas que se desvanecen y las dos fuentes están en tono

Consideremos dos M.A.S. de igual amplitud pero de frecuencias *ligeramente diferentes*.

Ejemplo *Una partícula está sometida, simultáneamente, a dos M.A.S. de la misma dirección, misma amplitud y frecuencias ligeramente diferentes. Si las ecuaciones de los dos M.A.S. son los descritos a continuación, describir el movimiento resultante calculando el periodo de batido y el de vibración.*

$$y_1 = 0'5 sen 10\pi t \quad \rightarrow \quad A_1 = 0'5 \quad \omega_1 = 10\pi \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{10\pi} = 0'2 \quad \varphi_1 = 0$$

$$y_2 = 0'5 sen 12\pi t \quad \rightarrow \quad A_2 = 0'5 \quad \omega_2 = 12\pi \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{12\pi} = 0'16 \quad \varphi_2 = 0$$

En general el M.A.S. resultante lo podemos expresar a través de la función:

$$y_T = 2A sen\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \cdot \cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t = 2 \cdot 0'5 \cdot sen\frac{10\pi + 12\pi}{2} t \cdot \cos\frac{10\pi - 12\pi}{2} t$$

$$y_T = sen 11\pi t \cdot \cos(-\pi t) = \cos \pi t \cdot sen 11\pi t$$

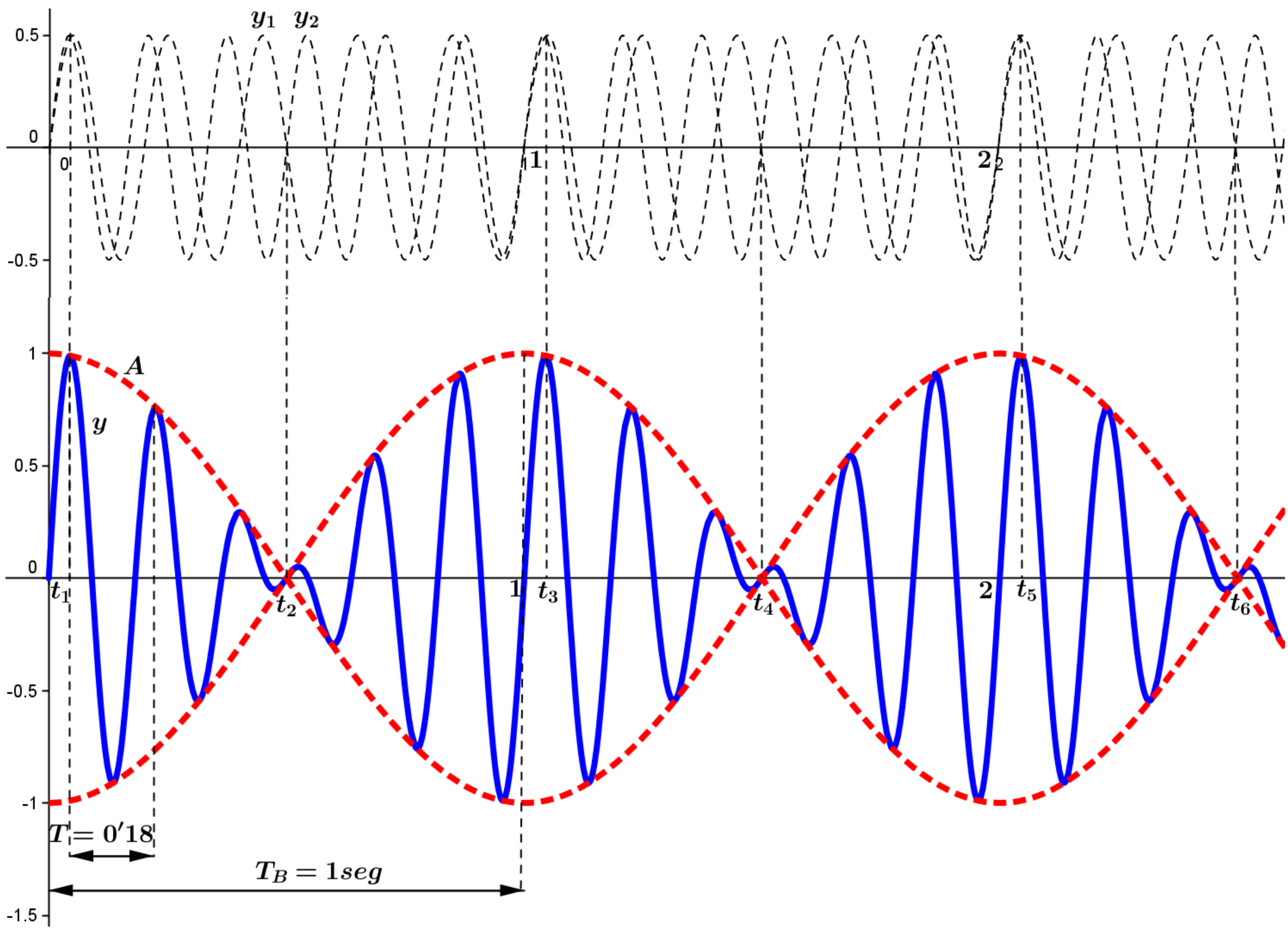
Si observamos las dos ondas, veremos que están periódicamente en fase y fuera de fase, es decir, hay una alternancia en el tiempo entre interferencia constructiva e interferencia destructiva. En los puntos donde las ondas están en fase, se observa que la amplitud de la onda resultante (suma de las dos) es el doble que la amplitud de cada onda, en cambio, en los puntos en los que las ondas están en oposición de fase, la amplitud resultante es cero.

El periodo de batido o de modulación es:

$$T_B = \frac{2\pi}{|w_1 - w_2|} = \frac{2\pi}{|10\pi - 12\pi|} = \frac{2\pi}{|-2\pi|} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1seg$$

El periodo de vibración es:

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}} = \frac{4\pi}{10\pi + 12\pi} = \frac{4\pi}{22\pi} = \frac{2}{11} = 0'18seg$$



La gráfica de color rojo muestra la amplitud modulada y la gráfica de color azul el resultado de la composición de los dos M.A.S.

Hay muchos fenómenos físicos en los que el movimiento de una partícula es la superposición de dos M.A.S. de frecuencias angulares ligeramente diferentes ω_1 y ω_2. Por ejemplo, pueden obtenerse fácilmente pulsaciones con dos diapasones de igual frecuencia, sin más que modificar ligeramente la de uno de ellos con un pequeño trozo de cera adherido a una de sus ramas. Los diapasones que antes sonaban al unísono producirán en este caso pulsaciones muy marcadas. Si los diapasones tienen frecuencias de 242 Hz y 244 Hz, el oído percibirá un sonido de 243 Hz. Las vibraciones de los diapasones se transmiten por el aire y llegan al tímpano del oído, pero éste *no reconoce dos notas diferentes sino una única nota de frecuencia igual al promedio de las dos frecuencias y con variaciones en la amplitud.* En este caso, se produce un batido de 2 Hz, es decir, en 1 seg. el sonido se hará más intenso en dos ocasiones. Es lógico que conforme las frecuencias de las ondas se aproximan más, la frecuencia del batido es cada vez menor, hasta que cuando se igualan el batido desaparece.

Superposición de dos M.A.S. de direcciones perpendiculares. Figuras o Curvas de Lissajous

Las curvas denominadas *Figuras de Lissajous* son las trayectorias seguidas por una partícula que oscila simultáneamente en dos direcciones perpendiculares entre sí. En general son distintas la amplitud y la frecuencia en ambas direcciones, y entre las dos oscilaciones puede haber una diferencia de fase arbitraria.

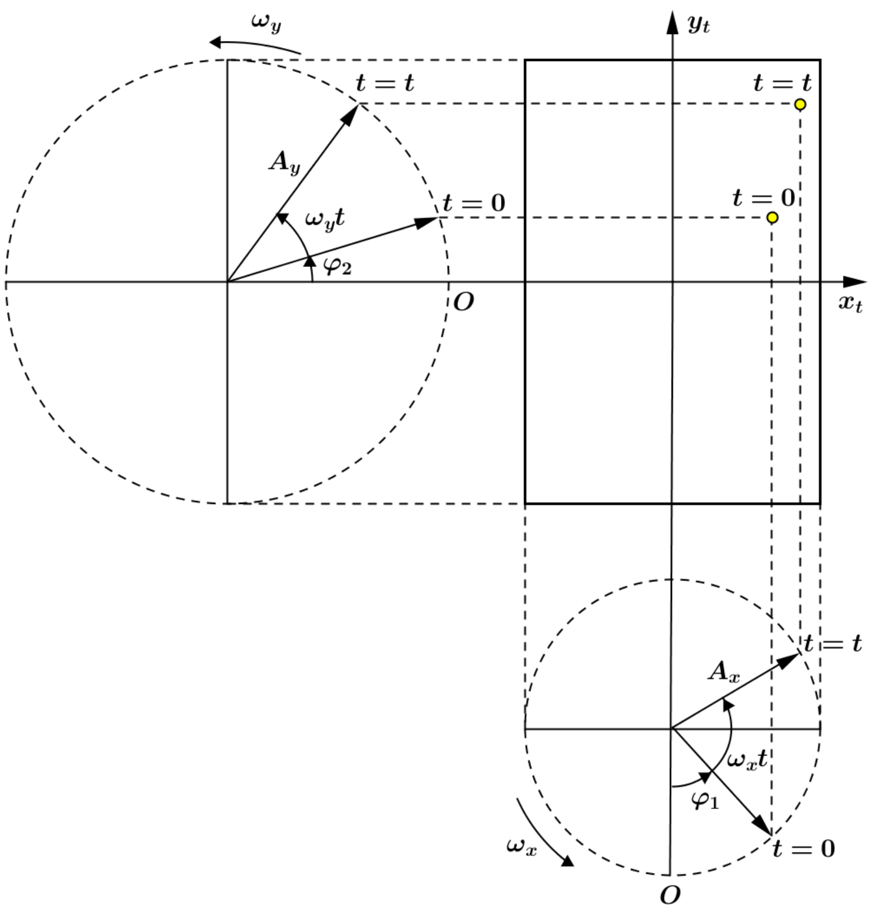
Todos los casos que hemos visto hasta ahora se refieren a la superposición de M.A.S. en una sola dimensión. Para su análisis hemos utilizado los vectores rotatorios en el plano, de tal forma que la proyección del vector sobre una determinada dirección representa el movimiento estudiado.

