

## Página 28

2

1. Actividad personal.
2. Actividad personal
3. Actividad personal.

Un sistema homogéneo no puede ser incompatible pues siempre tiene, como mínimo, la solución trivial.

## Página 30

4. a)  $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 4y = 1 \end{cases};$

$$\begin{cases} y = 4 - 2x \\ x + 4y = 1 \end{cases};$$

$$x + 4(4 - 2x) = 1;$$

$$-7x + 16 = 1;$$

$$x = 15/7;$$

$$y = 4 - 2(15/7) = -2/7$$

Solución:  $x = 15/7, y = -2/7$

b)  $\begin{cases} x + 4y + 6z = 17 \\ x + y = 2 \\ 3x + 2y + z = 4 \end{cases}; \quad \begin{cases} x + 4y + 6z = 17 \\ x = 2 - y \\ 3x + 2y + z = 4 \end{cases};$

$$\begin{cases} 2 - y + 4y + 6z = 17 \\ 3(2 - y) + 2y + z = 4 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2 + 3y + 6z = 17 \\ 6 - y + z = 4 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2 + 3y + 6z = 17 \\ z = -2 + y \end{cases}; \quad 2 + 3y + 6(-2 + y) = 17;$$

$$-10 + 9y = 17;$$

$$y = 3;$$

$$z = -2 + 3 = 1;$$

$$x = 2 - 3 = -1$$

Solución:

$$x = -1, y = 3, z = 1$$

5. a)  $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x + y = 33 \end{cases};$

$$\begin{cases} x = 4 + 2y \\ x = \frac{33 - y}{3} \end{cases};$$

$$4 + 2y = \frac{33 - y}{3};$$

$$12 + 6y = 33 - y;$$

$$-21 + 7y = 0;$$

$$y = 3;$$

$$x = 4 + 2 \cdot 3 = 10$$

Solución:  $x = 10, y = 3$

b)  $\begin{cases} x - 2y + 4z = 12 \\ -2x + y + z = -21 \\ 4x + y - z = 49 \end{cases};$

$$\begin{cases} y = \frac{x + 4z - 12}{2} \\ y = 2x - z - 21 \\ y = -4x + z + 49 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2x - z - 21 = \frac{x + 4z - 12}{2} \\ 2x - z - 21 = -4x + z + 49 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 4x - 2z - 42 = x + 4z - 12 \\ 2x - z - 21 = -4x + z + 49 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 3x - 6z = 30 \\ 6x - 2z = 70 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \frac{30 + 6z}{3} \\ x = \frac{70 + 2z}{6} \end{cases};$$

$$\frac{30 + 6z}{3} = \frac{70 + 2z}{6};$$

$$60 + 12z = 70 + 2z;$$

$$10z = 10;$$

$$z = 1;$$

$$x = \frac{30 + 6 \cdot 1}{3} = 12;$$

$$y = 2 \cdot 12 - 1 - 21 = 2$$

Solución:  $x = 12, y = 2, z = 1$

## Página 31

6. a)  $\begin{cases} 3x - 7y = 35 \\ 4x + 2y = 24 \end{cases}$

$$4 \cdot e_1 - 3 \cdot e_2 \rightarrow -34y = 68 \rightarrow y = -2$$

$$e_2 \rightarrow 4x + 2 \cdot (-2) = 24 \rightarrow 4x = 28 \rightarrow x = 7$$

Solución:  $x = 7, y = -2$ 

$$b) \begin{cases} x + 3y - z = 15 \\ 2x - y + z = 19 \\ 3x + y - 2z = 30 \end{cases}$$

$$e'_2 = e_1 + e_2 \rightarrow \begin{cases} x + 3y - z = 15 \\ 3x + 2y = 34 \\ 3x + y - 2z = 30 \end{cases}$$

$$e'_3 = 2e_1 - e_3 \rightarrow \begin{cases} x + 3y - z = 15 \\ 3x + 2y = 34 \\ -x + 5y = 0 \end{cases}$$

$$e'_3 = e_2 + 3e_3 \rightarrow \begin{cases} x + 3y - z = 15 \\ 3x + 2y = 34 \\ 17y = 34 \end{cases}$$

$$y = 2$$

$$3x + 2 \cdot 2 = 34 \rightarrow x = 10$$

$$10 + 3 \cdot 2 - z = 15 \rightarrow z = 1$$

Solución:  $x = 10, y = 2, z = 1$ 

$$7. a) \begin{cases} 2x - y + 4z = 19 \\ 3x + 2y - z = 23 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - y = 19 - 4\lambda \\ 3x + 2y = 23 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$3e_1 - 2e_2 \rightarrow -7y = 11 - 14\lambda \rightarrow y = \frac{-11 + 14\lambda}{7}$$

$$2x - \frac{-11 + 14\lambda}{7} = 19 - 4\lambda \rightarrow x = \frac{61 - 7\lambda}{7}$$

