SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Págs. 4 a 25

Página 4

1. a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Página 7

3. a) $\begin{pmatrix} 1 & 13 & 4 \\ 0 & 7 & -5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 8 & -3 & -3 \\ 2 & 11 & 15 \\ 5 & -2 & 9 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

4. a) $3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ -6 & 3 & 9 \\ -3 & 15 & 0 \end{pmatrix}$

$2B = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 4 \\ -10 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

$-5C = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -15 \\ -10 & -5 & -5 \\ -5 & -5 & -20 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 17 & -1 \\ 13 & 0 & 4 \\ 5 & 11 & -5 \end{pmatrix}$

5. $\begin{cases} 3\sqrt{a} = 6 \\ 3b = -9 \\ 3(b-a) = -21 \end{cases}$;

$a = 4, b = -3$

6. a) $-2 - 3 - 3 = -8$

b) $2 + 0 - 6 - 5 = -9$

7. $AB = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -2 \\ -14 & -6 & 9 \\ -9 & 5 & 38 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 13 & 43 & -19 \\ 10 & 20 & -6 \\ -7 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

AC no se puede calcular

BC no se puede calcular

DA no se puede calcular

DB no se puede calcular

$CD = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$

$DC = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 \\ -9 & -4 & 13 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

$EC = \begin{pmatrix} 9 & 4 & -13 \\ 5 & 2 & -9 \end{pmatrix}$

$DE = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Página 8

8. Actividad personal.

9. Sean A y B son matrices diagonales de orden *n*.

© VICENS VIVES

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Págs. 4 a 25

$AB = C \rightarrow c_{ij} = 0$, $c_{ii} = a_{ii} \cdot b_{ii}$, $1 \leq i, j \leq n$.

De la misma forma, si $BA = D$, se cumple $d_{ij} = 0$, $d_{ii} = b_{ii} \cdot a_{ii}$, $1 \leq i, j \leq n$.

Por lo tanto, como $a_{ii} \cdot b_{ii} = b_{ii} \cdot a_{ii}$ para todo $1 \leq i \leq n$, entonces $C = D$ y, por lo tanto, $AB = BA$.

10. Actividad personal.

11. Actividad personal.

12. $A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+b^2 & c+bd \\ c+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 1+b^2 = 1 \\ c+bd = 0 \\ c^2+d^2 = 1 \end{cases} \rightarrow b = 0,\ c = 0,\ d = \pm 1$$

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+c^2 & b+cd \\ b+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 1+c^2 = 1 \\ b+cd = 0 \\ b^2+d^2 = 1 \end{cases} \rightarrow b = 0,\ c = 0,\ d = \pm 1$$

Dos soluciones: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Página 9

13.a) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Si $n = 1$, $A_1 = A$.

Suponemos ahora que se cumple para n, veamos qué ocurre con $n + 1$:

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $B^n = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} & 2n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Si $n = 1$, $B_1 = B$.

Veamos qué ocurre con $n + 1$:

$$B^{n+1} = B^n B = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} & 2n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1+2\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} & 2+2n \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{i=1}^{n+1} 2^{i} & 2(n+1) \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $C^n = \begin{pmatrix} 1 & 3n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$

Si $n = 1$, $C_1 = C$.

Veamos qué ocurre con $n + 1$:

$$C^{n+1} = C^n C = \begin{pmatrix} 1 & 3n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3+3n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \cdot 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3(n+1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}$$

d) $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ n & 1 & \dfrac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Si $n = 1$, $D^1 = D$.

Por otra parte:

$$D^{n+1} = D^n D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ n & 1 & \dfrac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

© VICENS VIVES

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Págs. 4 a 25

1

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & n+1 \\ n+1 & 1 & n+1+\dfrac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & n+1 \\ n+1 & 1 & \dfrac{(n+2)(n+1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Página 10

14. Basta con comprobar que $A^2 = I_2$, cosa que efectivamente sucede.

15. Si suponemos que A tiene dos inversas B y C:

$AC = I_n$;

$B(AC) = B \cdot I_n$;

$(BA)C = B$;

$I_n \cdot C = B$

$C = B$

16. $A \cdot A = A^2 =$

$$= \begin{pmatrix} x^2 + y \cdot \dfrac{1-x^2}{y} & xy - xy \\ \dfrac{1-x^2}{y} \cdot x - x \cdot \dfrac{1-x^2}{y} & \dfrac{1-x^2}{y} \cdot y + x^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x^2 + 1 - x^2 & 0 \\ 0 & 1 - x^2 + x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Página 11

17.a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/9 & -1/9 \\ -1/9 & 2/9 \end{pmatrix}$

b) $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/10 \\ 3/5 & -1/10 \end{pmatrix}$

c) $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $D^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

18. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 \\ -1/3 & 1/6 \end{pmatrix}$

Actividad personal.

19. $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 2z & -y + 2t \\ 3x - 6z & 3y - 6t \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\begin{cases} -x + 2z = 1 \\ -y + 2t = 0 \\ 3x - 6z = 0 \\ 3y - 6t = 1 \end{cases}$$

El sistema $\begin{cases} -x + 2z = 1 \\ 3x - 6z = 0 \end{cases}$ no tiene solución.

El sistema $\begin{cases} -y + 2t = 0 \\ 3y - 6t = 1 \end{cases}$ tampoco tiene solución.

Por lo tanto, A^{-1} no existe.

