Películas de Jabón

y

Superficies Mínimas

Escucho y Olvido
Veo y Recuerdo
Hago y Comprendo
Confucio

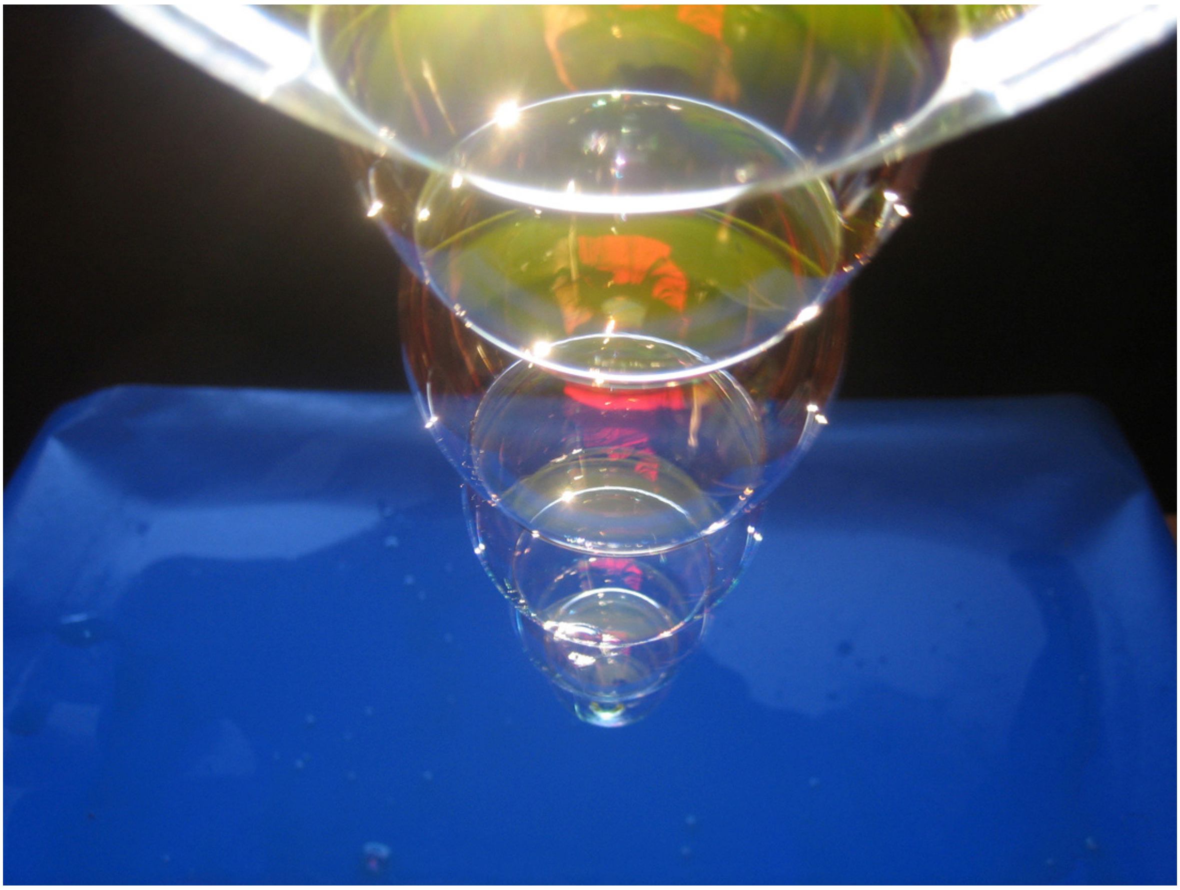
Geometría con Películas y Pompas de jabón

El conjunto de materiales y experiencias que se presentan a continuación están centrados en las áreas de Matemáticas y Física y vinculados a conceptos tales como "Tensión Superficial", "Recorridos Mínimos" y "Superficies Mínimas". Los contenidos de esta propuesta de trabajo con Películas y Pompas de Jabón no aparecen ni en los diseños curriculares ordinarios de la E.S.O. ni en los del Bachillerato.

Un segmento rectilíneo es la línea más corta entre dos puntos y un arco de círculo máximo es la curva más corta que une dos puntos sobre una superficie esférica. *La figura plana que tiene menor perímetro para una superficie determinada es el círculo y de todos los cuerpos que tienen el mismo volumen, el que tiene menor superficie es la esfera*.

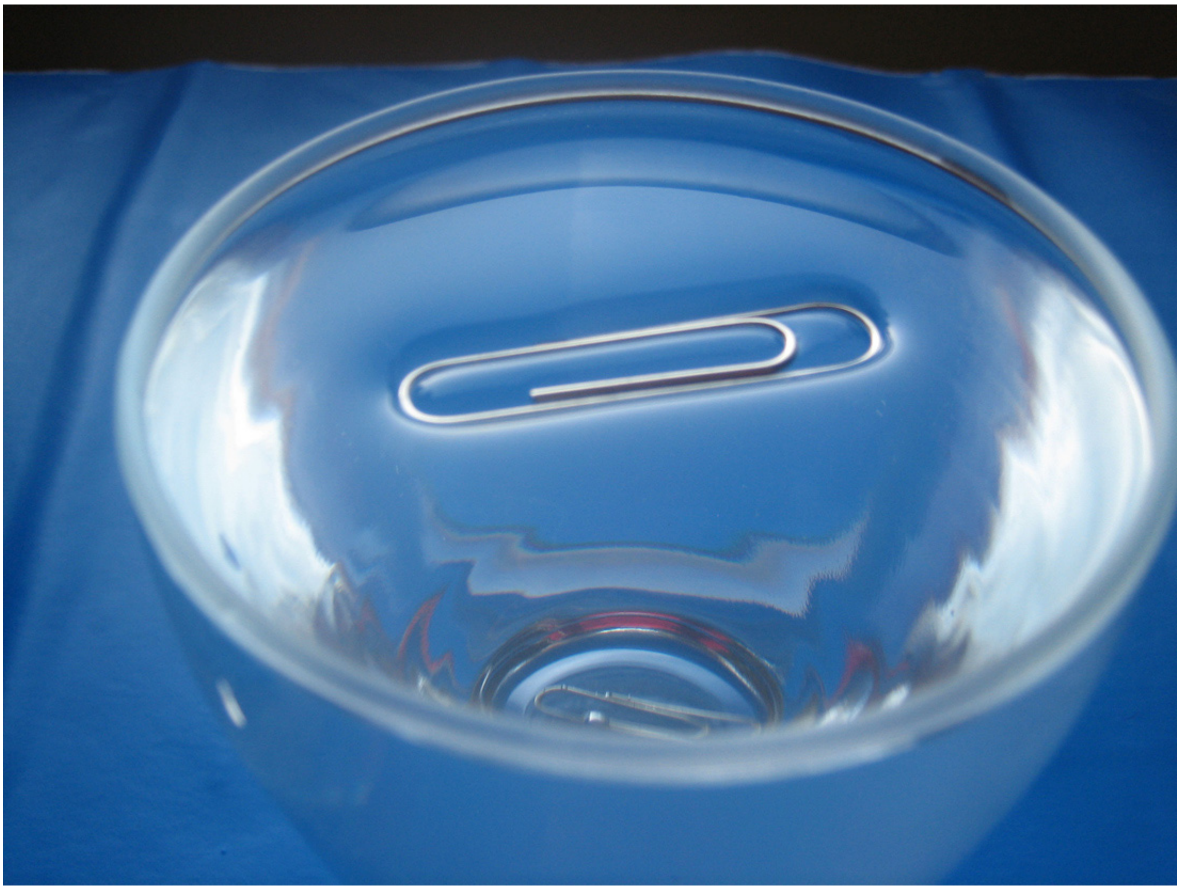
En un panal de abejas las celdillas tiene una sección hexagonal y las alas de ciertos insectos como las libélulas presentan un enrejado casi hexagonal. El hexágono es uno de los tres polígonos regulares que tesela el plano, es decir recubre el plano sin dejar huecos. Las semillas de los girasoles se distribuyen formando espirales. La espiral aparece también en el crecimiento de los Caracoles, en la lengua de las Mariposas, en la forma de las Galaxias y en los Huracanes. ¿Por qué la naturaleza ha elegido la espiral y no otra forma cualquiera? Porque las espirales ahorran espacio. Hay situaciones en las que la naturaleza actúa de manera que minimiza longitudes y superficies como por ejemplo la línea recta para un rayo de luz o una esfera para la burbuja. Los Planetas, las Pompas de Jabón y las Gotas de agua tienen forma esférica. ¿A qué se debe esto? Se debe a que la circunferencia y la esfera tienen la máxima simetría y cumplen los principios de optimización.

Para resolver los problemas de máximos y mínimos se requiere unos conocimientos de Cálculo Infinitesimal. Sin embargo *veremos que basta una simple disolución jabonosa para que podamos llegar a una comprobación visual y experimental de problemas de física que a las matemáticas le ha llevado tanto tiempo dar respuesta y que todavía hoy en día no son definitivos.*



Tensión Superficial

Los ríos no suben por encima de las montañas cuando pueden rodearlas, y esto no sucede por pereza sino como consecuencia de una ley por la que la naturaleza gasta la menor energía posible. *Todos los sistemas que hay en la naturaleza tienden a esa mínima energía.* ***La tensión superficial de los líquidos es la tendencia que tienen sus moléculas a juntarse*** y es la causante de que la superficie que muestran al exterior sea la mínima posible y de que su superficie actúe como una membrana tensa con propiedades elásticas. Esta fuerza es bastante débil y se rompe con facilidad, pero es capaz de aguantar el peso de algunos objetos haciéndoles flotar aunque su densidad sea mucho más alta que la del agua. El resultado más familiar de la ***tensión superficial*** del agua es la capacidad que presenta para sostener pequeños objetos sobre su superficie. Por ejemplo, si colocamos cuidadosamente sobre su superficie una hoja de afeitar, una aguja de acero o incluso varios clips, ayudándonos para ello de un tenedor o unas pinzas, comprobaremos que los objetos se mantienen a flote, no se hunden. *Si miramos detenidamente la superficie, horizontalmente, veremos que está deformada y que permanece un poco hundida como si se comportara como una malla elástica* (ver fotos), pero si se agita la superficie acabarán por hundirse.



Sabemos, por el principio de Arquímedes, que el acero no flota ya que su densidad es mayor que la del agua, pero si sumergimos la hoja de afeitar, la aguja o el clic, se hundirán tal como enuncia dicho principio y solamente podrán flotar cuando estén enteramente en la superficie del agua en reposo. Pero si echamos cuidadosamente sobre el agua, gota a gota, un detergente como Fairy, observaremos que poco a poco los clics, la hoja de afeitar o la aguja, se van cayendo al fondo ya que la tensión superficial del agua disminuye al reducirse la fuerza de cohesión entre las moléculas, impidiendo así que los objetos floten. Este tipo de productos químicos como los detergentes se denominan agentes tensoactivos.

La tensión superficial del agua es mayor que la de cualquier líquido ordinario, excepto el mercurio.

En realidad la tensión superficial se produce por la atracción que sienten las moléculas del líquido entre ellas y más específicamente el efecto que tienen estas atracciones en las moléculas de la superficie. Una molécula en el interior de un líquido está sometida a la acción de fuerzas atractivas (cohesión) en todas las direcciones, siendo la resultante de todas ellas nula cuando el líquido está en equilibrio (similar a como se anula la tensión entre los radios de una rueda de bicicleta y la rueda no se deforma). Pero si la molécula está situada en la superficie del líquido, sufre un conjunto de fuerzas de cohesión, cuya resultante es perpendicular a la superficie y dirigida hacia el líquido (similar a quitar todos los radios de la mitad de la rueda de bicicleta). Esa atracción hace que las moléculas que están en contacto con el aire se unan entre sí, como se cogen del brazo las personas que van al frente de una manifestación organizada, formándose así una película.

Gracias a la tensión superficial las superficies de los líquidos "tiran hacia el interior" de los mismos. Las gotas de agua de un grifo son casi esféricas, ya que la superficie que rodea la gota tira hacia adentro. En realidad están deformadas por el propio peso y por la resistencia del aire al caer. Pero si eliminamos el peso del agua, es decir en un entorno sin gravedad como el del espacio, los líquidos forman esferas. La verdadera forma de los líquidos es la esfera porque es la forma que tiene una energía menor.

El jabón y los productos detergentes en general contienen tensoactivos, unas moléculas muy curiosas porque tienen dos partes muy diferenciadas: por un lado, son amantes del agua, son hidrófilas, y, por el otro, la odian, son hidrófugas. Dado este juego amor-odio las moléculas de tensoactivo, en contacto con el agua, tienden a orientarse de manera que la parte hidrófuga huye del agua y la hidrófila se sumerge en ella.

Al poner el jabón, las moléculas de tensoactivo se colocan en la superficie externa e interna de la burbuja, con las cabezas hidrófugas hacia el aire y las hidrófilas hacia el agua. Se forma así una especie de sándwich donde el pan lo forman las moléculas de jabón y el jamón las de agua. Curiosamente, las moléculas de tensoactivo no refuerzan la cohesión de las de agua sino, todo lo contrario, la disminuyen hasta un tercio de lo habitual. *Podríamos pensar que al existir menos fuerza de unión entre las moléculas de la pared ésta se romperá antes pero no es así. Veamos por qué.*

Dado el comportamiento de las moléculas de tensoactivo, cuando la pared de la burbuja se estrecha, queda menos agua entre las dos capas y la parte hidrófila de las moléculas de jabón se desplazan buscando regiones con más agua. Entonces sucede algo curioso. Como consecuencia de la disminución de moléculas de tensoactivo, la proporción de moléculas de agua en esa región es mayor y aumenta la tensión superficial que une la pared, en cambio, donde hay más agua, se acumula más jabón y la tensión disminuye. *De esta manera gracias al comportamiento del jabón, la pared de la burbuja refuerza las zonas débiles, debilita las fuertes, se hace mucho más estable y puede durar mucho más tiempo sin romperse*. *Por otro lado, la presencia del jabón evita que se evapore el agua y contribuye también a darle estabilidad a la burbuja*.

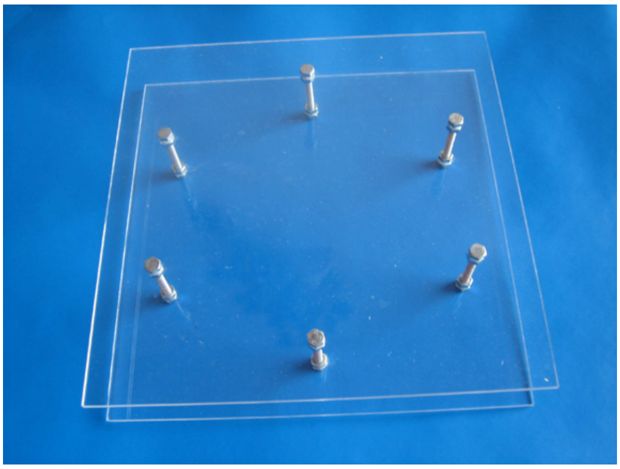
Una de las primeras personas en investigar las superficies jabonosas fue el físico belga ***Joseph Antoine F. Plateau*** (1801-1883) quien observó que al introducir una estructura cerrada en una disolución jabonosa se forma siempre una película de jabón. *Plateau* formuló en 1873 el problema que lleva su nombre: ***"determinar la superficie de área mínima limitada en el espacio por un contorno cerrado".*** Resolvió y enunció las leyes que rigen el comportamiento de minimizar esfuerzos que utiliza la naturaleza haciendo experimentos con películas, y pompas de jabón. Los experimentos de Plateau le permitieron percatarse de que *las películas de jabón obedecen a un principio muy simple: hacer mínima su área ya que serán las más estables pues su energía potencial es mínima*. Según Plateau, *la formación de una superficie de jabón exige energía y en consecuencia la superficie tiende a contraerse para minimizar dicha energía*. Sus observaciones tienen un precedente en ***Jacob Steiner*** (1796-1863) quien planteó el problema de ***encontrar la red de líneas que conecten varios puntos y cuya longitud total sea la mínima posible.***

Materiales necesarios

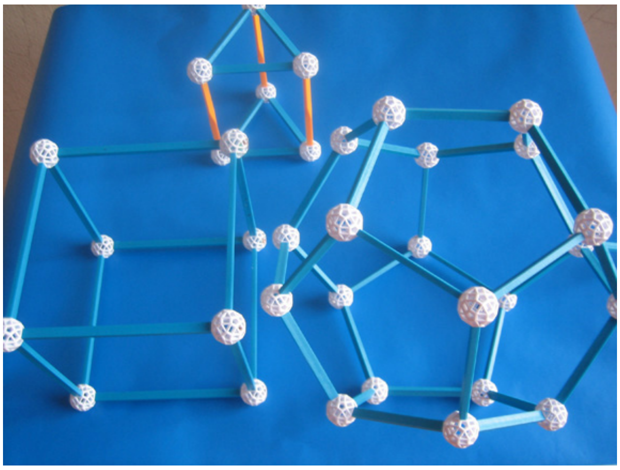
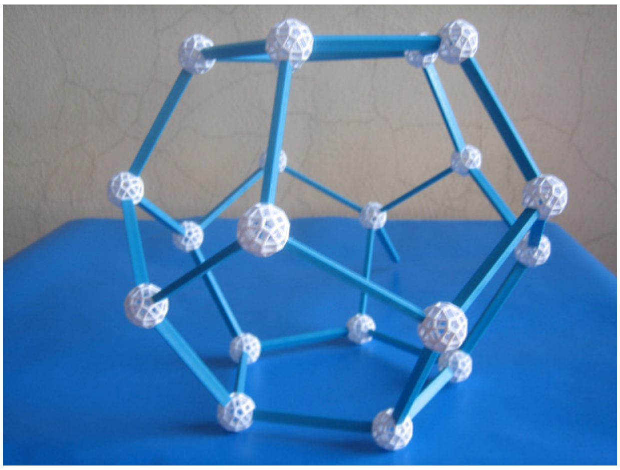
Básicamente necesitaremos los siguientes materiales:

- *Disolución jabonosa (50% agua, 40% de detergente (mejor Fairy) y 10% de glicerina pura). Para hacer burbujas más grandes y duraderas es necesario usar más glicerina. La espuma y las burbujas que se forman en el líquido deben quitarse con un colador. Las burbujas de jabón al romperse van dejando caer agua jabonosa que puede manchar muebles, etc., por lo que es preferible hacerlas al aire libre en un lugar protegido del viento y cuanta más humedad haya en el ambiente, mejor (superior al 70%).*

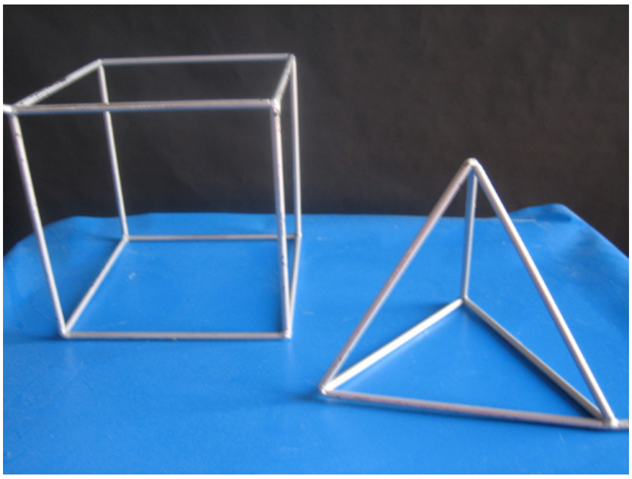
- *Estructuras planas compuestas por dos placas cuadradas paralelas de plástico transparente, cristal o metacrilato, unidas por varios tornillos (con los que formaremos distintos polígonos) que las mantendrán separadas unos 2 ó 3 cm. aproximadamente. Para los caminos mínimos son recomendables los Polígonos Regulares. En general, cuantas más aristas o vértices contenga el modelo se necesita más trabajo y tiempo, pero sin embargo las películas formadas por estos últimos son las más espectaculares. Es conveniente probar también con polígonos irregulares.*

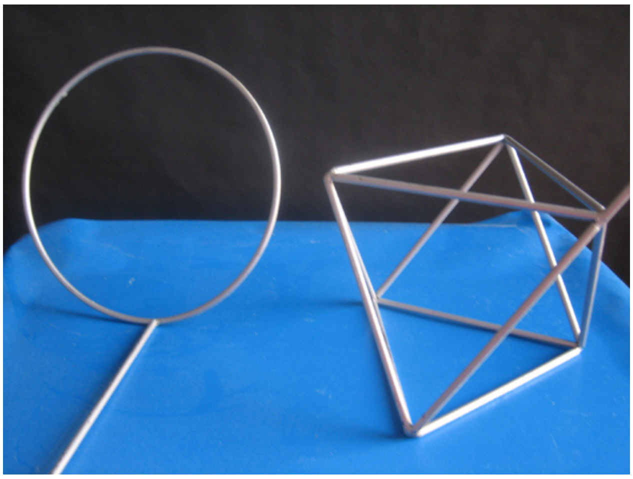



- *Estructuras poliédricas formadas con alambres o varillas de plástico (las estructuras de plástico más prácticas son las del Sistema Zome) como las de las fotos que siguen.*

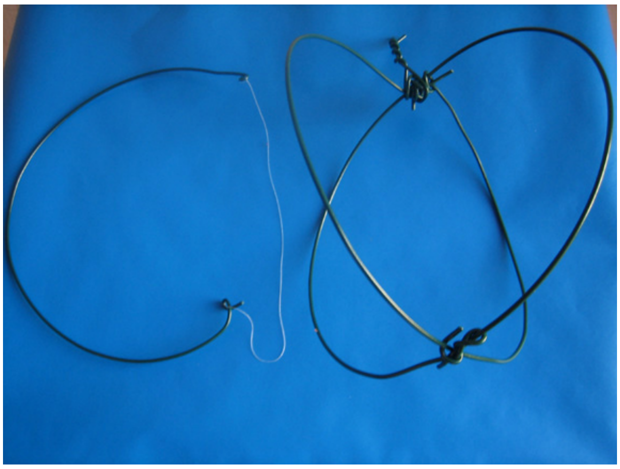



- *Estructuras poliédricas formadas con varillas de acero, como las de las fotos que siguen, ya que cuando se repite muchas veces este tipo de experiencias son las estructuras más resistentes (a la varilla que sobresale para sujetar la estructura se le puede poner un mango de madera en el extremo para que el agarre sea más seguro y no se nos resbale).*





- Un rollo de alambre forrado (ya que se adhiere mejor el jabón) para construir a mano todo tipo de estructuras y estudiar las superficies mínimas que las envuelven.



- Otros materiales, como un retroproyector para proyectar en la pared los experimentos en 2D, hilos, pajitas de bebida para soplar, tubos de plástico de distinto diámetro para crear pompas de jabón de distinto tamaño (cuanto más grande sea el diámetro del tubo más grande será la pompa), aros, transparencias, un colador, un embudo, etc.

Observaciones

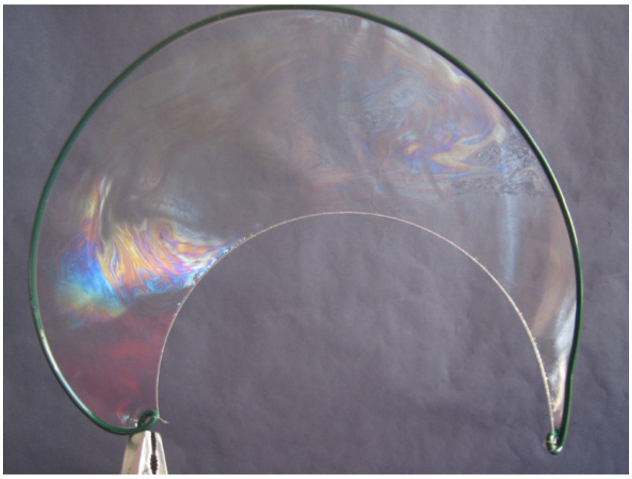
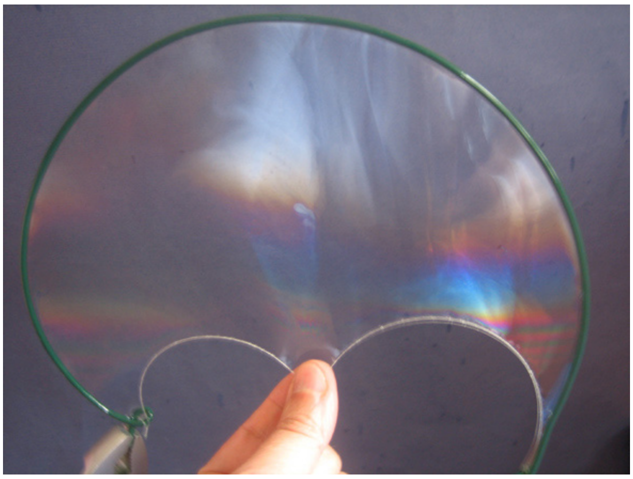
Si se realizan estos experimentos con alumnos en clase conviene tener presentes algunas observaciones:

- *Los materiales son fáciles de construir y la propia construcción de las estructuras y la preparación de la mezcla pueden incorporarse a la dinámica docente.*
- *Puede ser un punto de encuentro interdisciplinar: Matemáticas, Física, Tecnología, Educación Visual y Plástica, etc.*
- *Se trata de un campo abierto a la imaginación y la creatividad de cada uno.*

Comprobación experimental de que las películas de jabón forman superficies mínimas

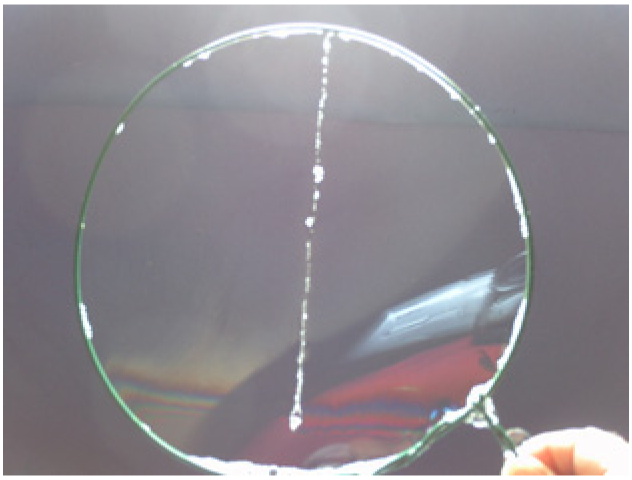
La tendencia de las películas de jabón a formarse con la menor superficie posible puede verse muy claramente a través de los dos experimentos siguientes:

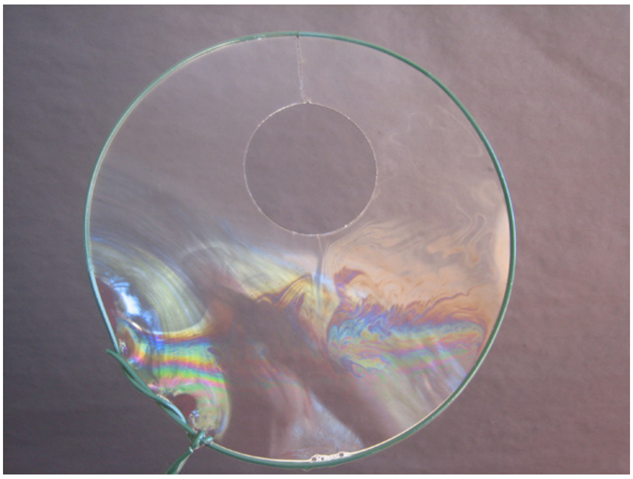
a) Doblamos un trozo de alambre hasta obtener casi un círculo, dejando una abertura en los extremos a los cuales atamos un trozo de hilo que quedará colgando. Si sumergimos este artilugio en una disolución jabonosa observaremos que el hilo es arrastrado hacia el alambre, es decir, tiene tendencia a subir ya que todo el líquido que hay encima del hilo intenta reducir al máximo la superficie, obteniéndose así una película de jabón que tiene la menor superficie ya que las moléculas de jabón tienen tendencia a juntarse. Si con dos dedos, previamente mojados en la disolución, tiramos del hilo aumentando la superficie de la película de jabón y luego lo soltamos, observaremos que automáticamente la película de jabón tiende otra vez a ocupar la mínima superficie.

b) Doblamos un alambre hasta obtener un círculo. En un punto cualquiera de su perímetro atamos un trozo de hilo y con el otro extremo del hilo formamos un lazo cerrado que reposará sobre la película de jabón. Si sumergimos este artilugio en una disolución jabonosa observaremos que el hilo se mantiene sobre la película de jabón. *Si pinchamos con un objeto seco en el interior del lazo, la película de jabón que lo rodea se reduce al máximo haciendo que el lazo se agrande todo lo posible adoptando una forma circular perfecta*. Las fuerzas sobre el hilo son iguales, lo que da lugar a una circunferencia sin deformar. Sin necesidad de romper la película de jabón podemos introducir un dedo en el interior del círculo y mover éste de un lado a otro, comprobando que los movimientos no modifican la superficie de la película que rodea al bucle. Si con dos dedos, previamente mojados en la disolución, intentamos deformar el bucle la propia deformación incrementa la superficie de la película de jabón. Cuando obligamos al lazo a cerrase la película de jabón tira de él y lo abre nuevamente de la misma forma que los bomberos mantienen extendida una red, esto es, tirando de ella hacia fuera en todas las direcciones.

La razón de que suceda esto es porque las partículas de agua y de jabón que se encuentran en los extremos superior e inferior de una película son atraídas con mayor intensidad hacia las partículas que forman el interior de la película que hacia las partículas de aire que las rodean, y así tienden a disminuir las distancias que las separan a unas de otras y a mantener la cohesión del líquido.