Solución:

$$x = \frac{61 - 7\lambda}{7}, y = \frac{-11 + 14\lambda}{7}, z = \lambda$$

$$b) \begin{cases} x - 2y - 3z = 4 \\ 2x - y + z = 18 \\ 3x - 3y - 2z = 22 \end{cases}$$

$$e'_2 = 2e_1 - e_2 \rightarrow \begin{cases} x - 2y - 3z = 4 \\ -3y - 7z = -10 \\ 3x - 3y - 2z = 22 \end{cases}$$

$$e'_3 = 3e_1 - e_3 \rightarrow \begin{cases} x - 2y - 3z = 4 \\ -3y - 7z = -10 \\ -3y - 7z = -10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y = 4 + 3\lambda \\ -3y = -10 + 7\lambda \rightarrow y = \frac{10 - 7\lambda}{3} \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$x - 2 \frac{10 - 7\lambda}{3} = 4 + 3\lambda \rightarrow x = \frac{32 - 5\lambda}{3}$$

Solución:

$$x = \frac{32 - 5\lambda}{3}, y = \frac{10 - 7\lambda}{3}, z = \lambda$$

## Página 32

$$8. a) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$9. a) \begin{cases} x + 2y + 3z = 12 \\ 2x + y - z = 9 \\ -x + 5z = 3 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ x - 3y - z = 6 \end{cases}$$

## Página 33

$$10. a) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/7 & -3/7 \\ 1/7 & 2/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/8 & -1/8 \\ 1/8 & 3/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/2 & -1/4 \\ 1/4 & -1/2 & -3/4 \\ 3/4 & -1/2 & -1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 60 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 2 \\ 38 \end{pmatrix}$$

## Página 35

$$11.a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 3 \\ 1 & -1 & -1 & | & 2 \\ -1 & 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow F_1 - F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 3 \\ 0 & 3 & 2 & | & 1 \\ -1 & 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow F_1 + F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 3 \\ 0 & 3 & 2 & | & 1 \\ 0 & 3 & 0 & | & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 3y + 2z = 1 \\ 3y = 3 \end{cases};$$

$$y = 1$$

$$3 \cdot 1 + 2z = 1 \rightarrow z = -1$$

$$x + 2 \cdot 1 - 1 = 3 \rightarrow x = 2$$

$$\text{Solución: } x = 2, y = 1, z = -1$$

$$b) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & | & 20 \\ 4 & -2 & 1 & | & 10 \\ -1 & 3 & 1 & | & 5 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow F_1 - 2F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & | & 20 \\ -5 & 5 & 0 & | & 0 \\ -1 & 3 & 1 & | & 5 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow F_1 - 2F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & | & 20 \\ -5 & 5 & 0 & | & 0 \\ 5 & -5 & 0 & | & 10 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow F_2 + F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & | & 20 \\ -5 & 5 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 20 \\ -5x + 5y = 0 \\ 0 = 10 \end{cases}$$

No tiene solución.

$$c) \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & | & 2 \\ 3 & -2 & 3 & | & 0 \\ -1 & 1 & -1 & | & 8 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow 3F_1 - 2F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -9 & | & 6 \\ -1 & 1 & -1 & | & 8 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow F_1 + 2F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -9 & | & 6 \\ 0 & 1 & -3 & | & 18 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow F_2 - F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -9 & | & 6 \\ 0 & 0 & -6 & | & -12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ y - 9z = 6 \\ -6z = -12 \end{cases}; \quad z = 2$$

$$y - 9 \cdot 2 = 6 \rightarrow y = 24$$

$$2x - 24 - 2 = 2 \rightarrow x = 14$$

$$\text{Solución: } x = 14, y = 24, z = 2$$

$$d) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & | & -6 \\ 2 & -1 & -3 & | & 6 \\ -1 & -2 & 0 & | & 8 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow 3F_1 - 2F_2 \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & -6 \\ 2 & 5 & 0 & -30 \\ -1 & -2 & 0 & 8 \end{array} \right)$$

$$F_3 \rightarrow F_2 + 2F_3 \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & -6 \\ 2 & 5 & 0 & -30 \\ 0 & 1 & 0 & -14 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = -6 \\ 2x + 5y = -30 \\ y = -14 \end{cases};$$

$$2x + 5 \cdot (-14) = -30 \rightarrow x = 20$$

$$2 \cdot 20 - 14 - 2z = -6 \rightarrow z = 16$$

Solución:

$$x = 20, y = -14, z = 16$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 9 + \lambda \\ 7x + 10y = 32 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \frac{9 + \lambda - 3y}{2} \\ x = \frac{32 - 10y}{7} \end{cases};$$

$$\frac{9 + \lambda - 3y}{2} = \frac{32 - 10y}{7};$$

$$\frac{9 + \lambda - 3y}{2} = \frac{32 - 10y}{7}; \quad y = -1 + 7\lambda;$$

$$x = \frac{32 - 10(-1 + 7\lambda)}{7} = 6 - 10\lambda$$

Solución:  $x = 6 - 10\lambda, y = -1 + 7\lambda, z = \lambda$

$$c) \left( \begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 0 & -20 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$F_3 \rightarrow F_1 + F_3 \Rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 0 & -20 \\ 4 & 3 & 4 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$F_3 \rightarrow F_2 - F_3 \Rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -20 \end{array} \right)$$

El sistema es incompatible.

### Página 36

$$12. a) \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 10 \\ -3 & -2 & 1 & 12 \end{array} \right)$$

$$F_2 \rightarrow F_1 + F_2 \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 10 \\ -1 & -1 & 0 & 22 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} 2x + y - z = 10 \\ -x - y = 22 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x + y = 10 + \lambda \\ -x - y = 22 \end{cases};$$

$$x = -22 - y;$$

$$2(-22 - y) + y = 10 + \lambda;$$

$$y = -54 - \lambda;$$

$$x = -22 + 54 + \lambda = 32 + \lambda;$$

Solución:  $x = 32 + \lambda, y = -54 - \lambda, z = \lambda$

$$b) \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 9 \\ 3 & 4 & 2 & 14 \end{array} \right)$$

$$F_2 \rightarrow 2F_1 + F_2 \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 9 \\ 7 & 10 & 0 & 32 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 9 \\ 7x + 10y = 32 \end{cases};$$

### Página 37

$$13. a) \left( \begin{array}{cc|c} 4 & -1 & 22 \\ 3 & 2 & 22 \\ -2 & 9 & 6 \end{array} \right)$$

$$F_2 \rightarrow 2F_1 + F_2 \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 4 & -1 & 22 \\ 11 & 0 & 66 \\ -2 & 9 & 6 \end{array} \right)$$

$$F_3 \rightarrow 9F_1 + F_3 \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 4 & -1 & 22 \\ 11 & 0 & 66 \\ 34 & 0 & 204 \end{array} \right)$$

$$F_3 \rightarrow 34F_2 - 11F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -1 & 22 \\ 11 & 0 & 66 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x - y = 22 \\ 11x = 66 \end{cases};$$

$$x = 6;$$

$$4 \cdot 6 - y = 22 \rightarrow y = 2$$

$$\text{Solución: } x = 6, y = 2$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} -6 & 4 & 10 \\ 12 & -8 & -20 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow 2F_1 + F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -6 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow F_1 + 2F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} -6 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-6x + 4y = 10;$$

$$x = \frac{2y-5}{3};$$

$$\text{Solución: } x = \frac{2\lambda-5}{3}, y = \lambda$$

$$14.\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 8 \\ 2 & -1 & -2 & 16 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow F_1 + F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & 8 \\ 2 & -1 & -2 & 16 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow F_1 + F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 9 \\ 2 & -1 & -2 & 16 \end{pmatrix}$$

$$F_4 \rightarrow F_1 + F_4 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 9 \\ 3 & 0 & -1 & 17 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow F_2 - F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & -1 & 17 \end{pmatrix}$$

$$F_4 \rightarrow 3F_2 - 2F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 11 & -19 \end{pmatrix}$$

$$F_4 \rightarrow 11F_3 + F_4 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -63 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3z = 5 \\ -z = -4 \\ 0 = -63 \end{cases}$$

El sistema es incompatible.

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow 2F_1 - F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow 2F_1 - F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

$$F_4 \rightarrow F_1 - F_4 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow 3F_2 - 4F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 24 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$F_4 \rightarrow F_3 - 3F_4 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 5y - 4z = 4 \\ 3y = 24 \end{cases};$$

$$y = 8$$

$$5 \cdot 8 - 4z = 4 \rightarrow z = 9$$

$$x + 2 \cdot 8 - 9 = 1 \rightarrow x = -6$$

Solución:

$$x = -6, y = 8, z = 9$$

$$F_1 \rightarrow 2F_1 - F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & -2 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_1 \rightarrow 7F_1 - F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 & 56 \\ 0 & -2 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow 7F_2 - 3F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 & 56 \\ 0 & -14 & 0 & -56 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_1 \rightarrow F_1 / 14; F_2 \rightarrow -F_2 / 14; F_3 \rightarrow F_3 / 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:  $x = 4, y = 4, z = 0$

$$\text{b)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow F_1 - F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ -2 & 1 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow 2F_1 + F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & 11 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow F_2 - 3F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & -36 \end{pmatrix}$$

$$F_1 \rightarrow 3F_1 - F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & -36 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow 2F_2 + F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & -6 & 0 & -42 \\ 0 & 0 & 6 & -36 \end{pmatrix}$$

$$F_1 \rightarrow F_1 / 3; F_2 \rightarrow -F_2 / 6; F_3 \rightarrow F_3 / 6 \Rightarrow$$