Página 13

20.a) $(A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$(F_3 \to F_2 - F_3) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$(F_1 \to F_1 + F_2) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$(F_1 \to F_1 + F_3) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$(F_2 \to F_2 + F_3) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$(F_1 \to F_1 / 2) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

© VICENS VIVES

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Págs. 4 a 25

$$F_3 \to F_3/2) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

b) $(B \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$(F_2 \to F_2 - 2F_1) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$(F_3 \to 3F_3 - F_2) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$(F_1 \to 3F_1 + F_2) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$(F_1 \to 5F_1 + 2F_3) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 15 & 0 & 0 & 9 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$(F_2 \to 5F_2 + 2F_3) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 15 & 0 & 0 & 9 & 3 & 6 \\ 0 & 15 & 0 & -6 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$(F_1 \to F_1/15) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/5 & 1/5 & 2/5 \\ 0 & 15 & 0 & -6 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$(F_2 \to F_2/15) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/5 & 1/5 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 & -2/5 & 1/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$(F_3 \to F_3/5) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/5 & 1/5 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 & -2/5 & 1/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & -1/5 & 3/5 \end{array}\right)$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 3/5 & 1/5 & 2/5 \\ -2/5 & 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & -1/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

c) $(C \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$(F_3 \to 2F_3 + F_1) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$(F_3 \to F_3 - F_2) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$(F_1 \to F_2 + F_1) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$(F_1 \to 2F_3 + F_1) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$(F_2 \to 2F_2 + 3F_3) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$(F_1 \to F_1/2) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/2 & -1/2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$(F_2 \to F_2/2) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/2 & -1/2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & -1/2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$(F_3 \to -F_3/2) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/2 & -1/2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & -1/2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & -1 \end{array}\right)$$

d) $(D \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

© VICENS VIVES

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Págs. 4 a 25

1

$$(F_2 \to 2F_2 + F_1) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$(F_3 \to 3F_1 + 2F_3) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$(F_3 \to F_2 + F_3) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$(F_1 \to F_1 + F_2) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 8 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$(F_1 \to 10F_1 - 8F_3) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 20 & 0 & 0 & -12 & 4 & -16 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$(F_1 \to F_1 / 20) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3/5 & 1/5 & -4/5 \\ 0 & 10 & 0 & -18 & 6 & -14 \\ 0 & 0 & 10 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$(F_2 \to F_2 / 10) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3/5 & 1/5 & -4/5 \\ 0 & 1 & 0 & -9/5 & 3/5 & -7/5 \\ 0 & 0 & 10 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$(F_3 \to F_3 / 10) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3/5 & 1/5 & -4/5 \\ 0 & 1 & 0 & -9/5 & 3/5 & -7/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 1/5 & 1/5 \end{array}\right)$$

Página 14

21.a) $-5F_1 = 2F_2 \to$ filas linealmente dependientes

$3C_1 = -C_2 \to$ columnas linealmente dependientes

b) $-4F_2 = F_1 \to$ filas linealmente dependientes

$8C_3 = -2C_2 = C_1 \to$ las columnas son linealmente dependientes dos a dos

c) $F_3 - F_2 = F_1 \to F_1, F_2, F_3$ son linealmente dependientes

Las filas son independientes dos a dos.

$\frac{4}{3}C_1 + \frac{11}{9}C_2 = -C_3 \to C_1, C_2, C_3$ son linealmente dependientes.

Las columnas son independientes dos a dos.

d) $-\frac{7}{2}F_1 - \frac{1}{2}F_2 = -F_3 \to F_1, F_2, F_3$ son linealmente dependientes $\to F_1, F_2, F_3, F_4$ también

F_1, F_2, F_4 son linealmente independientes.

F_1, F_3, F_4 son linealmente independientes.

F_2, F_3, F_4 son linealmente independientes.

Las filas son independientes dos a dos.

$2C_1 = -C_3 \to C_1, C_3$ son linealmente dependientes $\to C_1, C_2, C_3, C_4$ también

C_1, C_2, C_3 son linealmente dependientes.

C_1, C_3, C_4 son linealmente dependientes.

C_1, C_2, C_4 son linealmente independientes.

C_2, C_3, C_4 son linealmente independientes.

Excepto C_1 y C_3, las columnas son independientes dos a dos.

Página 15

22.a) $C_3 \to C_3 - (C_1 - C_2) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 5 \\ -3 & 2 & 0 & -1 \\ 5 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$C_4 \to C_4 - (C_1 + C_2) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $F_3 \to F_3 + 2F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & -1 \\ 5 & -6 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

$F_5 \to F_5 - F_4 - 2F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$C_3 \to C_3 + (C_1/2 - C_2/4) \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

© VICENS VIVES

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Págs. 4 a 25

c) $C_1 \to 2C_1 - C_2 + C_4 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 3 & 3 \\ 0 & 16 & 5 & 6 \\ 0 & 23 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

$F_3 \to 23F_3 - 59F_1 - 58F_2 + 22F_4 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 23 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

Página 16

23. a) $(F_2 \to 2F_2 - F_1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 & -4 \\ 0 & -8 & -12 & 8 \\ -3 & -5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$(F_3 \to 2F_3 + 3F_1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 & -4 \\ 0 & -8 & -12 & 8 \\ 0 & 8 & 12 & -8 \end{pmatrix}$

$(F_3 \to F_3 + F_2) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 & -4 \\ 0 & -8 & -12 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Rango = 2

b) $(F_2 \to F_2 - 2F_1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & 2 \\ 4 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$(F_3 \to F_3 - 4F_1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$(F_4 \to F_4 - 3F_1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & 2 \end{pmatrix}$

$(F_3 \to F_3 - F_2) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 2 \end{pmatrix}$

$(F_4 \to F_4 - F_2) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Rango = 2

c) $(F_2 \to 2F_1 + F_2) \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Rango = 1

d) $(F_2 \to F_2 - F_1) \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ -1 & 3 & -5 & 7 & 1 \\ -2 & 4 & -6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$

$(F_4 \to F_4 - F_1) \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \\ -2 & 4 & -6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$

$(F_4 \to F_5 - 2F_1) \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \\ 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \end{pmatrix}$

$(F_2 \to 2F_2 \,;\, F_3 \to 2F_3) \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \\ 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \\ 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \\ 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \end{pmatrix}$