Recorridos mínimos

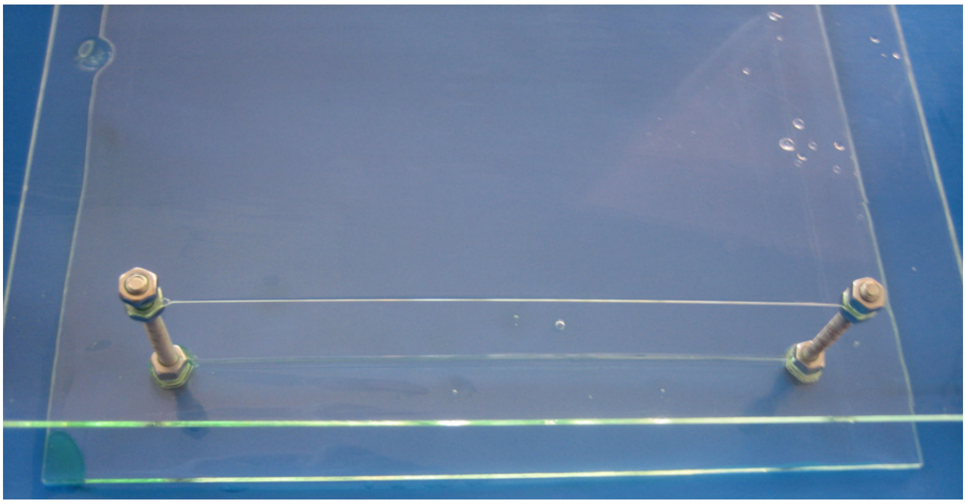
¿Cuál es camino mínimo entre dos puntos?

Entre 2 puntos el camino más corto es la línea recta que los une.

¿Qué pasará con una estructura formada por dos placas planas paralelas y transparentes unidas por dos tornillos al sumergirla en una solución jabonosa?

Si sumergimos en una solución jabonosa dos placas de metacrilato paralelas unidas por dos tornillos, al sacar las placas se forma una película rectangular de jabón entre los tornillos y las placas cuya superficie es la mínima posible. Si la separación de las placas es constante esto nos da también la mínima distancia entre los dos tornillos.

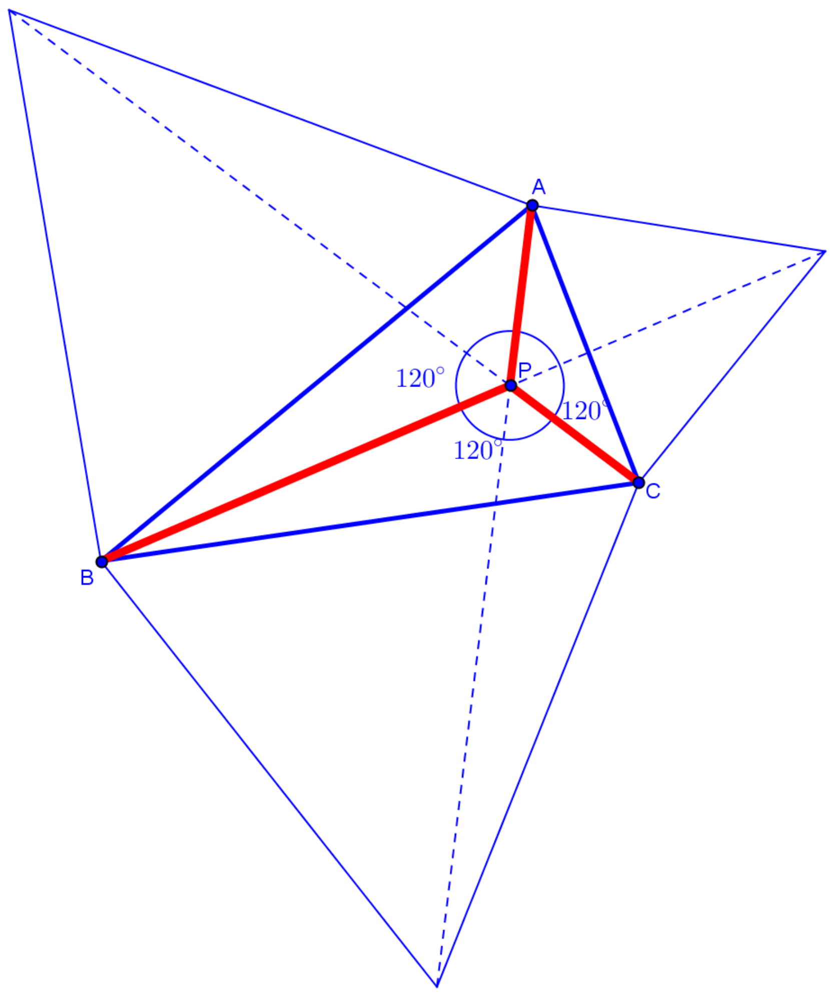
La proyección de la película rectangular de jabón sobre una de las placas es precisamente el segmento que une los 2 tornillos, es decir, el agua con jabón encontró la distancia mínima entre 2 puntos.



¿Qué es el punto de Fermat?

Dibujamos un triángulo ABC en el que el ángulo mayor sea menor de 120º. Sobre cada uno de los lados del triángulo dibujamos un triángulo equilátero. Unimos mediante segmentos cada vértice del triángulo ABC con el vértice opuesto del triángulo equilátero construido sobre su lado opuesto. El punto P donde se cortan los tres segmentos es el punto de Fermat. Si el triángulo ABC de partida es equilátero, el punto de Fermat coincide con el Baricentro (punto donde se cortan las medianas). Si el ángulo mayor del triángulo fuera de 120º, el punto de Fermat se situaría sobre su vértice, y si el ángulo fuera mayor de 120º el punto de Fermat estaría situado fuera del triángulo en la dirección del ángulo mayor.

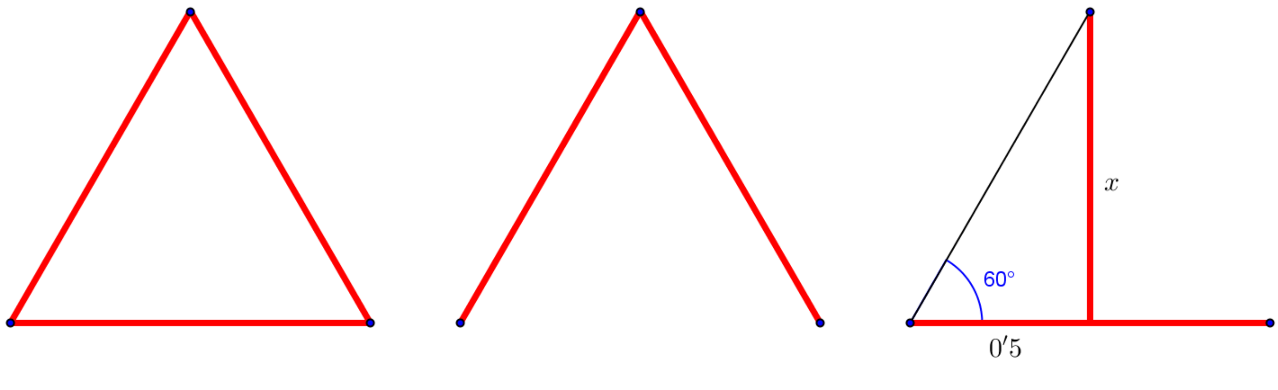
El punto de Fermat es un punto cuya suma de distancias a los vértices del triángulo es mínima. Los segmentos que unen el punto de Fermat con los vértices del triángulo forman siempre entre sí ángulos de 120º.



¿Cuál es el camino más corto entre tres puntos no alineados?

El camino más corto es la suma de las distancias desde el punto de Fermat a los tres vértices del triángulo que forman los tres puntos no alineados. Supongamos para facilitar los cálculos *que los 3 puntos forman un triángulo equilátero* y cuyo lado vale una unidad.

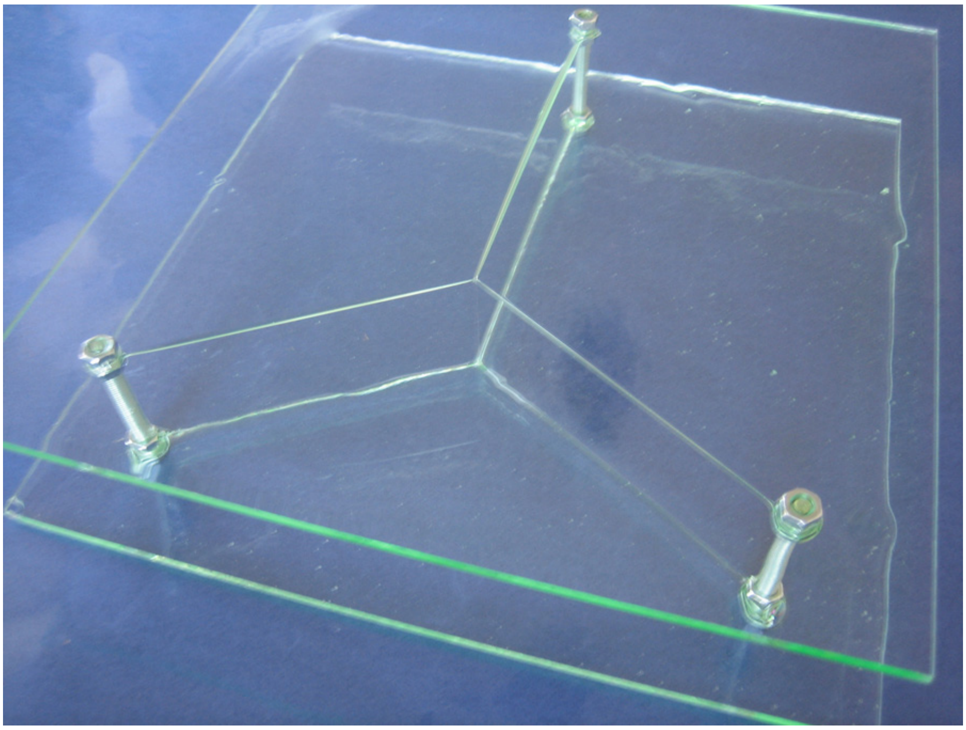
Si unimos los tres puntos como se indica en la primera figura la longitud es de 3 unidades. Si unimos los tres puntos como se indica en la segunda figura la longitud es de 2 unidades. Si unimos los tres puntos como se indica en la tercera figura pasando por el punto medio de dos de ellos, la longitud es $1'866$, que es mucho menor que 2, como se demuestra a continuación.

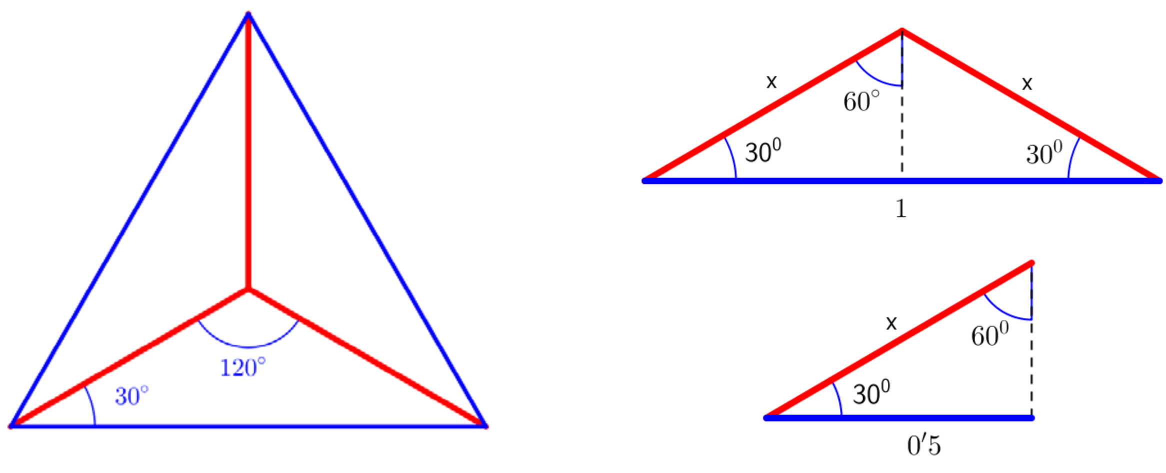


$$\operatorname{tg}60^{\circ} = \frac{x}{0'5} \qquad x = 0'5 \cdot \operatorname{tg}60^{\circ} = 0'8660 \qquad 1 + x = 1 + 0'866 = 1'866 \qquad 1'866 < 2$$

¿Qué pasará con una estructura formada por dos placas planas paralelas y transparentes unidas por tres tornillos al sumergirla en una solución jabonosa?

Al sumergir la estructura en una solución jabonosa y extraerla, observamos que el jabón forma una figura compuesta por tres películas jabonosas rectangulares que unen los tres tornillos con las placas de metacrilato y que *el ángulo entre las películas jabonosas es de 120º*. Si proyectamos esta figura sobre una de las placas o mediante un retroproyector obtendremos una figura plana formada por tres segmentos internos que unen cada vértice con un punto. Este punto cumple la propiedad de que la suma de distancias a los tres vértices es mínima y es el ***Punto de Fermat***. Los tres segmentos que convergen en él forman ángulos de 120º. Si los tres tornillos forman un triángulo equilátero, al sumergir las placas se obtienen 3 películas jabonosas rectangulares de la misma longitud.

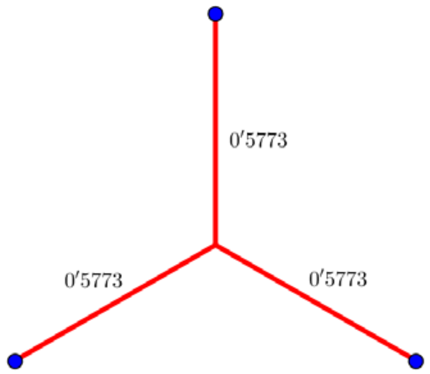




Si calculamos la suma de estos tres segmentos de color rojo del triángulo de la izquierda, obtenemos $1'7320$, que es menor que $1'866$, como se observa en la demostración que aparece a continuación. En el triángulo dibujado en la parte derecha conocemos el valor del lado mayor (1 unidad) y el ángulo central (120º). Aplicando nociones básicas de trigonometría tenemos:

$$\cos 30^{\circ} = \frac{0'5}{x} \qquad x = \frac{0'5}{\cos 30^{\circ}} = 0'5773$$

$$3x = 1'7320 \qquad 1'7320 < 1'866$$



Lo que significa que hemos obtenido un camino entre los 3 puntos cuya longitud es menor que las dos anteriores y es la menor posible. Este camino mínimo pasa por el punto de Fermat.

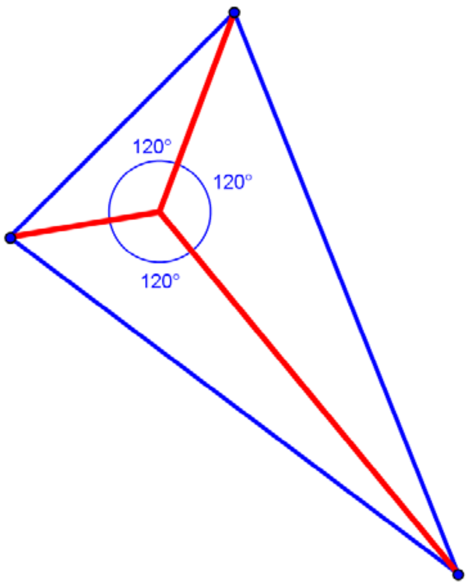
Estas películas de jabón, cuya suma de longitudes es $1'7320$ significan aproximadamente el $57'73\%$ de la longitud que presentarían si se dispusieran a lo largo del perímetro determinado por los tres tornillos, el $86'6\%$ del material que poseerían si se unieran los tres tornillos con solo 2 películas de jabón y el $92'81\%$ si se unieran pasando por el punto medio de una de los lados.

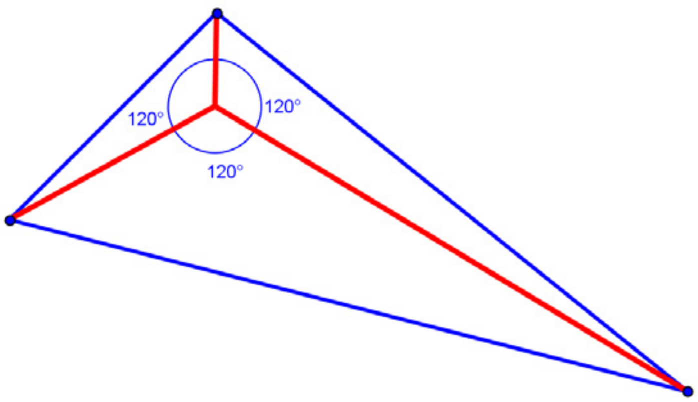
Por tanto, *lo más interesante del análisis anterior es que cuando tres películas de jabón forman entre sí ángulos de 120º, utilizan la menor cantidad de material posible.*

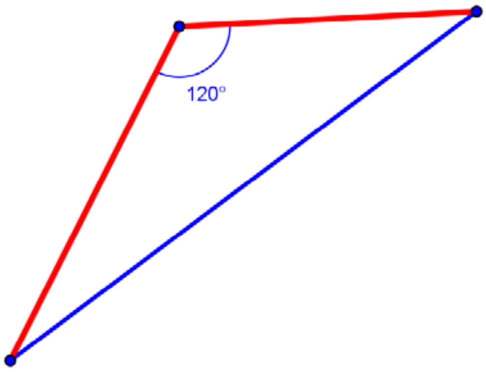
Primera Ley de Plateau

Si varias láminas de jabón se intersectan, lo hacen de tres en tres a lo largo de una línea y formando entre sí ángulos de 120º.

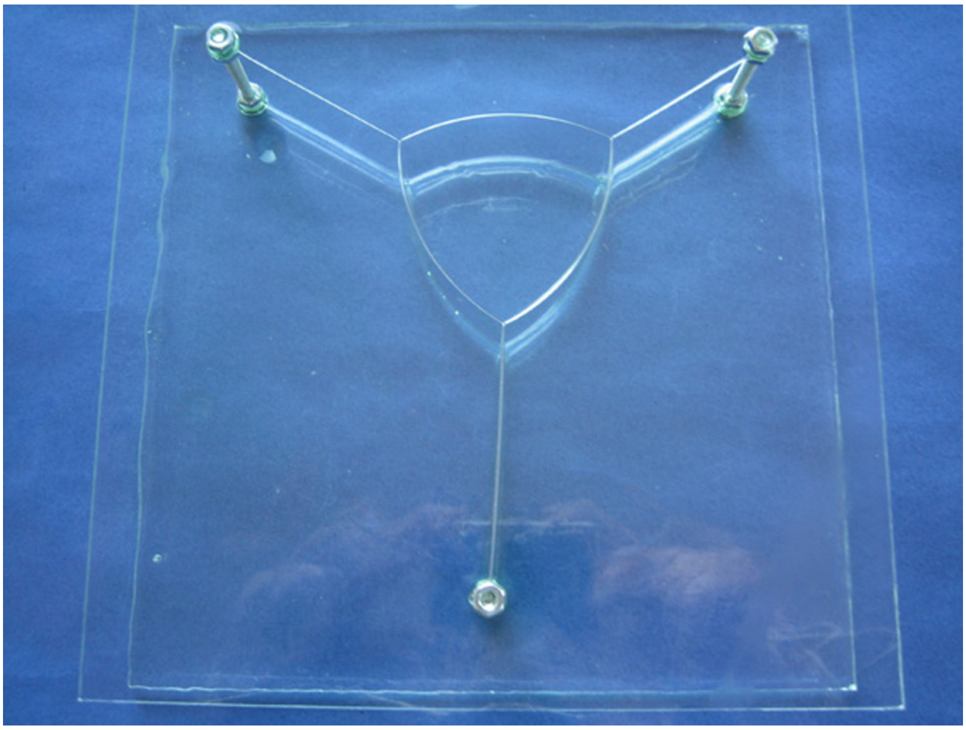
Como regla general, si los tres puntos no forman un triángulo equilátero, el segmento vertical que une las tres películas rectangulares se encuentra desplazado hacia el vértice del triángulo correspondiente al mayor ángulo, y en el caso de que el ángulo correspondiente a uno de los vértices sea igual o mayor que 120º la unión de las tres láminas sufre una degeneración y se confunde con el tornillo situado en ese vértice como se indica a continuación.







- Si soplamos con una paja, previamente introducida en la disolución jabonosa, en el punto de corte de las tres láminas, se forma un triángulo curvilíneo.



Construcción de una carretera que comunique 3 poblaciones

El problema consiste en *"dadas tres poblaciones, no alineadas entre sí, ¿dónde construir un hospital de manera que el camino total que deben recorrer las ambulancias sea el mínimo?"*. Se trata de localizar el punto de Fermat del triángulo en cuyos vértices se encuentran cada una de las 3 poblaciones. Tanto el dibujo del triángulo como los cálculos pertinentes se pueden realizar con Geogebra sobre un mapa de la zona sacado de Google Maps.

Otra manera de resolver el problema es construir una maqueta con las distancias a la escala apropiada. En una mesa hacemos tres agujeros que representan cada uno de ellos a un pueblo. Por cada uno de los agujeros se pasa una cuerda en cuyos extremos hay colocada una pesa, todas ellas iguales. Los extremos libres de las cuerdas se atan con un nudo en la parte superior de la mesa. Al elevar las cuerdas cogiéndolas por el nudo y dejarlas caer el nudo se sitúa encima de la mesa exactamente en el punto de Fermat.

Construcción de un hospital que dé cobertura a 3 ciudades

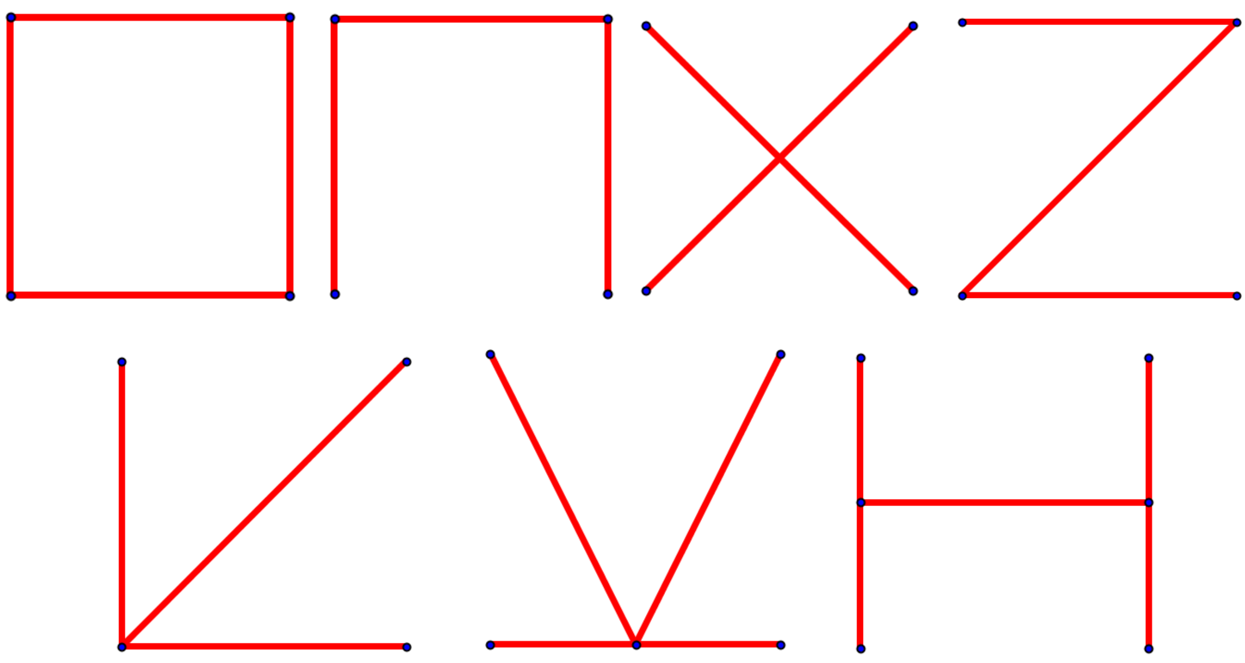
¿Qué sucede si queremos construir un hospital que dé cobertura a 3 ciudades no alineadas entre sí y que tienen distinto número de habitantes? Lo normal es que el hospital se construya más cerca de la población que tiene mayor número de habitantes, cuestión en la que el Punto de Fermat no interviene ya que él considera los tres vértices del triángulo con el mismo peso. Imaginemos que las 3 poblaciones A, B y C tienen 10.000, 20.000 y 40.000 habitantes. Es lógico pensar que el hospital deberá construirse más cerca de la población de 40.000 habitantes que de las otras dos. Veamos, como explica muy bien en uno de sus videos el matemático argentino Adrián Paenza, una forma de solucionar el problema.

En un tablero de madera horizontal, apoyado en unos soportes a una cierta altura del suelo, dibujamos sobre él a escala el triángulo formado por los vértices A, B y C (obtenidos, por ejemplo, de Google Maps) con sus distancias respectivas. En cada uno de los vértices hacemos un agujero en el tablero de madera y escogemos pesas de 4 kg, 2 kg. y 1 kg., que son proporcionales a los habitantes de las 3 ciudades, 40.000, 20.000 y 10.000.

Tomamos 3 cuerdas distintas de la misma longitud. En el extremo de la primera de ellas atamos la pesa de 4 kg., en el extremo de la segunda atamos la pesa de 2 kg. y finalmente en el extremo de la tercera atamos la pesa de 1 kg. Ahora atamos los extremos opuestos de las tres cuerdas haciendo un nudo y dejamos caer bajo la acción de la gravedad cada una de las pesas por los agujeros correspondientes. Cuando se produzca el equilibrio observamos la posición donde ha quedado el nudo con el que se han atado las tres cuerdas y ese es el lugar donde tiene que construirse el hospital.

¿Cuál es camino más corto entre cuatro puntos que forman un cuadrado?

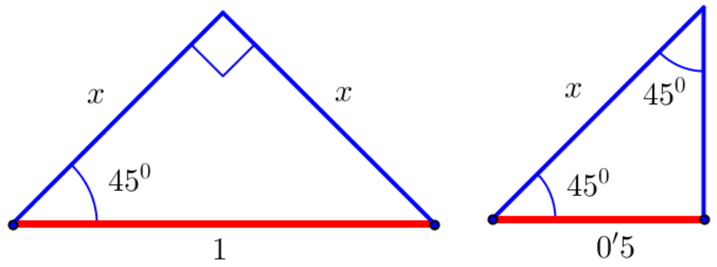
Supongamos que hay 4 ciudades que se encuentran en los vértices de un cuadrado y las queremos unir con cable de fibra óptica, ¿cómo tenemos que hacerlo para que la longitud del cable de fibra óptica empleado sea el menor posible? Veamos algunas posibilidades suponiendo que el lado del cuadrado es una unidad.



a) En el primer caso la longitud es de 4 unidades.

b) En el segundo caso la longitud es de 3 unidades.

c) En el tercer caso la longitud, como se demuestra a continuación, es de $2'8284 < 3$.



$$\cos 45^{\circ} = \frac{0'5}{x} \qquad x = \frac{0'5}{\cos 45^{\circ}} = 0'7071$$

$$4x = 4 \cdot 0'7071 = 2'8284$$

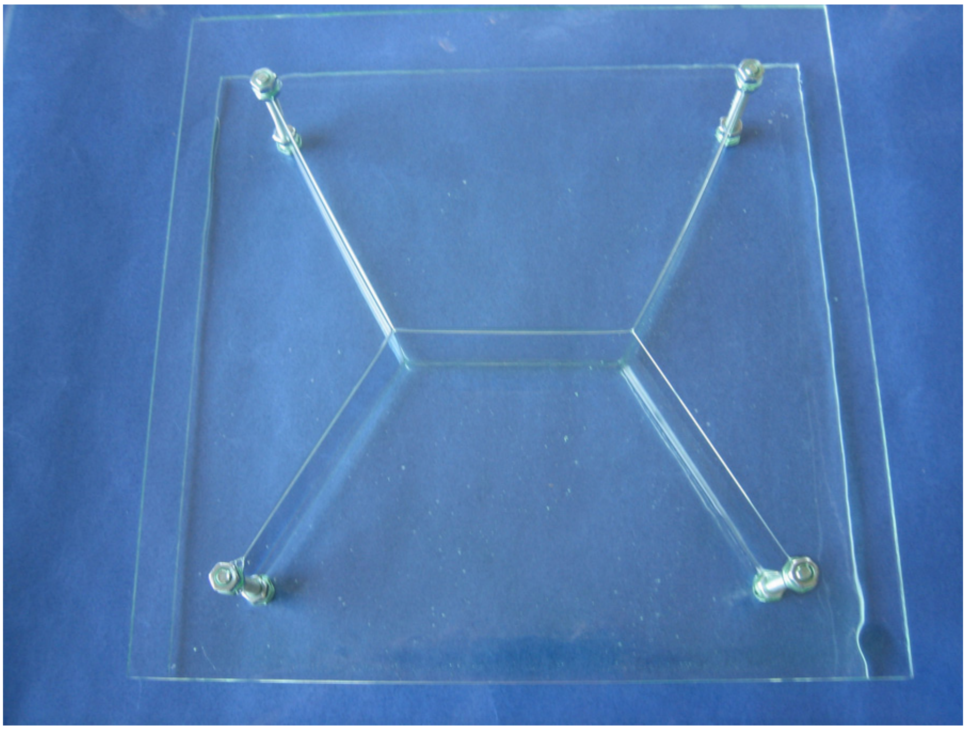
$$2'8284 < 3$$

$$\text{donde } 2'8284 \text{ es el } 94'28\% \text{ de } 3$$

d) En el cuarto caso la longitud es de $3'41$, en el quinto de $3'41$, en el sexto de $3'24$ y en el séptimo de 3. Calcúlalas todas.