### Página 38

$$15. \text{a)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 12 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow F_1 - F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -8 \\ 2 & 1 & 3 & 12 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow 2F_1 - F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -8 \\ 0 & -3 & 1 & -12 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow 3F_2 - 2F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Solución:  $x = 2, y = 7, z = -6$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow 4F_1 + F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 6 & 14 \\ 2 & 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow 2F_1 + F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -1 & 11 \end{pmatrix}$$

$$F_1 \rightarrow 5F_1 - F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -1 & 11 \end{pmatrix}$$

$$F_1 \rightarrow F_1 - F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & -5 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -1 & 11 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow F_2 + 6F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & -5 & 0 & 80 \\ 0 & 0 & -1 & 11 \end{pmatrix}$$

$$F_1 \rightarrow -F_1 / 5; F_2 \rightarrow -F_2 / 5; F_3 \rightarrow -F_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & -11 \end{pmatrix}$$

Solución:  $x = 2, y = -16, z = -11$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 13 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 9 \\ -2 & 1 & -1 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow F_1 - 3F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 4 & -5 & 4 & -14 \\ -2 & 1 & -1 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow 2F_1 + 3F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 4 & -5 & 4 & -14 \\ 0 & 5 & -1 & 5 & 56 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$F_4 \rightarrow F_1 - 3F_4 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 4 & -5 & 4 & -14 \\ 0 & 5 & -1 & 5 & 56 \\ 0 & -2 & -2 & 7 & -11 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow 5F_2 - 4F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 4 & -5 & 4 & -14 \\ 0 & 0 & -21 & 0 & -294 \\ 0 & -2 & -2 & 7 & -11 \end{pmatrix}$$

$$F_4 \rightarrow F_2 + 2F_4 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 4 & -5 & 4 & -14 \\ 0 & 0 & -21 & 0 & -294 \\ 0 & 0 & -9 & 18 & -36 \end{pmatrix}$$

$$F_4 \leftrightarrow F_3; C_3 \leftrightarrow C_4 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 4 & 4 & -5 & -14 \\ 0 & 0 & 18 & -9 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & -21 & -294 \end{pmatrix}$$

$$F_1 \rightarrow 4F_1 - F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & 9 & 66 \\ 0 & 4 & 4 & -5 & -14 \\ 0 & 0 & 18 & -9 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & -21 & -294 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow 9F_2 - 2F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & 9 & 66 \\ 0 & 36 & 0 & -27 & -54 \\ 0 & 0 & 18 & -9 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & -21 & -294 \end{pmatrix}$$

$$F_1 \rightarrow 7F_1 + 3F_4 \Rightarrow \begin{pmatrix} 84 & 0 & 0 & 0 & -420 \\ 0 & 36 & 0 & -27 & -54 \\ 0 & 0 & 18 & -9 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & -21 & -294 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow 7F_2 - 9F_4 \Rightarrow \begin{pmatrix} 84 & 0 & 0 & 0 & -420 \\ 0 & 252 & 0 & 0 & 2.268 \\ 0 & 0 & 18 & -9 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & -21 & -294 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow 7F_3 - 3F_4 \Rightarrow \begin{pmatrix} 84 & 0 & 0 & 0 & -420 \\ 0 & 252 & 0 & 0 & 2.268 \\ 0 & 0 & 126 & 0 & 630 \\ 0 & 0 & 0 & -21 & -294 \end{pmatrix}$$

$$F_1 \rightarrow F_1 / 84 ; F_2 \rightarrow F_2 / 252 ; F_3 \rightarrow F_3 / 126 ; F_4$$

$$\rightarrow -F_4 / 21 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 14 \end{pmatrix}$$