$(F_3 \to F_3 - F_2 \,;\, F_4 \to F_4 - F_2 \,;\, F_5 \to F_5 - F_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Rango = 2

© VICENS VIVES

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Págs. 4 a 25

1

Página 17

Piensa y contesta

- Al no ser conmutativo el producto de matrces, A^{-1} se debe multiplicar por el mismo lado. La resolución correcta es la siguiente:

$AX = B$

$A^{-1}AX = A^{-1}B;$

$X = A^{-1}B$

24. $AX = B^2$

$A^{-1}AX = A^{-1}B^2$

$$X = A^{-1}B^2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 63 & -27 \\ -18 & 54 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 27 \\ 27 & -27 \end{pmatrix}$$

25. $AXB = C$

$A^{-1}AXB = A^{-1}C$

$XB = A^{-1}C$

$XBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1}$

$X = A^{-1}CB^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1/6 \\ -1/9 & -1/18 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1/6 \\ -1/9 & -1/18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/9 & 17/18 \\ -1/9 & -13/18 \end{pmatrix}$$

26. $XA - I_2 = B - A$

$XA = B - A + I_2$

$XAA^{-1} = (B - A + I_2)A^{-1}$

$X = (B - A + I_2)A^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Página 22

1. Es un conjunto de números reales dispuestos en filas y columnas que conforman una tabla rectangular.

Actividad personal: una matriz 3×4 es la que tiene 3 filas y 4 columnas, una matriz 5×2 es la que tiene 5 filas y 2 columnas.

2. *Matriz fila* → la que tiene una sola fila.

Matriz columna → la que tiene una sola columna.

Matriz cuadrada → la que tiene el mismo número de filas que de columnas.

Matriz diagonal → la matriz cuadrada tal que todos los elementos a_{ij} con $i \neq j$ son nulos.

Matriz unidad → es la matriz diagonal tal que todos los a_{ii} son igual a 1.

Matriz triangular superior → matriz cuadrada con todos los elementos por debajo de la diagonal principal nulos.

Matriz triangular inferior → matriz cuadrada con todos los elementos por encima de la diagonal principal nulos.

Matriz simétrica → matriz en la que se cumple $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i, j.

Matriz antisimétrica → matriz en la que se cumple $a_{ij} = -a_{ji}$ para todo i, j.

Matriz traspuesta de A → es la matriz B tal que bij = aji

3. Para poder sumar dos matrices, éstas deben tener las mismas dimensiones. La matriz suma es aquella cuyos elementos son la suma de los elementos correspondientes de los sumandos.

La suma de matrices es:

Asociativa.

Conmutativa.

Existe el elemento neutro, la matriz nula O.

Existe el elemento opuesto de A, –A.

4. Dos matrices son multiplicables cuando el número de columnas de la primera coincide con el número de filas de la segunda.

$A_{m \times p} \cdot B_{p \times n} = C_{m \times n}$

5. Propiedad asociativa:

$A\,(BC) = (AB)\,C$

Propiedades distributivas:

$A(B + C) = AB + AC$

$(A + B)\,C = AC + BC$

© VICENS VIVES

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Págs. 4 a 25

El producto de matrices no cumple, en general, la propiedad conmutativa pero, por ejemplo, la matriz identidad o la matriz nula conmutan con cualquier matriz con la que se puedan multiplicar y, de la misma forma, dos matrices diagonales del mismo orden siempre conmutan.

6. Se comprueba que la matriz original, A, y A^1 coinciden.

Se supone correcta la expresión A^n y se prueba que dicha expresión es válida también para $n + 1$ calculando $A^{n+1} = A^n A$.

7. La matriz inversa de la matriz cuadrada A es la matriz A^{-1} que cumple:

$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

donde n es el orden de A.

Propiedades:

$(A^{-1})^{-1} = A$

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

No todas las matrices cuadradas tienen inversa.

8. El rango de una matriz es el número de filas o columnas linealmente independientes.

Para transformar una matriz en otra del mismo rango:

- Se pueden intercambiar dos líneas paralelas.
- Se pueden multiplicar o dividir todos los elementos de una línea por un número real no nulo.
- Se pueden sumar o restar a una línea los elementos de otra línea paralela a ella multiplicados por un número distinto de cero.
- Se pueden suprimir las líneas de la matriz cuyos elementos sean todos nulos.
- Se pueden suprimir las líneas cuyos elementos sean proporcionales a los de otra línea paralela a ella.

9. a) $\begin{pmatrix} 2 & 10 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 7 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -3 & 12 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -4 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} -1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 6 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

k) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

l) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 8 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

m) $\begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 11 & 12 & -18 \end{pmatrix}$

n) $\begin{pmatrix} 5 & -6 & -7 \\ 1 & -3 & -2 \\ -9 & 4 & -20 \end{pmatrix}$

© VICENS VIVES

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Págs. 4 a 25

1

ñ) $\begin{pmatrix} -4 & -1 & -6 \\ 2 & 1 & 9 \\ 13 & 2 & -6 \end{pmatrix}$

o) $\begin{pmatrix} 2 & -12 & 7 \\ -4 & 11 & -5 \\ 1 & 16 & 2 \end{pmatrix}$

p) $\begin{pmatrix} -2 & 8 & 0 \\ 2 & -6 & -4 \\ 4 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

q) $\begin{pmatrix} -9 & -18 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 12 \end{pmatrix}$

r) $\begin{pmatrix} 16 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & -8 \end{pmatrix}$

s) $\begin{pmatrix} 4 & -16 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

t) $\begin{pmatrix} 13 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$

u) $\begin{pmatrix} -5 & 18 & 15 \\ 0 & -1 & 2 \\ -6 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

v) $\begin{pmatrix} -6 & 31 & 6 \\ -1 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

w) $\begin{pmatrix} 5 & -16 & -8 \\ -8 & 13 & -4 \\ 8 & 8 & 25 \end{pmatrix}$

10.a) $\begin{pmatrix} -2 & -12 \\ 9 & -11 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 0 & -6 & -8 \\ -15 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -104 & 156 \\ -117 & 13 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -5 & 0 & -15 \\ 4 & -6 & 6 \\ 2 & -8 & -2 \end{pmatrix}$

11. $A_{2\times 3}$

$B_{3\times 2}$

Por lo tanto, $M_{3\times 3}$.