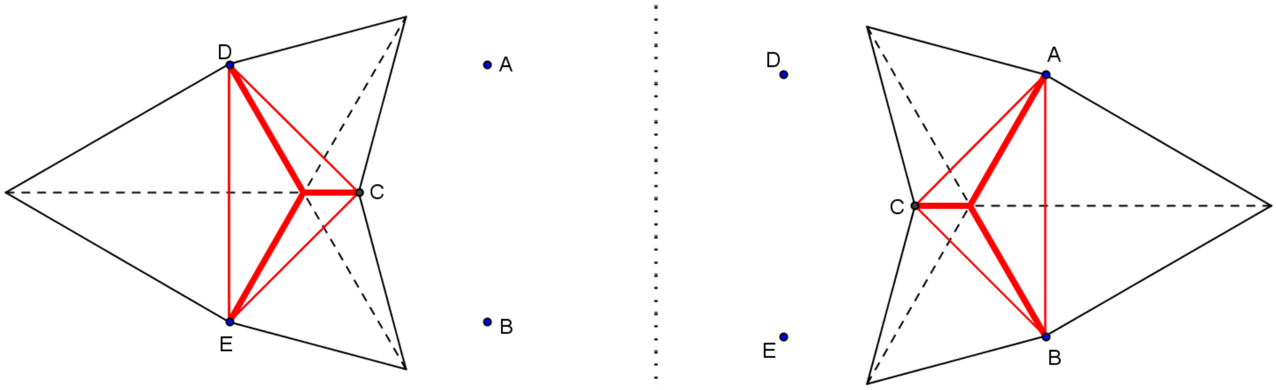
¿Qué pasará con una estructura formada por dos placas planas paralelas y transparentes unidas por cuatro tornillos que forman un cuadrado al sumergirla en una solución jabonosa?

Al sumergir la estructura en una solución jabonosa y extraerla, observamos que se forman cinco películas de jabón rectangulares, con dos uniones triples y tales que el ángulo entre las películas jabonosas nuevamente respeta la 1ª Ley de Plateau (ángulos de 120º). Esta configuración emplea el 91 % del material que se usaría para trazar los tres lados del cuadrado.



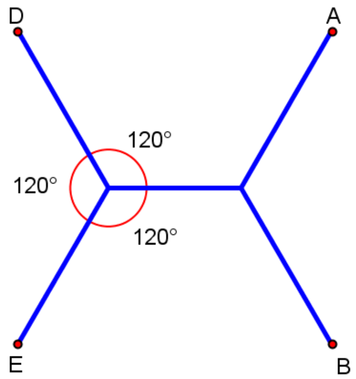
Si proyectamos esta figura sobre una de las placas o mediante un retroproyector obtendremos una figura plana formada por 5 segmentos que conforman el recorrido mínimo entre los vértices y que forman entre sí ángulos de 120º, con lo que hemos comprobado experimentalmente que "*por unidad de superficie, se forma la que tenga menor recorrido*". Superponiendo una transparencia en la que hemos dibujado los ángulos de 120º podemos comprobar la primera ley de Plateau.

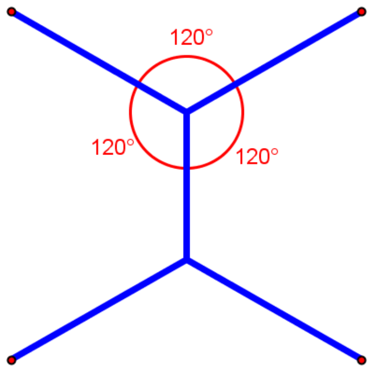
El problema es: *¿podemos calcular en este caso concreto la longitud de este recorrido mínimo?* El punto de Fermat nos es útil ahora. Dibujamos las dos diagonales del cuadrado que se cortan en el punto C. Se forman dos triángulos DCE y ABC y dibujamos en cada uno de ellos el punto de Fermat.

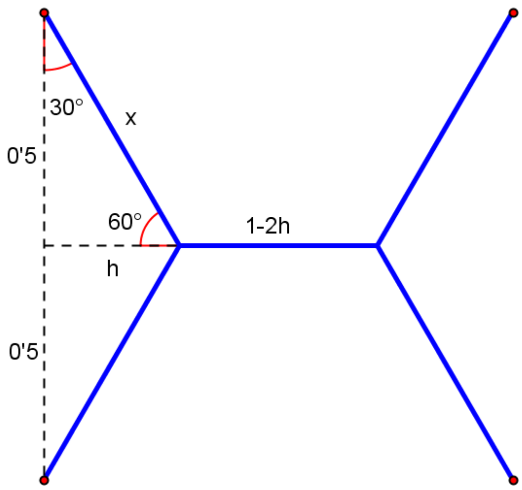


Soplando suavemente con una pajita sobre la película central podemos distorsionar las 5 películas rectangulares de manera que la central desaparezca y las otras 4 se agrupen en un punto, sin embargo, cuando dejamos de soplar, las películas se separan de inmediato, la película central se reconstruye y vuelve a formarse el modelo original en su posición primitiva o en otra obtenida haciendo girar la original 90º. Las siguientes figuras muestran el modelo en sus dos posiciones: la segunda es equivalente a la primera después de someter ésta a un giro lateral de 90º.

Este proceso lo podemos dibujar obteniendo entre sí los puntos de Fermat y uniendo cada uno de ellos con los correspondientes vértices del cuadrado. En el caso del cuadrado, se obtiene el mismo recorrido calculando los puntos de Fermat en los triángulos DCA y ECB.







$$\cos 30^{\circ} = \frac{0'5}{x}$$

$$x = \frac{0'5}{\cos 30^{\circ}} = 0'5773$$

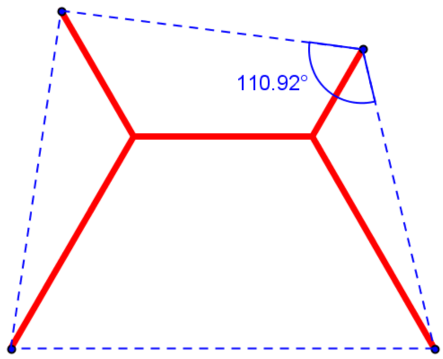
$$\mathrm{tg}30^{\circ} = \frac{h}{0'5}$$

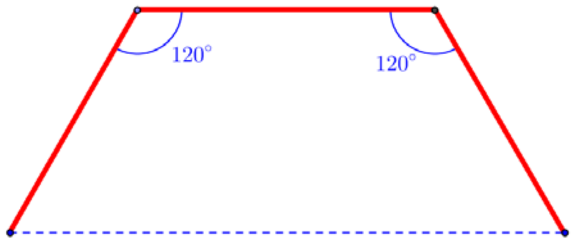
$$h = 0'5 \cdot \mathrm{tg}30^{\circ} = 0'2886$$

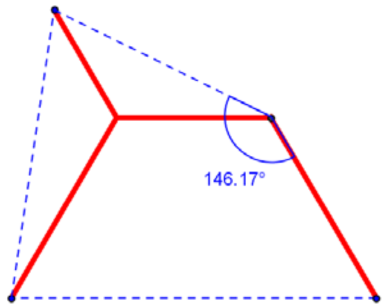
$4x + 1 - 2h = 2'732$ $\qquad$ $2'732 < 2'8284 < 3$, donde $2'732$ es el 91% de 3.

Vemos que esta nueva disposición no es muy distinta de la que presenta la unión cuádruple (91 y 94 % del material que se emplea en formar los 3 lados del cuadrado) y aún así las películas de jabón eligen invariablemente una y no otra

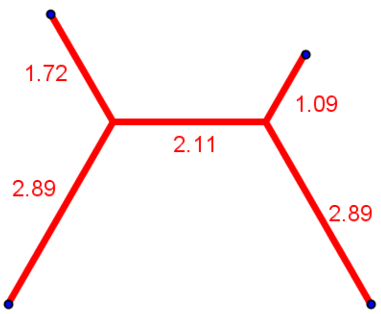
Como regla general, si los 4 puntos forman un cuadrilátero cualquiera, el segmento que une tres películas rectangulares se encuentra desplazado hacia el vértice del cuadrilátero correspondiente al mayor ángulo, y en el caso de que el ángulo correspondiente a uno de los vértices sea igual o mayor que 120º la unión de las tres láminas sufre una degeneración y se confunde con el tornillo situado en ese vértice como se indica a continuación.

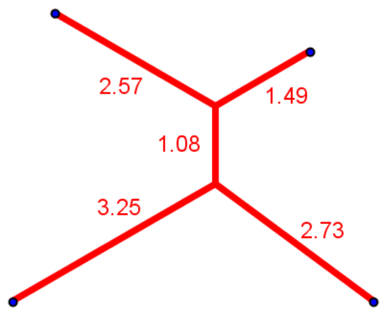






Supongamos que soplamos sobre las películas que conectan los vértices de un cuadrilátero irregular como el de la siguiente figura de la izquierda. Se le puede forzar, soplando sobre ella, a que forme una unión cuádruple, pero esta vez cuando se separen las películas de jabón adoptarán una de las dos configuraciones que se encuentran a continuación. En este caso, resulta algo muy sorprendente, y es que la longitud del recorrido de las películas de la izquierda es menor que el de la derecha (cálculos realizados con GeoGebra). Al formar el trazado de la derecha, las partículas de jabón cometen, aparentemente, un error táctico ya que ocupan una extensión mayor que si hubieran adoptado el modelo de la izquierda.



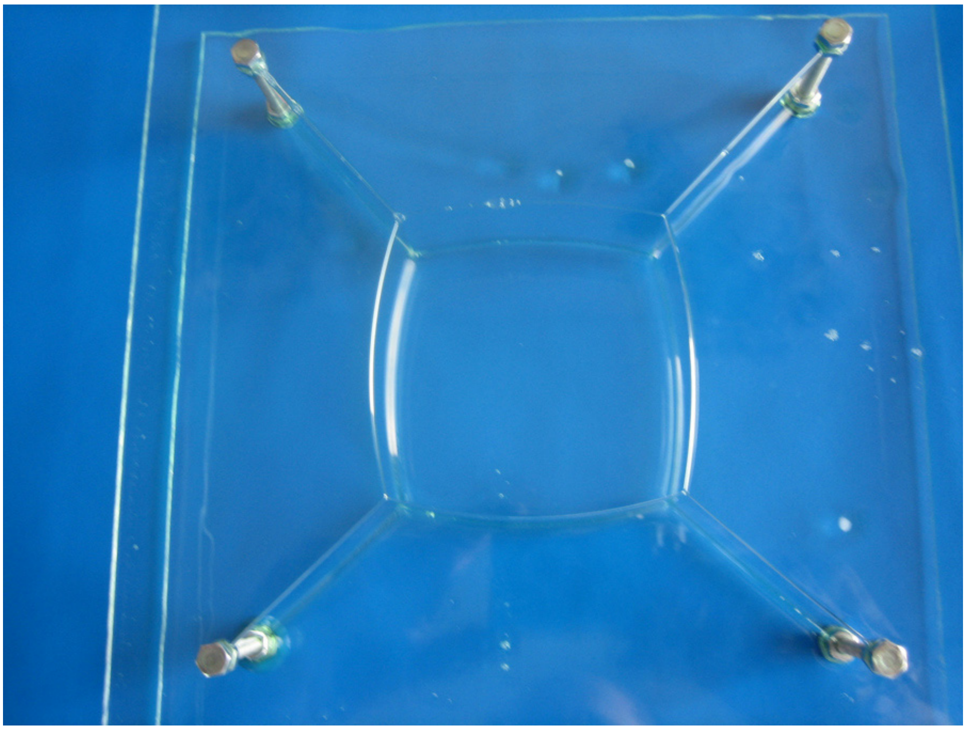


$$\text{Longitud del recorrido de la izquierda} = 1'72 + 2'11 + 1'062 + 2'89 + 2'89 = 10'672$$

$$\text{Longitud del recorrido de la izquierda} = 2'57 + 1'49 + 1'08 + 3'25 + 2'73 = 11'12$$

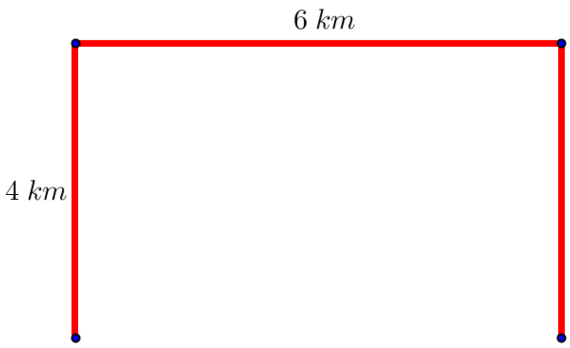
El error táctico de las partículas de jabón es de la misma clase que el error de las gotas de lluvia al caer en las montañas. Todas ellas fluyen pendiente abajo, pero algunas quedan atrapadas en los lagos de la montaña y otras van a los ríos que terminarán alcanzando el mar. La gota que acaba su recorrido en el mar pasa a una altitud menor (y por tanto también es menor su energía potencial) que la que reposa en el lago de montaña, pero para un terreno dado ambas han encontrado las posiciones de menor energía. De manera similar, las partículas de jabón y de agua tienden hacia una configuración de mínima energía y, según la forma en que las placas de metacrilato sean sacadas de la solución jabonosa, las películas de jabón adoptarán una configuración u otra.

Si soplamos con una paja, previamente introducida en la disolución jabonosa, en uno de los puntos donde se cortan tres las láminas, se forma un cuadrado curvilíneo. Soplando nuevamente en los vértices que van apareciendo se generan multitud de figuras, en todas las cuales el ángulo que forman dos caras es de 120º.



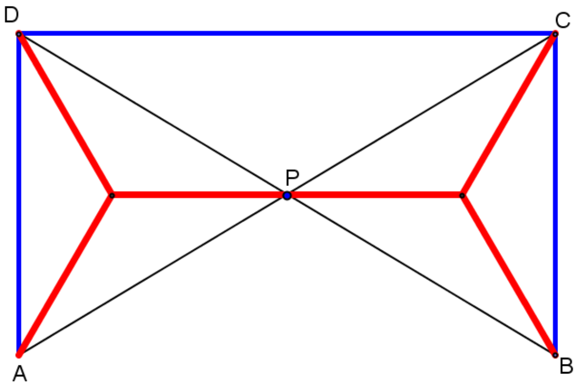
Problema

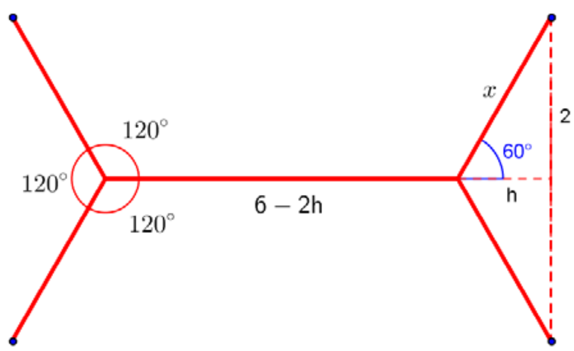
Cuatro ciudades se encuentran en los vértices de un rectángulo de lados 4 y 6 km. Uniendo los 4 vértices del rectángulo mediante 3 de sus lados, se puede construir una red de carreteras de 14 km. de longitud que conecta las 4 ciudades. ¿Existe una red de caminos más corta que conecte las 4 ciudades y cuya longitud sea menor que 13 km.?



Solución

Si dibujamos las dos diagonales del rectángulo, y al igual que en el ejemplo anterior calculamos los correspondientes puntos de Fermat de los triángulos APD y CPD obtenemos la figura adjunta.



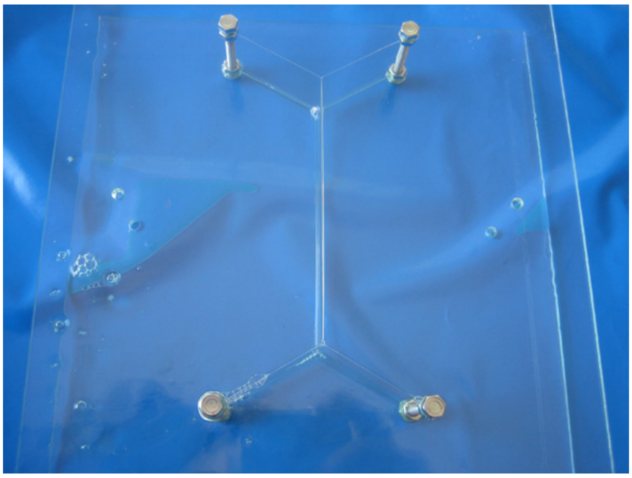


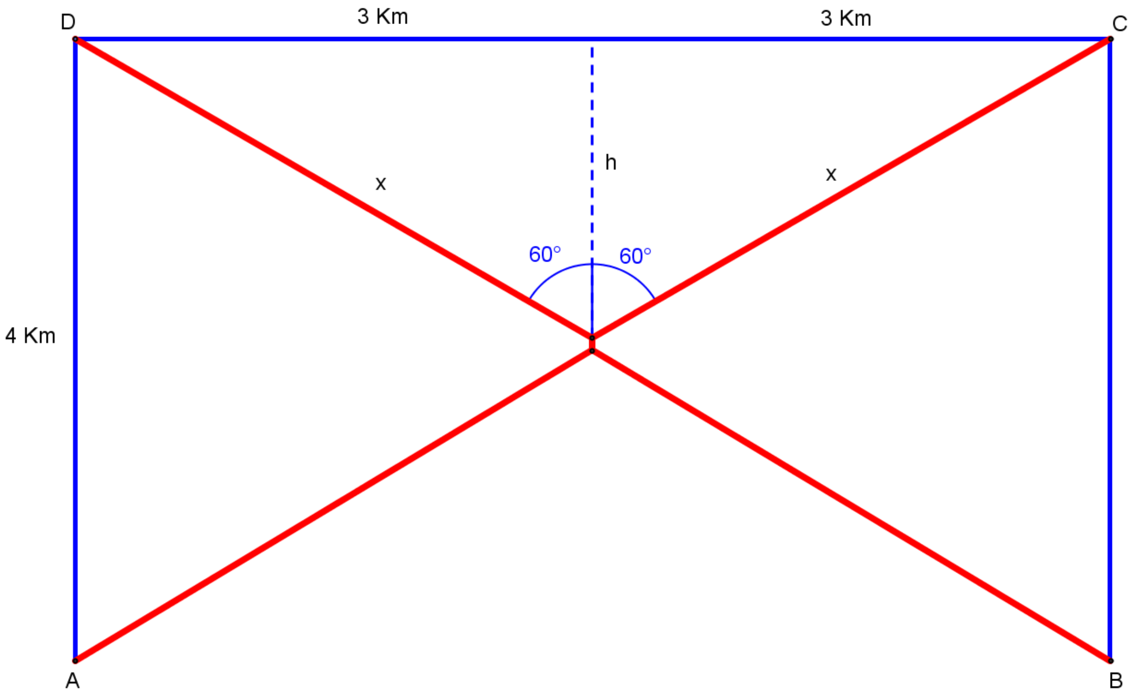
El recorrido es $L = 4x + 6 - 2h$

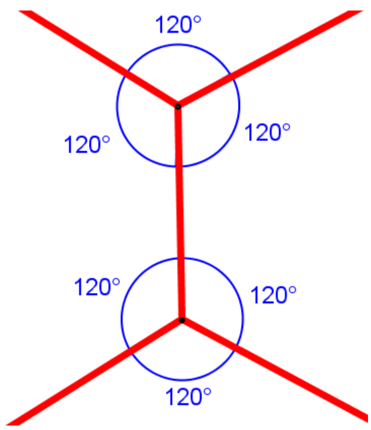
$$\left.\begin{array}{r} tg60^{o} = \dfrac{2}{h} \\ sen60^{o} = \dfrac{2}{x} \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} h = \dfrac{2}{tg60^{o}} \\ x = \dfrac{2}{sen60^{o}} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad L = 4 \cdot \frac{2}{sen60^{o}} + 6 - 2 \cdot \frac{2}{tg60^{o}} = 12'92\,km < 13\,km$$

Por lo tanto existe una red de carreteras que conecta las 4 ciudades y es menor que 13 km.

Pero, para un rectángulo podemos dibujar 2 puntos de Fermat diferentes según trabajemos sobre los triángulos horizontales que se forman con el corte de las diagonales o sobre los verticales. Si dibujamos los puntos de Fermat correspondientes a los triángulos DPC y APB obtenemos otro recorrido diferente como se observa a continuación:







Si calculamos este recorrido es más largo que el anterior. $L = 4x + 4 - 2h$

$$\left.\begin{array}{l} tg60^o = \dfrac{3}{h} \\ sen60^o = \dfrac{3}{x} \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} h = \dfrac{3}{tg60^o} \\ x = \dfrac{3}{sen60^o} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad L = 4 \cdot \frac{3}{sen60^o} + 4 - 2 \cdot \frac{3}{tg60^o} = \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + 4 - \frac{6}{\sqrt{3}}$$

$$L = \frac{24}{\sqrt{3}} + 4 - \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{24\sqrt{3}}{3} + 4 - \frac{6\sqrt{3}}{3} = \frac{24\sqrt{3} + 12 - 6\sqrt{3}}{3} = \frac{18\sqrt{3} + 12}{3} = 14'38\,Km$$

Este recorrido de $14'38$ Km es mas largo que el anterior de $12'92$ Km

Problema de Jakob Steiner

La generalización de este problema a n ciudades, colocadas de manera arbitraria en el plano, es el conocido problema de *Jakob Steiner*, un geómetra del siglo XIX. El problema de *Steiner* es el tema de una gran cantidad de investigación hoy en día, tanto para sus aplicaciones prácticas y por su interés puramente matemático. Las aplicaciones incluyen el diseño físico de circuitos integrados, el enrutamiento de mensajes, el diseño de redes de comunicación y el problema de la filogenia en biología computacional. La palabra *filogenia* cuya etimología viene del griego pilón: tribu, raza y geneá: nacimiento, origen, procedencia es la determinación de la historia evolutiva de los organismos. Los *árboles filogenéticos* son diagramas que representan estas relaciones de ancestralidad y descendencia, consistiendo en líneas que se bifurcan de acuerdo con la existencia en el pasado de un evento que transformó una especie en dos nuevas especies. La *biología computacional* es el uso de algoritmos y ordenadores para facilitar el entendimiento de problemas biológicos.

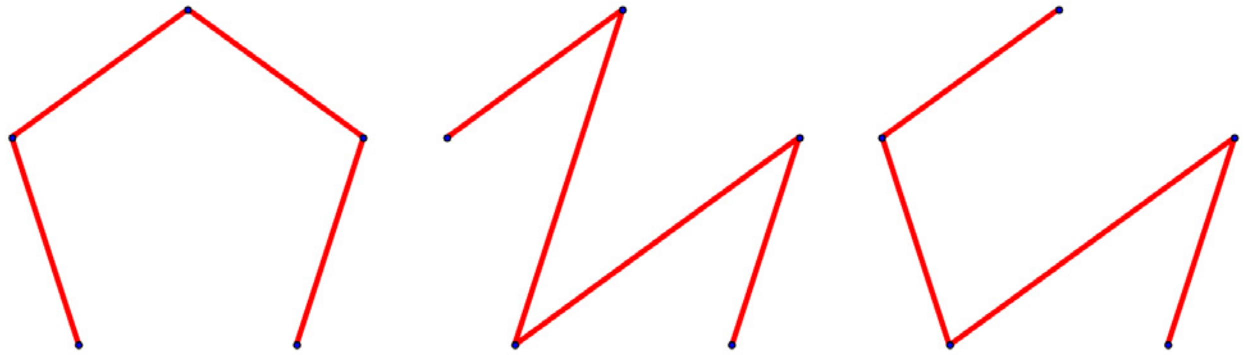
El enunciado del problema de ***Jakob Steiner*** es el siguiente:

> ***"Dados n puntos en el plano, encontrar m puntos tales que los*** $n+m$ ***puntos se puedan unir con un conjunto de segmentos cuya longitud total sea mínima"***

¿Qué pasará con una estructura formada por dos placas planas paralelas y transparentes unidas por cinco tornillos que forman un pentágono regular al sumergirla en una solución jabonosa?

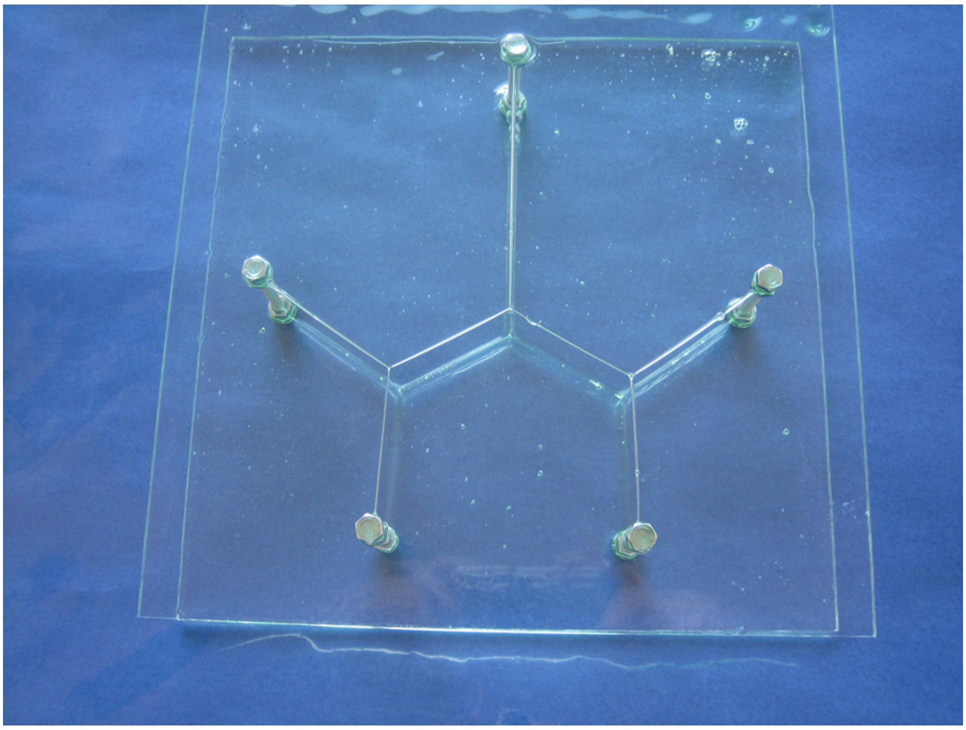
Ahora trabajaremos con una estructura que tiene 5 tornillos dispuestos como los vértices de un pentágono. Considerando el pentágono completo su longitud es de 5 unidades.

Si consideramos un pentágono regular que tiene de lado 1 unidad podemos imaginar los siguientes dibujos:

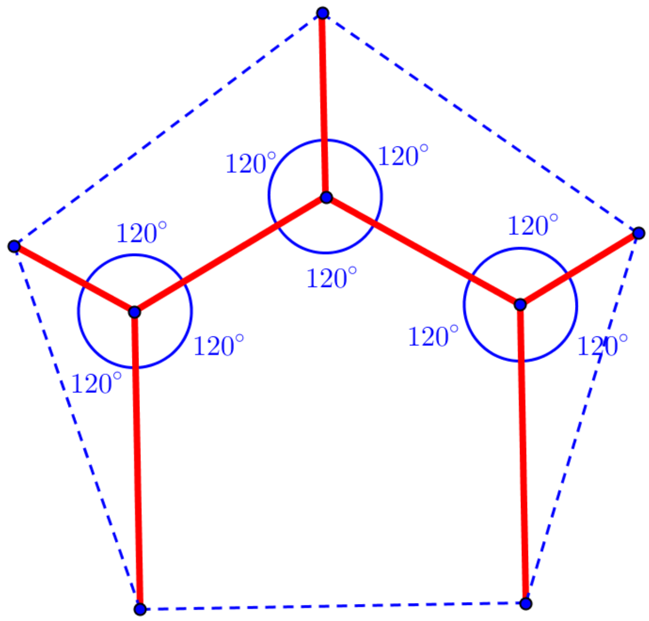


La primera figura tiene de longitud 4 unidades que evidentemente es menor que las otras dos.

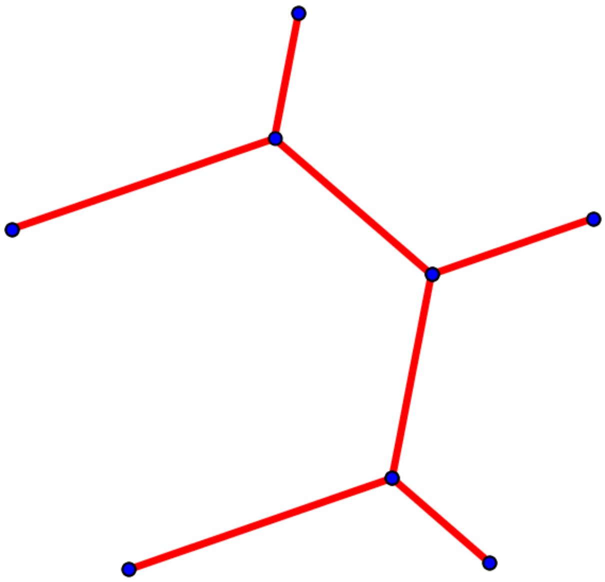
Al sumergir la estructura en una solución jabonosa y extraerla (como se observa, el pentágono no es regular pero nos da una idea), observamos que se forman siete películas de jabón que son rectangulares y tales que los ángulos entre las películas jabonosas nuevamente son de 120º.