*Nota:* habíamos cambiado el orden de las columnas 3 y 4 en uno de los pasos anteriores, por lo tanto, la solución es:

$$x = -5, y = 9, z = 14, t = 5$$

## Página 40

$$16. a) \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow F_1 + F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x - 3y = -\lambda \\ 3x - 4y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$x = \frac{4y}{3}$$

$$2 \cdot \frac{4y}{3} - 3y = -\lambda \rightarrow y = 3\lambda$$

$$\text{Solución: } x = 4\lambda, y = 3\lambda, z = \lambda$$

$$b) \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 4x - 2y - z = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 4x - 2y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$y = -2x;$$

$$4x - 2(-2x) = \lambda \rightarrow x = \lambda / 8$$

$$\text{Solución: } x = \lambda / 8, y = -\lambda / 4, z = \lambda$$

$$c) \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow 2F_1 - F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow F_1 - F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x - y - 2z - t = 0 \\ -5z - 3t = 0 \\ 2y - z - 3t = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 3x - y - 2z = \lambda \\ -5z = 3\lambda \\ 2y - z = 3\lambda \\ t = \lambda \end{cases};$$

$$z = -3\lambda / 5$$

$$2y - (-3\lambda / 5) = 3\lambda \rightarrow y = 6\lambda / 5$$

$$3x - 6\lambda / 5 - 2(-3\lambda / 5) = \lambda \rightarrow x = \lambda / 3$$

$$\text{Solución: } x = \lambda / 3, y = 6\lambda / 5, z = -3\lambda / 5, t = \lambda$$

$$d) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow 2F_1 - F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow 3F_1 + F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & 0 \\ 0 & -10 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow 4F_2 - 3F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } x = 0, y = 0, z = 0$$

2

$$e) \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & | & 0 \\ -1 & 1 & -3 & | & 0 \\ 1 & -1 & 5 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow F_1 + 2F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & | & 0 \\ 1 & -1 & 5 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow F_1 - 2F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & -6 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow 3F_2 - F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x - 2y + 4z = 0 \\ -2z = 0 \end{cases}$$

$$z = 0$$

$$2x - 2y + 4 \cdot 0 = 0 \rightarrow x = y$$

$$\text{Solución: } x = \lambda, y = \lambda, z = 0$$

$$F_3 \rightarrow F_1 - F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & | & 4 \\ 0 & k^2 - 1 & k - 1 & | & 4k - 4 \\ 0 & k - 1 & 1 - k & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow F_2 + F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & | & 4 \\ 0 & k^2 - 1 & k - 1 & | & 4k - 4 \\ 0 & k^2 + k - 2 & 0 & | & 4k - 4 \end{pmatrix}$$

$$k^2 + k - 2 = 0 \rightarrow k_1 = 1, k_2 = -2$$

Si  $k \neq 1$  y  $k \neq -2 \rightarrow$  Sistema compatible determinado  $\rightarrow x = \frac{4}{k+2}, y = \frac{4}{k+2}, z = \frac{4}{k+2}$

Si  $k = -2 \rightarrow$  Sistema incompatible.

Si  $k = 1 \rightarrow$  Sistema compatible indeterminado  $\rightarrow$  Solución:  $x = -\mu - \lambda + 4, y = \lambda, z = \mu$

$$b) \begin{cases} kx - y - z = y \\ x + y + z = 2 \\ x - y + z = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} kx - 2y - z = 0 \\ x + y + z = 2 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} k & -2 & -1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & -1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow F_1 - kF_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} k & -2 & -1 & | & 0 \\ 0 & -2 - k & -1 - k & | & -2k \\ 1 & -1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow F_1 - kF_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} k & -2 & -1 & | & 0 \\ 0 & -2 - k & -1 - k & | & -2k \\ 0 & -2 + k & -1 - k & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow F_2 - F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} k & -2 & -1 & | & 0 \\ 0 & -2 - k & -1 - k & | & -2k \\ 0 & -2k & 0 & | & -2k \end{pmatrix}$$

Consideramos en primer lugar el caso  $k = 0$ :

Si  $k = -1 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 2 & 0 & | & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$  Sistema incompatible.

Si  $k \neq -1 \rightarrow$  Sistema compatible determinado  $\rightarrow$  Solución:  $x = \frac{3}{k+1}, y = 1, z = \frac{-2+k}{k+1}$

### Página 42

#### Piensa y contesta

- $x$ : gramos de oro que hay en la corona  
 $y$ : gramos de plata que hay en la corona

$$\begin{cases} x + y = 7.465 \\ 0,052x + 0,095y = 467 \end{cases};$$

$$x = 7.465 - y;$$

$$0,052(7.465 - y) + 0,095y = 467 \rightarrow y = 1.833,023 \text{ g}$$

$$x = 7.465 - 1.833,023 = 5.631,977 \text{ g}$$

En la corona hay 5.631,977 g de oro y 1.833,023 g de plata.