Vamos a considerar ahora el caso en el que una partícula se mueve en un plano de tal modo que sus coordenadas “x” e “y” oscilan con M.A.S. Aplicando un método similar a los analizados hasta ahora, vamos a estudiar la combinación de dos M.A.S. que actúan sobre los ejes X e Y respectivamente y cuyo movimiento resultante se encuentra en el plano XY, es decir, vamos a superponer dos oscilaciones armónicas que están en líneas perpendiculares.

El movimiento a lo largo del eje X viene dado por la ecuación: $x(t) = A_x sen(\omega_x t + \varphi_1)$

El movimiento a lo largo del eje Y viene dado por la ecuación: $y(t) = A_y sen(\omega_y t + \varphi_2)$

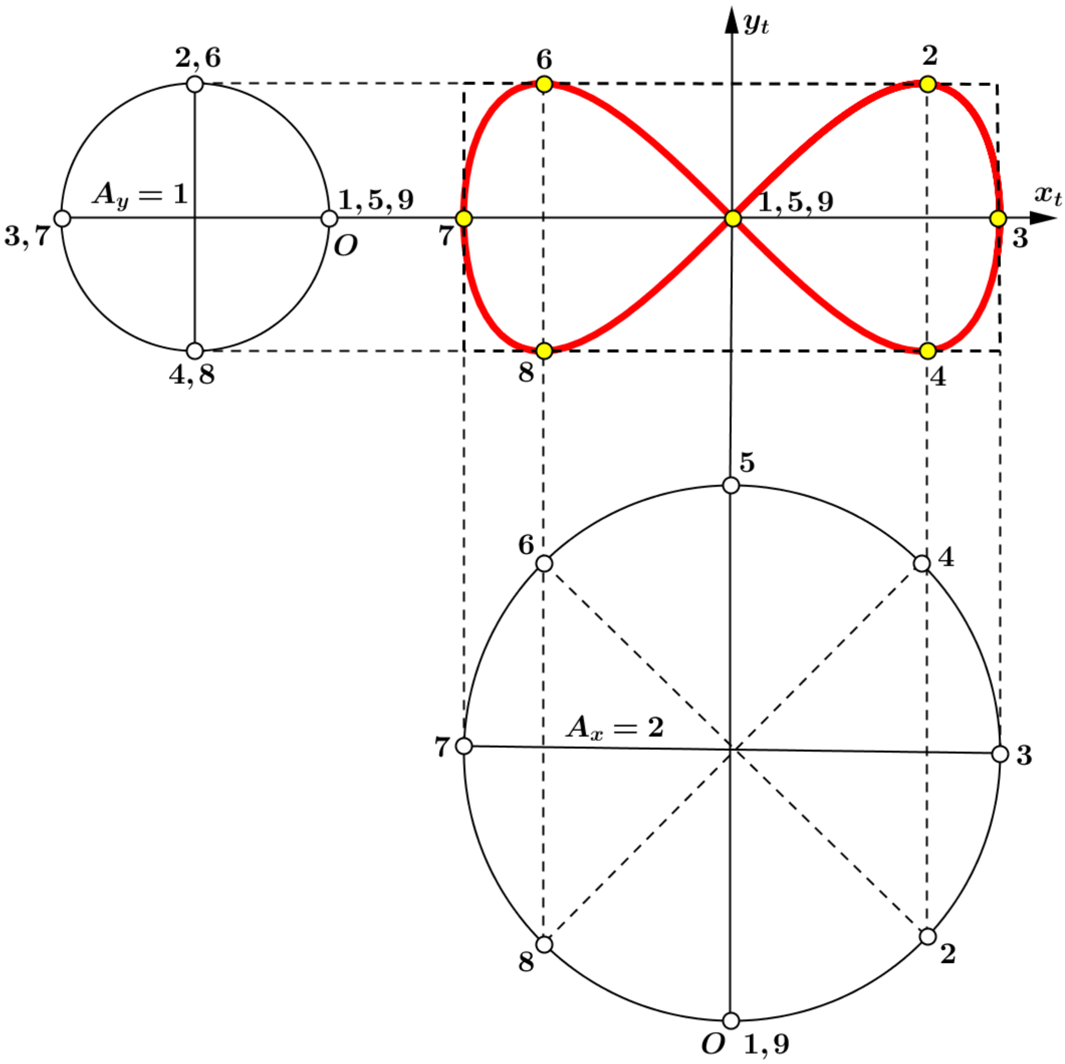
Las ecuaciones anteriores son las ecuaciones paramétricas de la trayectoria y se representan gráficamente mediante los diagramas rotatorios de la figura adjunta. Para describir este movimiento comenzamos dibujando dos circunferencias de radios A_x y A_y. La de radio A_x la usaremos para los desplazamientos en el eje X y la de radio A_y para los desplazamientos en el eje Y. La descripción de este movimiento lo podemos representar gráficamente de la siguiente manera:



Aplicando los vectores rotatorios y proyectando las respectivas posiciones de “x” e “y” para un tiempo determinado, se obtiene un punto que queda encuadrado dentro de un rectángulo de lados $2A_x$ y $2A_y$. El primer M.A.S. se representa proyectando el extremo del vector rotatorio A_x sobre el eje x. La abscisa x del extremo del vector rotatorio de la figura inferior da la abscisa “x” de la `partícula oscilante. El segundo M.A.S. se representa proyectando el extremo del vector rotatorio A_y sobre el eje y. La ordenada y del extremo del vector rotatorio de la figura superior da la ordenada “y” de la partícula oscilante. Por tanto, proyectando vertical y horizontalmente los extremos de estos vectores rotatorios puede determinarse la posición de la partícula en un instante cualquiera. El diagrama anterior muestra la posición de la partícula en los instantes $t = 0$ y $t = t$.

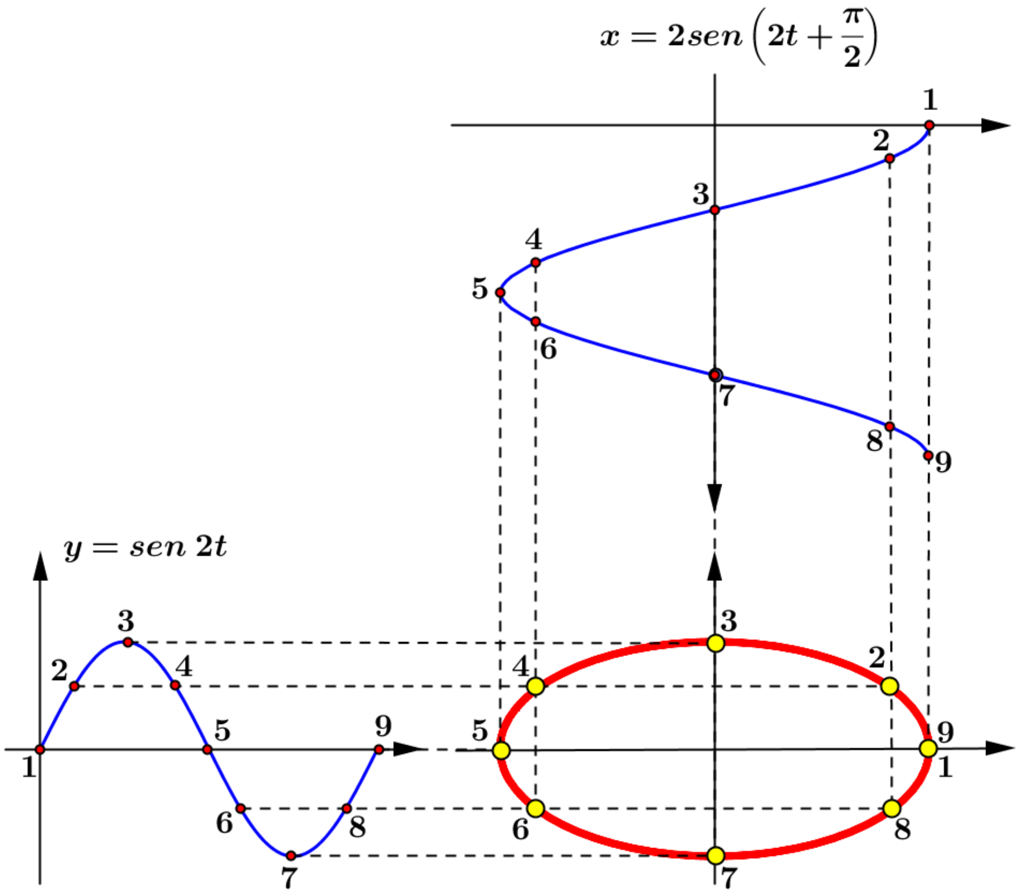
Ejemplo *Dibujar la curva de Lissajous para los valores* $\omega_x = 1$ *y* $\omega_y = 2$ *con* $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ y $A_x = 2$ y $A_y = 1$, es decir $x = 2\,sen\,t$ *e* $y = sen\,2t$.

La frecuencia correspondiente al eje y es doble que la del eje x por lo que el tiempo en dar una vuelta a la circunferencia es la mitad que en el eje x. Para dibujar la curva de Lissajous correspondiente dividimos la circunferencia de eje x en 8 partes iguales comenzando en el origen, ya que la fase inicial es cero, y las numeramos correlativamente de la 1 a la 8. Lo mismo hacemos en la circunferencia correspondiente al eje y por lo que la numeración dará dos vueltas a la circunferencia.



Trazamos rectas de tal forma que definimos las posiciones de los 8 puntos y los unimos siguiendo los números correlativos. El resultado es la figura de Lissajous para el caso que estamos tratando.