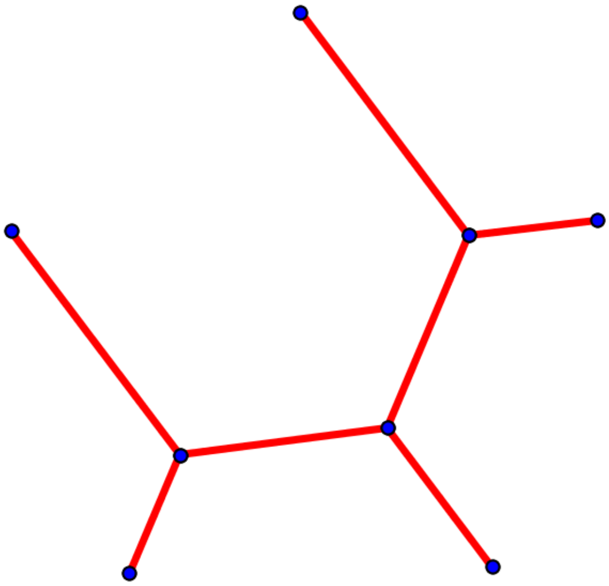


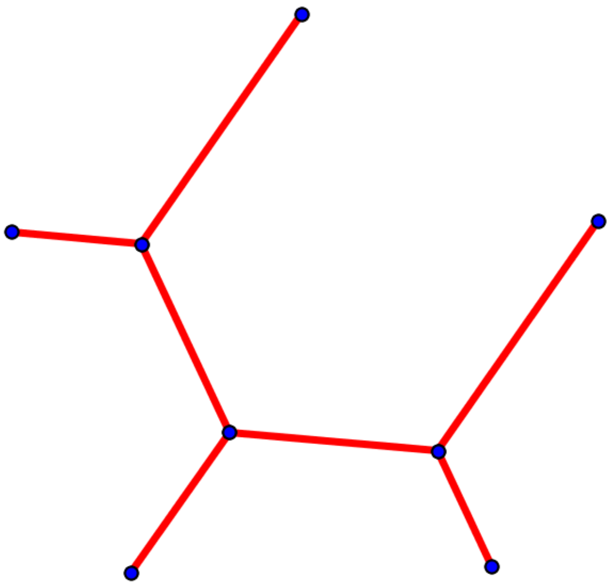
Si imaginamos que la figura anterior corresponde a un pentágono regular y la proyectamos sobre una de las placas o mediante un retroproyector, obtendremos una figura plana formada por 7 segmentos que conforman el recorrido mínimo entre los vértices y que forman entre sí ángulos de 120º como se observa a continuación. La ordenación regular de los 5 tornillos entre las dos placas dará lugar a tres uniones triples de películas de jabón y el sistema adoptará cualquiera de las cinco posiciones que aparecen a continuación

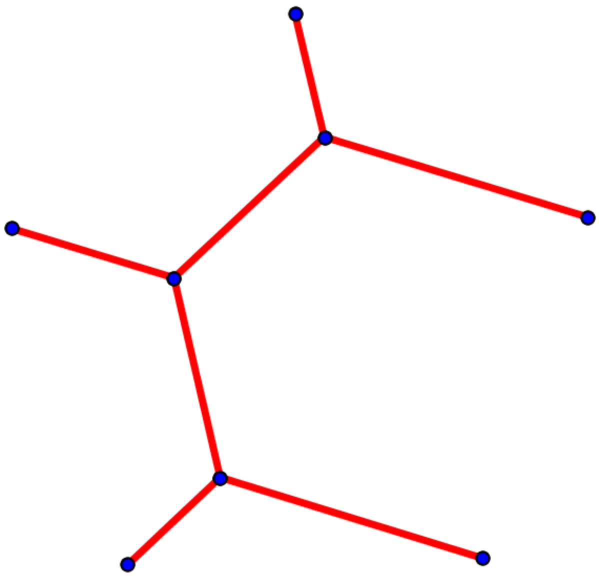


Otras posibilidades de formación de figuras, en las que también dos láminas consecutivas forman 120º son las siguientes:



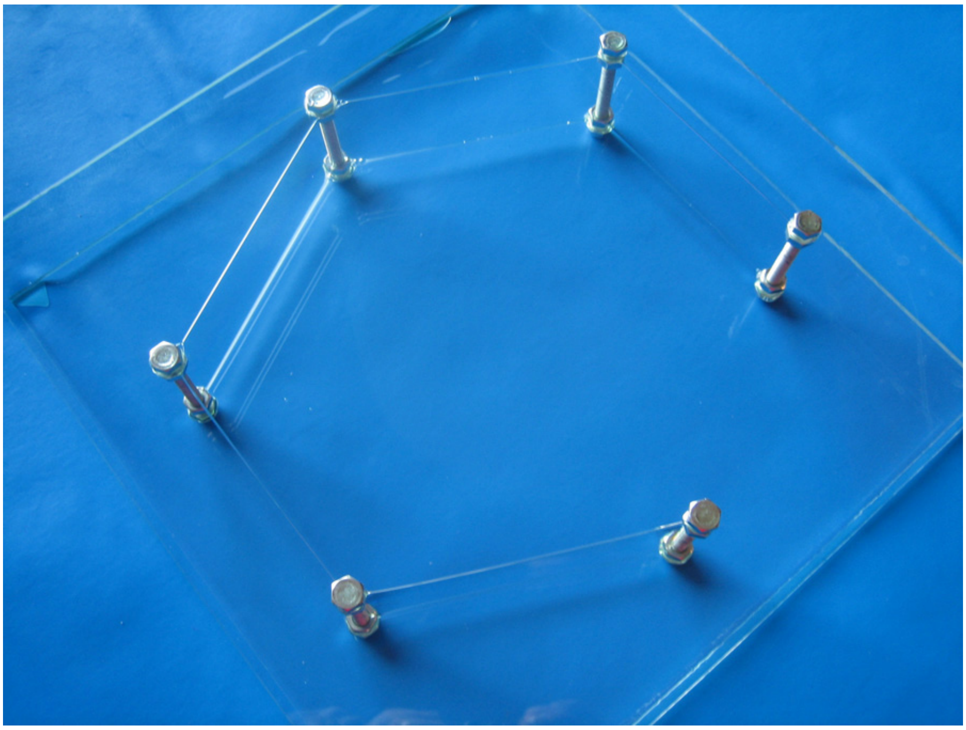




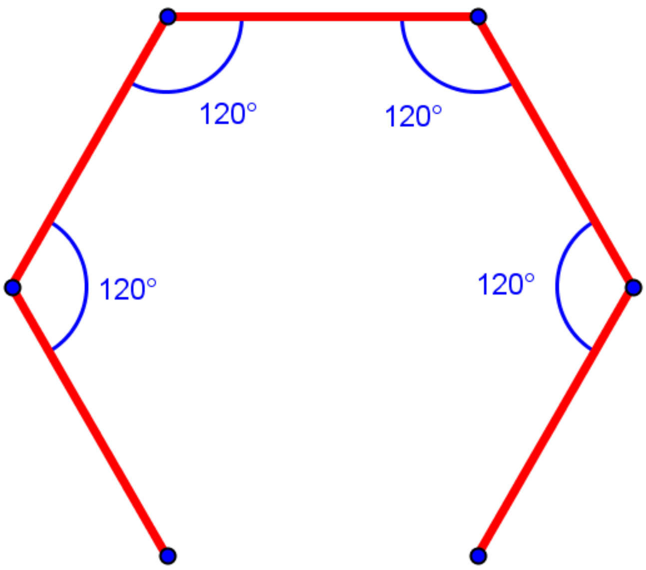


¿Qué pasará con una estructura formada por dos placas planas paralelas y transparentes unidas por seis tornillos que forman un hexágono regular?

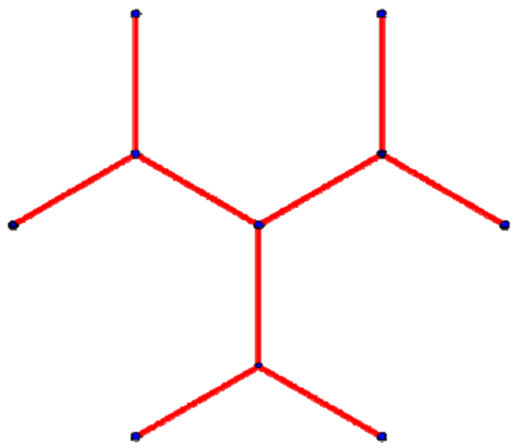
Al sumergir la estructura en una solución jabonosa y extraerla, observamos que las películas de jabón rectangulares no hacen atajos ya que los ángulos interiores del hexágono ya son de 120º.

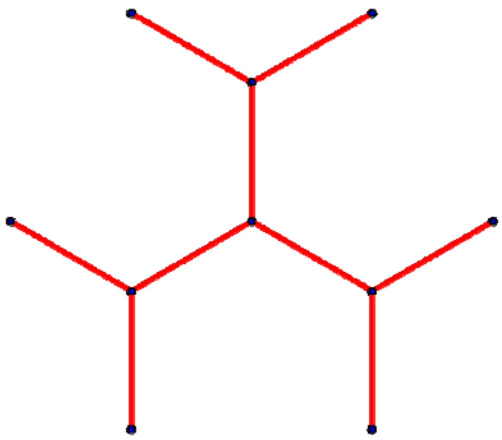


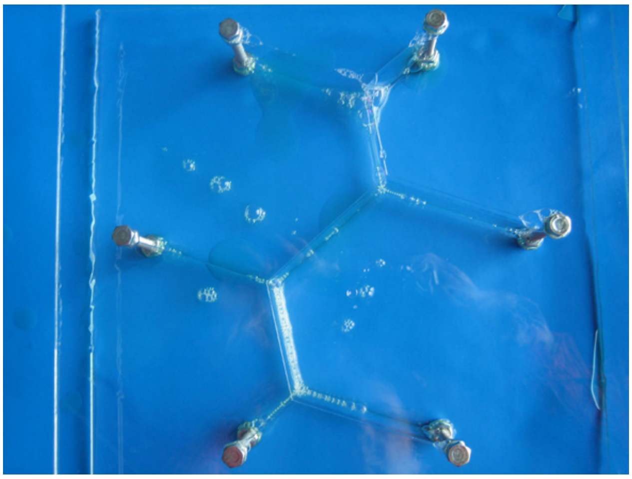
Si proyectamos esta figura sobre una de las placas o mediante un retroproyector obtendremos una figura plana formada por 5 segmentos que conforman el recorrido mínimo entre los vértices y que forman entre sí ángulos de 120º. En un hexágono de lado 3, el recorrido mínimo es de $3 \cdot 5 = 15$

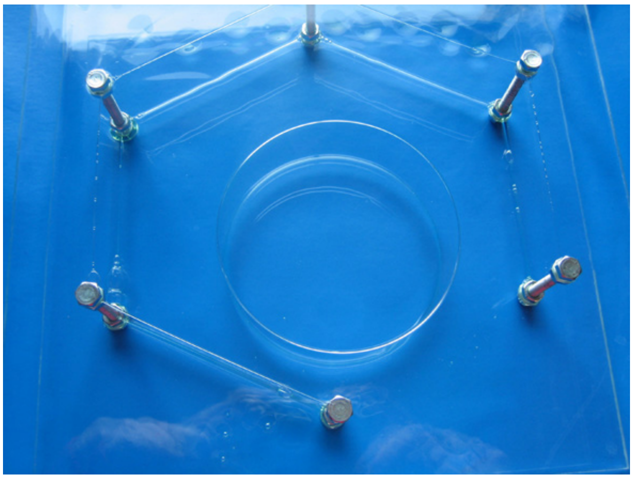


A veces los seis tornillos originan 4 uniones triples en cualquiera de las dos configuraciones siguientes, aún cuando éstas tienen un 4 % más de longitud que la configuración de la figura anterior que une 5 de los tornillos directamente. Entonces ¿cuál de estos tres modelos adoptarán las láminas de metacrilato unidas por los seis tornillos cuando las sumergimos en una solución jabonosa? Pues dependerá de cómo se extraigan las láminas. Cada configuración se sitúa en el punto más bajo de un declive de energía independiente y pueden obtenerse una a partir de la otra soplando sobre la unión de las películas para remontar la pendiente energética.

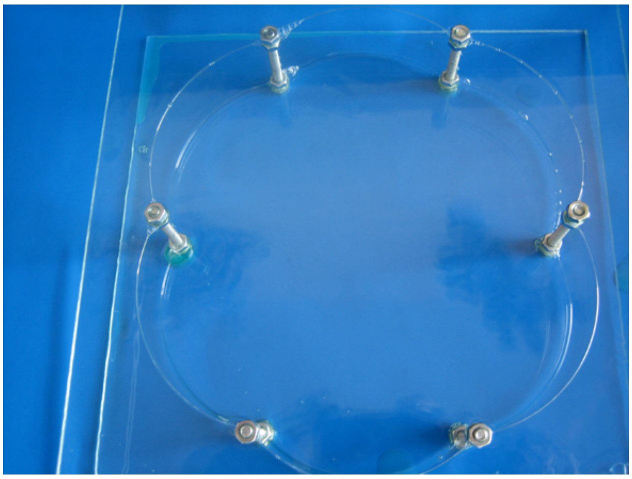


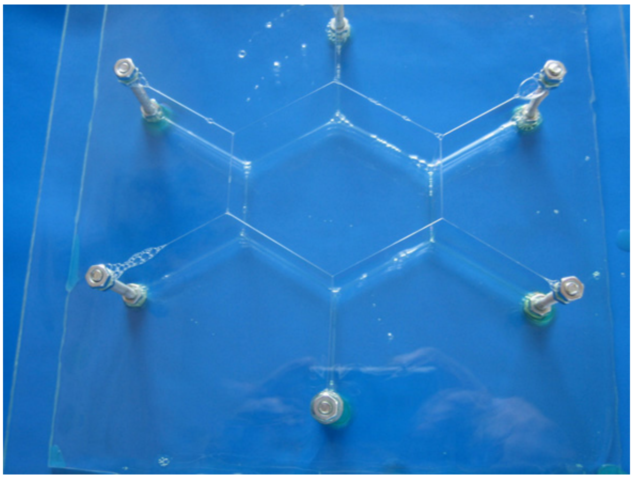






Si soplamos con una paja (previamente introducida en la disolución jabonosa) en el interior de la estructura hexagonal, se irá formando un círculo en el centro (como en la foto anterior) que al hacerse cada vez más grande se unirá con la estructura original y formará un círculo con arcos. Si ahora introducimos en su interior la paja y absorbemos el aire, se obtiene la figura de la derecha, un hexágono regular unido con los tornillos (vértices) por sendas películas de jabón planas, y si seguimos absorbiendo obtendremos 6 películas de jabón planas que partiendo de un punto central se unen con los vértices del hexágono formando una especie de estrella de 6 puntas.





¿Saben las abejas matemáticas?

"Las abejas, en virtud de cierta intuición geométrica, saben que el hexágono es mayor que el cuadrado y que el triángulo, y que podrá contener más miel con el mismo gasto de material"

Pappus de Alejandría (siglo IV a.C.)

"Cualquier partición del plano en regiones de igual área tiene un perímetro mayor o igual que el de la partición en hexágonos regulares"

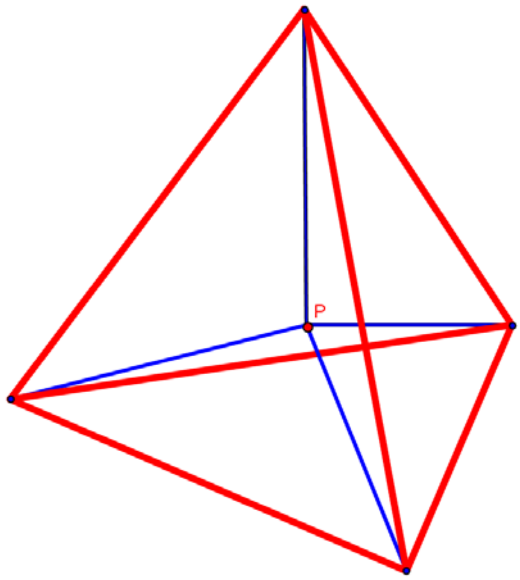
Honeycomb conjeture

Superficies Mínimas

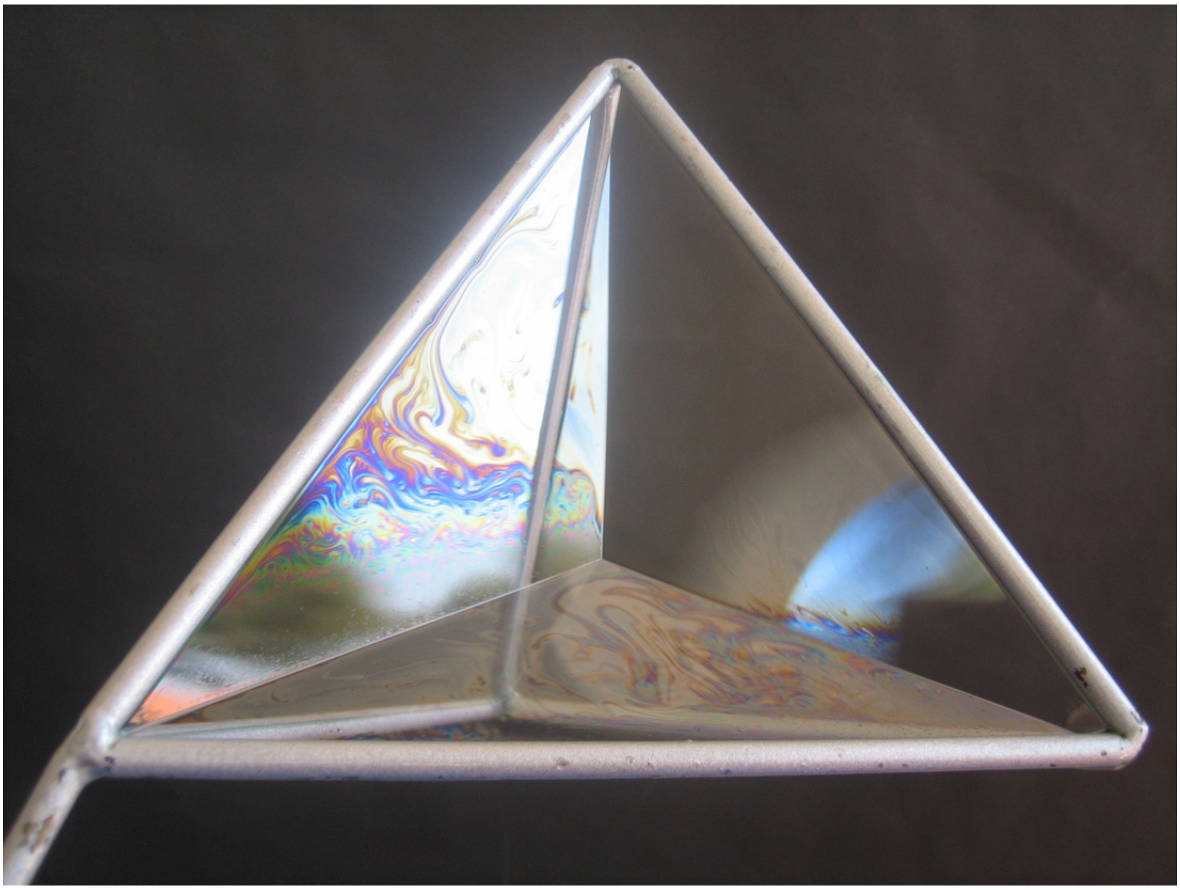
Tetraedro

Al sumergir una estructura tetraédrica (en rojo) en una solución jabonosa se obtienen seis películas jabonosas planas y triangulares que se apoyan en los contornos de la figura y se cortan en cuatro aristas (azules) que convergen en un punto P que es el Baricentro del Tetraedro y que es equivalente al Punto de Fermat en tres dimensiones.

El Baricentro del Tetraedro es el punto de corte de las rectas que parten de sus vértices y pasan por los baricentros de las caras opuestas. El Baricentro de un triángulo es el punto de corte de sus medianas, que son los segmentos que van desde un vértice del triángulo al punto medio del lado opuesto.



Los ángulos diedros entre las caras son de 120º y los ángulos entre las aristas que convergen en el baricentro son de 109º 28´ o 109’47º, como postuló Plateau. En el punto P se cortan las 6 láminas de jabón correspondientes a 6 triángulos equiláteros iguales.



Segunda Ley de Plateau

Cuatro de las líneas, todas formadas por la intersección de tres superficies, se intersecan en un punto y el ángulo formado por cada par de ellas es de 109º 28′ ó 109′47º .

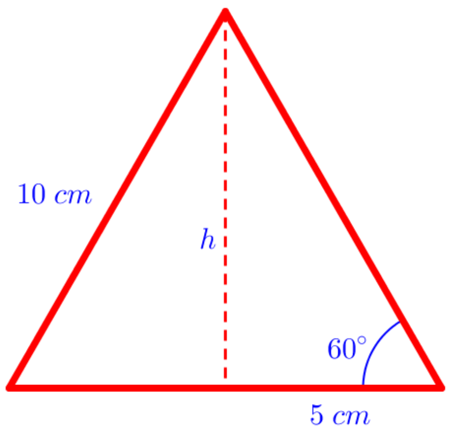
Nota
El ángulo entre dos láminas de jabón es el ángulo entre dos planos y se obtiene calculando el ángulo entre sus vectores característicos, que son los vectores perpendiculares a ellos. No hay que confundir este ángulo con el ángulo que forma cada par de líneas en cada una de las cuales se cortan 3 láminas de jabón.

Tercera Ley de Plateau

Una película de jabón que puede moverse libremente sobre una superficie la interseca en un ángulo de 90º.

¿Por qué se forma la estructura anteriormente descrita al introducir un tetraedro en una solución jabonosa y no se forma una película jabonosa que recubra las cuatro caras triangulares del tetraedro? Vamos a realizar los cálculos oportunos para comprobarlo matemáticamente.

Supongamos que el lado del triángulo equilátero del tetraedro que introducimos en la disolución jabonosa tiene 10 cm. de lado.

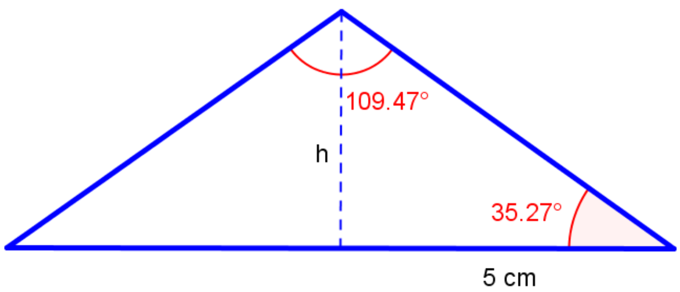


$$\mathrm{tg}60^\circ = \frac{h}{5} \qquad h = 5\cdot \mathrm{tg}60^\circ = 5\sqrt{3}$$

$$A_{tri} = \frac{b\cdot h}{2} = \frac{10\cdot 5\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}$$

$$A_{tetraedro} = 4\cdot 25\sqrt{3} = 100\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2 = 173'205\,\mathrm{cm}^2$$

Sabemos por las leyes de Plateau que las superficies jabonosas se intersecan dos a dos formando un ángulo de 120º. Como el ángulo entre cada par de aristas es de $109'47^\circ$ tenemos:



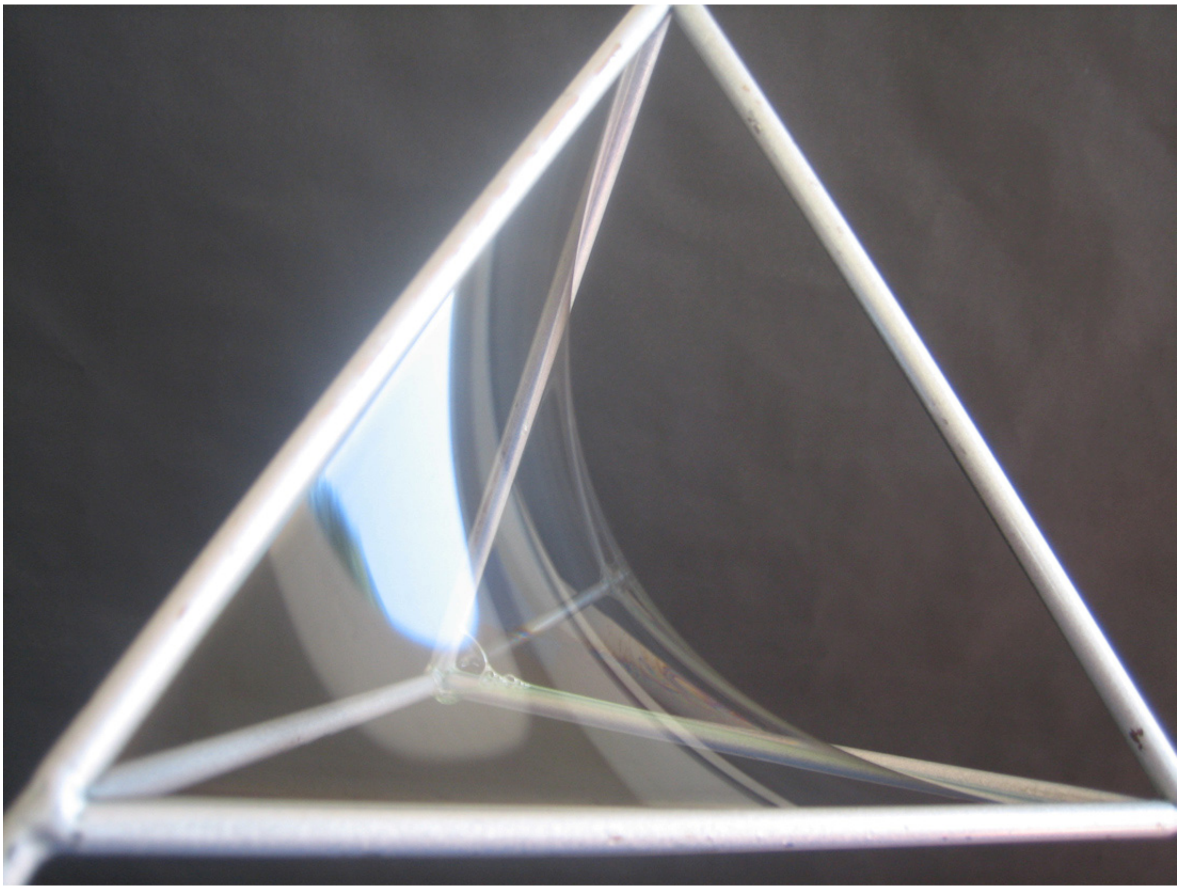
$$\mathrm{tg}35'27^\circ = \frac{h}{5} \qquad h = 5\cdot \mathrm{tg}35'27^\circ = 3'5362\,\mathrm{cm}$$

$$A = \frac{10\cdot h}{2} = \frac{10\cdot 3'5362}{2} = 17'681\,\mathrm{cm}^2$$

$$6A = 106'086\,\mathrm{cm}^2$$

Es evidente que $106'086\,\mathrm{cm}^2 < 173'205\,\mathrm{cm}^2$

- Si pinchamos sobre una de las 6 láminas de jabón obtendremos un *paraboloide hiperbólico (silla de montar a caballo),* como se aprecia a continuación.



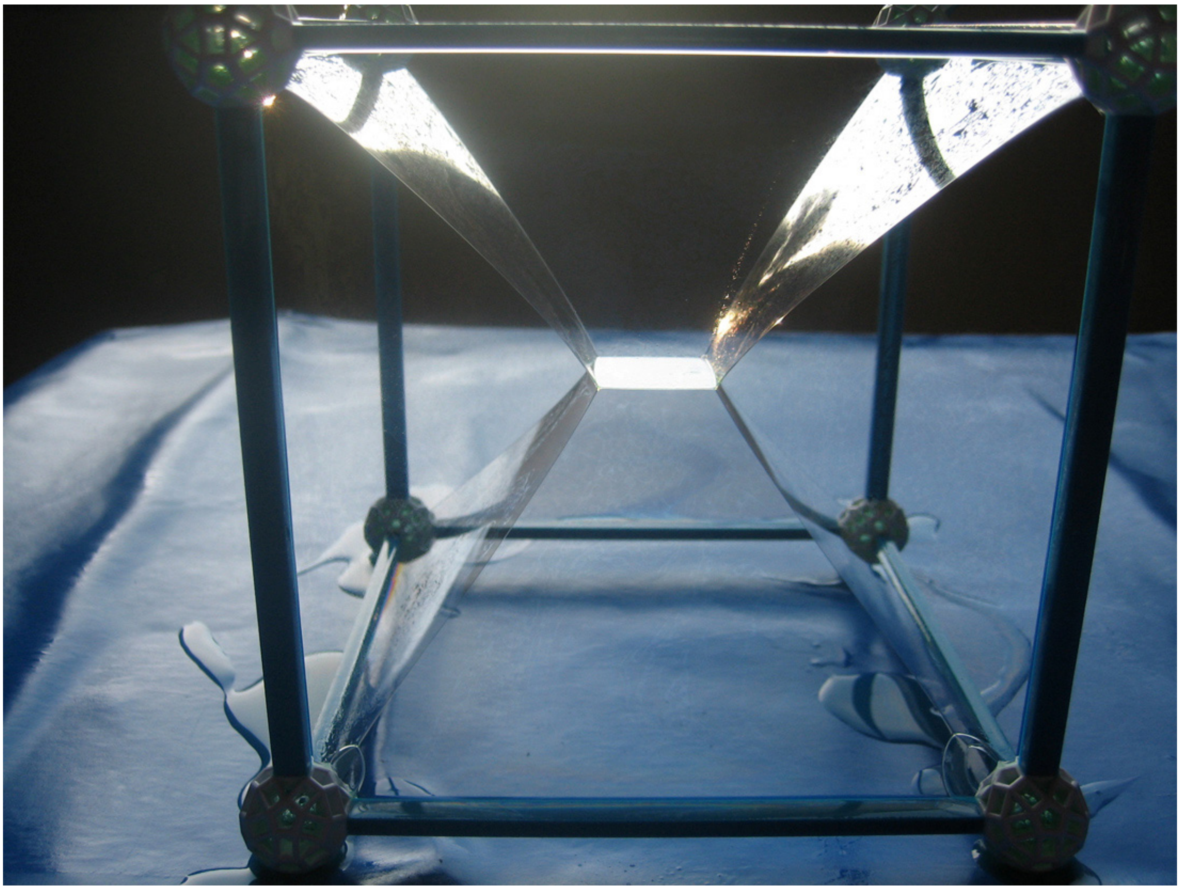
- Es interesante hacer el experimento de coger una pajita de beber refrescos, introducirla en la disolución jabonosa y soplar con ella sobre el baricentro. Aparentemente, en el centro tendría que aparecer una esfera, sin embargo se forma un tetraedro esférico suspendido en el aire y sostenido entre las seis láminas planas, como se aprecia a continuación.