$$17.a) \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & | & 4 \\ k & 1 & 1 & | & 4 \\ 1 & 1 & k & | & 4 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow kF_1 - F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & | & 4 \\ 0 & k^2 - 1 & k - 1 & | & 4k - 4 \\ 1 & 1 & k & | & 4 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} k & -1 & -1 & | & 2 \\ 1 & -k & 1 & | & 4 \\ 1 & -1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow F_1 - kF_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} k & -1 & -1 & | & 2 \\ 0 & -1+k^2 & -1-k & | & 2-4k \\ 1 & -1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow F_1 - kF_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} k & -1 & -1 & | & 2 \\ 0 & -1+k^2 & -1-k & | & 2-4k \\ 0 & -1+k & -1-k & | & 2 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow F_2 - F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} k & -1 & -1 & | & 2 \\ 0 & -1+k^2 & -1-k & | & 2-4k \\ 0 & k^2-k & 0 & | & -4k \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & -2 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Incompatible.}$$

$$\text{Si } k = -1 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 6 \\ 0 & 2 & 0 & | & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Incompatible.}$$

$$\text{Si } k \neq -1, 1 \rightarrow \text{Compatible determinado} \rightarrow \text{Solución: } x = \frac{2(k-5)}{k^2-1}, y = \frac{-4}{k-1}, z = \frac{-6}{k+1}$$

$$d) \begin{pmatrix} k & -1 & 1 & | & 0 \\ 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & k & | & -2 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow F_1 - kF_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} k & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1+k & 1-k & | & 0 \\ 1 & 1 & k & | & -2 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow F_1 - kF_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} k & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1+k & 1-k & | & 0 \\ 0 & -1-k & 1-k^2 & | & 2k \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow (1+k)F_2 - F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} k & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1+k & 1-k & | & 0 \\ 0 & k^2+k & 0 & | & -2k \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } k = -1 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Incompatible.}$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Solución: } x = -1 -$$

$-\lambda, y = -1, z = \lambda \rightarrow \text{Compatible indeterminado.}$

$$\text{Si } k \neq -1, 1, 0 \rightarrow \text{Compatible determinado} \rightarrow x = 0, y = \frac{-2}{k+1}, z = \frac{-2}{k+1}$$

$$18. \text{ Si } k = 0 \rightarrow x = 0, y = -2, z = -2$$

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow x = 0, y = -2/3, z = -2/3$$

Por otra parte, si  $x = 0, y = -1, z = -1$ :

$$\begin{cases} 1-1=0 \\ 1-1=0 \rightarrow -1-k=-2 \rightarrow k=1 \\ -1-k=-2 \end{cases}$$

Se obtiene la solución  $x = 0, y = -1, z = -1$  para  $k = 1$ .

### Página 45

1. Los sistemas con igual número de ecuaciones que de incógnitas también pueden ser compatibles indeterminados o incompatibles.

Actividad personal.

2. La afirmación es falsa aunque, tras algunas transformaciones, todo sistema compatible indeterminado puede convertirse en un sistema equivalente con dos ecuaciones iguales.

Actividad personal.

3. Eliminando una de las ecuaciones de un sistema incompatible, se puede obtener un sistema compatible determinado o indeterminado.

De hecho, cuantas más ecuaciones tenga un sistema, *menos soluciones* tendrá.

Por ejemplo:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ -3x + y - 3z = 10 \end{cases} \text{ es incompatible pero}$$

2

$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$  es compatible indeterminado con solución  $x = 1 - \lambda$ ,  $y = 0$ ,  $z = \lambda$ .

Y, por otra parte:

$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$  es incompatible pero

$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$  es compatible determinado con solución  $x = 1$ ,  $y = 1$ .

4. Un sistema con más ecuaciones que incógnitas puede ser compatible determinado mientras que, por el contrario, un sistema con menos ecuaciones que incógnitas no, pues al menos una de las incógnitas deberá ser utilizada como parámetro.

Actividad personal.

5. Un sistema con menos ecuaciones que incógnitas puede ser compatible indeterminado.

Actividad personal.

6. La afirmación es falsa, pues este tipo de sistemas pueden ser también compatibles indeterminados.

Actividad personal.

7. Si se suman dos soluciones particulares de un sistema homogéneo compatible indeterminado se obtiene una nueva solución del sistema. Veamos:

Sea  $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$  un sistema

homogéneo compatible indeterminado de  $n$  incógnitas y  $m$  ecuaciones.

Sean también  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  y  $(x''_1, x''_2, \dots, x''_n)$  dos de sus soluciones particulares.