Ejemplo *Supongamos dos M.A.S. de direcciones perpendiculares entre sí dados por las expresiones* $x = 2sen\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)$ *e* $y = sen2t$ *. Representar gráficamente a través de las funciones trigonométricas la curva de Lissajous que resulta.*



Las curvas que vienen a continuación corresponden a alguna de las figuras de Lissajous para varias razones de frecuencias y diferencias de fase iniciales. Si las frecuencias son conmensurables, como en las figuras representadas, la partícula recorre una y otra vez una trayectoria cerrada, pero si no lo son la trayectoria no se cierra sobre sí misma y la figura resulta a veces muy complicada. Si las frecuencias son casi conmensurables, la trayectoria cambia con gran lentitud, y si el propio movimiento es muy rápido, como sucede a menudo en el caso de las figuras obtenidas con un oscilógrafo, la impresión es de una curva cerrada que va cambiando de forma gradualmente.

$\omega_1 = \omega_2 = \omega$ y $A_x \neq A_y$

El origen del tiempo lo escogeremos de modo que la fase inicial del movimiento a lo largo del eje X sea cero. El desfase entre los dos movimientos será $\delta = \varphi_2 - 0 = \varphi_2$. De este modo las ecuaciones de los movimientos a lo largo del eje X y del eje Y serán:

$$x(t) = A_x sen\,\omega t \qquad y(t) = A_y sen(\omega t + \delta)$$

Si $\delta = 0$

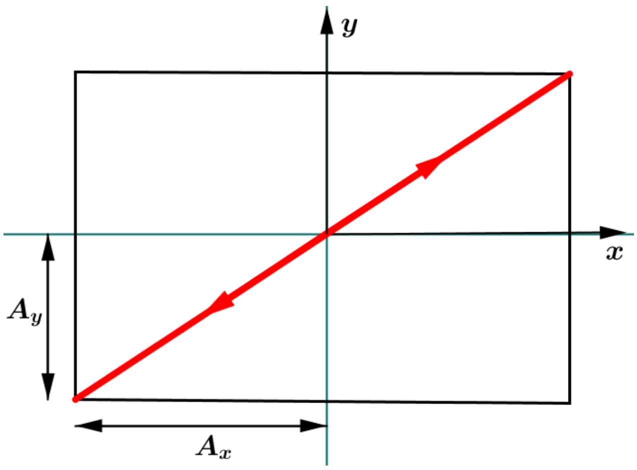
En este caso, x e y se encuentran en fase.

$$x = A_x sen\,\omega t \qquad y = A_y sen\,\omega t$$

Si dividimos entre sí ambas expresiones obtenemos la siguiente ecuación que corresponde a una recta.

$$\frac{y}{x} = \frac{A_y}{A_x} \Rightarrow \boldsymbol{y = \frac{A_y}{A_x} x}$$

Geométricamente esta ecuación representa una recta con pendiente positiva que pasa por el origen, pero como el movimiento está inscrito dentro de un rectángulo que lo engloba, de lados $2A_x$ y $2A_y$, lo que queda al final es un segmento de recta situado en la diagonal del rectángulo que tiene pendiente positiva.



Este segmento está representado en la figura adjunta y el movimiento que resulta es un M.A.S. de amplitud $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ ya que el desplazamiento a lo largo de la diagonal es:

$$r(t) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{A_x^2 sen^2\omega t + A_y^2 sen^2\omega t} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}\, sen\omega t$$

Si $\delta = \pi$

En este caso, x e y se encuentran en oposición de fase.

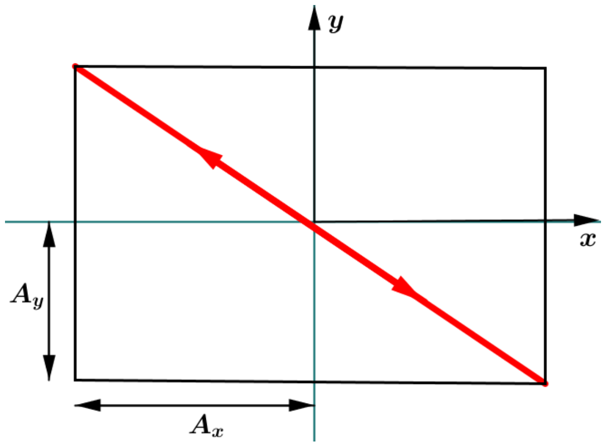
$$x = A_x sen\,\omega t \qquad y = A_y sen(\omega t + \pi) = -A_y sen\,\omega t$$

Si dividimos entre sí ambas expresiones obtenemos la siguiente ecuación, que corresponde a una recta.

$$\frac{y}{x} = -\frac{A_y}{A_x} \Rightarrow \boldsymbol{y = -\frac{A_y}{A_x} x}$$

Geométricamente esta ecuación representa una recta con pendiente negativa que pasa por el origen, pero como el movimiento está inscrito dentro de un rectángulo que lo engloba, de lados $2A_x$ y $2A_y$, lo que queda al final es un segmento de recta situado en la diagonal del rectángulo que tiene pendiente negativa.

El movimiento es nuevamente un M.A.S. de amplitud $A=\sqrt{A_x^2+A_y^2}$.



Se dice que cuando $\delta=0$ *ó* $\delta=\pi$ la interferencia de los M.A.S. perpendiculares de la misma frecuencia da lugar a una polarización rectilínea.

Si $\delta=\dfrac{\pi}{2}$

En este caso se dice que los movimientos a lo largo de los ejes X e Y están en cuadratura.

$$x=A_x sen\,\omega t \qquad y=A_y sen\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)=A_y\cos\omega t$$

Elevamos al cuadrado las dos expresiones.

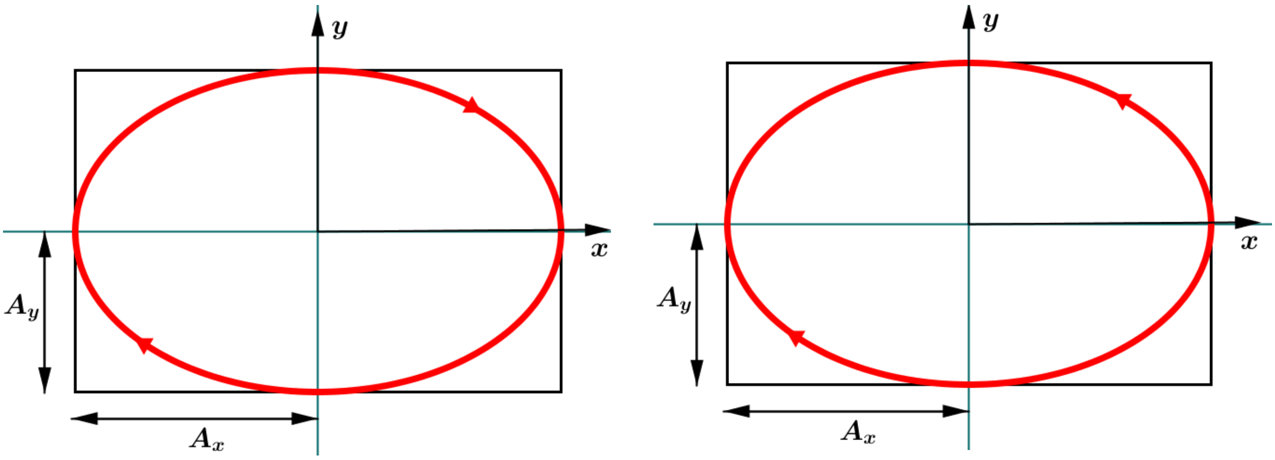
$$x^2=A_x^2 sen^2\,\omega t \qquad y^2=A_y^2\cos^2\omega t$$

Dividiendo la primera expresión entre A_x^2 y la segunda entre A_y^2 y sumando miembro a miembro las expresiones resultantes obtenemos:

$$\frac{x^2}{A_x^2}=sen^2\,\omega t \qquad \frac{y^2}{A_y^2}=\cos^2\omega t$$

$$\frac{x^2}{A_x^2}+\frac{y^2}{A_y^2}=sen^2\,\omega t+\cos^2\omega t=1 \qquad \frac{x^2}{A_x^2}+\frac{y^2}{A_y^2}=1$$

Geométricamente esta ecuación representa una elipse recorrida en el sentido de las agujas del reloj. Se obtiene la misma elipse si $\delta=\dfrac{3\pi}{2}$ *ó* $\delta=-\dfrac{\pi}{2}$ pero el movimiento es en sentido contrario a las agujas del reloj. Por tanto, cuando la diferencia de fase es $\delta=\pm\dfrac{\pi}{2}$ la interferencia de dos M.A.S. de igual frecuencia y direcciones perpendiculares da lugar a una polarización elíptica.



Vamos a estudiar ahora el caso en el que los dos movimientos tienen la misma frecuencia y la misma amplitud, es decir:

$\boldsymbol{\omega_1 = \omega_2 = \omega}$ **y** $\boldsymbol{A_x = A_y = A}$

Para un valor arbitrario de la diferencia de fase δ, la trayectoria es aún una elipse pero sus ejes están rotados con respecto a los ejes de coordenadas. Veamos cómo obtener la ecuación general para las diferentes elipses.

$$x = A\,sen\,\omega t \qquad y = A\,sen(\omega t + \delta) = A[sen\,\omega t\cos\delta + \cos\omega t\,sen\delta]$$

Como $sen\,\omega t = \dfrac{x}{A} \;\Rightarrow\; \cos\omega t = \sqrt{1 - sen^2\,\omega t} = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{A^2}}$

$$y = A\left[\frac{x}{A}\cos\delta + \sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}\;sen\delta\right] \;\Rightarrow\; \boldsymbol{y = x\,cos\delta + \sqrt{A^2 - x^2}\;sen\delta}$$

Supongamos que $\boldsymbol{A = 2}$

Si $\delta = 90^o \;\Rightarrow\; y = x\cos 90^o + \sqrt{4-x^2}\,sen 90^o = \sqrt{4-x^2}$ que corresponde a la circunferencia representada en la primera figura y cuyo movimiento es en el sentido de las agujas del reloj. Todas las demás figuras se obtienen sustituyendo en la ecuación general la amplitud A por 2 y δ por el valor correspondiente.