  Nuevamente observamos que las películas de jabón se unen de 3 en 3 formando entre ellas ángulos de 120º y que las líneas que forman sus intersecciones lo hacen de 4 en 4 formando ángulos de 109'47º. Estas películas de jabón constituyen la mínima superficie que puede interconectar las aristas del tetraedro y contener el tetraedro esférico central.

Cubo

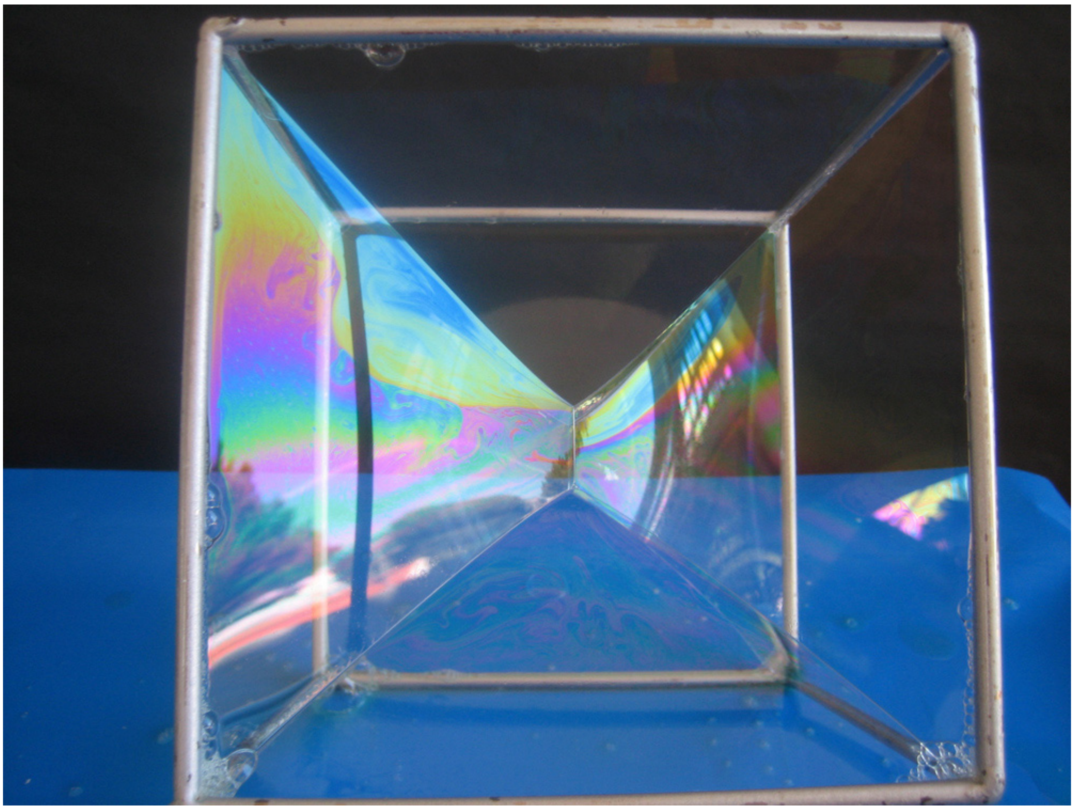
Al sumergir una estructura cúbica en una solución jabonosa aparece en el centro del cubo una película jabonosa cuadrada con los lados ligeramente curvados, sostenida por 12 películas jabonosas planas, 8 de ellas en forma de trapecio y las otras 4 en forma de triángulo isósceles. Debido a la simetría del cubo habrá tres soluciones mínimas que corresponden a cada una de las 3 posibles orientaciones de la película cuadrada central.

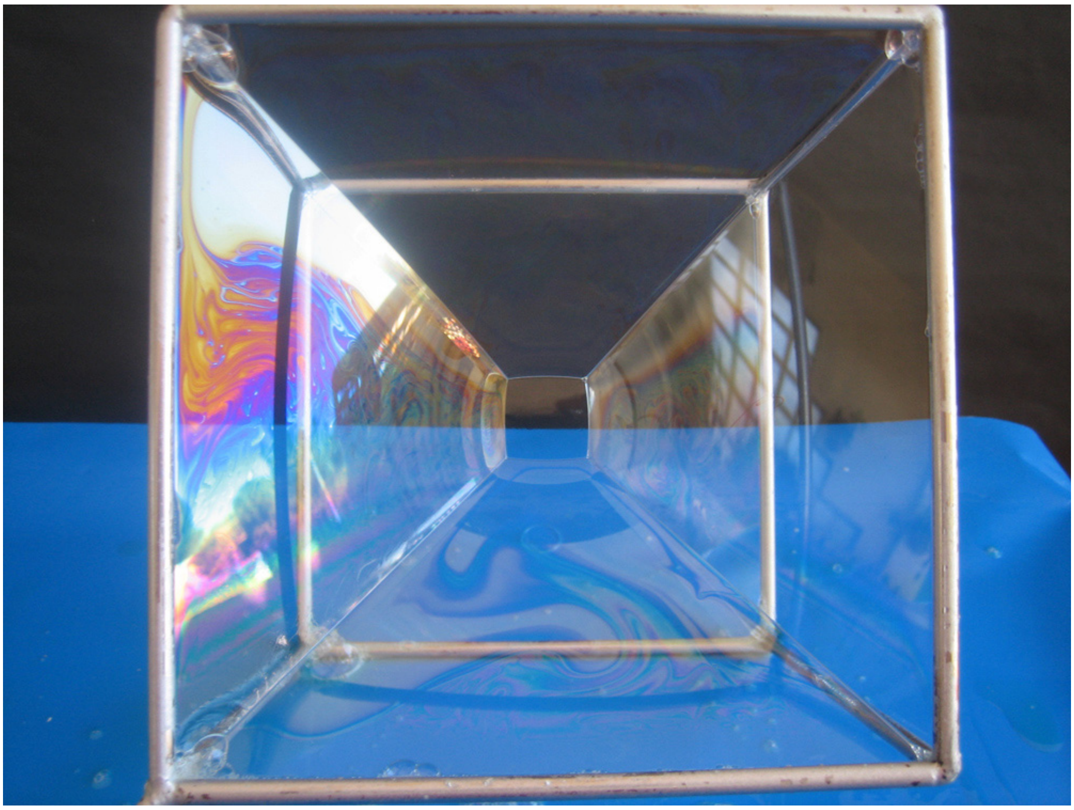
En cada punto concurren 6 películas de jabón correspondientes a 4 trapecios, un cuadrado y un triángulo.



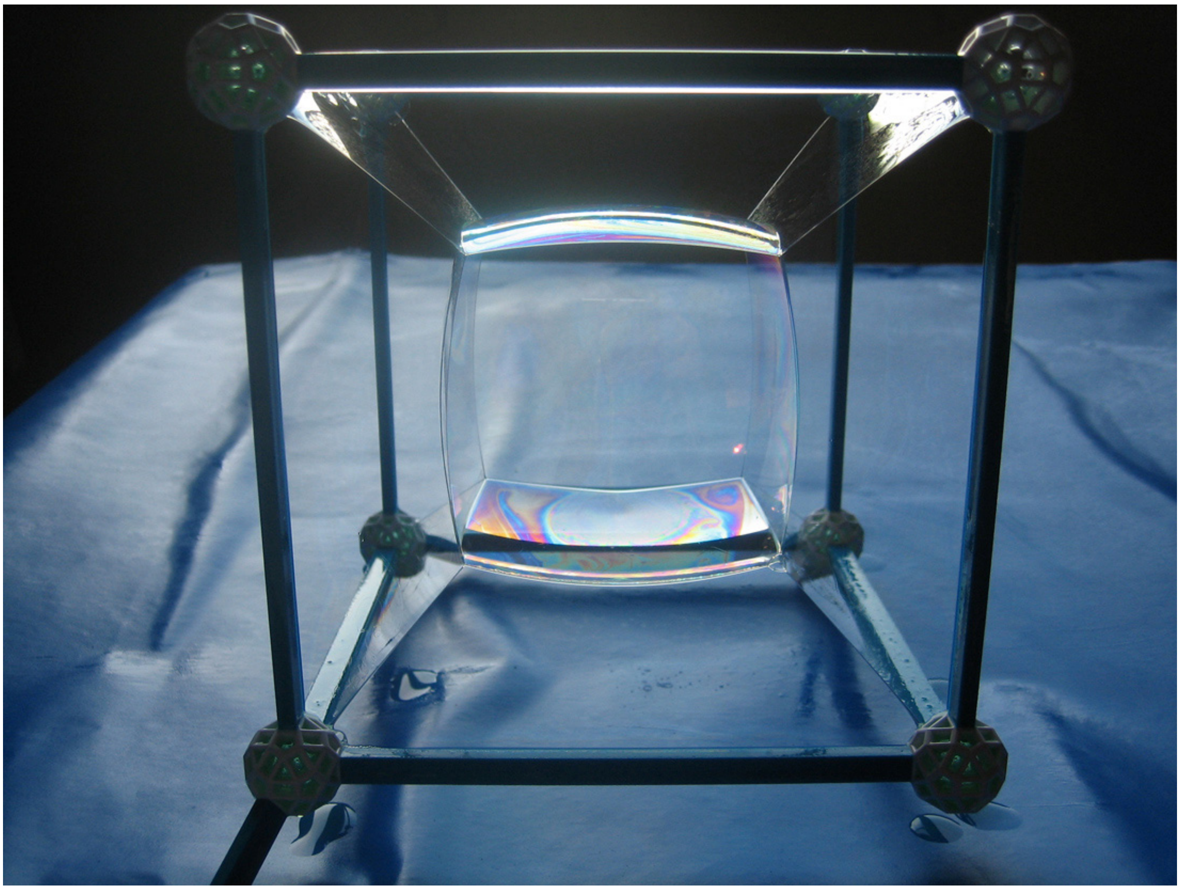
Las láminas de jabón se cortan de tres en tres a lo largo de una línea y formando entre ellas ángulos de 120º. Estas líneas concurren de cuatro en cuatro en un vértice y el ángulo formado por cada par de ellas es de 109º 28' ó 109'47º.

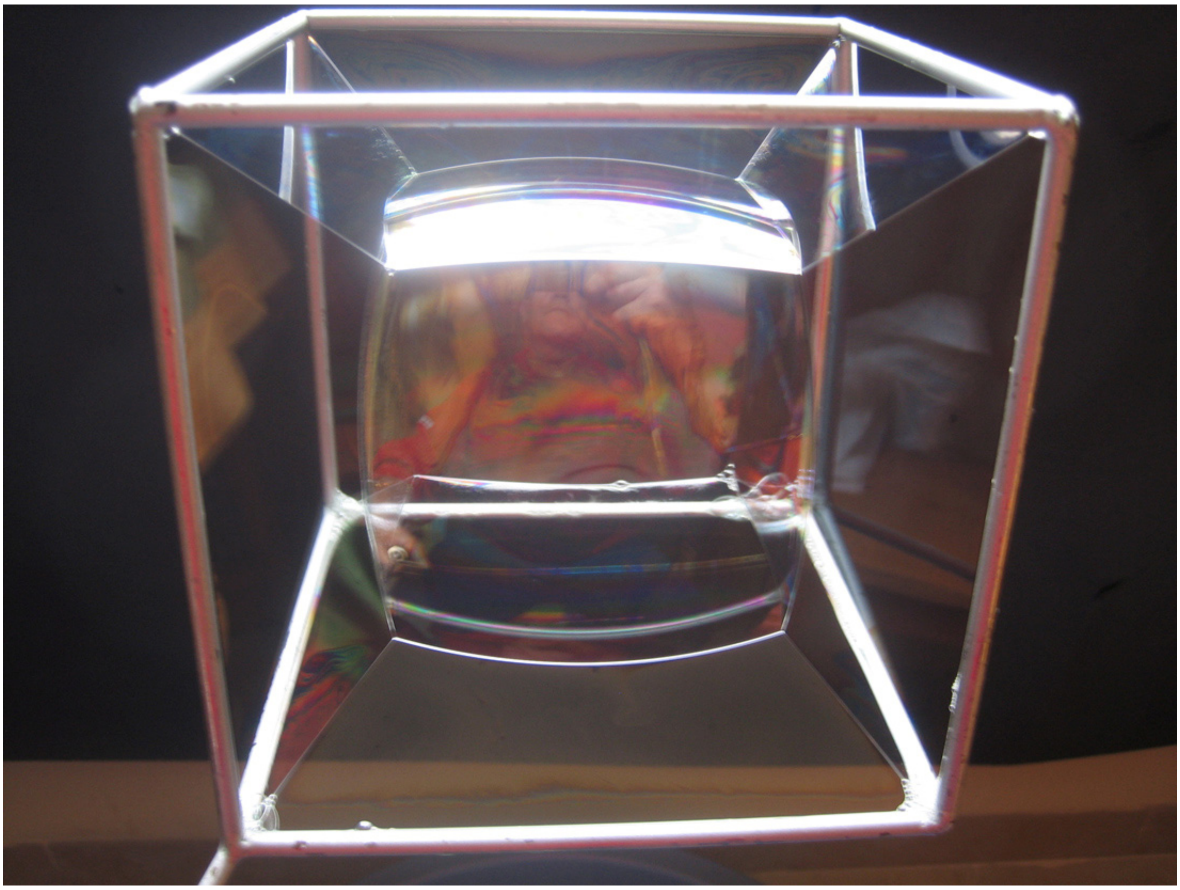
Cuando para una misma estructura se obtienen varias configuraciones de superficies distintas formadas por películas jabonosas planas hacia el interior del sólido, si sacudimos levemente las estructuras o soplamos ligeramente sobre ellas se pasa de una configuración a otra quedando al final la más estable.





Si introducimos la estructura anterior en la solución jabonosa o soplamos con una pajita en el cuadrado central del interior del cubo se obtiene un cubo esférico flotando en el interior del cubo original y sostenido por las 12 películas jabonosas planas que forman 12 trapecios, y lo más sorprendente es que todos los ángulos que forman las caras entre sí son de120º. Se dice que esta estructura es una sección tridimensional de un cubo de 4 dimensiones.

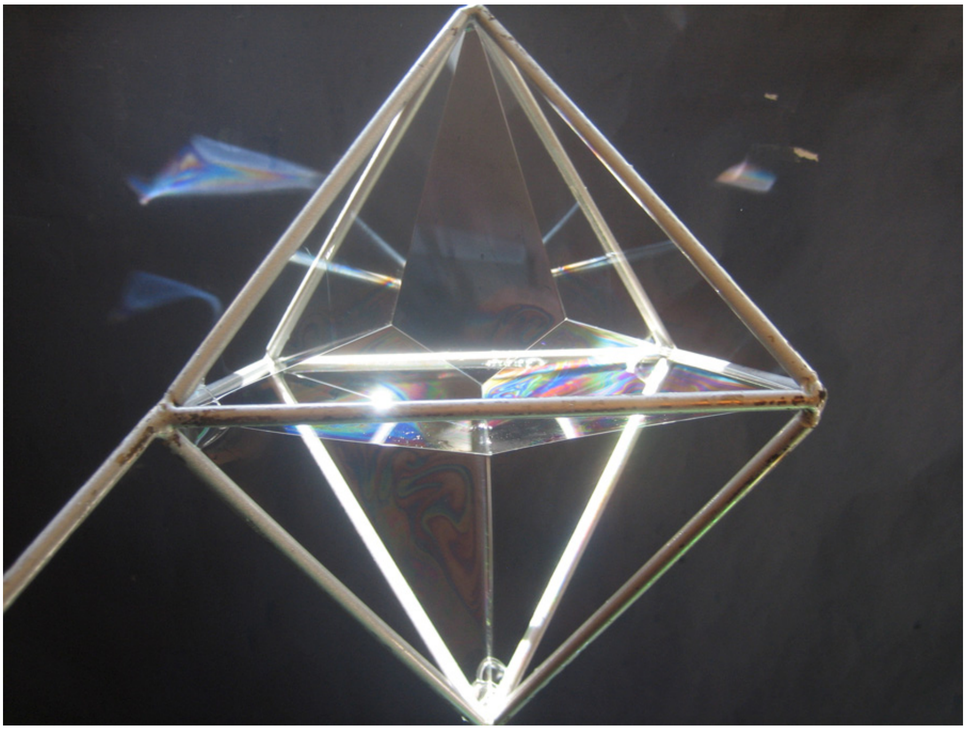


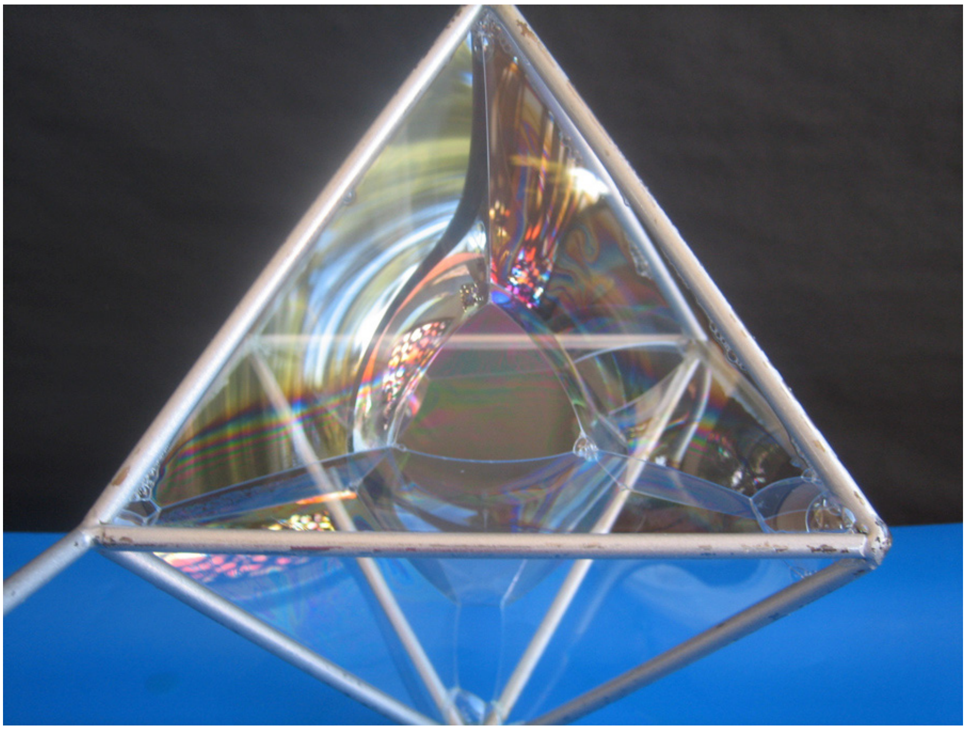


Si se destruyen algunas de estas películas jabonosas se obtienen formas muy vistosas y siempre los ángulos entre las películas jabonosas son de 120º.

Octaedro

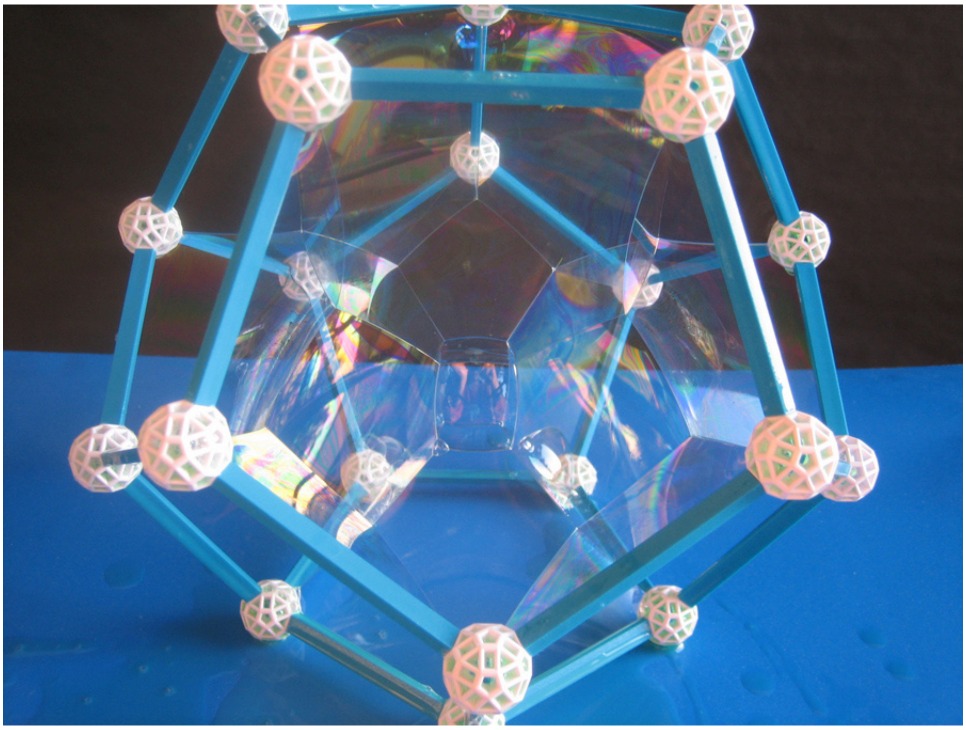
En este caso se obtienen diversas configuraciones. Podemos pasar de una configuración a otra soplando o moviendo el armazón. De todas las posibles figuras que se forman resulta especialmente atractiva una figura en forma de estrella tridimensional llamada *"la rosa de los vientos"*.



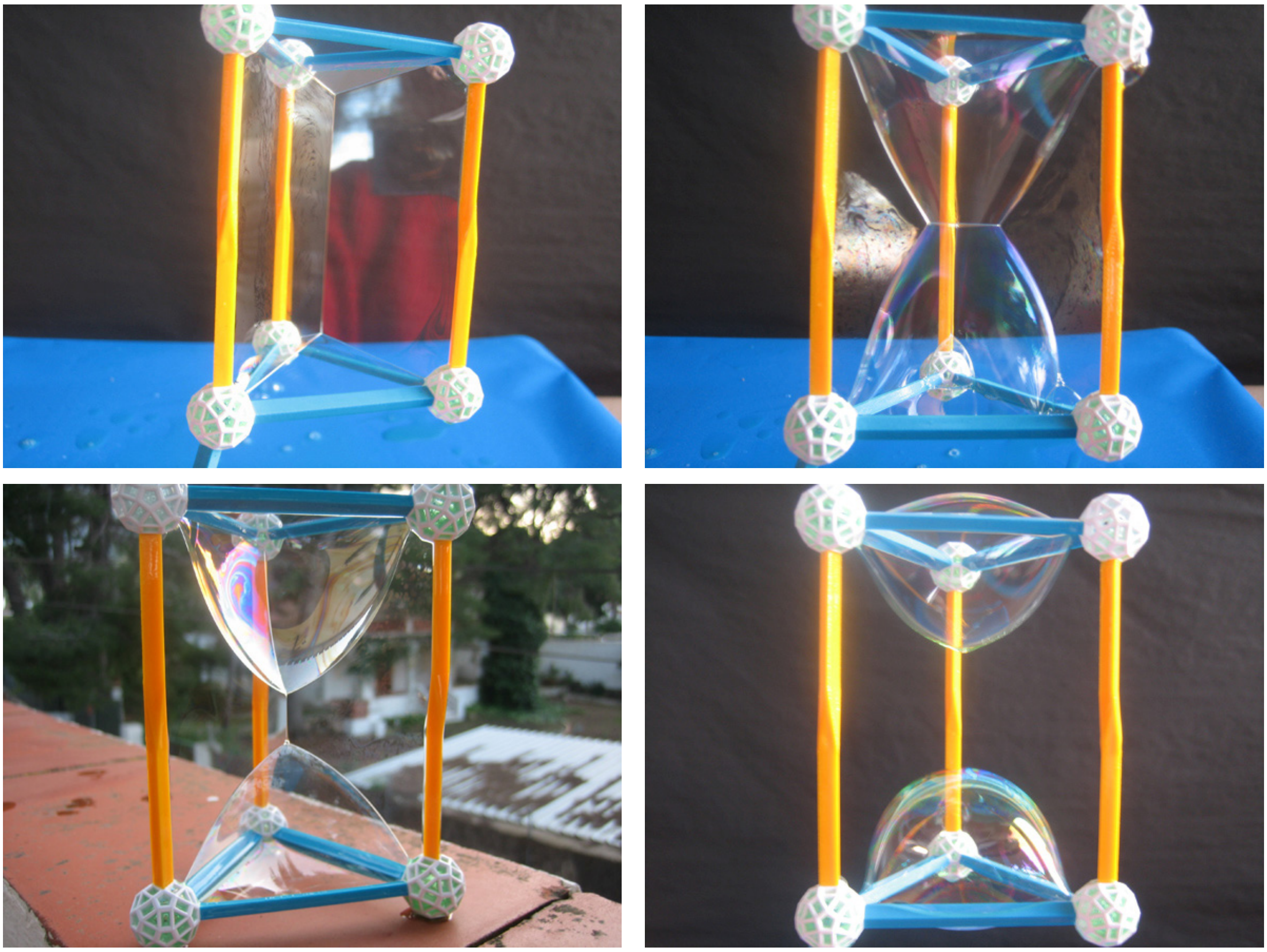


Dodecaedro

Al mover el dodecaedro y eliminar y añadir algunas caras soplando con una paja se puede obtener en su interior una pompa dodecaédrica.

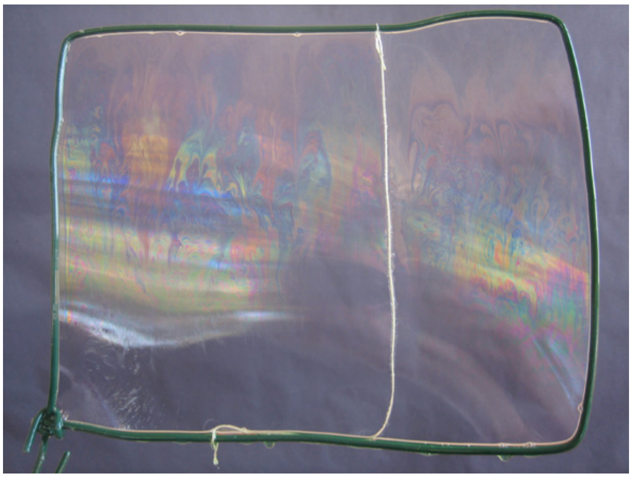


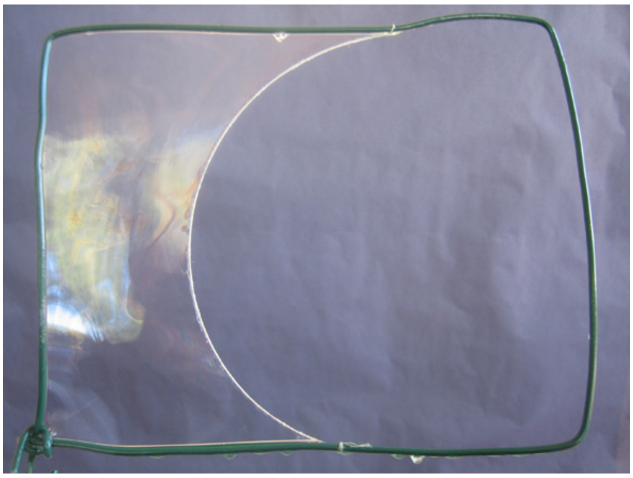
Prisma triangular

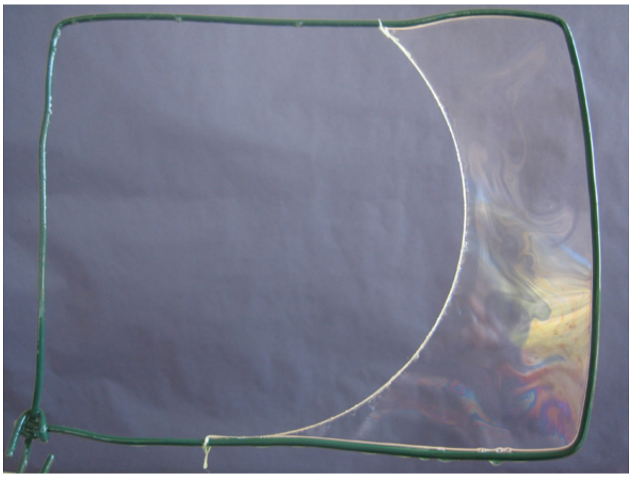


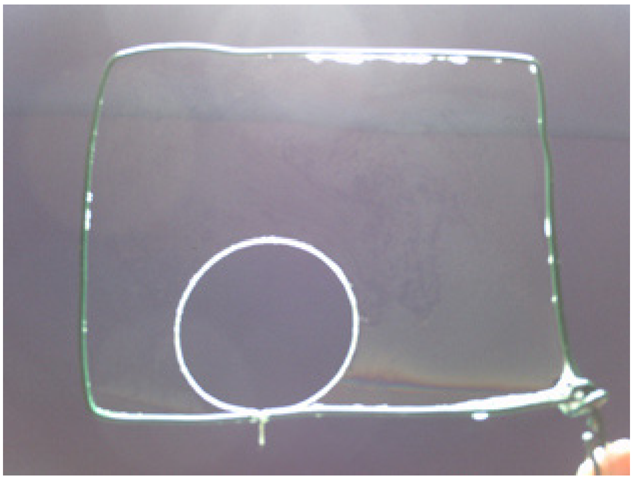
Rectángulo con hilo

Construimos un rectángulo hecho de alambre. Cogemos un hilo de coser, atamos un extremo a uno de los lados del rectángulo y el otro extremo del hilo lo atamos al otro lado paralelo al anterior. Dejamos que el hilo descanse sobre la superficie de jabón que se forma al introducir el rectángulo con el hilo en una disolución jabonosa. Al principio queda arrugado, pero al pinchar (romper) en una de las dos partes en queda dividida la superficie de jabón ésta desaparece y la otra parte, por efecto de la tensión superficial, se contrae tirando del hilo hacia ella.