Queremos ver que  $(x'_1 + x''_1, x'_2 + x''_2, \dots, x'_n + x''_n)$  es también solución del sistema:

$\begin{cases} a_{11}(x'_1 + x''_1) + a_{12}(x'_2 + x''_2) + \dots + a_{1n}(x'_n + x''_n) \\ \dots \\ a_{m1}(x'_1 + x''_1) + a_{m2}(x'_2 + x''_2) + \dots + a_{mn}(x'_n + x''_n) \end{cases} ;$

$$\begin{cases} (a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + \dots + a_{1n}x'_n) + (a_{11}x''_1 + a_{12}x''_2 + \dots + a_{1n}x''_n) \\ \dots \\ (a_{m1}x'_1 + a_{m2}x'_2 + \dots + a_{mn}x'_n) + (a_{m1}x''_1 + a_{m2}x''_2 + \dots + a_{mn}x''_n) \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} 0 + 0 = 0 \\ \dots \\ 0 + 0 = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto,  $(x'_1 + x''_1, x'_2 + x''_2, \dots, x'_n + x''_n)$  verifica las ecuaciones del sistema y, en consecuencia, es también solución particular del mismo.

Con el producto no ocurre lo mismo.

8. Actividad personal. Geométricamente, al resolver sistemas de ecuaciones lineales, se buscan puntos de corte entre rectas -dos incógnitas-, planos -tres incógnitas- o entidades análogas de mayor dimensión -cuatro o más incógnitas-, por lo tanto, los sistemas deben tener una solución, por ejemplo, una recta y un plano secantes, o infinitas, dos planos o dos rectas coincidentes.

9. a) Incompatible, si restamos las ecuaciones obtenemos  $0 = -5$ .

b) Compatible determinado pues  $e1 + 2e2 \rightarrow 5x = 18 \rightarrow x = 18/5 \rightarrow y = 6/5$

c)  $2e1 = e2 \rightarrow$  El sistema es compatible indeterminado y su solución es  $x = 8 + 3y$ .

d) Las ecuaciones no son proporcionales y tampoco presentan contradicciones, por lo tanto, el sistema es compatible determinado. Su solución es  $x = 7/5$ ,  $y = 11/5$ .

10. a) Sistema de la izquierda:

$$e2 \rightarrow x = 14 - y$$

$$e1 \rightarrow 2(14 - y) - 5y = 14 \rightarrow y = 2$$

$$x = 14 - 2 = 12$$

$$\text{Solución: } x = 12, y = 2$$

Sistema de la derecha:

$$e2 \rightarrow y = 2x - 6$$

$$e1 \rightarrow x + 3(2x - 6) = 10 \rightarrow x = 4$$

$$y = 2 \cdot 4 - 6 = 2$$

$$\text{Solución: } x = 4, y = 2$$

- b) Actividad personal, por ejemplo:

$$\text{Sistema de la izquierda} \rightarrow 3x + 4y = 2$$

$$\text{Sistema de la derecha} \rightarrow x + y = 0$$

11. Actividad personal.

12. Actividad personal. El método de resolución queda a elección de los alumnos y alumnas en cada caso. Las soluciones son las siguientes:

a)  $x = 7, y = 5, z = 4$

b)  $x = 6, y = 1, z = 0$

c)  $x = 16, y = 22, z = -28$

d)  $x = \frac{12-7\lambda}{5}, y = \frac{6-\lambda}{5}, z = \lambda$

e)  $x = 3, y = 8/3, z = -4/3$

f)  $x = 3/2, y = -3/2, z = 4$

13. a)  $[1] \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix}$

$[2] \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

$[3] \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 0 \end{pmatrix}$

$[4] \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

b)  $[1] \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/7 & 1/7 \\ -1/7 & -4/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

$[2] \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 3 \\ 9 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 23 \\ 12 \end{pmatrix}$

$[3] \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/13 & 3/13 \\ 1/13 & -5/13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$[4] \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

3ª ecuación  $\rightarrow 2x + 5y + z = 1$

b)  $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda, y = 0, z = \lambda$

15.  $A = (A^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Si  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  es la matriz de términos independientes:

$\begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix};$

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1/3 & 1 & -5/3 \\ 1/3 & -1 & 4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -44/3 \\ 31/3 \end{pmatrix}$

Por lo tanto, la forma matricial del sistema es:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -44/3 \\ 31/3 \end{pmatrix}$

Y las ecuaciones son:

$\begin{cases} x + y + 2z = -10 \\ 3x - y + z = -44/3 \\ 2x - y + z = 31/3 \end{cases}$