12. $A_{3\times 2} \rightarrow {A^t}_{2\times 3}$

Por lo tanto, para que A^tM sea cuadrada deberá ser de orden 2.

${A^t}_{2\times 3} \rightarrow M_{3\times 2}$

13. Sea $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$:

$$AB = \begin{pmatrix} -z & -t \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2y & -x \\ 2t & -z \end{pmatrix}$$

Para que AB = BA se debe cumplir:

$$\begin{cases} -z = 2y \\ -t = -x \\ 2x = 2t \\ 2y = -z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = t \\ z = -2y \end{cases}$$

Por lo tanto, la solución depende de dos parámetros:

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ -2y & x \end{pmatrix}$$

14. Sean $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $1 \le i, j \le n$, dos matrices cuadradas.

Los elementos de la diagonal de C = AB son:

$$c_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{ji}$$

$$\text{traza (AB)} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot b_{j1} + \ldots + \sum_{j=1}^{n} a_{nj} \cdot b_{jn} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{ji}$$

Por otra parte, los elementos de la diagonal de D = BA:

© VICENS VIVES

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Págs. 4 a 25

$$d_{ii} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \cdot a_{ji}$$

$$\text{traza (BA)} = \sum_{j=1}^{n} b_{1j} \cdot a_{j1} + \ldots + \sum_{j=1}^{n} b_{nj} \cdot a_{jn} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} \cdot a_{ji}$$

Por lo tanto: traza (AB) = traza (BA)

15. No es cierto que una de las dos deba ser nula, por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Se cumple que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

16. $A^2 = \begin{pmatrix} x^2 - 1 & x + y \\ -x - y & -1 + y^2 \end{pmatrix}$

Se debe cumplir:

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 3 \\ x + y = 1 \\ -x - y = -1 \\ -1 + y^2 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x^2 = 4 \\ x + y = 1 \\ y^2 = 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \pm 2 \\ x + y = 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

La solución es $x = 2$, $y = -1$, por lo tanto:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

17. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 + yz & -y + yt \\ -z + tz & yz + t^2 \end{pmatrix}$

Se debe resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 1 + yz = 1 \\ -y + yt = 0 \\ -z + tz = 0 \\ yz + t^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} yz = 0 \\ y(-1 + t) = 0 \\ z(-1 + t) = 0 \\ t^2 = 1 \end{cases};$$

Posibilidad 1:

$yz = 0 \rightarrow y = 0, z \neq 0 \rightarrow t = 1 \rightarrow$ Solución: $y = 0$, $t = 1$, $z = \lambda$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Posibilidad 2:

$yz = 0 \rightarrow y \neq 0, z = 0 \rightarrow t = 1 \rightarrow$ Solución: $y = \lambda$, $t = 1$, $z = 0$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Posibilidad 3:

$yz = 0 \rightarrow y = 0, z = 0 \rightarrow t = -1 \rightarrow$ Solución: $y = 0$, $t = -1$, $z = 0$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Esta última posibilidad contempla también la solución $y = 0$, $t = 1$, $z = 0$ pero ésta ya está contemplada en las anteriores.

18. $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}$

Por lo tanto:

$$A^2 + xA + yI_2 = \begin{pmatrix} 7 + 3x + y & 6 + x \\ -12 - 2x & 7 + 3x + y \end{pmatrix}$$

Se verifica:

$$\begin{cases} 7 + 3x + y = 0 \\ 6 + x = 0 \\ -12 - 2x = 0 \\ 7 + 3x + y = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 7 + 3x + y = 0 \\ 6 + x = 0 \end{cases};$$

$x = -6$;

$7 - 18 + y = 0$;

$y = 11$

© VICENS VIVES

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Págs. 4 a 25

1

19. A^2 es la matriz nula, por lo tanto, A es nilpotente.

Página 23

20.a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $I - A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^2 + A + I = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

En efecto:

$(I - A)(A^2 + A + I) = (A^2 + A + I)(I - A) = I$

También podemos demostrarlo de la siguiente forma:

$(I - A)(A^2 + A + I) = (A^2 + A + I) - A(A^2 + A + I) = A^2 + A + I - A^3 - A^2 - A = I - A^3 = I$

$(A^2 + A + I)(I - A) = (A^2 + A + I) - (A^2 + A + I)A = A^2 + A + I - A^3 - A^2 - A = I - A^3 = I$

21. $A^2 = \begin{pmatrix} 4 - x^2 & x \\ -x & -x^2 + 1 \end{pmatrix}$

$$A^2 = A \rightarrow \begin{cases} 4 - x^2 = 2 \\ x = x \\ -x = -x \\ -x^2 + 1 = -1 \end{cases} \rightarrow$$

$\rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Por lo tanto:

$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$ o bien $A = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$

22. $B^2 = (2A - I)(2A - I) = (2A - I)(2A) - (2A - I)I = (2A)(2A) - I(2A) - 2A + I = 4A^2 - 2A - 2A + I = 4A - 4A + I = I$

23. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Nuestra hipótesis es, por lo tanto: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Si n = 1: $A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Veamos qué ocurre con A^{n+1}, suponiendo cierta la hipótesis para A^n:

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 1+n \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, efectivamente, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

24.a) $A^2 = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$

$A^4 = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

$A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 32 \\ -32 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A^{2n} = (-1)^n (2^{2n}) I$