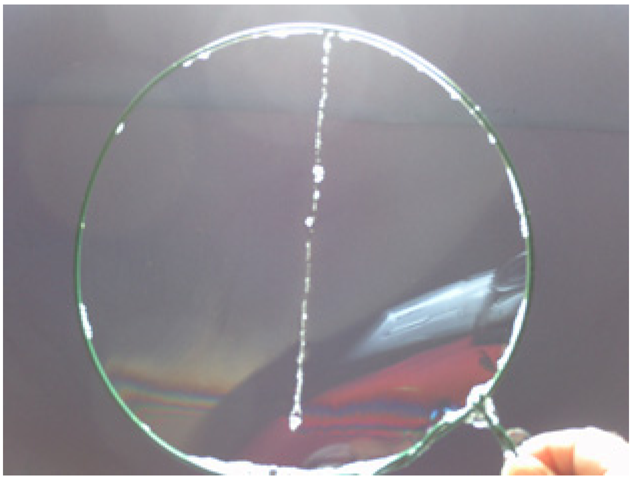


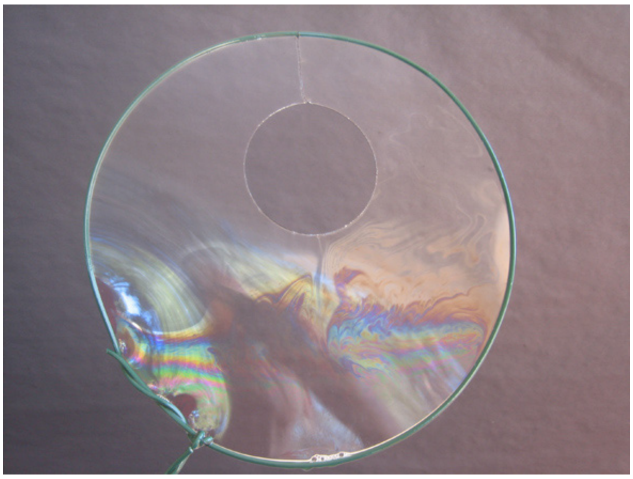




Círculo con hilo

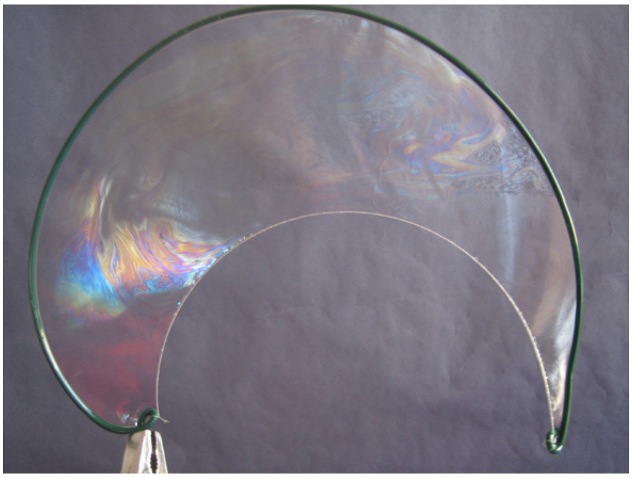
Sumergimos un alambre circular en la disolución jabonosa. Colocamos un hilo circular sobre la superficie de jabón y observamos que al principio queda arrugado, pero si rompemos la parte interna el hilo se tensa formando un círculo perfecto y vacío suspendido en la lámina de jabón. Las fuerzas sobre el hilo son iguales, lo que da lugar a una circunferencia sin deformar. Si con un dedo introducido en el interior del círculo vacío movemos éste de un lado a otro del aro de alambre, estos movimientos no modifican la superficie de la película que rodea al bucle. Si con dos dedos, previamente mojados en la disolución, obligamos al bucle a cerrarse, la película de jabón tira de él y lo abre nuevamente de la misma forma que los bomberos estiran una red en todas las direcciones.

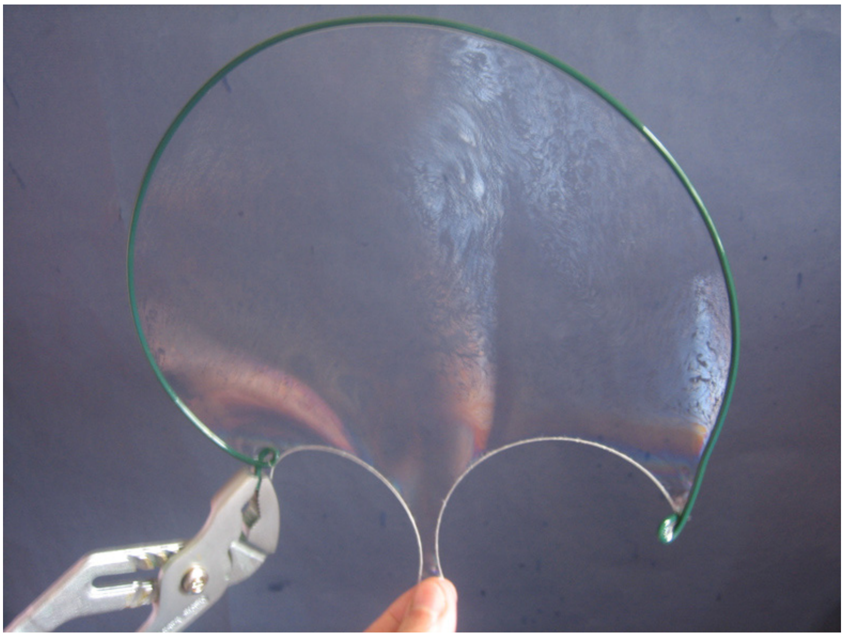




Media luna

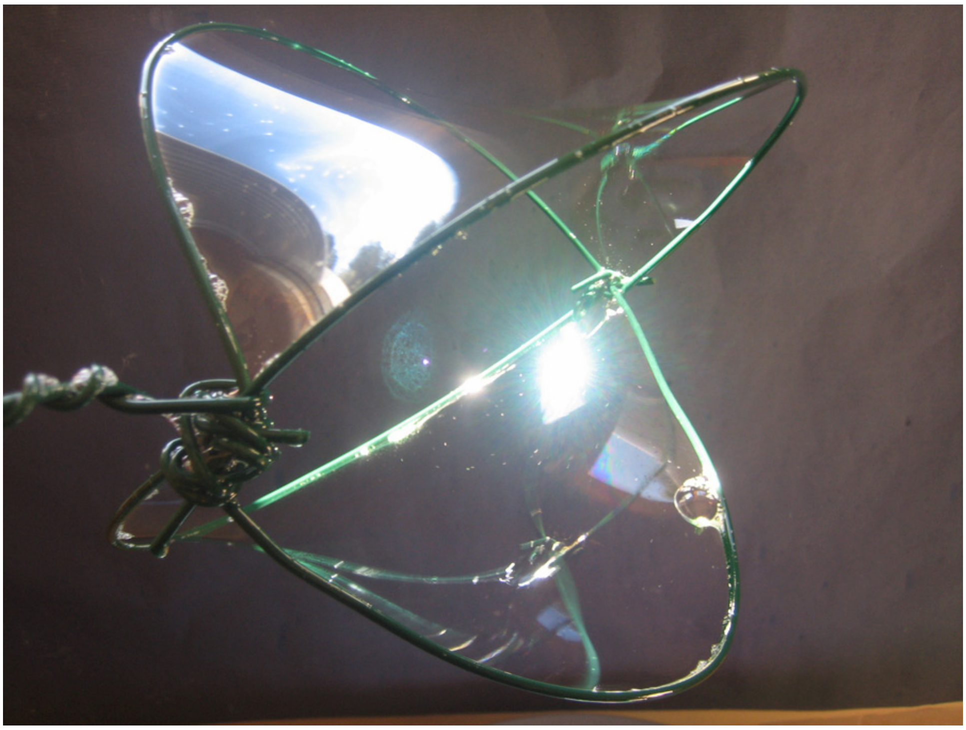
Doblamos un trozo de alambre hasta obtener casi un círculo, dejando una abertura en los extremos a los cuales atamos un trozo de hilo que quedará colgando. Si sumergimos este artilugio en una disolución jabonosa observaremos que el hilo es arrastrado hacia el alambre obteniéndose así una película de jabón que tiene la menor superficie. Si con dos dedos, previamente mojados en la disolución, tiramos del hilo aumentando la superficie de la película de jabón y luego lo soltamos, observaremos que automáticamente la película de jabón tiende otra vez a ocupar la mínima superficie.

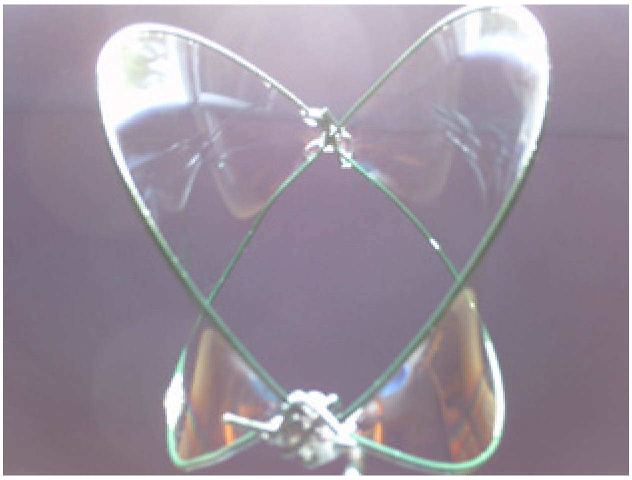


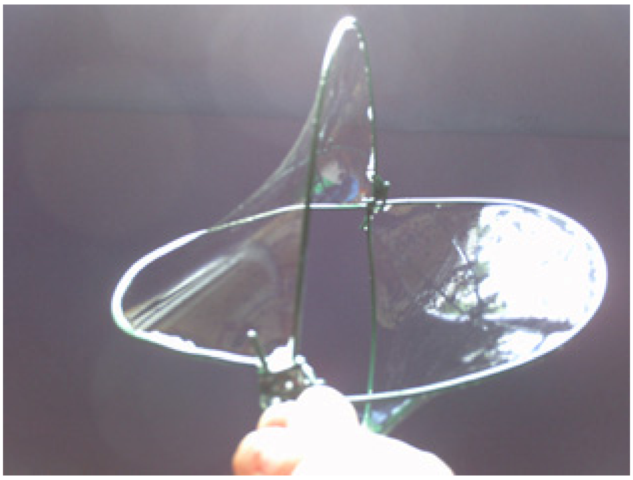


Aros perpendiculares

Si construimos con alambre dos aros circulares perpendiculares y los introducimos en una solución jabonosa observaremos que las películas jabonosas que se obtienen forman entre sí un ángulo de 120º (primera ley de Plateau) y no de 90º como de antemano podíamos suponer. La superficie mínima se obtiene cuando rompemos la película con forma elipsoidal que aparece en el centro de la estructura.



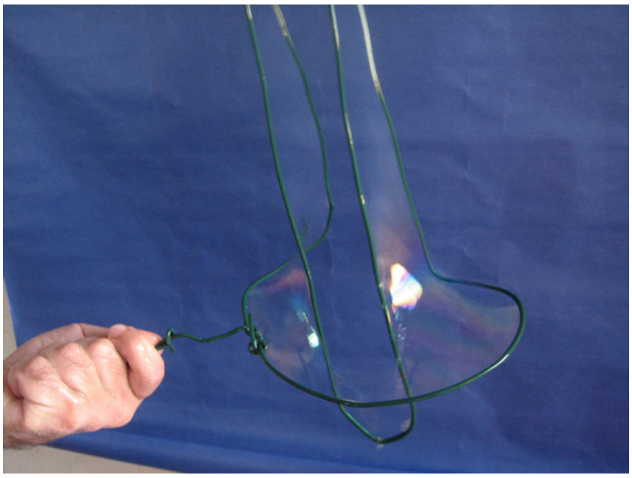


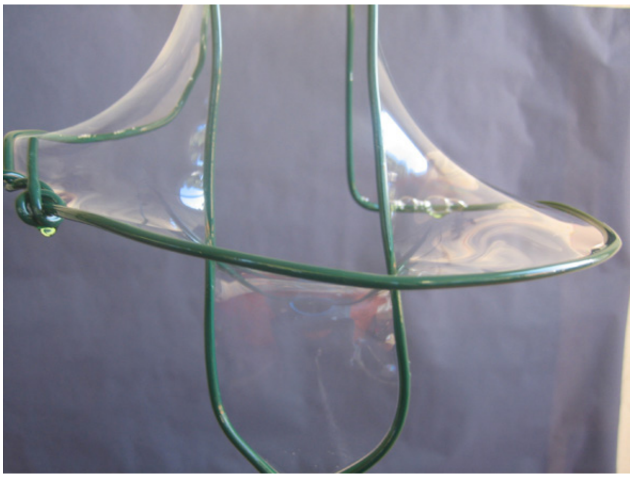


Superficies minimales

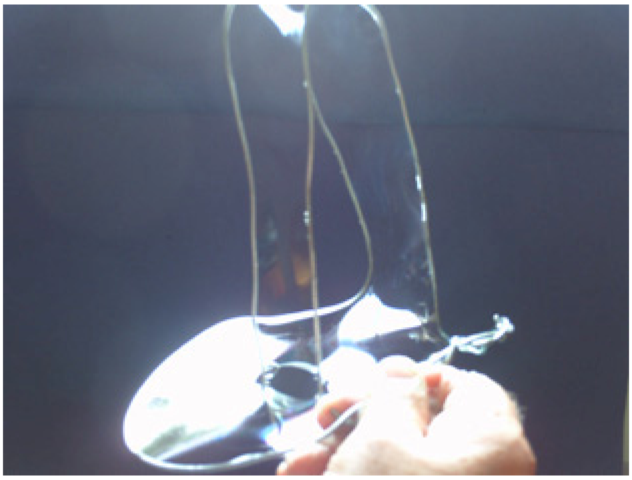
Las superficies minimales se llaman así porque minimizan la superficie para un volumen dado. Las superficies minimales del Espacio Euclídeo Tridimensional se caracterizan por el hecho de que, localmente, *las funciones que las representan presentan un mínimo o mínimos, entre los cuales puede haber un mínimo relativo, no necesariamente absoluto*, como se observa en la superficie que se forma al introducir el alambre de las fotografías en la solución jabonosa.

En las siguientes fotografías la superficie que se forma al introducir el alambre en la solución jabonosa es una superficie minimal (mínimo relativo), pero no es la mínima.



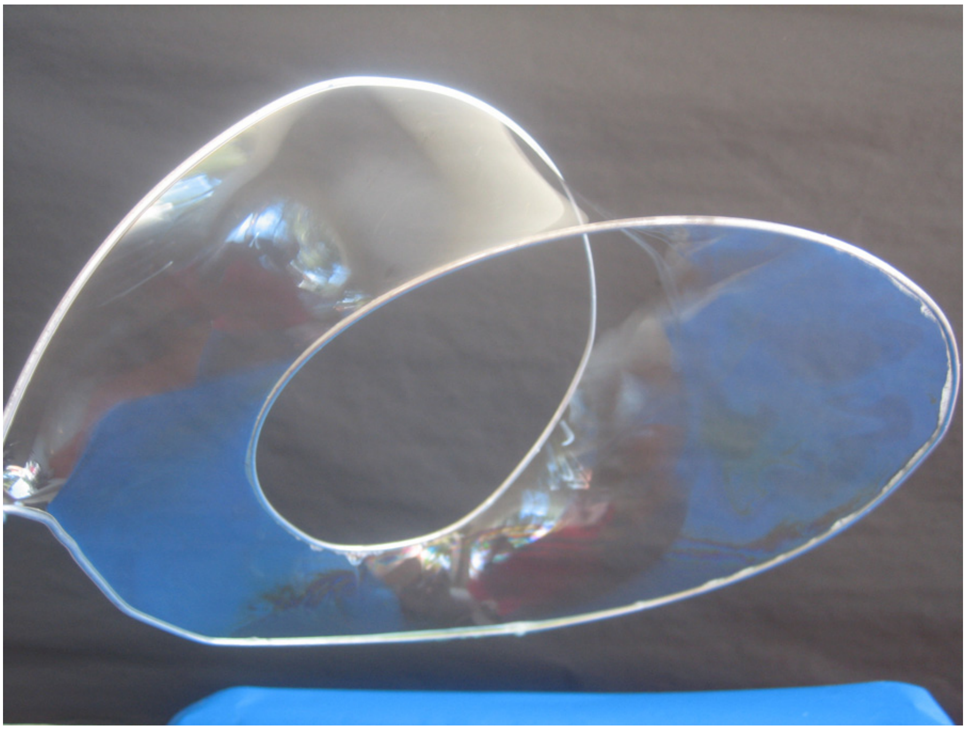


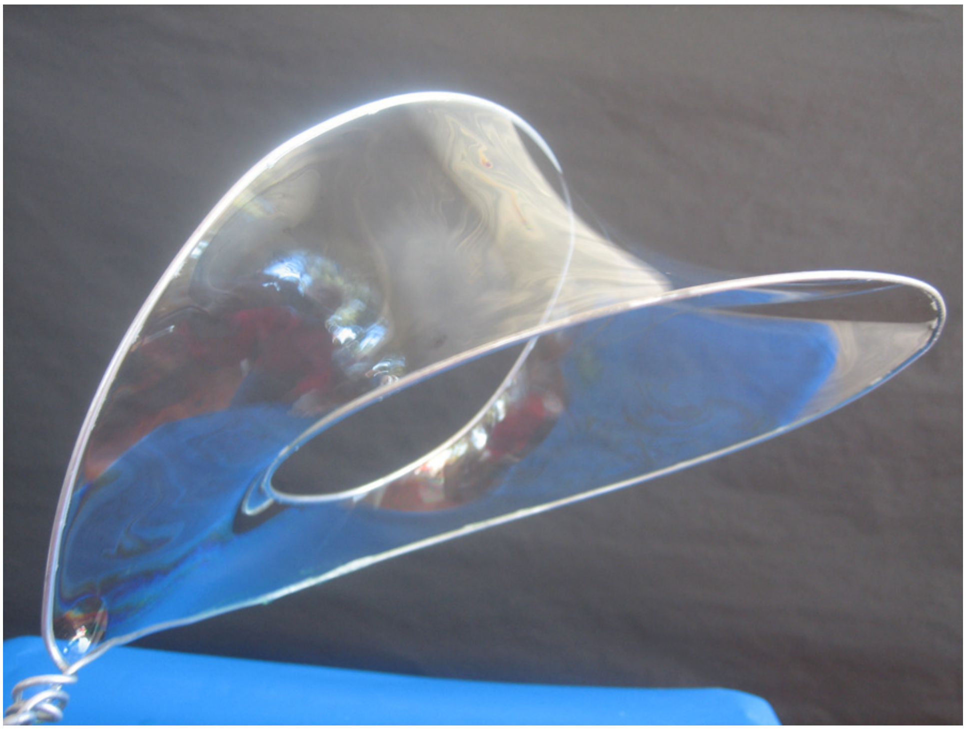
La superficie mínima se obtiene, cuando juntamos los dos extremos superiores del alambre curvado y rompemos la película formada bajo los arcos paralelos, como se observa en las siguientes fotografías.



La Cinta de Möbius o Moebius

Introduciendo un alambre como el de la siguiente fotografía en una solución jabonosa se obtiene una cinta de Moebius, que es una superficie que tiene una sola cara.





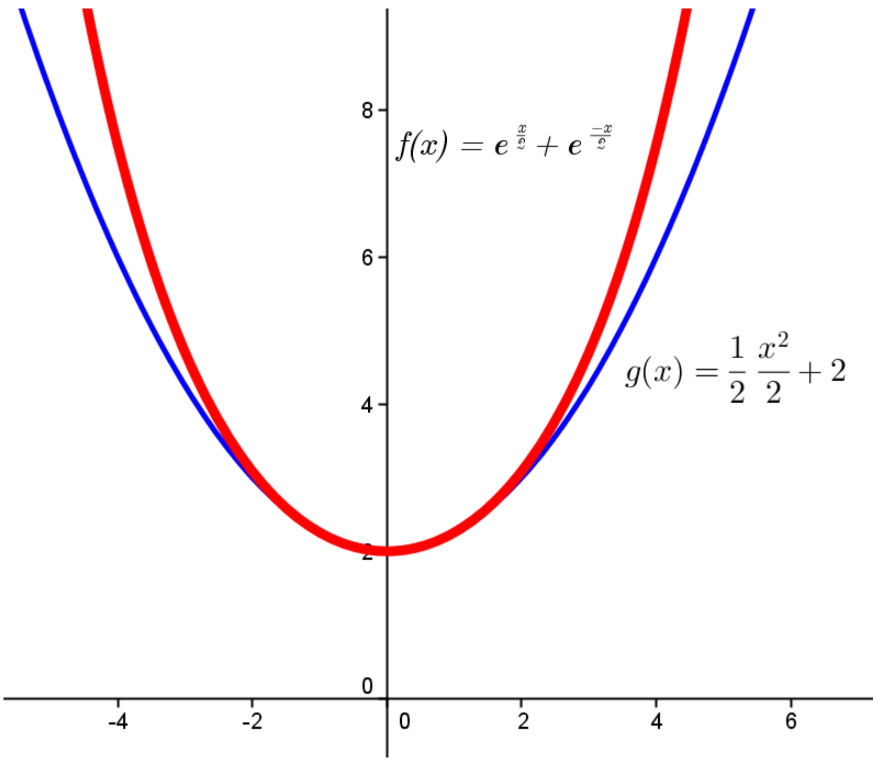
La Catenoide

En matemáticas se denomina Catenaria (o curva de la cadena) a la curva que adopta un hilo homogéneo e inextensible (como si fuera una cadena, de ahí su nombre, que no se estira por su peso), perfectamente flexible, con la masa distribuida uniformemente por unidad de longitud (densidad uniforme), suspendido por sus extremos y sometido únicamente a la acción de un campo gravitatorio uniforme (su propio peso).

Desde hace muchos años, la forma que adopta una cuerda o cadena que se comba bajo su propio peso ha sido objeto de estudio. En 1490 aparecen libros de notas de *Leonardo da Vinci* donde hay esquemas de cadenas colgando. En 1638 *Galileo*, que por entonces tenía 74 años, publicó en el libro "Diálogos sobre dos nuevas ciencias", que la solución a este problema era una curva que tenía la forma de una parábola. En 1690 *Jakob Bernouilli* propone en la revista *Acta Eroditorum* el desafío de descubrir la fórmula matemática que define la curva formada por un hilo pesado, flexible, inextensible y de densidad constante en toda su longitud suspendido en sus dos extremos. En 1691 la ecuación es publicada en esta revista por él mismo conjuntamente con su hermano *Johann Bernouilli*, por *Gottfried Leibniz y por Christiaan Huygens*. La solución es una *Catenaria*.

Aunque el trazado de una *Parábola* y una *Catenaria* se asemejan mucho, ambas curvas son diferentes, ya que mientras la Parábola está descrita por una ecuación cuadrática en la Catenaria aparecen las funciones exponenciales e^x y e^{-x}. En la ecuación de la Catenaria hay una función bastante especial, llamada coseno hiperbólico, que está relacionado con las funciones exponenciales de la siguiente manera:

Catenaria $f(x) = a \cosh \frac{x}{a} = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{-x}{a}}\right)$ *Parábola* $g(x) = \frac{1}{2}\frac{x^2}{a} + a$ Si $a = 2$ tenemos:



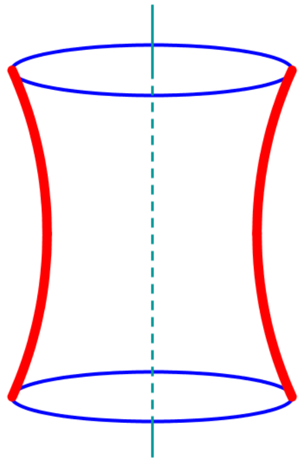
Para una misma longitud entre los puntos suspendidos, la parábola es menos puntiaguda que la catenaria (ésta produce una flecha mayor).

Si a un tendedero de ropa o a un cable suspendido por sus extremos les colgamos pesos uniformemente distribuidos por unidad de longitud de curva, entonces la catenaria adopta la forma de *parábola* que es lo que sucede en los puentes colgantes.

En 1744 Leonhard Euler demostró que al rotar una Catenaria alrededor de un eje que no la corta y perpendicular a su eje de simetría produce una superficie tridimensional que, tras el plano, es la primera superficie mínima descubierta y a la que llamó Catenoide. Lo que se obtiene es una especie de cilindro estrangulado.

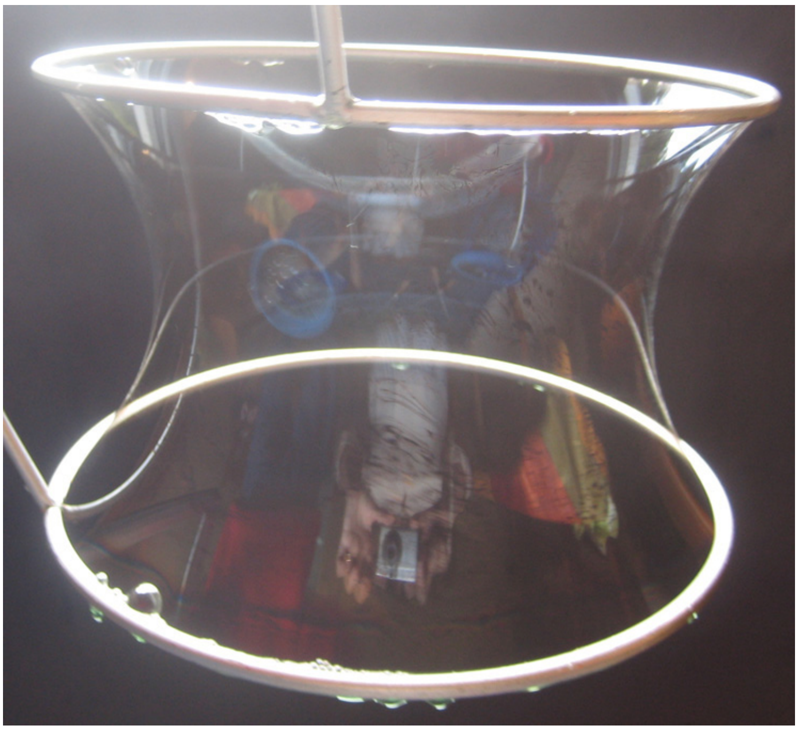
Ecuación de la catenaria $y = a\cosh\frac{x}{a} = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$

Catenoide



La ***Catenoide*** *se obtiene al introducir en una solución jabonosa dos aros circulares del mismo diámetro*. Al sacarlos, manteniéndolos paralelos y muy cercanos, aparece una superficie en forma de cilindro. Si comenzamos a alejar los aros, manteniéndoles siempre paralelos, la superficie se estrecha por el centro, donde se forma una película de jabón paralela a los aros. Rompiendo esta película se obtiene la *Catenoide* cuya generatriz es una *Catenaria*, como se observa en la siguiente fotografía. Si no se rompe la película que se forma en el interior aparece otro tipo de superficie.

El nombre de *Catenoide* se debe a que las secciones que aparecen al cortar con planos perpendiculares por el centro de los aros son *Catenarias.*

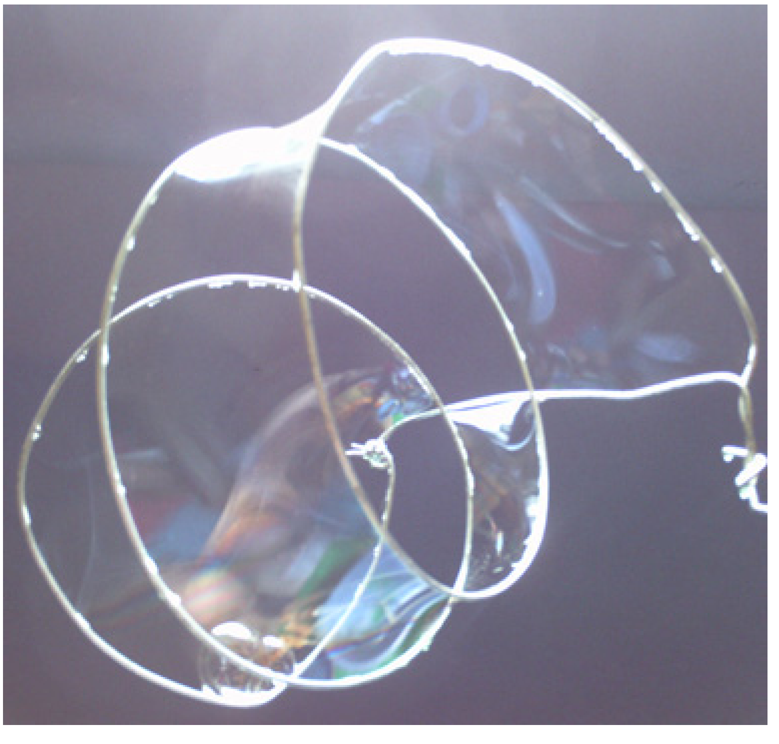


El Helicoide

Una *Hélice* es una línea curva cuyas tangentes forman un ángulo constante siguiendo una dirección fija en el espacio. El *Helicoide* es una superficie alabeada generada por una recta que se mueve apoyándose en una hélice y en el eje del cilindro que la contiene, con el cual forma constantemente un mismo ángulo. La generatriz de un helicoide es una hélice fija. Matemáticamente cada punto de la recta se mueve describiendo una hélice sobre un cilindro circular cuyo eje de revolución es el eje dado. El helicoide es la superficie mínima de una hélice.