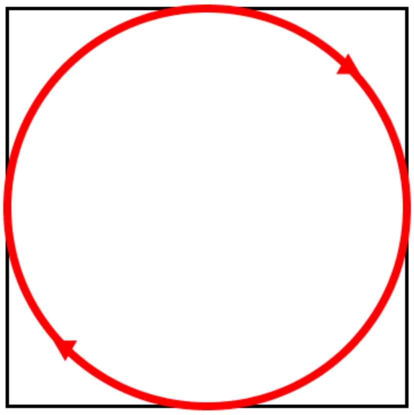
Si $\delta = 120^o \;\Rightarrow\; y = x\cos 120^o + \sqrt{4-x^2}\,sen 120^o = -0'5x + 0'86\sqrt{4-x^2}$

Si $\delta = 150^o \;\Rightarrow\; y = x\cos 150^o + \sqrt{4-x^2}\,sen 150^o = -0'86x + 0'5\sqrt{4-x^2}$

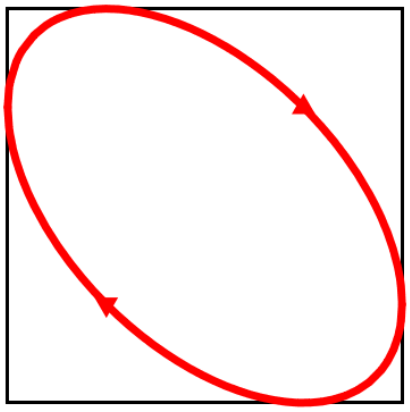
Si $\delta = 180^o \;\Rightarrow\; y = x\cos 180^o + \sqrt{4-x^2}\,sen 180^o = -x$

Si $\delta = 210^o \;\Rightarrow\; y = x\cos 210^o + \sqrt{4-x^2}\,sen 210^o = -0'86x - 0'5\sqrt{4-x^2}$, etc., etc., ……

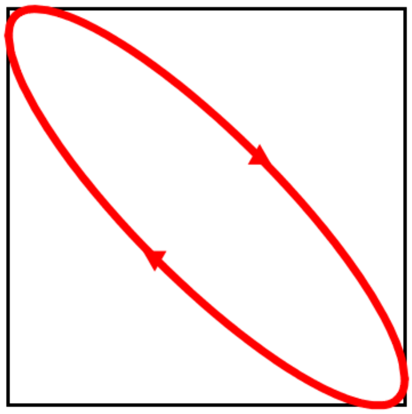
$\delta = 90^\circ$



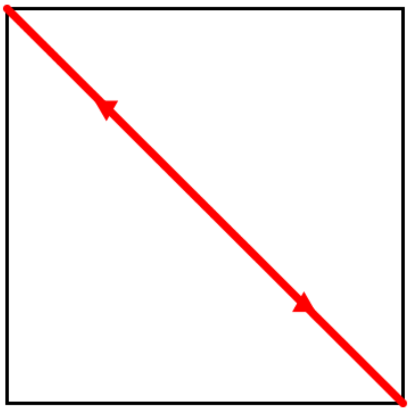
$\delta = 120^\circ$



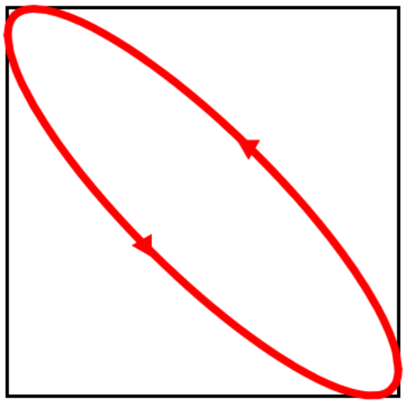
$\delta = 150^\circ$



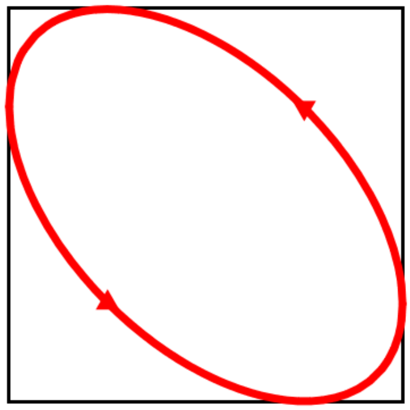
$\delta = 180^\circ$



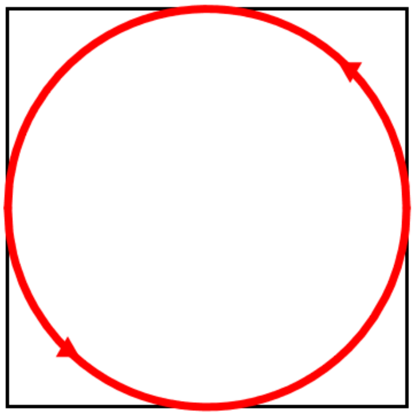
$\delta = 210^\circ$



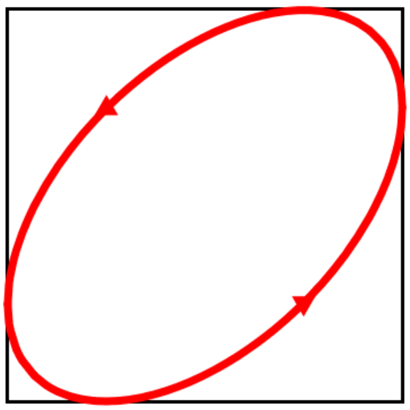
$\delta = 240^\circ$



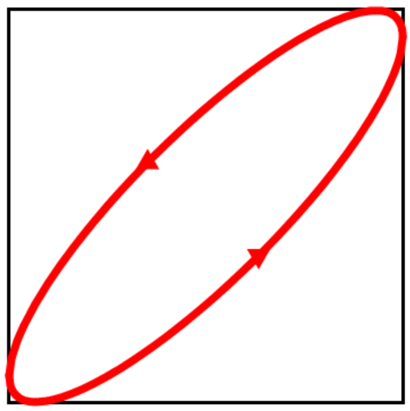
$\delta = 270^\circ$



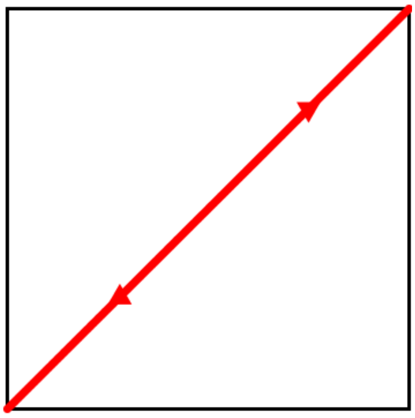
$\delta = 300^\circ$



$\delta = 330^\circ$



$\delta = 360^\circ$



$\omega_1 \neq \omega_2$ y $A_x = A_y = A$

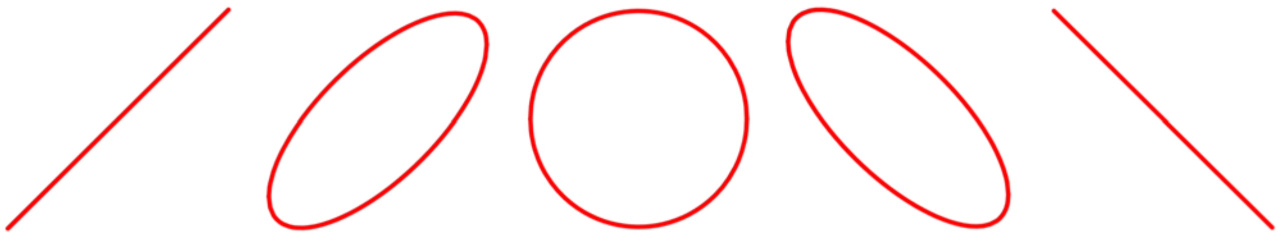
Vamos a suponer en este caso, por comodidad de cálculo, que las amplitudes son iguales y que la fase inicial del movimiento a lo largo del eje X es 0, con lo cual el desfase es $\delta = \varphi_2 - 0 = \varphi_2$.

$$x = A\,sen\,\omega_1 t \qquad y = A\,sen(\omega_2 t + \delta) = A[sen\,\omega_2 t \cos\delta + \cos\omega_2 t\,sen\,\delta]$$

Sea $A_x = A_y = 2$

Si $\omega_2 = \omega_1 = 1$

$\delta = 0$ $\qquad \delta = \frac{\pi}{4}$ $\qquad \delta = \frac{\pi}{2}$ $\qquad \delta = \frac{3\pi}{4}$ $\qquad \delta = \pi$

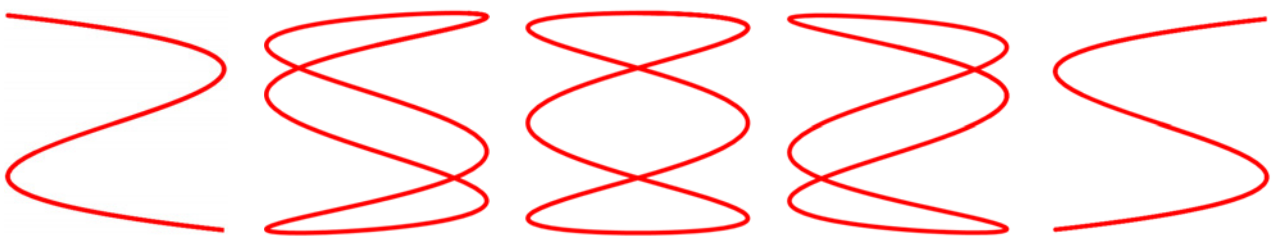


Si $\omega_1 = 2$ y $\omega_2 = 1$

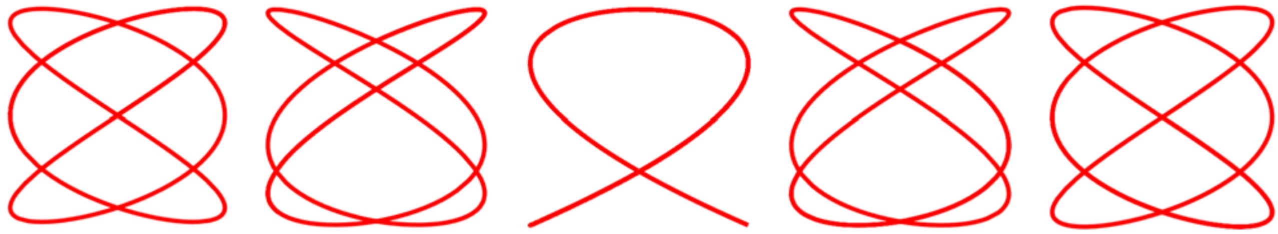
$\delta = 0$ $\qquad \delta = \frac{\pi}{4}$ $\qquad \delta = \frac{\pi}{2}$ $\qquad \delta = \frac{3\pi}{4}$ $\qquad \delta = \pi$