25.a) $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$

Por lo tanto, $A^3 + I = -I + I = O$.

b) Observamos que:

$A^4 = A^3 \cdot A = -I \cdot A = -A$

$A^5 = A^4 \cdot A = -A \cdot A = -A^2$

$A^6 = A^5 \cdot A = -A^2 \cdot A = -A^3 = I$

© VICENS VIVES

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Págs. 4 a 25

$A^7 = A^6 \cdot A = I \cdot A = A$

Los resultados de las potencias se repiten periódicamente formando ciclos de signo contrario, es decir, forman la siguiente serie de periodo 6:

$A, A^2, A^3 = I, A^4 = -A, A^5 = -A^2, A^6 = -A^3 = -I,$, $A^7 = A, A^8 = A^2, \ldots$

Como $100 = 6 \cdot 16 + 4 \rightarrow A^{100} = A^4 = -A$

26. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Demostraremos por inducción que:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \dfrac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para n = 1 se verifica.

Si lo suponemos cierto para *n*:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n & \dfrac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1+n & 1+n+\dfrac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & 1+n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1+n & \dfrac{(n+1)(n+2)}{2} \\ 0 & 1 & 1+n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

27. Si fijamos un natural *n*:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2/n & 2/n & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3/n & 3/n & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la hipótesis es que:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ n/n & n/n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Veamos que, fijado *n*, efectivamente $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k/n & k/n & 1 \end{pmatrix}$ para todo *k*.

Si k = 1, se cumple.

Si suponemos que se cumple para *k*, veamos qué ocurre con *k* + 1:

$$A^{k+1} = A^k A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k/n & k/n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/n & 1/n & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k/n+1/n & k/n+1/n & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ (k+1)/n & (k+1)/n & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, en efecto, para cualquier natural *n*:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ n/n & n/n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

28. $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$

Demostremos que $A^n = 3^{n-1} A$.

Si n = 1, $A^1 = 3^0 A = A$.

Si suponemos que se cumple para *n*, vemos qué ocurre con A^{n+1}:

$A^{n+1} = A^n \cdot A = 3^{n-1} A \cdot A = 3^{n-1} A^2 = 3^{n-1} \cdot 3A = 3^n A$

© VICENS VIVES

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

1

29.a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/10 & 1/10 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$

b) Actividad personal, efectivamente:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/10 & 1/10 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3/10 & 1/10 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Actividad personal, por ejemplo, $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$.

30.a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

b) $B^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$

31. $A^2 = \begin{pmatrix} 20 & 6 \\ -24 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow (A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} -7/4 & -3/2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow (A^{-1})^2 = \begin{pmatrix} -7/4 & -3/2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto: $(A^2)^{-1} + (A^{-1})^2 = \begin{pmatrix} -7/2 & -3 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}$

32.a) $(A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$(F_2 \leftrightarrow F_1) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$(F_3 \rightarrow F_2 + F_3) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$(F_1 \rightarrow F_2 + F_1) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$(F_1 \rightarrow F_3 + F_1) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$(F_2 \rightarrow -F_2) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

b) $(B \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$(F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$(F_3 \rightarrow F_3 - 3F_1) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -11 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$(F_3 \rightarrow 2F_3 - 3F_2) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

$$(F_1 \rightarrow 2F_1 - F_2) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 11 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

$$(F_1 \rightarrow F_1 + 11F_3) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 4 & -34 & 22 \\ 0 & 2 & -7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

$$(F_1 \rightarrow F_1 / 2) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -17 & 11 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 22 & -14 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

$$(F_2 \rightarrow F_2 / 2) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -17 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 11 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

$$(F_3 \rightarrow -F_3) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -17 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

c) $(C \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$(F_2 \rightarrow 2F_1 + F_2) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

© VICENS VIVES

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Págs. 4 a 25

$$(F_3 \to F_3 - F_1) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$(F_3 \to 2F_3 + F_2) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$(F_1 \to F_1 - F_2) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$(F_1 \to F_3 + F_1) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$(F_2 \to F_3 - F_2) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$(F_2 \to -F_2 / 2) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

d) $(D \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$(F_2 \to F_2 + F_1) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$(F_3 \to F_3 + 2F_1) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$(F_3 \to F_3 - 2F_2) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$(F_1 \to 2F_1 - F_2) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$(F_2 \to 5F_2 + 4F_3) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 5 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$(F_1 \to -F_1 / 2) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 5 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$(F_2 \to F_2 / 10) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -3/10 & 2/5 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$(F_3 \to -F_3 / 5) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -3/10 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2/5 & -1/5 \end{array}\right)$$

33. $(A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$(F_2 \to F_2 - F_1) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$(F_3 \to F_2 + F_3) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$(F_1 \to F_1 + 3F_2) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$(F_1 \to F_1 + 2F_3) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$(F_2 \to F_2 + F_3) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$(F_2 \to -F_2) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

© VICENS VIVES

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Págs. 4 a 25

1

$$(F_3 \to -F_3) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

34. $(A \mid I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$(F_2 \to F_2 - 2F_1) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$(F_3 \to F_3 - F_1) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$(F_4 \to F_4 - 2F_1) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$(F_2 \leftrightarrow F_4) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$(F_3 \leftrightarrow F_4) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$(F_1 \to F_2 - F_1) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & -2 & -4 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$(F_1 \to 2F_3 + F_1) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & -6 & -7 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$(F_2 \to F_2 + F_3) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & -6 & -7 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$(F_1 \to 6F_4 + F_1) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & -13 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$(F_2 \to 4F_4 + F_2) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & -13 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -8 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$(F_3 \to F_4 + F_3) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & -13 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -8 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$(F_1 \leftrightarrow -F_1) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 13 & -2 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -8 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Por otra parte:

$$(B \mid I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$(F_3 \to F_3 + F_1) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$(F_4 \to F_4 + 2F_1) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$(F_3 \to F_2 - 2F_3) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