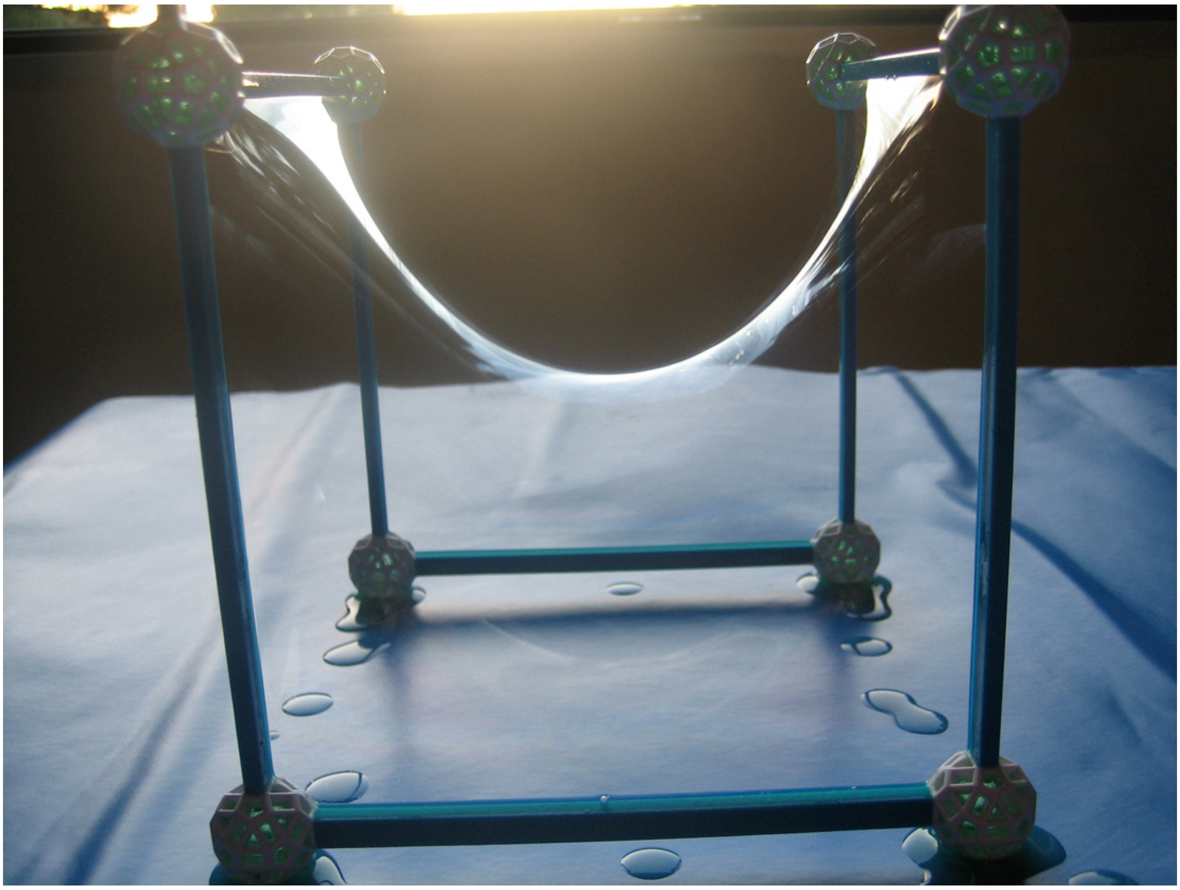
Si observamos una escalera de caracol veremos que es una superficie reglada porque siempre hay un conjunto de rectas horizontales que luego servirán para marcar las direcciones de los peldaños radiales, que van siguiendo la ruta de una espiral del cilindro exterior del espacio que ocupa la escalera, y estas radiales, al mismo tiempo, se apoyan en una recta vertical, central, que es el eje imaginario dentro del núcleo u ojo de la escalera. Ejemplos arquitectónicos de esta superficie los tenemos en varias de las obras de *Gaudí*, como las escaleras de caracol en la Pedrera. En la Sagrada Familia todos los campanarios tienen escaleras de caracol, pero, además, están las escaleras principales del ábside, las futuras escaleras de los cimborrios de los evangelistas y de Jesucristo y alguna escalera de caracol auxiliar en otros puntos concretos del templo.

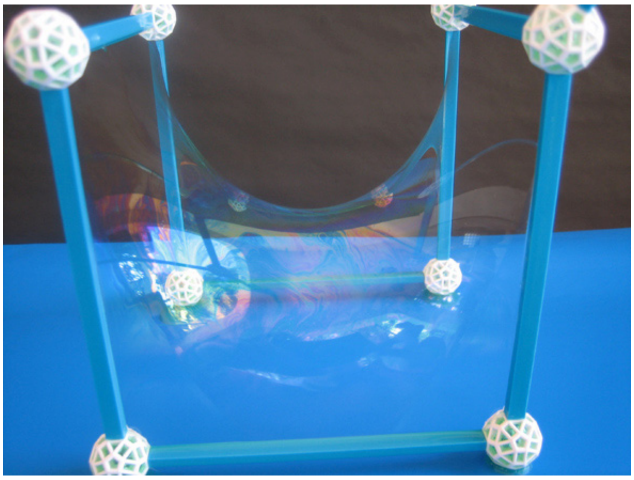
Junto con la *Catenoide*, el *Helicoide* fue encontrado como superficie minimal por *Meusnier*. En la siguiente fotografía vemos una estructura de alambre cerrada sobre sí misma *parecida a una forma helicoidal*. La superficie jabonosa que se forma es una banda que tiene una única superficie pues se puede pasar de la parte inferior a la superior sin atravesarla.

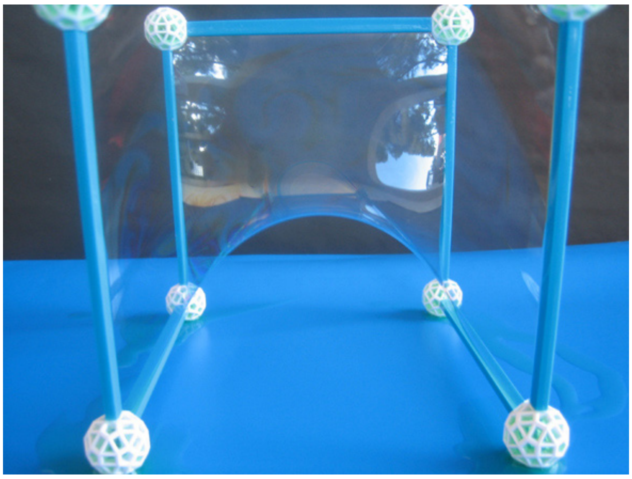


Superficie de Scherk

Si introducimos en agua jabonosa la estructura de un cubo al que le faltan dos aristas paralelas de una misma cara y otras dos aristas paralelas, perpendiculares a las anteriores, de la cara paralela a la anterior, se obtiene la superficie de *Scherck* cuya forma se asemeja a una silla de montar a caballo como se observa en las siguientes fotografías. H. Scherk obtuvo esta superficie en 1835.







Superficies mínimas en Arquitectura

- En la vida cotidiana la *Catenaria* aparece en el cableado de alta tensión (ferrocarriles, redes eléctricas, puentes, etc.). En arquitectura los arcos de catenaria aparecen frecuentemente, ya que los arcos de catenaria invertidos son la forma ideal para que un arco se mantenga en equilibrio. La *Catenaria* tiene la característica de ser el lugar geométrico de los puntos donde las tensiones horizontales de un cable se compensan; de este modo el cable no tiene tensiones laterales, por lo que el cable permanece inmóvil sin desplazarse hacia los lados. Las tensiones que sufre se reparten entre una fuerza vertical, la atracción terrestre, y una tensión tangente al cable en cada punto, que es la que lo mantiene estirado. En un arco que adquiere la forma de una catenaria, la tensión que éste soporta en cada punto se reparte entre una componente vertical, que será la que tenga que sustentar el propio arco, y otra de presión, que se transmite por el arco hacia los cimientos sin que se creen esfuerzos horizontales, salvo en los extremos del mismo al llegar a los cimientos. Esta propiedad es distintiva y única de este tipo de arcos ya que consigue que no necesiten apoyos a ambos lados de los mismos para sustentarse y evitar la tendencia a abrirse. En las capillas románicas eran necesarios gruesos muros a los lados de las puertas y ventanas para mantener los arcos de medio punto sin que se agrietaran.

  Un arco en forma de Catenaria invertida es precisamente la forma curva que minimiza los esfuerzos de compresión sobre dicho arco. Ésta es la razón de que en arquitectura, una curva catenaria invertida sea un trazado útil para un arco. Esta forma fue aplicada por los arquitectos modernistas y, básicamente por el arquitecto español *Antonio Gaudí (1852-1926)* que la utilizó mucho en sus obras, como pueden verse en la casa *Batlló* (1904-1906), cuya foto se reproduce a continuación, el *Colegio de las Teresianas* (1888-1890) y la *Casa Milá* denominada comúnmente *La Pedrera* (1906-1910). Probablemente, la obra arquitectónica con forma de arco catenario más famosa del siglo XX es el *Gateway Arch* de Saint Louis (Missouri), en Estados Unidos, obra del arquitecto norteamericano de origen finlandés Eero Saarinen que constituye una maravilla de la construcción, sobre todo si tenemos en cuenta que fue proyectado en una época anterior a los ordenadores. Este arco mide 192’024 m por 192’024 en sus bordes externos.


- Arquitectos e ingenieros se basan en el comportamiento de las películas de jabón para construir edificios y diseñar redes de carreteras. Al escoger la menor superficie posible las películas de jabón nos muestran siempre el camino más corto para unir varios puntos, que es la opción más económica ya que al tener la mínima superficie para construir genera el menor gasto.

  En 1972, Frei Otto, arquitecto e ingeniero alemán, diseñó el estadio olímpico de Múnich basándose en las teorías de las pompas de jabón. Construyó una maqueta en la que levantó unos pilares a los que ató unos hilos que no estuvieran tensos y los sumergió en una disolución de agua con jabón. De este modo, Otto consiguió unos techos que tuvieran la mínima superficie posible ahorrando así en la cantidad de material utilizado. Además de la zona olímpica de juegos, Frei Otto diseñó bajo esta técnica el pabellón alemán de la exposición de Montreal.

Toda su obra se centra en la consecución de estructuras ligeras que, al igual que la naturaleza, rebajan el empleo de material y permiten la consecución de una obra más diáfana. Así, mediante membranas tensadas por cables lograba una estructura capaz de cubrir grandes distancias con la única ayuda de unos postes que hacían rígida y estabilizaban la estructura mediante el uso de elementos que impedían el desplazamiento o deformación de la misma.

Pompas de jabón

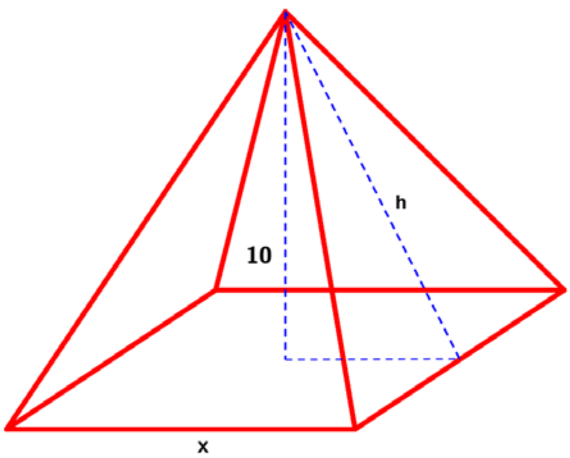
La ciencia nos explica que una pompa de jabón es una porción de aire rodeada por una película de agua y un elemento tensoactivo (jabón o detergente). El volumen de una pompa de jabón está determinado por la cantidad de aire atrapado en su interior. *De todas las superficies que abarcan esa determinada cantidad de aire en su interior la que menos superficie tiene es la esfera.*

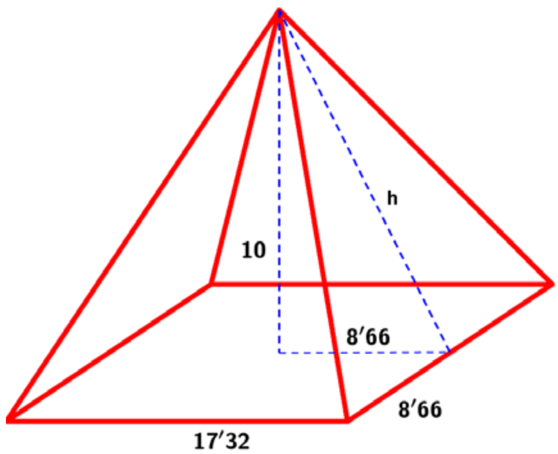
Si comparamos varios cuerpos que tengan el mismo volumen, como por ejemplo un cubo, un cilindro, una pirámide, una esfera y un cono, observaremos que la esfera es el cuerpo que tiene menor superficie, de ahí que las burbujas tengan forma esférica. Esta forma esférica está causada por la tensión superficial que hace que *la burbuja tienda a ocupar la menor superficie exterior con el mayor volumen interior para el aire que contiene*. Esta forma puede distorsionarse visiblemente por las corrientes de aire y por tanto por un soplido. Sin embargo, *si se deja caer una pompa en aire quieto, permanece casi esférica*.

Supongamos que tenemos una pirámide de base cuadrada, un cono, una esfera, un cilindro y un cubo, todos ellos con un volumen de $1000\,\text{cm}^3$ y con una altura de 10 cm. salvo la esfera cuyo diámetro es fijo para ese volumen. Vamos a comprobar que la menor superficie corresponde a la esfera.

Pirámide

$$V = 1000 = \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot 10 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{300} = 17'32\,\text{m}$$





$$h = \sqrt{10^2 + 8'66^2} = 13'22\,\text{m} \qquad A_{\text{Pirámide}} = x^2 + 4 \cdot \frac{x \cdot h}{2} = 17'32^2 + 4 \cdot \frac{17'32 \cdot 13'22}{2} = \boldsymbol{757'92\,m^2}$$

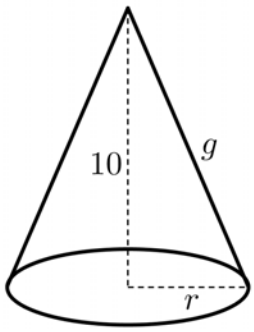
Cono

$$V = 1000 = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot 10 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{300}{\pi}} = 9'77\,\text{m}$$

$$A_{Cono} = \pi r^2 + \pi rg$$

$$g = \sqrt{10^2 + r^2} = \sqrt{100 + 9'77^2} = 13'98\,m$$

$$A_{Cono} = \pi \cdot 9'77^2 + \pi \cdot 9'77 \cdot 13'98 = \boldsymbol{728'96\,m^2}$$

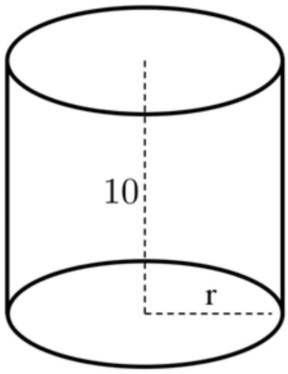


Cilindro

$$V = 1000 = \pi \cdot r^2 \cdot 10 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{100}{\pi}} = 5'64\,m$$

$$A_{Cilindro} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 10$$

$$A_{Cilindro} = 2\pi \cdot 5'64^2 + 2\pi \cdot 5'64 \cdot 10 = \boldsymbol{554'23\,m^2}$$



Cubo

$$V = 1000 = x^3 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{1000} = 10\,m$$

$$A_{Cubo} = 6x^2 = 6 \cdot 10^2 = \boldsymbol{600\,m^2}$$

Esfera

$$V = 1000 = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{3000}{4\pi}} = 6'20\,m$$

$$A_{Esfera} = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 6'20^2 = \boldsymbol{483'05\ m^2}$$

Las pompas de jabón se obtienen introduciendo un tubo más o menos grueso, dependiendo del tamaño de la pompa que queramos crear, en la mezcla jabonosa. A continuación se mantiene verticalmente para que en su extremo se forme una película y se empieza a soplar lentamente. Al hacer esto, la pompa se llena de aire caliente que sale de nuestros pulmones y como es más ligero que el aire que nos rodea la pompa se eleva inmediatamente. Si conseguimos que la primera pompa que hacemos tenga 10 cm. de diámetro quiere decir que la mezcla jabonosa es buena y en caso contrario hay que añadirle más jabón a la mezcla. Además tiene que suceder que si mojamos un dedo en la mezcla y lo introducimos en la pompa ésta resista y no se rompa. Entonces ya podemos comenzar los experimentos con pompas de jabón.

Para hacer pompas de jabón estables es conveniente que la humedad en el ambiente sea elevada $\geq 70\%$. En el caso de que el ambiente sea muy seco o haga mucho calor se debe humedecer el ambiente con un rociador de agua.

Otro procedimiento para hacer pompas de jabón (o burbujas) consiste en introducir un aro de alambre con una agarradera en una solución de jabonosa y soplar sobre el aro o moverlo en contra del viento. Las pompas desaparecen debido a la evaporación de agua favorecida por los factores que contribuyen a aumentar dicha evaporación como la sequedad del ambiente, el viento, los objetos con los que choca, etc.

Una pompa puede existir porque la capa superficial de un líquido (normalmente agua) tiene cierta tensión superficial, lo que hace que la capa se comporte parecida a una hoja elástica. *Sin embargo, una pompa hecha solo con líquido puro no es estable y se necesita un tensoactivo disuelto, como el jabón, para estabilizarla. El jabón disminuye la tensión superficial hasta aproximadamente un tercio de la tensión superficial del agua pura.* El jabón *no refuerza las pompas*, sino que las estabiliza mediante el mecanismo llamado ***efecto Marangoni***.

El tamaño de las pompas de jabón depende de la presión del fluido en su interior que es inversamente proporcional a la curvatura (las pompas de menor tamaño soportan mayor presión. La pompas van ajustando la tensión superficial a lo largo de su superficie por lo que no tienen el mismo grosor en todas las partes. Donde hay mayor tensión superficial la película de jabón tenderá a contraerse más y se romperá.

Experimentos que podemos hacer con las Pompas de Jabón

Pompa esférica que cae sobre una superficie plana

Cuando una pompa de jabón cae sobre una superficie plana, como por ejemplo una lámina de vidrio o una superficie con agua jabonosa (solo hace falta que la superficie esté impregnada con una fina capa de agua jabonosa de 1 ó 2 mm. de altura), toma siempre la forma de una *semiesfera*. Si queremos que la semiesfera se forme directamente sobre la superficie no tenemos más que soplar cuidadosamente con un tubo sobre ella, habiendo mojado previamente el tubo en la disolución jabonosa.

Cuando la pompa de jabón esférica se convierte en una semiesfera al caer sobre una lámina de vidrio, la cantidad de aire que encierra se mantiene constante, es decir, el volumen de la semiesfera y de la esfera original son iguales. Llamando r_E y r_S a los radios de la esfera y la semiesfera respectivamente tenemos: $\frac{4}{3}\pi r_E^3 = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r_S^3\right) \quad \Rightarrow \quad r_E = r_S \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = 0'7937\, r_S$

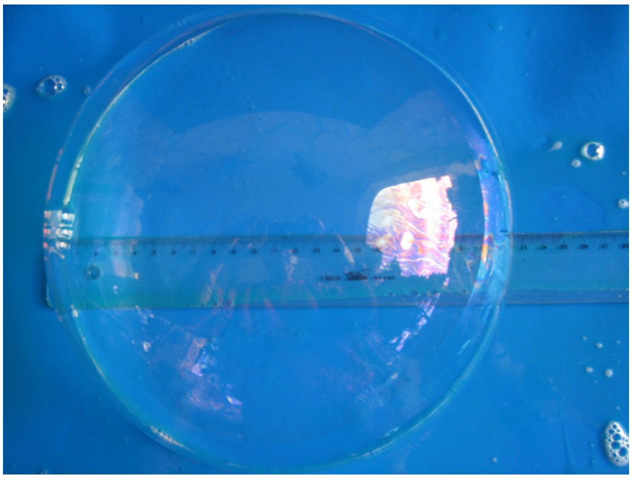
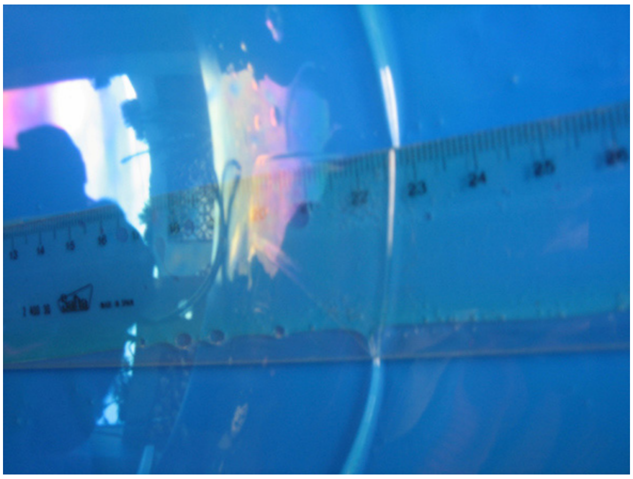
es decir, el radio de la esfera es 0’7937 veces el radio de la semiesfera.

La presión que existe en una pompa de jabón es inversamente proporcional al radio, es decir, es mayor en una pompa pequeña que en una grande.

¿Cuánto aire cabe en una pompa semiesférica como la anterior?

Aspiramos aire profundamente y echamos todo el aire que podamos a través del tubo de una sola vez, dejando que se forme una semiesfera de burbuja. Impregnamos totalmente una regla graduada en la disolución jabonosa y la empujamos por debajo de la semiesfera cuidando de que el origen coincida con el extremo del diámetro. Medimos los cm. que tiene el diámetro de la semiesfera, como se indica en las fotografías siguientes, y realizamos el siguiente cálculo:

El volumen de la semiesfera es: $V = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 11'4^3 = 3102'93\, cm^3$ ya que su diámetro es $22'8\, \text{cm}$.

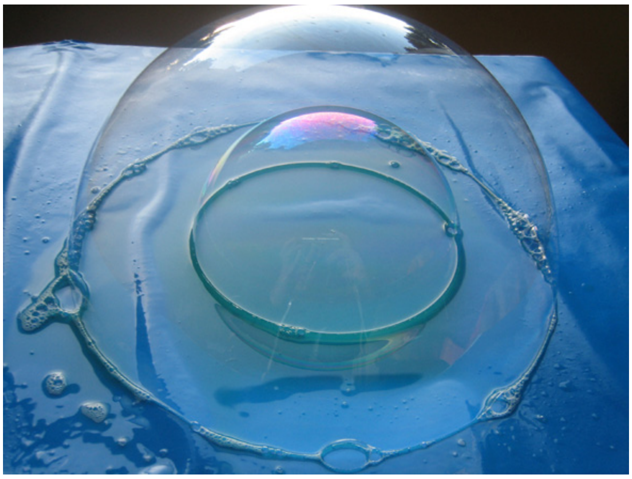
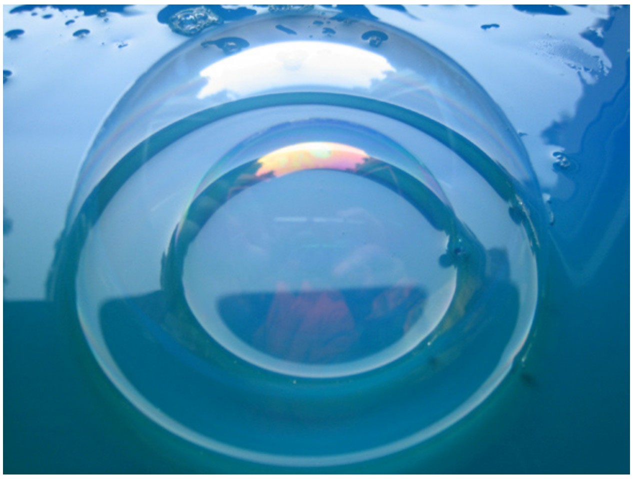
 

El volumen de aire lo de deducimos de la siguiente proporción:

$$\frac{1000\,cm^3}{3102'93\,cm^3} = \frac{1\,litro}{x} \quad \rightarrow \quad x = 3'102\,litros$$

Pompas semiesféricas en superficies planas

Podemos introducir en una pompa de jabón en forma de semiesfera un tubo o una paja grande, previamente mojados, en la disolución jabonosa y soplar en la superficie de la mesa. Observaremos que se forma otra pompa (concéntrica con la anterior o algo desplazada) también en forma de semiesfera. Podemos volver a realizar el proceso con la pompa interior y así sucesivamente, como se observa en las fotografía que siguen a continuación, formándose 2, 3, etc. pompas.

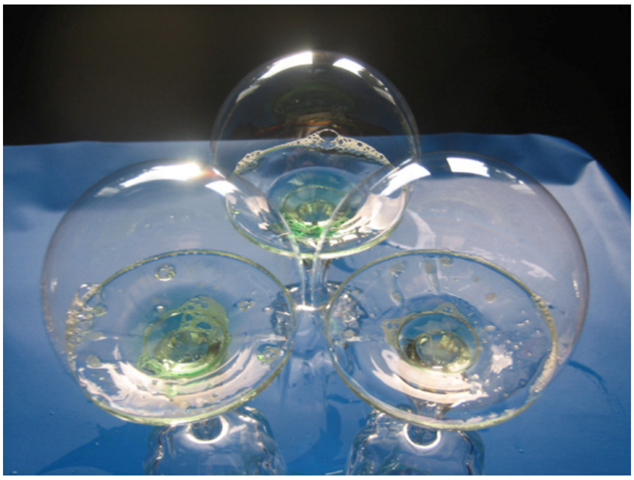
 

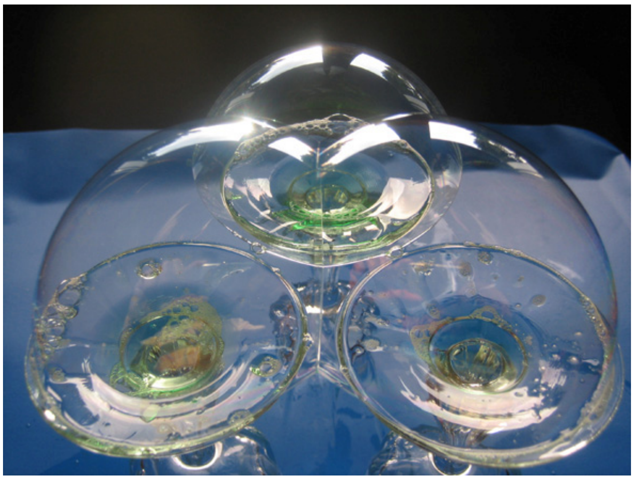
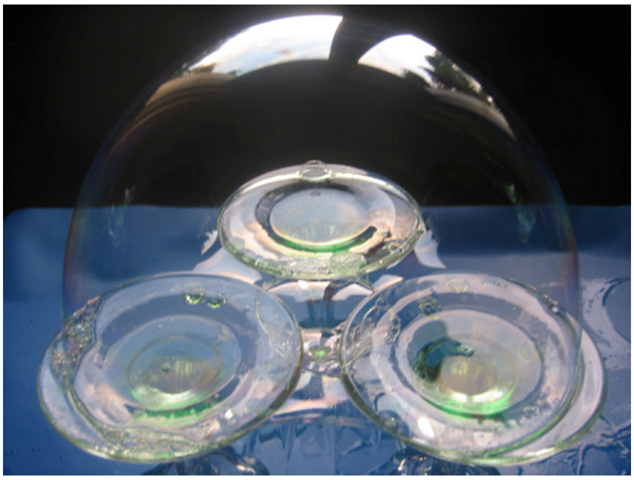
Pompas esféricas o semiesféricas que conectan entre sí

a) Para este experimento colocamos dos o tres copas de cristal invertidas sobre una mesa horizontal y sobre la base de la copa, situada en la parte superior, ponemos tres o cuatro gotas de la disolución jabonosa. Con una paja, que previamente hemos introducido en la disolución, soplamos en cada una de las bases hasta que se formen burbujas, aproximadamente iguales, en cada una de ellas. Si acercamos las dos copas suficientemente entre sí puede suceder que se formen dos pompas conectadas por una pared común o que las dos pompas se unan en una sola como se aprecia en las siguientes fotografías.

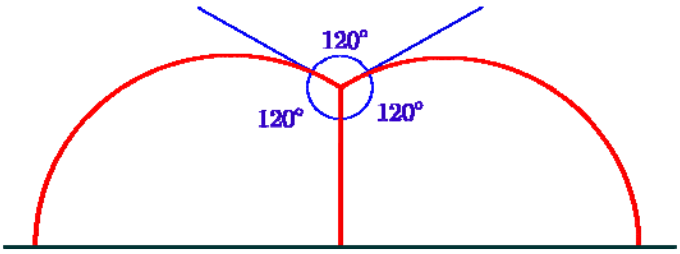
Si la experiencia la hacemos con tres copas y las vamos acercando horizontalmente entre sí, se unen formando entre cada dos de ellas una película de separación.



Si colocamos las tres copas formando un triángulo equilátero, tocándose entre sí, puede suceder que dos pompas se unan entre sí y la tercera quede separada de esta por una pared común o que se forme una gran pompa que abarca las tres copas, como se observa a continuación.