Si $\omega_1 = 3$ y $\omega_2 = 1$

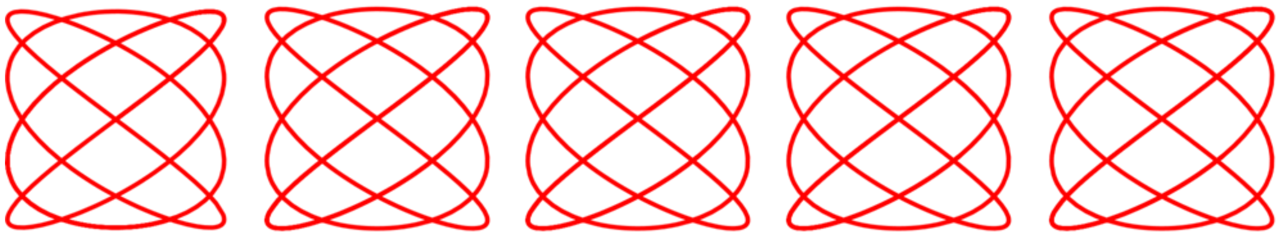
$\delta = 0$ $\qquad \delta = \frac{\pi}{4}$ $\qquad \delta = \frac{\pi}{2}$ $\qquad \delta = \frac{3\pi}{4}$ $\qquad \delta = \pi$



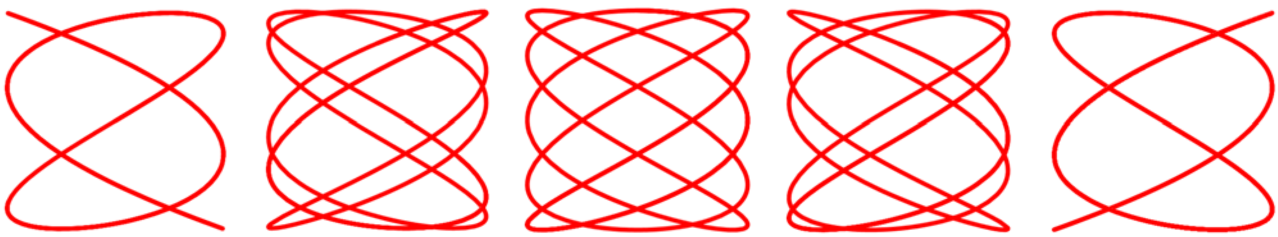
Si $\omega_1 = 3$ y $\omega_2 = 2$



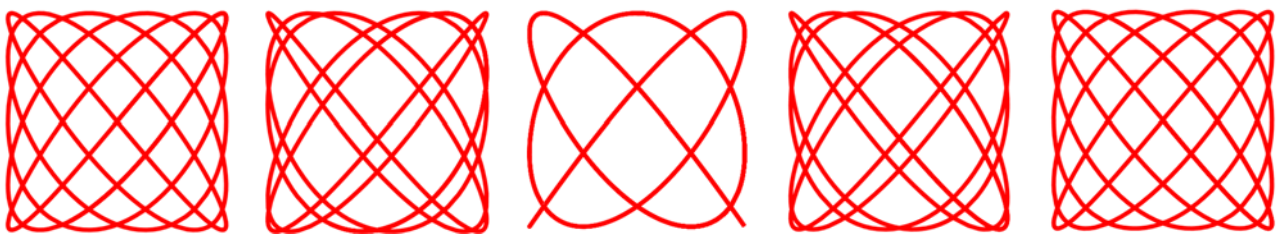
Si $\omega_1 = 4$ y $\omega_2 = 3$



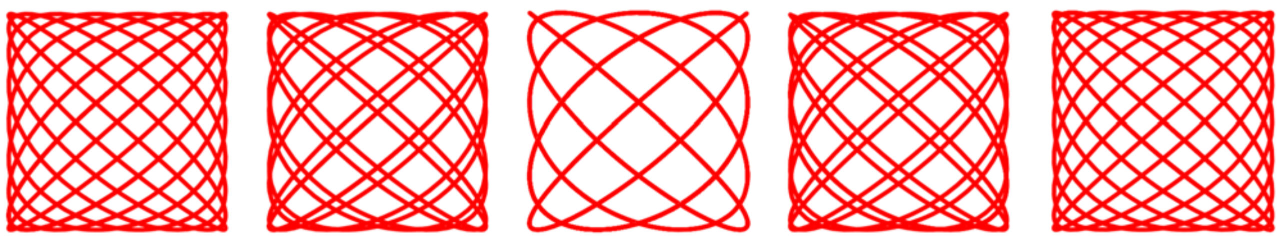
Si $\omega_1 = 5$ y $\omega_2 = 3$



Si $\omega_1 = 5$ y $\omega_2 = 6$

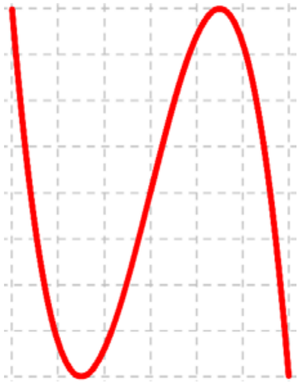


Si $\omega_1 = 9$ y $\omega_2 = 8$



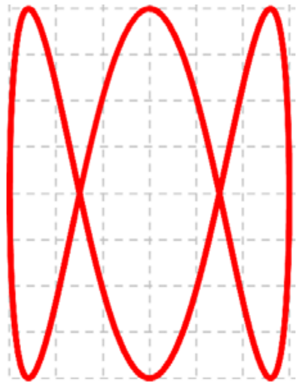
$\omega_1 \neq \omega_2$ y $A_x \neq A_y$

$x = 3sen3t \quad y = 4sen9t$



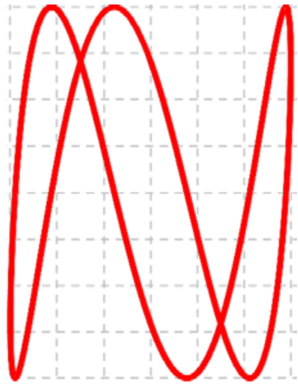
$x = 3sen3t$

$y = 4sen\left(9t + \frac{\pi}{2}\right)$



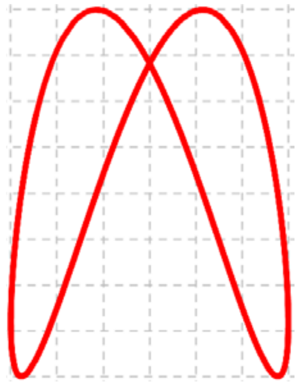
$x = 3sen3t$

$y = 4sen\left(9t + \frac{3\pi}{4}\right)$



$x = 3sen\left(3t - \frac{\pi}{8}\right)$

$y = 4sen\left(6t + \frac{\pi}{2}\right)$

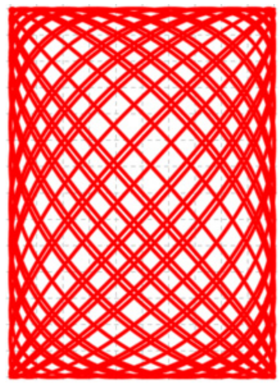


$x = 3sen(3t - 6)$

$y = 4sen(6t + 2)$

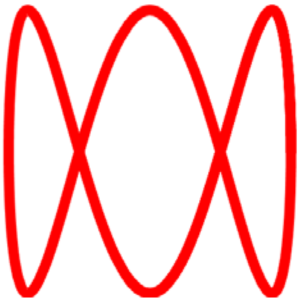
$x = 5sen\left(31'5t + \frac{\pi}{2}\right)$

$y = 7sen25t$



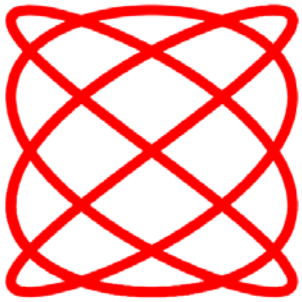
$x = 3\cos t \quad y = sen3t$

Logo de la ABC



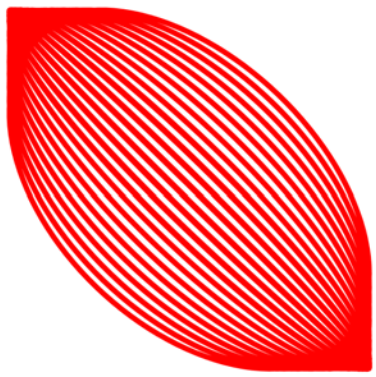
$x = sen4t \quad y = sen3t$

Logo del laboratorio Lincoln



$x = 3sen(7'2t + 4)$

$y = 4sen(7'1t + 2)$



Ortogonalidad de Senos y Cosenos

Se dice que un conjunto de funciones $f_k(t)$ son ortogonales en el intervalo $a < t < b$, si dadas dos funciones cualesquiera de dicho intervalo $f_m(t)\ y\ f_n(t)$ cumplen la siguiente condición:

$$\int_a^b f_m(t)\, f_n(t) = \begin{cases} 0 & si \quad m \neq n \\ r_n & si \quad m = n \end{cases}$$

Ejemplo *Comprobar que las funciones t y* t^2 *son ortogonales en el intervalo* $]-1,1[$.

$$\int_{-1}^{1} t \cdot t^2\, dt = \int_{-1}^{1} t^3\, dt = \left[\frac{t^4}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = 0$$

Ejemplo *Comprobar que las funciones* $sen\, t\ \ y\ \cos t$ *son ortogonales en el intervalo* $]-\pi, \pi[$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} sen\, t \cos t\, dt = \left[\frac{sen^2 t}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{sen^2 \pi}{2} - \frac{sen^2(-\pi)}{2} = 0$$