© VICENS VIVES

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Págs. 4 a 25

$$(F_4 \to F_4 + F_3) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$(F_1 \to F_1 + F_3) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$(F_2 \to F_2 + F_3) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$(F_1 \to F_4 - F_1) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -4 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$(F_2 \to 4F_4 - F_2) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 2 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$(F_3 \to 2F_4 - F_3) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 2 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$(F_2 \to -F_2/2) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$(F_3 \to -F_3) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$(F_4 \to -F_4) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

35. Si $A = (a_{ii})$ es una matriz diagonal de orden n, entonces $A^{-1} = (1 / a_{ii})$ es su matriz inversa.

La matriz A^{-1} no presenta problemas de definición ya que si A es inversible, $a_{ii} \neq 0$ para todo i pues si existiera k, $1 \leq k \leq n$, tal que $a_{kk} = 0$, entonces, el rango de A sería menor que n y, por lo tanto, no sería inversible.

Veamos que A^{-1} así definida es, en efecto, la inversa de A:

$A\,A^{-1} = (a_{ii} \cdot 1 / a_{ii}) = I$

$A^{-1}\,A = (1 / a_{ii} \cdot a_{ii}) = I$

Por lo tanto, si A es diagonal, su inversa también lo es.

36. Sabemos que $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ y, por lo tanto, si A es simétrica:

$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t \to A^{-1} = (A^{-1})^t \to A^{-1}$ es simétrica

37. a) $A^2 = I \to A$ es inversa de sí misma.

De la unicidad de la matriz inversa se sigue que A es la única matriz que puede cumplir esta propiedad.

b) Actividad personal, en efecto, $A^2 = I$.

38. Actividad personal, en efecto, $A^2 = A$.

39. $(I_n - A)(I_n + A) = (I_n - A)\,I_n + (I_n - A)\,A = I_n - A + I_n\,A - A\,A = I_n - A + A - A^2 = I_n - A + A = I_n$

Por otra parte:

$(I_n + A)(I_n - A) = (I_n + A)\,I_n - (I_n + A)\,A = I_n + A - I_n\,A - A\,A = I_n + A - A - A^2 = I_n + A - A = I_n$

Por lo tanto:

$(I_n - A)^{-1} = I_n + A$

Página 24

40. a) Sea A ortogonal $\to A\,A^t = I \to A^{-1}\,A\,A^t = A^{-1} \to \to A^t = A^{-1}$

De forma análoga, $A^t\,A = I \to A^t = A^{-1}$

b) $$AA^t = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ -\cos x & \operatorname{sen} x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & -\cos x \\ \cos x & \operatorname{sen} x \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x & -\operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen} x \cos x \\ -\operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen} x \cos x & \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x \end{pmatrix}$$

$= I_2$

© VICENS VIVES

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Págs. 4 a 25

1

41. Se utiliza la propiedad asociativa del producto de matrices:

$(AB)\,(AB)^t = (AB)\,(B^tA^t) = A\,[B\,(B^tA^t)] = A\,[(B\,B^t)\,A^t] = A\,(IA^t) = AA^t = I$

De forma análoga: $(AB)^t\,(AB) = I$

42. a) $(F_2 \to F_2 - 3F_1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to$ Rango (A) = 1

b) $(F_2 \to F_2 - 5F_1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -22 \end{pmatrix} \to$ Rango (B) = 2

c) $(F_2 \to F_2 - 4F_1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -15 & 15 \\ -1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

$(F_3 \to F_3 + F_1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -15 & 15 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix}$

$(F_3 \to 15F_3 + 7F_2) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -15 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Rango (C) = 2

d) $(F_2 \to 2F_2 + F_1) \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 8 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 2 \\ -1 & 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

$(F_3 \to 2F_3 - F_1) \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 8 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

$(F_3 \to F_3 - F_2) \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 8 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Rango (D) = 2

e) $(F_2 \to 3F_2 - 2F_1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -14 & -5 & 9 \\ -1 & 6 & 3 & -3 \\ 3 & -8 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

$(F_3 \to 3F_3 + F_1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -14 & -5 & 9 \\ 0 & 22 & 13 & -9 \\ 3 & -8 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

$(F_4 \to F_4 - F_1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -14 & -5 & 9 \\ 0 & 22 & 13 & -9 \\ 0 & -12 & -6 & 6 \end{pmatrix}$

$(F_3 \to 4F_3 - 22F_1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -14 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & -36 & -36 \\ 0 & -12 & -6 & 6 \end{pmatrix}$

$(F_4 \to 14F_4 - 12F_2) \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -14 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & -36 & -36 \\ 0 & 0 & -24 & -24 \end{pmatrix}$

$(F_4 \to 36F_4 - 24F_3) \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -14 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & -36 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Rango (E) = 3

f) $(F_2 \to 2F_2 + F_1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & -3 & 11 & -5 \\ 0 & -3 & 11 & -5 \end{pmatrix}$

$(F_3 \to F_3 - F_2) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & -3 & 11 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Rango (F) = 2

43. $\begin{cases} \dfrac{4}{3} = \dfrac{6}{a} = \dfrac{8}{b} \\ \dfrac{4}{-2} = \dfrac{6}{c} = \dfrac{8}{d} \end{cases}$; $\begin{cases} a = \dfrac{18}{4} = \dfrac{9}{2} \\ b = \dfrac{24}{4} = 6 \\ c = \dfrac{-12}{4} = -3 \\ d = \dfrac{-16}{4} = -4 \end{cases}$;

La matriz es $M = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 3 & 9/2 & 6 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

44. $(F_2 \to 2F_1 + F_2) \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & t \\ 0 & 0 & 0 & -8 + 2t \\ 2 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

© VICENS VIVES

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Págs. 4 a 25

$$(F_3 \to F_1 + F_3) \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & t \\ 0 & 0 & 0 & -8+2t \\ 0 & 0 & 0 & -4+t \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -8+2t=0 \\ -4+t=0 \end{cases} \to t=4 \to \text{Si } t=4, \text{ rango (A)} = 1.$$

Si $t \neq 4$, rango (A) = 2.