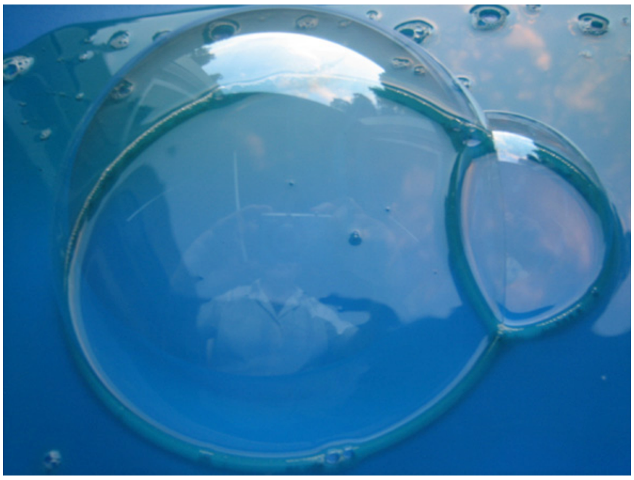
 

b) Si colocamos dos pompas semiesféricas sobre una superficie de vidrio o una superficie jabonosa con algo de agua, ambas se juntarán y formarán una membrana de separación entre ellas que delimita la intersección. Cuando dos pompas esféricas o semiesféricas de jabón se unen forman un ángulo de 120º. Esta unión constituye lo que se denomina una pompa doble.

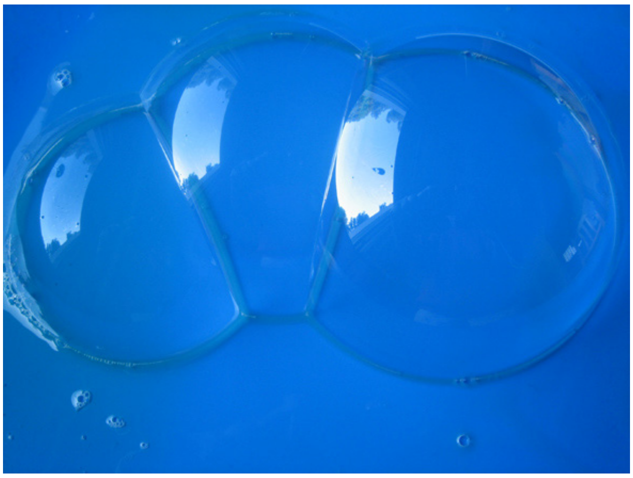


La superficie de esta pompa doble, incluida la membrana de separación, es menor que la suma de las superficies de las semiesferas con las cuales se ha formado. Si la reducción de área no se produce las pompas no llegan a fundirse.

Cuando las dos semiesferas tienen el mismo radio, la membrana de separación que se forma es una superficie plana, sin embargo si una de las dos pompas semiesféricas es más grande que la otra, la membrana de separación que las une se curva siempre hacia la pompa de mayor radio, ya que al tener la pompa más pequeña mayor presión interna empuja la membrana de separación hacia la grande para minimizar la energía, como se observa en las siguientes fotografías.

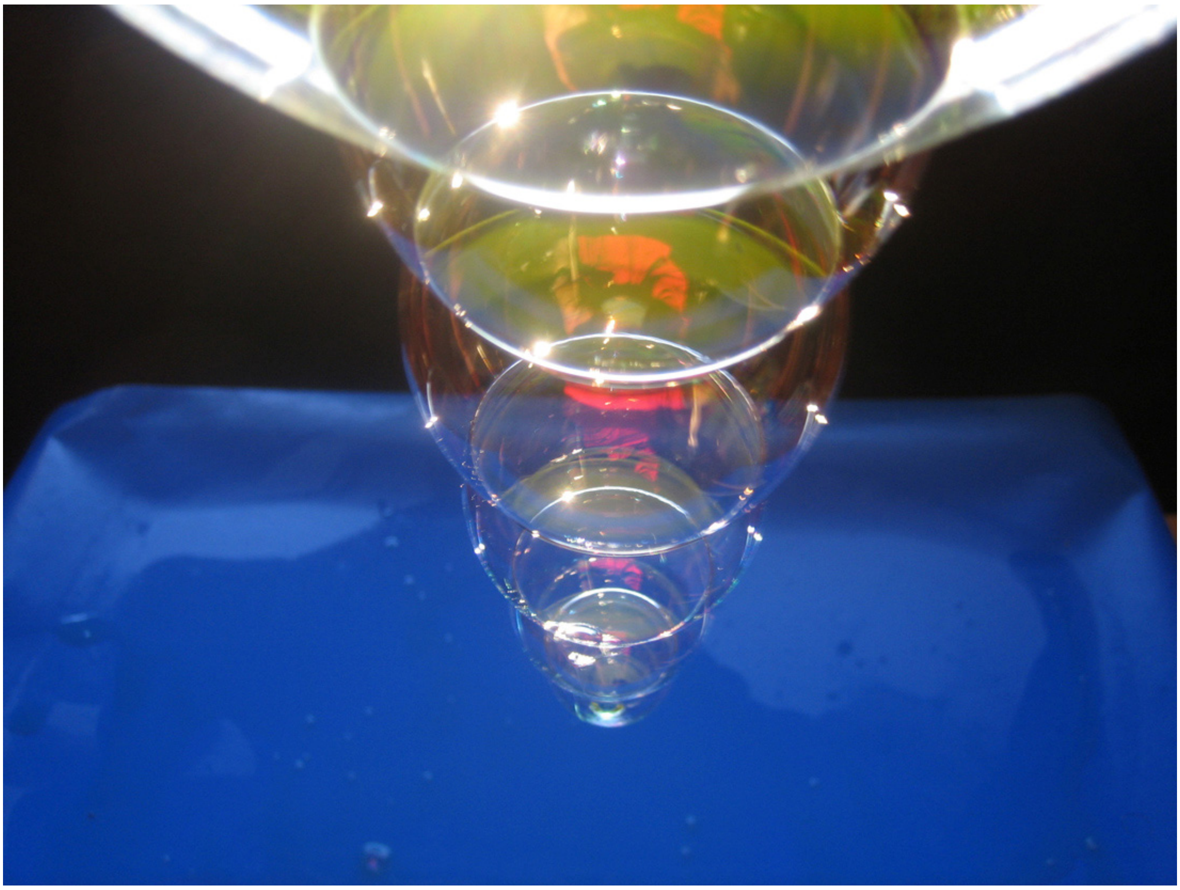
 

La pompa doble es la superficie con menor área entre aquellas que encierran dos volúmenes dados, no necesariamente iguales. En este caso, la pompa de menor radio empuja a la de radio mayor y no al revés como cabría esperar. Lo mismo sucede para 3 pompas etc.

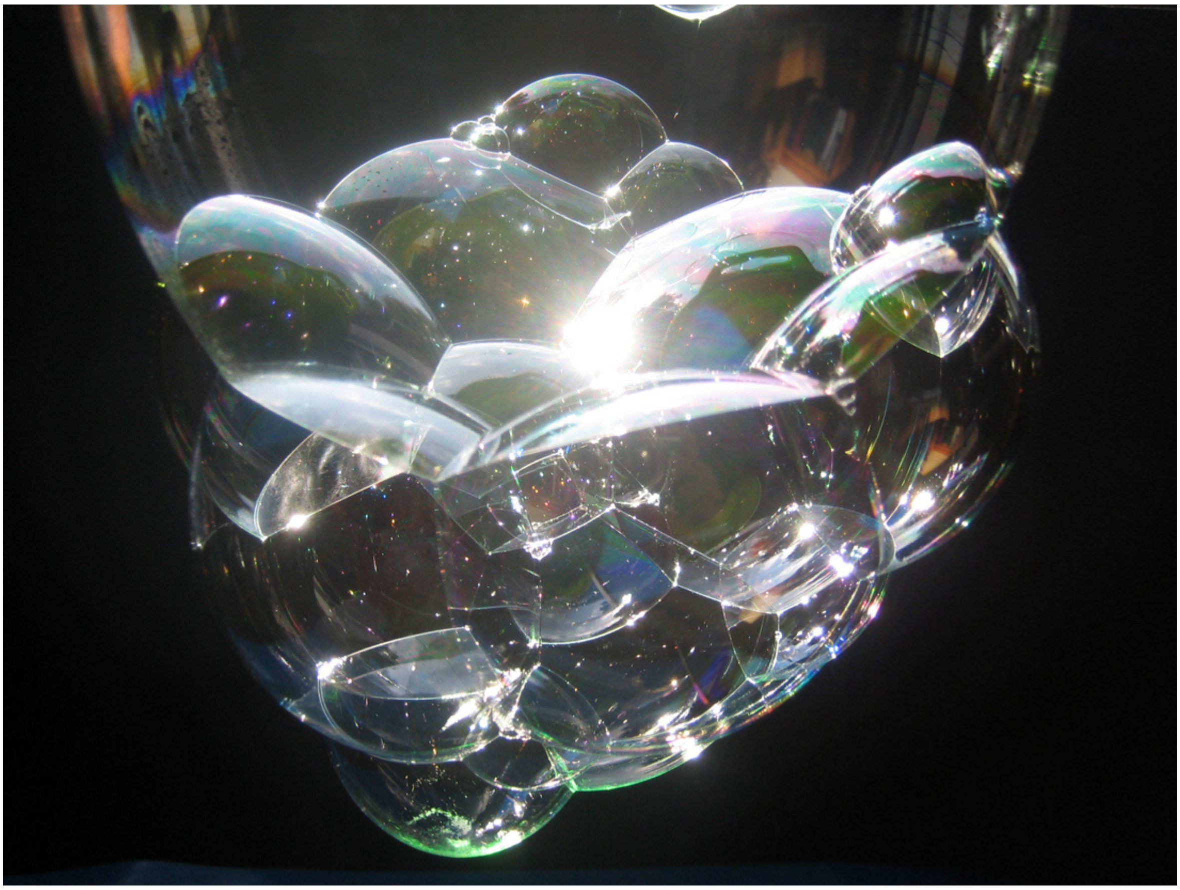


c) Cuando se juntan sobre una mesa horizontal muchas pompas de jabón o se llena de burbujas un recipiente desde la base, sin más que ir soplando en su interior con una paja previamente mojada en la disolución, la superficie de unión entre ellas es hexagonal y no curva como cabría pensar. La razón es que si fueran curvas dejarían espacios libres entre ellas y sin embargo al "empaquetarse" en forma de hexágonos vuelven a tener las formas más estables. La mejor manera de comprobarlo es ir haciendo pompas de jabón sobre una mesa y que se toquen entre ellas.

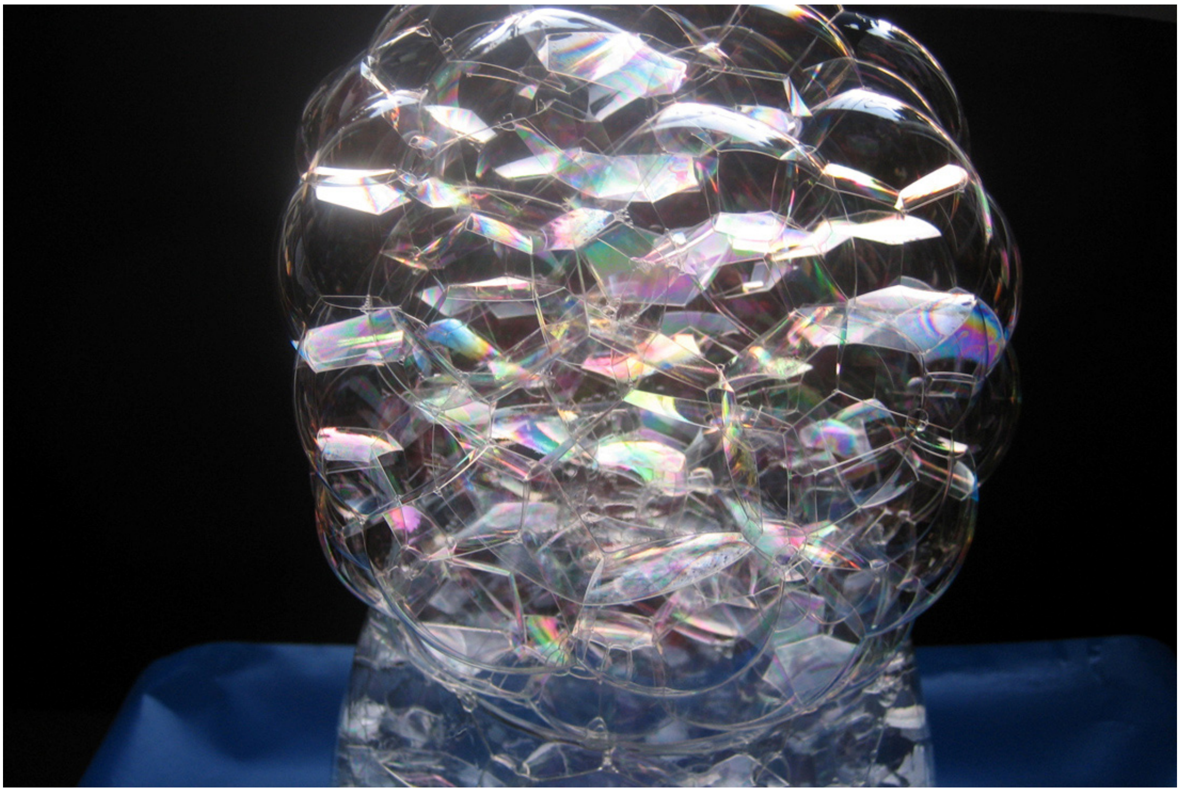
d) Introducimos un embudo en la disolución jabonosa y una vez fuera soplamos por el orificio estrecho hasta que se haga una pompa medianamente grande, sin que esta se llegue a desprender del embudo. Inmediatamente tapamos con un dedo u otro objeto el orificio por donde hemos soplado para impedir que se salga el aire de la burbuja y comprobaremos que se va formando una gran pompa pegada a la boca grande del embudo. Si ahora soplamos con la paja en la parte inferior de la pompa obtendremos otra pompa más pequeña pegada a la anterior. Si repetimos el proceso obtendremos como resultado varias pompas ensartadas verticalmente como se observa en la siguiente fotografía.



e) Otra manera muy vistosa es ir haciendo, con una paja mojada, pompas de jabón alrededor de la unión de la pompa con el embudo, pompas que irán cayendo hasta acumularse en la base de la pompa original, como se indica en la fotografía siguiente.

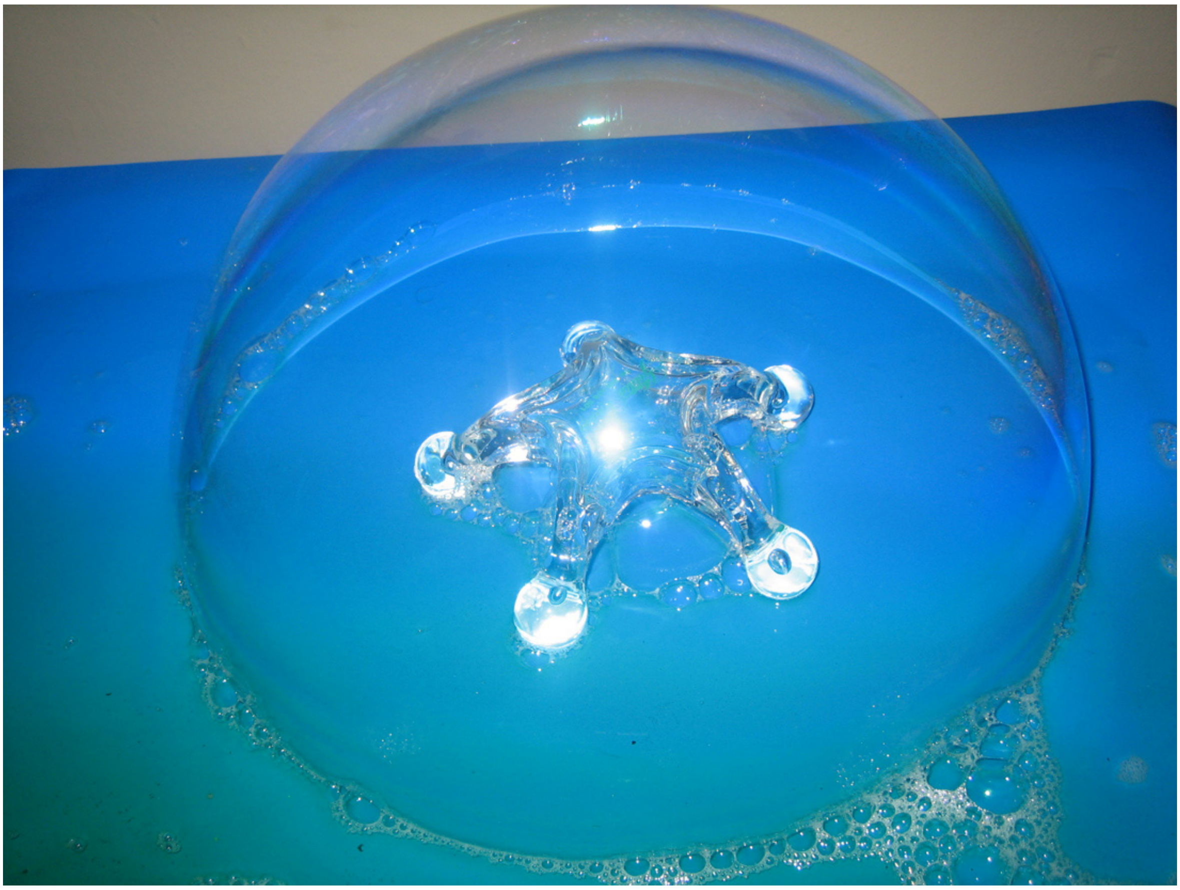


f) También resulta espectacular hacer burbujas en el interior de una copa muy grande de cristal y que las burbujas sobresalgan por orificio abierto, como se observa en la siguiente fotografía.



g) Podemos colocar una o varias pompas sobre la cabeza de una estatua, para lo cual es necesario poner previamente una gota de solución jabonosa en la cabeza y soplar sobre ella con una paja.

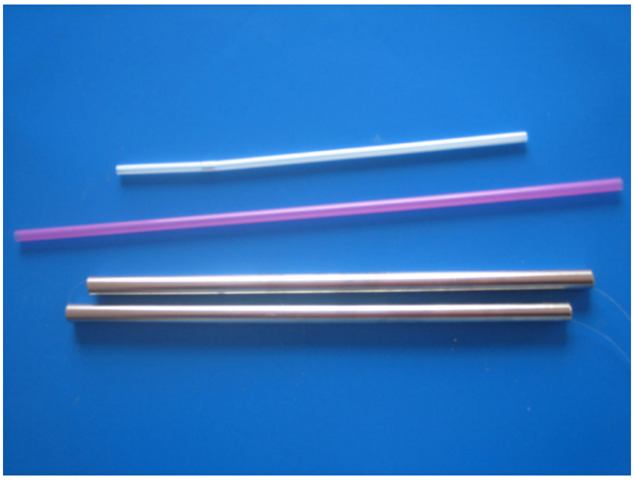
h) Podemos introducir objetos en el interior de una pompa semiesférica sin más que crear la pompa, sumergir el objeto en la solución jabonosa y posteriormente con una paja mojada arrastrarlo hasta que penetre totalmente en la pompa o introducirlo con un leve empujón, como se aprecia en la siguiente fotografía.



¿Cómo hacer pompas de jabón?

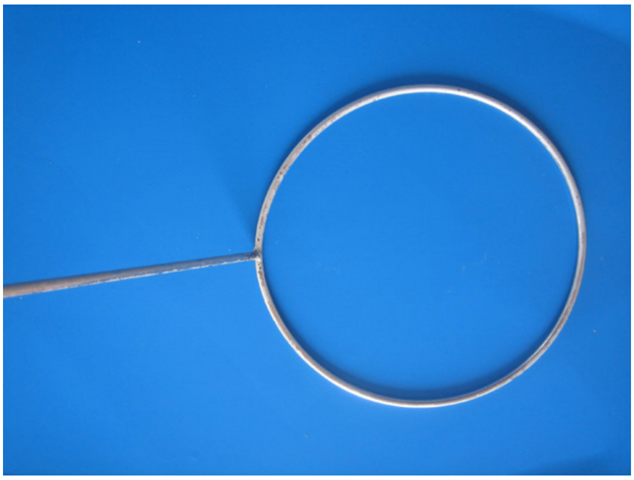
Con una paja o tubo de distintos diámetros

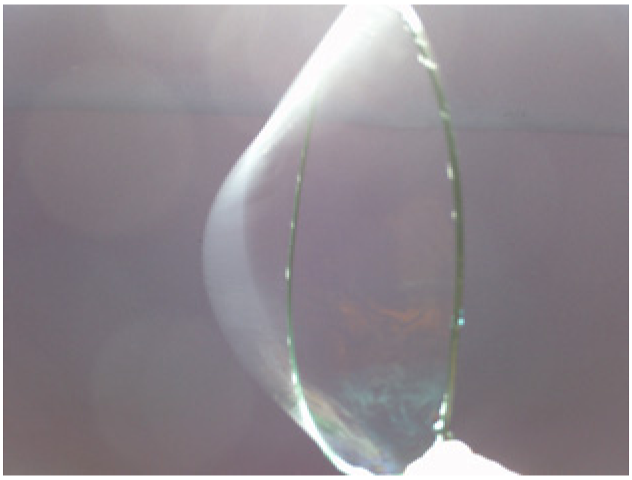
Al introducir un extremo en la solución jabonosa y soplar *lentamente* por el otro extremo con el tubo colocado en una posición lo más vertical posible, se va formando una pompa esférica de jabón.

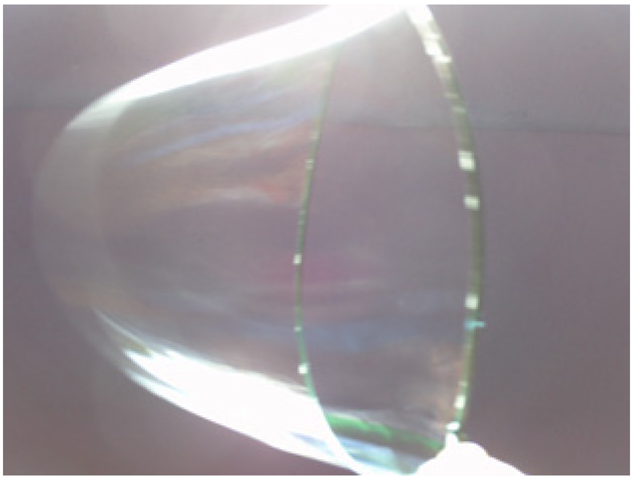


Con un aro

Sumergimos un aro de alambre o de acero en agua jabonosa hasta que se forme una película de jabón. Al sacarlo del agua lo movemos por el aire siguiendo una dirección perpendicular al plano del aro. La película de jabón se deforma por efecto de la presión del aire y se pueden formar varias pompas de jabón. Obtendremos pompas de jabón tanto más grandes cuanto mayor sea el diámetro del aro.



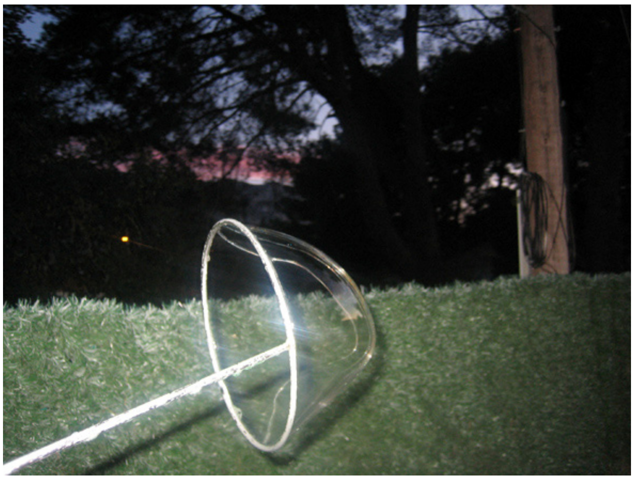


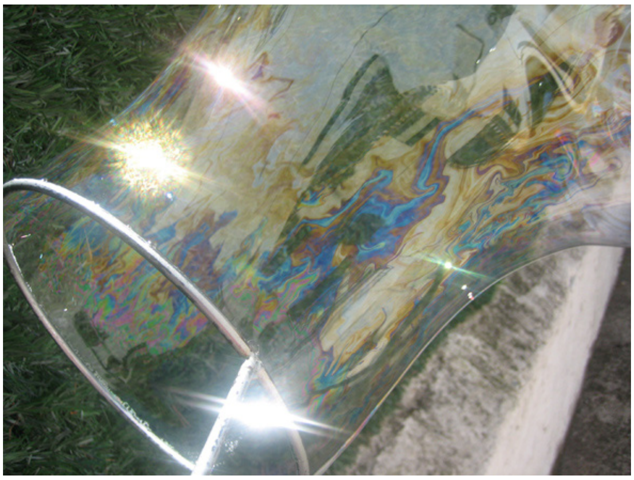


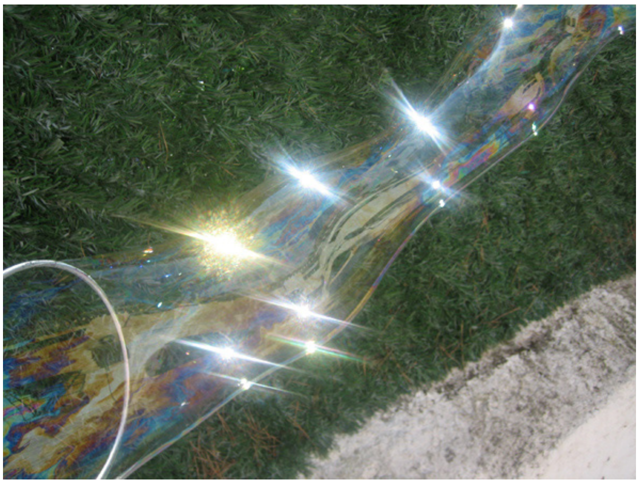
¿Cómo hacer pompas de jabón muy grandes?

Con un aro metálico

Una manera muy simple es introducir un aro metálico en la disolución jabonosa y al sacarlo moverlo haciéndolo oscilar en la misma dirección, o si hay algo de viento dejar que éste provoque la pompa, como sucede en las siguientes fotografías.





Con un pompero

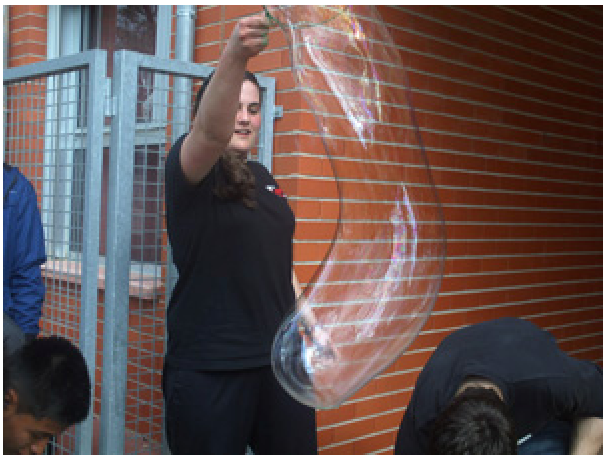
Otra manera es construir un artilugio, en algunos lugares llamado *pompero*, con dos palos de un recogedor de basura e hilo de algodón. Podemos utilizar dos palos como los de un recogedor de basura. En la parte superior de las fundas de los palos hay unos aros a los que ataremos un trozo de hilo de algodón de aproximadamente una vez y media la longitud del palo. A continuación atamos al hilo anterior y a una distancia aproximada de unos cuatro dedos de las agarraderas otro trozo de hilo de una longitud aproximada el doble del anterior, de tal forma que nos quedará una figura en forma de U (no atar nunca este último hilo a las agarraderas). Si el hilo que usamos no tiene bastante peso en la base de la U podemos pasar por el hilo una o varias arandelas hasta la base antes de atarla. Cortamos todos los trozos de hilo que sobren de las cuerdas y ya tenemos el artilugio para hacer pompas muy grandes (ver fotografía).

Introducimos todo el hilo con las agarraderas en el líquido y sacamos el artilugio con los palos muy juntos en paralelo. Poco a poco los vamos separando y si hay viento las pompas de jabón se crearán ellas solas. En caso contrario un simple movimiento del artilugio las creará.






Diversas pompas de jabón



Rayos de luz y colores

Cuando un rayo de luz incide sobre una película transparente delgada, como la superficie de una pompa de jabón, parte de la luz se refleja en la superficie exterior de la película. El resto penetra en la capa, se desvía un poco (se refracta) y luego se refleja en la superficie interior. El resultado es luz que se compone de los rayos reflejados por la capa exterior más los rayos reflejados por la capa interior. Debido al paso por la película delgada, éstos últimos han recorrido, al salir, una distancia ligeramente mayor. Como consecuencia, las ondas de luz se retrasan un poco (se dice que se desfasan).

Los distintos colores que componen la luz blanca se refractan de maneras distintas, unos más, otros menos. Al emerger, las ondas de luz se combinan de tal manera que donde coinciden crestas con crestas o valles con valles la intensidad de la luz se refuerza (hay interferencia constructiva y se verá la luz del color que corresponda a esa longitud de onda) y donde se superponen crestas con valles las ondas se anulan (interferencia destructiva y no aparecerá color). El color de la luz que refleja la película delgada dependerá, entre otras cosas, del ángulo desde el que la observemos y cambiará al desplazar el observador la vista.

El color de las pompas se debe pues a un fenómeno físico conocido como interferencia de ondas.

Nota

Todas las fotografías y dibujos que aparecen en este documento, salvo las 4 fotografías del apartado "Superficies mínimas en Arquitectura" que las he obtenido de Internet, han sido realizadas por mi.

Juan Bragado Rodríguez
03700 Denia (Alicante)