Supongamos el siguiente conjunto infinito de de funciones ortogonales en el intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

$$1, \cos\omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \cos 3\omega_0 t, \ldots\ldots\ldots, sen\,\omega_0 t, sen\, 2\omega_0 t, sen\, 3\omega_0 t, \ldots\ldots\ldots \qquad \forall\, \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Vamos a comprobar su ortogonalidad tomando las funciones por pares:

1. ***f(t) = 1 y f(t) = cos*** $\boldsymbol{(m\omega_0 t)}$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(m\omega_0 t)\, dt = \left[\frac{sen\, m\omega_0 t}{m\omega_0}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{sen\left(m\omega_0 \frac{T}{2}\right)}{m\omega_0} - \frac{sen\left(m\omega_0 \frac{-T}{2}\right)}{m\omega_0} = \frac{2sen\left(m\omega_0 \frac{T}{2}\right)}{m\omega_0}$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(m\omega_0 t)\, dt = \frac{2sen\left(m \frac{2\pi}{T} \frac{T}{2}\right)}{m\omega_0} = \frac{2sen(m\pi)}{m\omega_0} = 0 \quad \text{ya que m es un número entero.}$$

2. ***f(t) = 1 y f(t) = sen*** $\boldsymbol{(m\omega_0 t)}$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} sen(m\omega_0 t)\, dt = \left[\frac{-\cos m\omega_0 t}{m\omega_0}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{-\cos\left(m\omega_0 \frac{T}{2}\right)}{m\omega_0} - \frac{-\cos\left(m\omega_0 \frac{-T}{2}\right)}{m\omega_0}$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} sen(m\omega_0 t)\, dt = \frac{-\cos\left(m\omega_0 \frac{T}{2}\right)}{m\omega_0} + \frac{\cos\left(m\omega_0 \frac{T}{2}\right)}{m\omega_0} = 0$$

3. $f(t) = \cos(m\omega_0 t)$ **y** $f(t) = \cos(n\omega_0 t)$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(m\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)\,dt = \begin{cases} 0 & \forall m \neq n \\ \dfrac{T}{2} & \forall m = n \neq 0 \end{cases}$$

4. $f(t) = sen(m\omega_0 t)$ **y** $f(t) = sen(n\omega_0 t)$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} sen(m\omega_0 t)\,sen(n\omega_0 t)\,dt = \begin{cases} 0 & \forall m \neq n \\ \dfrac{T}{2} & \forall m = n \neq 0 \end{cases}$$

5. $f(t) = sen(m\omega_0 t)$ **y** $f(t) = \cos(n\omega_0 t)$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} sen(m\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)\,dt = 0 \qquad \forall m,n \in R$$

En estos tres últimos casos, para resolver las integrales hay que usar las fórmulas trigonométricas de transformaciones de productos de senos y cosenos en sumas así como las del seno y coseno del ángulo doble.

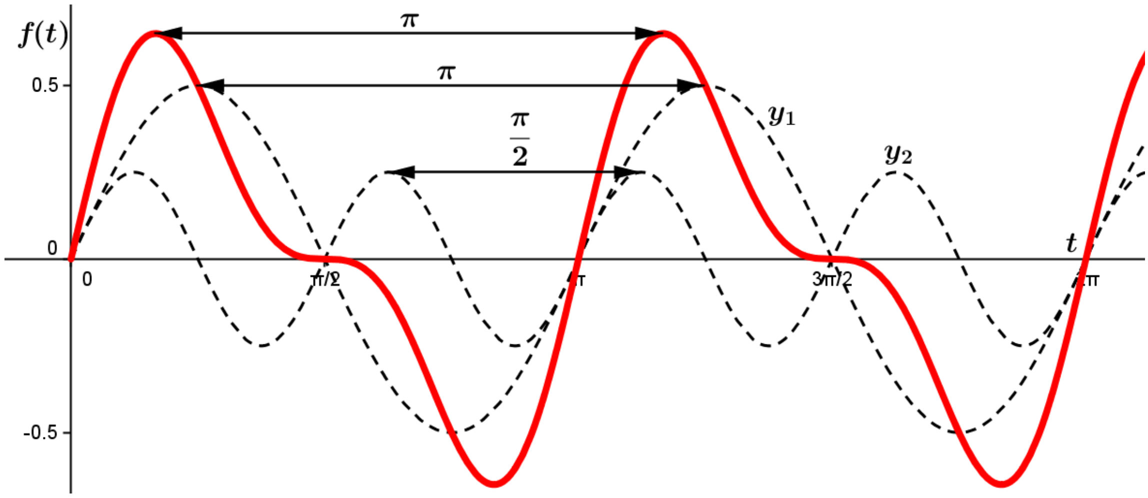
Análisis de Fourier del movimiento periódico

Una función periódica $f(t)$ de periodo T tiene la propiedad de que $f(t) = f(t+T)$ como se ha visto anteriormente. *Este movimiento general oscilatorio puede expresarse como una combinación de movimientos armónicos simples*. Consideremos, por ejemplo, el movimiento cuyo desplazamiento está descrito por la expresión:

$$f(t) = A\,sen(\omega t) + B\,sen(2\omega t)$$

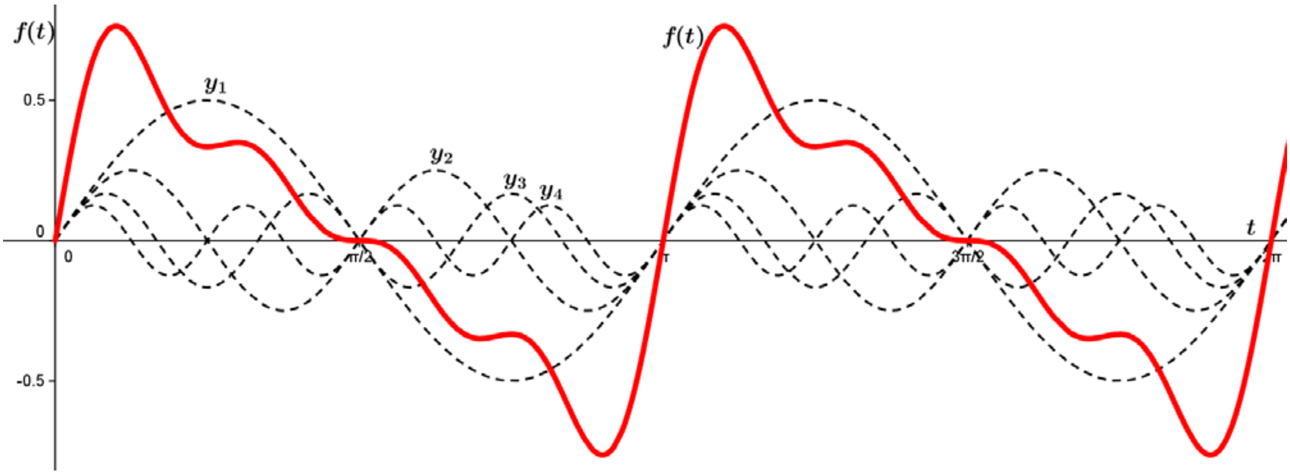
Esta expresión representa la superposición de dos M.A.S. de frecuencias angulares ω y 2ω y periodos T y $\frac{T}{2}$. La función $f(t)$ también es periódica y su periodo será T.

Sea $f(t) = \frac{1}{2}sen(2t) + \frac{1}{4}sen(4t)$ con $y_1 = \frac{1}{2}sen(2t)$ e $y_2 = \frac{1}{4}sen(4t)$, como se observa el las gráficas siguientes. Los periodos de y_1 e y_2 son respectivamente π y $\frac{\pi}{2}$ y el de $f(t)$ es π.



Del razonamiento anterior se observa que *sumando movimientos armónicos simples cuyas frecuencias sean múltiplos de una frecuencia fundamental y cuyas amplitudes sean seleccionadas correctamente (en general la amplitud de los armónicos se expresa generalmente como un cierto tanto por ciento en relación a la onda fundamental) podemos obtener casi cualquier función periódica arbitraria. Lo inverso también se cumple y constituye el* ***Teorema de Fourier***.

En el ejemplo siguiente se representa la función $f(t) = \frac{1}{2}sen(2t) + \frac{1}{4}sen(4t) + \frac{1}{6}sen(6t) + \frac{1}{8}sen(8t)$ donde las frecuencias sucesivas se obtienen sumando 2 a la anterior y las amplitudes corresponden a $\frac{1}{2n}$ con $n = 1, 2, 3, ...$ siendo $y_1 = \frac{1}{2}sen(2t)$, $y_2 = \frac{1}{4}sen(4t)$, $y_3 = \frac{1}{6}sen(6t)$, $y_4 = \frac{1}{8}sen(8t)$



Teorema de Fourier

El Teorema de Fourier establece que una función periódica $f(t)$ *de periodo* $T = \frac{2\pi}{\omega}$ *puede expresarse de la siguiente forma:*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1cos(\omega t) + a_2cos(2\omega t) + a_3cos(3\omega t) + ... + a_ncos(n\omega t) + ... +$$

$$+ b_1sen(\omega t) + b_2sen(2\omega t) + b_3sen(3\omega t) + ... + b_nsen(n\omega t) + ...$$

que se conoce como serie de Fourier. A la frecuencia ω se la denomina *frecuencia fundamental* y a las frecuencias $2\omega, 3\omega, 4\omega, ..., n\omega$ se las denomina armónicos o sobretonos.

El planteamiento general consiste en lo siguiente: dada una función periódica $f(t)$, *por ejemplo de periodo* 2π , *queremos escribirla como una combinación de funciones en la que intervengan únicamente senos y cosenos, que son las funciones periódicas de periodo* 2π *más simples y conocidas. Una serie de este tipo recibe el nombre de Serie Trigonométrica o Serie de Fourier.*

Llamaremos ***Serie de Fourier*** asociada a $f(t)$, a una serie trigonométrica. La serie puede desarrollarse igual para cualquier función durante cualquier duración finita de tiempo mientras la componente fundamental de la serie pasa por un ciclo completo. Si llamamos t_1 al comienzo del periodo T y t_2 al final de dicho periodo, el periodo T de la componente fundamental será $t_2 - t_1 = T$, por tanto:

$$\omega T = 2\pi \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad ó \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

El método para encontrar los coeficientes de la serie de Fourier se llama *Análisis de Fourier* y se basa en que las funciones seno y coseno constituyen un sistema ortogonal, es decir, el promedio de sus productos en cruz es cero. Según esto resulta:

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot\cos(n\omega t)+b_n\cdot sen(n\omega t)) \qquad con \quad \omega=\frac{2\pi}{T} \quad y \quad n\in Z \quad (*)$$

El problema se reduce a calcular los coeficientes $a_0,a_1,a_2,.........,b_1,b_2,b_3,.........$ lo que se resuelve considerando la ortogonalidad de las funciones seno y coseno.