45. $$(F_2 \to 3F_1 + F_2) \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 2t \end{pmatrix}$$

$$(F_3 \to -4F_1 + F_3) \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4+2t \end{pmatrix}$$

$-4 + 2t = 0 \to t = 2$

Si $t = 2$, rango (A) = 1, por lo tanto, rango (A) = 2 si $t \neq 2$.

46. $$(F_2 \to 2F_1 + F_2) \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & -5 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ -9 & -15 & -6 & 4+2t \end{pmatrix}$$

$$(F_3 \to 3F_1 - F_3) \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & -5 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -28-2t \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, rango (A) = 2 para todo *t*.

47. rango (A) = 1 $\leftrightarrow \frac{2}{a} = \frac{1}{b+2} = \frac{-3}{3} = \frac{-1}{-3c}$

$$\begin{cases} \frac{2}{a} = -1 \\ \frac{1}{b+2} = -1 \\ \frac{-1}{-3c} = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -2 \\ b = -3 \\ c = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

La matriz resultante es $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

48. $AM - B = C^t$;

$AM = C^t + B$;

$M = A^{-1}(C^t + B)$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^t + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

49. $XA = XB - A^t$;

$XB - XA = A^t$;

$X(B - A) = A^t$;

$X = A^t (B - A)^{-1}$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(B - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

50. $AXB = 3C$;

$XB = A^{-1}(3C)$;

$X = A^{-1}(3C)B^{-1}$;

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 \\ -1/3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/2 & -1/4 \end{pmatrix}$$

© VICENS VIVES

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

$$3C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$X = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 \\ -1/3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/2 & -1/4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/2 & -1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 3/2 & -13/4 \end{pmatrix}$$

51. $AX - B = 2X;$

$AX - 2X = B;$

$AX - (2I_2)X = B;$

$(A - 2I_2)X = B;$

$X = (A - 2I_2)^{-1} B;$

$$2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A - 2I_2 = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - 2I_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -15 & 7 \end{pmatrix}$$

52. $$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ 3x + 2y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 2x \\ 3y - 2 \end{pmatrix}$$

Se debe cumplir:

$$\begin{cases} x - y = 3 + 2x \\ 3x + 2y = 3y - 2 \end{cases}; \qquad \begin{cases} x + y = -3 \\ 3x - y = -2 \end{cases};$$

$4x = -5 \rightarrow x = -5/4$

$-5/4 + y = -3 \rightarrow y = -7/4$

53. $AXA = 2BA;$

$AX = 2BAA^{-1} = 2B;$

$X = A^{-1}(2B);$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -28 \\ -4 & 18 \end{pmatrix}$$

54. 2ª ecuación $\rightarrow A = 2B + \begin{pmatrix} 5 & -2 & -7 \\ -7 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

1ª ecuación $\rightarrow 2\left[2B + \begin{pmatrix} 5 & -2 & -7 \\ -7 & -1 & 6 \end{pmatrix}\right] + 3B =$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 3 & 21 \\ 7 & 5 & 5 \end{pmatrix};$$

$$4B + \begin{pmatrix} 10 & -4 & -14 \\ -14 & -2 & 12 \end{pmatrix} + 3B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 21 \\ 7 & 5 & 5 \end{pmatrix};$$

$$7B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 21 \\ 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & -4 & -14 \\ -14 & -2 & 12 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -14 & 7 & 35 \\ 21 & -7 & -7 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = 2\begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -2 & -7 \\ -7 & -1 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

55. Restamos la segunda ecuación de la primera:

$$X + 5Y = \begin{pmatrix} 11 & 1 & -10 \\ 11 & 4 & 27 \end{pmatrix};$$

$$X = \begin{pmatrix} 11 & 1 & -10 \\ 11 & 4 & 27 \end{pmatrix} - 5Y;$$

$$2ª \text{ ecuación} \rightarrow 3\left[\begin{pmatrix} 11 & 1 & -10 \\ 11 & 4 & 27 \end{pmatrix} - 5Y\right] - 2Y =$$

$$= \begin{pmatrix} -18 & 3 & 4 \\ -1 & -5 & -4 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 33 & 3 & -30 \\ 33 & 12 & 81 \end{pmatrix} - 15Y - 2Y = \begin{pmatrix} -18 & 3 & 4 \\ -1 & -5 & -4 \end{pmatrix};$$

$$17Y = \begin{pmatrix} 51 & 0 & -34 \\ 34 & 17 & 85 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

© VICENS VIVES

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Págs. 4 a 25

$$X = \begin{pmatrix} 11 & 1 & -10 \\ 11 & 4 & 27 \end{pmatrix} - 5Y = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Y, finalmente:

$$X \cdot Y^t = \begin{pmatrix} -12 & -7 \\ -1 & 11 \end{pmatrix}$$

56. a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

b) $AX + CB^t = BB^t$;

$AX = BB^t - CB^t$;

$X = A^{-1}(BB^t - CB^t)$

$$B^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$BB^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 14 \end{pmatrix}$$

$$CB^t = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 14 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 14 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Página 25

57. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{pmatrix}$

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}+a_{21}}{2} & \frac{a_{13}+a_{31}}{2} \\ \frac{a_{21}+a_{12}}{2} & a_{22} & \frac{a_{23}+a_{32}}{2} \\ \frac{a_{31}+a_{13}}{2} & \frac{a_{32}+a_{23}}{2} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{12}-a_{21}}{2} & \frac{a_{13}-a_{31}}{2} \\ \frac{a_{21}-a_{12}}{2} & 0 & \frac{a_{23}-a_{32}}{2} \\ \frac{a_{31}-a_{13}}{2} & \frac{a_{32}-a_{23}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

S es simétrica, T es antisimétrica y, además, S + T = = A.

58. La matriz que expresa lo que se paga en cada nivel es la siguiente:

$$B = \begin{pmatrix} 60 \\ 55 \\ 50 \\ 45 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \end{matrix}$$

Los ingresos totales por los alumnos de cada idioma de la academia vendrán dados, por lo tanto, por la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 75 & 64 & 52 & 49 \\ 33 & 30 & 28 & 26 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 60 \\ 55 \\ 50 \\ 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12.825 \\ 6.200 \end{pmatrix}$$

La academia ingresa 12.825 € por las clases de inglés y 6.200 € por las de francés.

59.

$$\begin{matrix} \\ X \\ Y \\ Z \end{matrix}\begin{matrix} \begin{matrix} C & P & F \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 45 & 60 & 80 \\ 55 & 40 & 60 \\ 32 & 38 & 46 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

El consumo mensual de cada producto en cada restaurante se obtiene multiplicando por 30, los días que tiene un mes, la matriz anterior:

$$\begin{matrix} \\ X \\ Y \\ Z \end{matrix}\begin{matrix} \begin{matrix} C & P & F \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1.350 & 1.800 & 2.400 \\ 1.650 & 1.200 & 1.800 \\ 960 & 1.140 & 1.380 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

60. J: jamón

C: chorizo

S: salchichón

$$\begin{matrix} \\ J \\ C \\ S \end{matrix}\begin{matrix} \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 250 & 200 & 150 \\ 150 & 200 & 150 \\ 100 & 100 & 200 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

El número de bandejas de cada tipo viene dado por la matriz:

$$\begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix}\begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 30 \end{pmatrix}$$

© VICENS VIVES

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Págs. 4 a 25

1

Por lo tanto, la cantidad de cada embutido viene dada por el siguiente producto:

$$\begin{pmatrix} 250 & 200 & 150 \\ 150 & 200 & 150 \\ 100 & 100 & 200 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25.000 \\ 20.000 \\ 15.000 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{J} \\ \text{C} \\ \text{S} \end{matrix}$$

Autoevaluación

1. a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 6 & 3 & -5 \\ -10 & 3 & 4 \\ 8 & -7 & -8 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 11 \\ -8 & 1 & -6 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 6 & -10 & 8 \\ 3 & 3 & -7 \\ -5 & 4 & -8 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 6 & -10 & 8 \\ 3 & 3 & -7 \\ -5 & 4 & -8 \end{pmatrix}$

2. No siempre se verifica.

Si C no tiene inversa puede, puede no darse la implicación. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$CA = CB = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

3. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

4. $(A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$(F_2 \to F_2 + F_1) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$(F_3 \to F_3 - F_1) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$(F_3 \to 2F_2 + F_3) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$(F_1 \to F_1 - F_2) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$(F_1 \to 2F_1 + F_3) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$(F_1 \to F_1 / 2) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$(F_3 \to F_3 / 2) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1 & 1/2 \end{array}\right)$$

5. $A^n = \begin{pmatrix} 1 & -n & \dfrac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{Si } n = 1,\ A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si se supone que la hipótesis se cumple para *n*:

© VICENS VIVES

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Págs. 4 a 25

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 1 & -n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1-n & 1+n+\frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & -1-n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -(n+1) & \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ 0 & 1 & -(n+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Se debe cumplir:

$$\frac{a}{-2} = \frac{4}{b} = \frac{1}{4} = \frac{8}{c} \rightarrow \begin{cases} \frac{a}{-2} = \frac{1}{4} \\ \frac{4}{b} = \frac{1}{4} \\ \frac{8}{c} = \frac{1}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{-1}{2} \\ b = 16 \\ c = 32 \end{cases}$$

7. $(F_2 \rightarrow F_2 + 3F_1) \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 14 & 7 \\ -6 & -9 & -18 & -3 \\ 2 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

$(F_3 \rightarrow F_3 - 6F_1) \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 14 & 7 \\ 0 & -9 & -18 & -9 \\ 2 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

$(F_4 \rightarrow F_4 + 2F_1) \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 14 & 7 \\ 0 & -9 & -18 & -9 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

$(F_3 \rightarrow 7F_3 + 9F_2) \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 14 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

$(F_4 \rightarrow 7F_4 - 3F_2) \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 14 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rango (A)} = 2$

8. $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \end{pmatrix};$

$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & -2 \\ 1 & -5 & 4 & 3 \end{pmatrix};$

$X = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & -2 \\ 1 & -5 & 4 & 3 \end{pmatrix};$

$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & -2 \\ 1 & -5 & 4 & 3 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -1 & 5 & -4 & -3 \\ -1 & 20 & -12 & -11 \end{pmatrix}$

9. 1ª ecuación $\rightarrow A = B + \begin{pmatrix} -2 & -5 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2ª ecuación $\rightarrow 2\left[B + \begin{pmatrix} -2 & -5 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right] + 3B =$

$= \begin{pmatrix} 11 & 0 & 10 \\ -8 & 7 & -1 \end{pmatrix};$

$5B + \begin{pmatrix} -4 & -10 & 10 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 10 \\ -8 & 7 & -1 \end{pmatrix};$

$5B = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 10 \\ -8 & 7 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & -10 & 10 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix};$

$5B = \begin{pmatrix} 15 & 10 & 0 \\ -10 & 5 & -5 \end{pmatrix};$

$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -5 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

10. TS = (37.400 36.150 20.200) expresa el valor de los ordenadores de cada marca almacenados:

37.400 € de ordenadores de la marca A, 36.150 de la marca B y 20.200 de la marca C.

© VICENS VIVES