Multiplicando los dos miembros de la igualdad (*) por $\cos(n\omega t)$ e integrando entre $-\frac{T}{2}$ y $\frac{T}{2}$ se obtiene:

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos(n\omega t)\,dt \qquad n=0,1,2,3,...... \quad \Rightarrow \quad a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\,dt$$

Multiplicando los dos miembros de la igualdad (*) por $sen(n\omega_0 t)$ e integrando entre $-\frac{T}{2}$ y $\frac{T}{2}$ se obtiene:

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\,sen(n\omega t)\,dt \qquad n=1,2,3,.......$$

Como la ortogonalidad de las funciones seno y coseno no sólo de da en el intervalo $-\frac{T}{2}$ a $\frac{T}{2}$, sino en cualquier intervalo que cubra un periodo completo (de t_0 a t_0+T, con t_0 arbitrario) las fórmulas anteriores pueden calcularse en cualquier intervalo que cumpla este requisito.

Podemos establecer que hay condiciones de simetría que permiten establecer la existencia o no de determinados términos de la serie, lo que nos ahorrará trabajo en el cálculo.

<u>Función Par</u>

Si la función es par entonces $b_n=0$ y la serie de Fourier solo contiene términos en coseno.

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\omega t) \quad \text{con} \quad a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos(n\omega t)\,dt$$

<u>Función Impar</u>

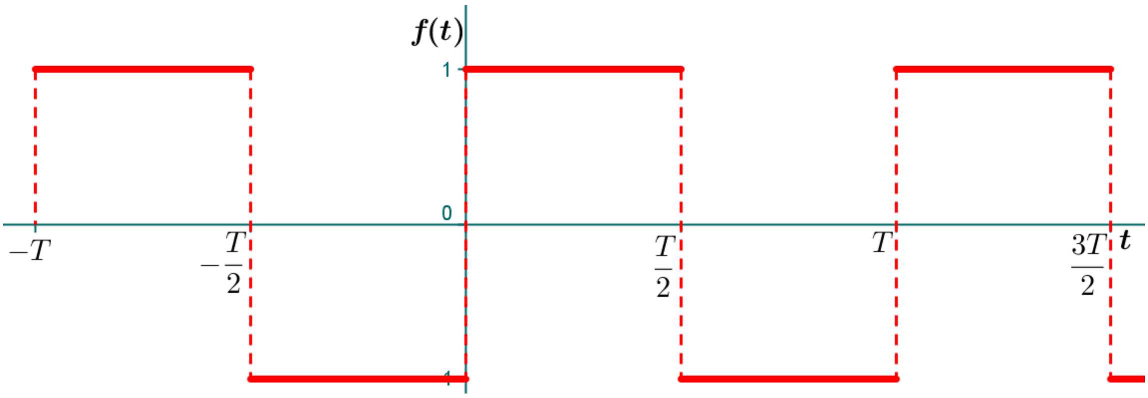
Si la función es impar entonces $a_n=0$ y la serie de Fourier sólo contiene términos en seno.

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\,sen(n\omega t) \quad \text{con} \quad b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\,sen(n\omega t)\,dt$$

El Teorema de Fourier nos da una razón del por qué de la importancia del Movimiento Armónico Simple, ya que aplicando el teorema cualquier clase de movimiento periódico puede considerarse como la superposición de movimientos armónicos simples.

<u>Ejemplo</u> *Encontrar la serie de Fourier para la función* $f(t)=\begin{cases}-1 & si \quad -\frac{T}{2}<T<0 \\ 1 & si \quad 0<T<\frac{T}{2}\end{cases}$

Expandiendo el intervalo a toda la recta real obtenemos:



Cálculo del coeficiente a_n

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt = \frac{2}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{0} -\cos(n\omega_0 t)\,dt + \int_0^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega_0 t)\,dt\right] =$$

$$\frac{2}{T}\left[-\frac{sen(n\omega_0 t)}{n\omega_0}\right]_{-\frac{T}{2}}^{0} + \frac{2}{T}\left[\frac{sen(n\omega_0 t)}{n\omega_0}\right]_0^{\frac{T}{2}} = 0 \quad \forall n \neq 0$$ resultado que ya conocíamos, por ser impar.

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt = \frac{2}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{0} -dt + \int_0^{\frac{T}{2}} dt\right] = \frac{2}{T}[-t]_{-\frac{T}{2}}^{0} + \frac{2}{T}[-t]_0^{\frac{T}{2}} = 0$$ por ser una función impar.

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,sen(n\omega_0 t)\,dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0} -sen(n\omega_0 t)\,dt + \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} sen(n\omega_0 t)\,dt =$$

$$\frac{2}{T}\left[\frac{\cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0}\right]_{-\frac{T}{2}}^{0} + \frac{2}{T}\left[\frac{-\cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0}\right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{2}{T}\left[\frac{1}{n\omega_0} - \frac{\cos\left(n\omega_0\frac{T}{2}\right)}{n\omega_0} - \frac{\cos\left(n\omega_0\frac{T}{2}\right)}{n\omega_0} + \frac{1}{n\omega_0}\right] =$$

$$\frac{2}{T}\left[\frac{2}{n\frac{2\pi}{T}} - \frac{\cos\left(n\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}\right)}{n\frac{2\pi}{T}} - \frac{\cos\left(n\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}\right)}{n\frac{2\pi}{T}}\right] = \frac{2}{T}\left[\frac{T}{n\pi} - \frac{T\cos(n\pi)}{2\pi n} - \frac{T\cos(n\pi)}{2\pi n}\right] =$$

$$2\left[\frac{1}{n\pi} - \frac{\cos(n\pi)}{2\pi n} - \frac{\cos(n\pi)}{2\pi n}\right] = \frac{2}{n\pi}[1-\cos(n\pi)] = \frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right] \quad \forall n \neq 0$$

La serie de Fourier queda como sigue:

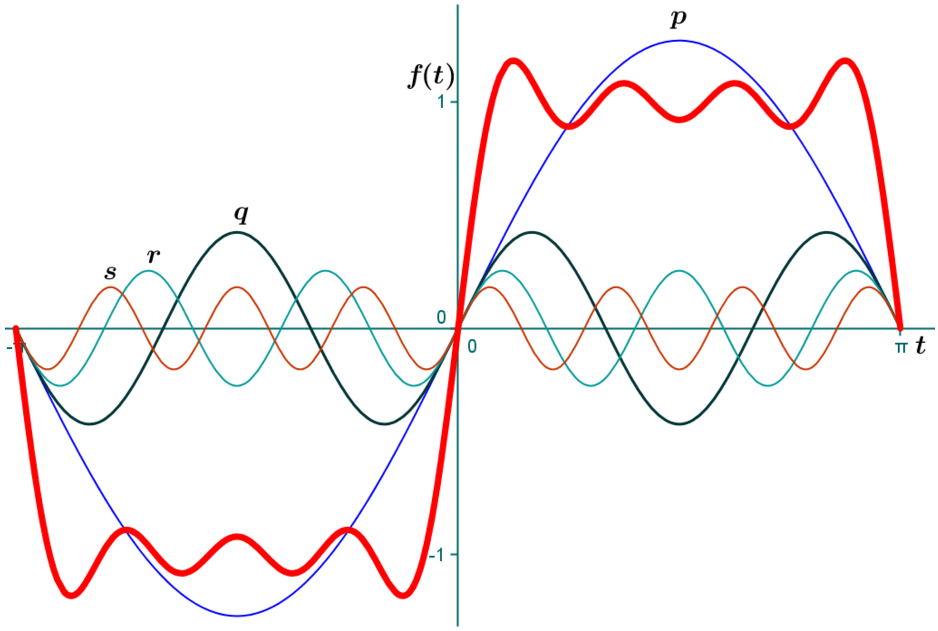
$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n}\left[1-(-1)^n\right] sen(n\omega_0 t)$$

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left[sen(\omega_0 t) + \frac{1}{3}sen(3\omega_0 t) + \frac{1}{5}sen(5\omega_0 t) + \frac{1}{7}sen(7\omega_0 t) + ...\right]$$

Si $\omega_0 = 1 \Rightarrow T = 2\pi$ y la función es:

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left[sen\,t + \frac{sen\,3t}{3} + \frac{sen\,5t}{5} + \frac{sen\,7t}{7} + ...\right]$$

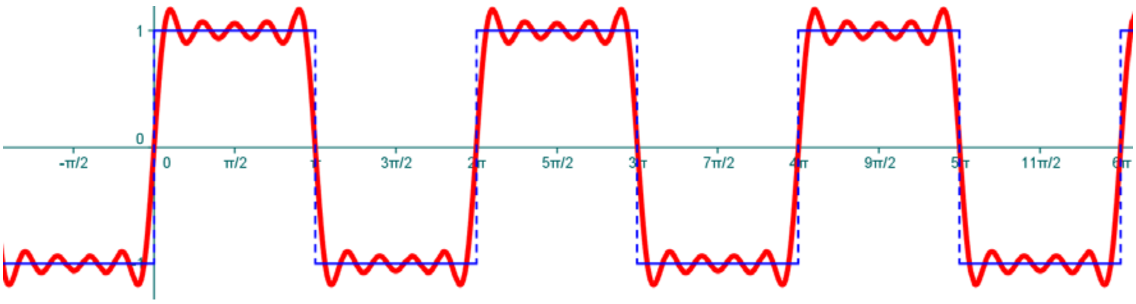
Representando en los mismos ejes el primer término *(componente fundamental)*, el segundo término *(tercer armónico),* el tercer término *(5º armónico)* y el cuarto término *(7º armónico)* y superponiendo a estas gráficas la función que da la suma de estos cuatro términos obtenemos:



siendo:

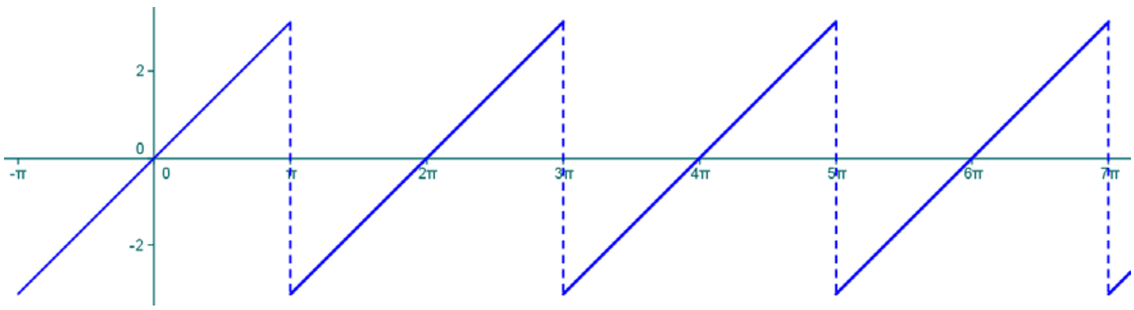
$$p=\frac{4}{\pi}sen\,t \quad q=\frac{4}{\pi}\frac{sen\,3t}{3} \quad r=\frac{4}{\pi}\frac{sen\,5t}{5} \quad s=\frac{4}{\pi}\frac{sen\,7t}{7} \quad f(t)=p+q+r+s \;\; en\;]-\pi,\pi[$$

Si consideramos la suma de los infinitos términos la representación gráfica es la siguiente:



Ejemplo *Desarrollar en serie de Fourier a función $f(t)=t$ en el intervalo $-\pi<t<\pi$.*

Es una función impar ya que $f(-t)=-f(t)$, es decir $a_n=0$. Expandiendo esta función obtenemos:



$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\, sen(nt)\, dt$$

$$\left.\begin{array}{ll} t = u & dt = du \\ sen(nt)\,dt = dv & \dfrac{-\cos(nt)}{n} = v \end{array}\right\} \qquad \int t\, sen(nt)\, dt = \frac{-t\cos(nt)}{n} + \int \frac{\cos(nt)}{n}\, dt$$

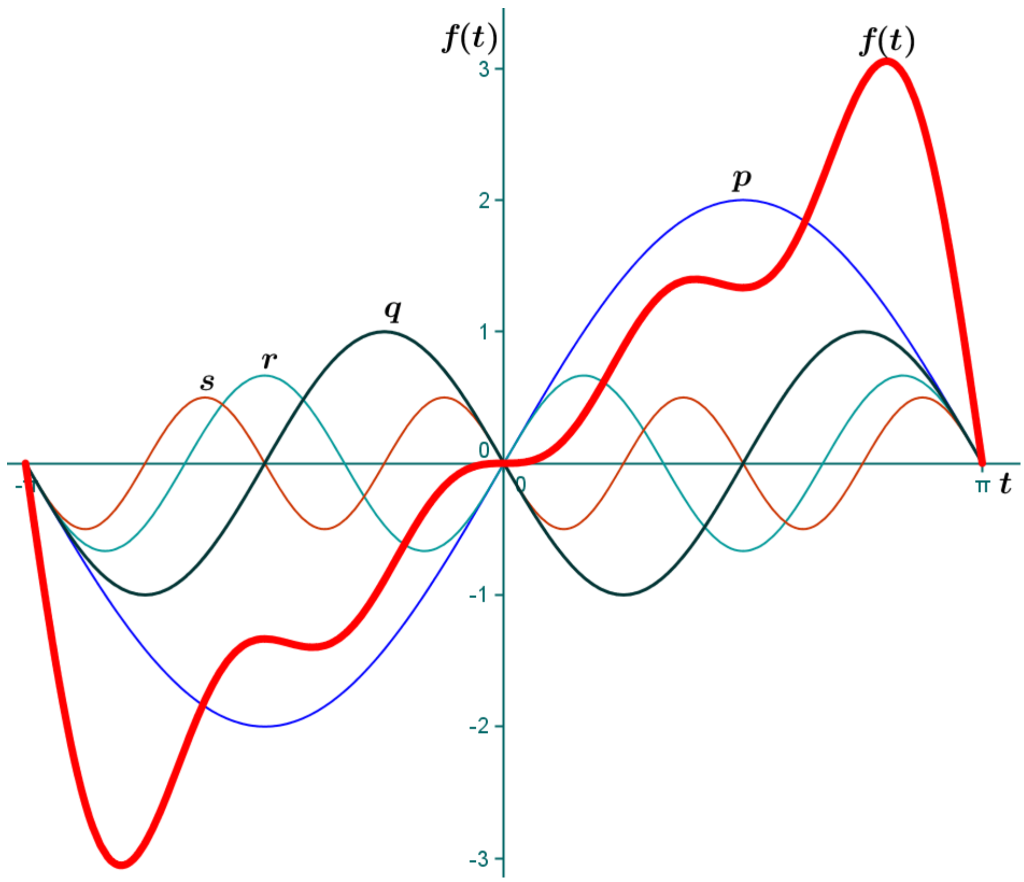
$$\frac{-t\cos(nt)}{n} + \int \frac{\cos(nt)}{n}\, dt = \frac{-t\cos(nt)}{n} + \frac{sen(nt)}{n^2} = \frac{-nt\cos(nt) + sen(nt)}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\, sen(nt)\, dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-nt\cos(nt) + sen(nt)}{n^2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{-2\pi n\cos(n\pi) + 2\, sen(n\pi)}{\pi\, n^2}$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, sen(nt) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2\pi n\cos(n\pi) + 2\, sen(n\pi)}{\pi\, n^2} \cdot sen(nt)$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2\pi\, n\cos(n\pi)\, sen(nt) + 2\, sen(n\pi)\, sen(nt)}{\pi\, n^2} = 2\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{n} sen(nt)$$

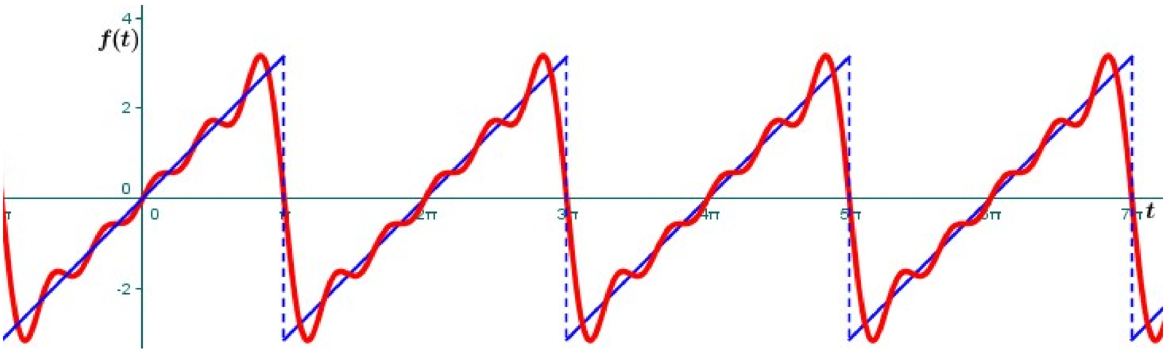
$$f(t) = 2\left(sen\, t - \frac{1}{2} sen(2t) + \frac{1}{3} sen(3t) - \frac{1}{4} sen\, 4t + \frac{1}{5} sen(5t) + \ldots\ldots\right)$$



siendo:

$$p = 2sent \quad q = -sen(2t) \quad r = \frac{2}{3}sen(3t) \quad s = -\frac{1}{2}sen(4t) \quad f(t) = p + q + r + s \quad en \quad]-\pi, \pi[$$

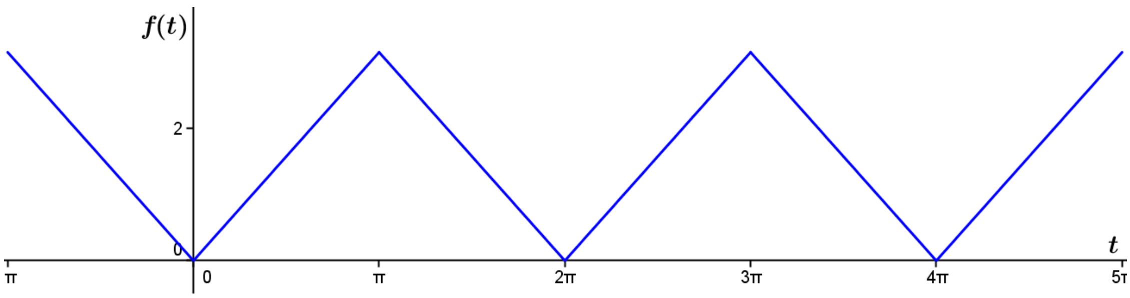
Si consideramos la suma de los infinitos términos la representación gráfica es la siguiente:



Ejemplo *Desarrollar la función* $f(t) = |t|$ *en el intervalo* $-\pi < t < \pi$.

$$f(t) = \begin{cases} -t & si \quad -\pi < t < 0 \\ t & si \quad 0 < t < \pi \end{cases}$$

Es una función par ya que $f(t) = f(-t)$, por lo tanto $b_n = 0$ y el periodo de la función es $T = 2\pi$. Expandiendo esta función su gráfica es:



Cálculo del coeficiente a_n

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -t\cos(nt)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\cos(nt)\,dt = \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} -\dfrac{4}{n^2\pi} & n = 1,3,5,....... \\ 0 & n = 2,4,6,......... \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -tdt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} tdt = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{t^2}{2}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{0}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{2}\right] + \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{2}\right] = \frac{2\pi^2}{2\pi} = \pi$$

La serie de Fourier queda como sigue:

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)^2}$$

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos t}{1} + \frac{\cos 3t}{9} + \frac{\cos 5t}{25} + \frac{\cos 7t}{49} + ...\right]$$