16. a)  $e2 \rightarrow 3y = 9 \rightarrow y = 3$

$e1 \rightarrow 2x + 3 = 17 \rightarrow x = 7$

Solución:  $x = 7, y = 3$

b)  $e2 \rightarrow 2y = 20 \rightarrow y = 10$

$e1 \rightarrow 4x - 3 \cdot 10 = 14 \rightarrow x = 11$

Solución:  $x = 11, y = 10$

17. a)  $e3 \rightarrow 3z = 12 \rightarrow z = 4$

$e2 \rightarrow 2y + 4 = 0 \rightarrow y = -2$

$e1 \rightarrow x - (-2) - 4 = 7 \rightarrow x = 9$

Solución:  $x = 9, y = -2, z = 4$

b)  $e3 \rightarrow 3z = 6 \rightarrow z = 2$

$e2 \rightarrow y + 2 = 5 \rightarrow y = 3$

$e1 \rightarrow x + 2 \cdot 3 + 2 = 13 \rightarrow x = 5$

14. a) 1ª ecuación  $\rightarrow 2x + 2y + z = 1$

2ª ecuación  $\rightarrow 2x + 3y + z = 1$

2

Solución:  $x = 2, y = 3, z = 5$ 

$$18.a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 10 \\ 1 & -2 & 3 & | & 4 \\ -1 & 1 & -1 & | & 24 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 10 \\ 0 & -3 & 4 & | & -6 \\ -1 & 1 & -1 & | & 24 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow F_3 + F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 10 \\ 0 & -3 & 4 & | & -6 \\ 0 & 2 & -2 & | & 34 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow F_2 + 2F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 10 \\ 0 & -3 & 4 & | & -6 \\ 0 & 1 & 0 & | & 62 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 10 \\ -3y + 4z = -6 \\ y = 62 \end{cases}$$

$$y = 62;$$

$$-3 \cdot 62 + 4z = -6 \rightarrow z = 45$$

$$x + 62 - 45 = 10 \rightarrow x = -7$$

Solución:  $x = -7, y = 62, z = 45$ 

$$b) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & | & 1 \\ 3 & 1 & 1 & | & 18 \\ 1 & 2 & 3 & | & 12 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow F_2 - 3F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & | & 1 \\ 0 & 4 & 7 & | & 15 \\ 1 & 2 & 3 & | & 12 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow F_3 - F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & | & 1 \\ 0 & 4 & 7 & | & 15 \\ 0 & 3 & 5 & | & 11 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow 4F_3 - 3F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & | & 1 \\ 0 & 4 & 7 & | & 15 \\ 0 & 0 & -1 & | & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - y - 2z = 1 \\ 4y + 7z = 15 \\ -z = -1 \end{cases}$$

$$z = 1;$$

$$4y + 7 = 15 \rightarrow y = 2$$

$$x - 2 - 2 = 1 \rightarrow x = 5$$

Solución:  $x = 5, y = 2, z = 1$ 

$$c) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 20 \\ 1 & -1 & 1 & | & 10 \\ 2 & 1 & -1 & | & 20 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 20 \\ 0 & 1 & 0 & | & -10 \\ 2 & 1 & -1 & | & 20 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 20 \\ 0 & 1 & 0 & | & -10 \\ 0 & 5 & -3 & | & -20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - 2y + z = 20 \\ y = -10 \\ 5y - 3z = -20 \end{cases}$$

$$y = -10;$$

$$-50 - 3z = -20 \rightarrow z = -10;$$

$$x + 20 - 10 = 20 \rightarrow x = 10$$

Solución:  $x = 10, y = -10, z = -10$ 

$$d) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 24 \\ 3 & 1 & 2 & | & 16 \\ 4 & 1 & 1 & | & -8 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 24 \\ 2 & 0 & 0 & | & -8 \\ 4 & 1 & 1 & | & -8 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow F_3 - F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 24 \\ 2 & 0 & 0 & | & -8 \\ 3 & 0 & -1 & | & -32 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 24 \\ 2x = -8 \\ 3x - z = -32 \end{cases}$$

$$2x = -8 \rightarrow x = -4$$

$$-12 - z = -32 \rightarrow z = 20$$

$$-4 + y + 40 = 24 \rightarrow y = -12$$

$$\text{Solución: } x = -4, y = -12, z = 20$$

$$\text{e) } \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 20 \\ 1 & 3 & 1 & 20 \\ -3 & 2 & 1 & 20 \end{array} \right)$$

$$F_2 \rightarrow 2F_2 - F_1 \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 5 & 1 & 20 \\ -3 & 2 & 1 & 20 \end{array} \right)$$

$$F_3 \rightarrow 2F_3 + 3F_1 \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 5 & 1 & 20 \\ 0 & 7 & 5 & 100 \end{array} \right)$$

$$F_3 \rightarrow 5F_2 - F_3 \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 5 & 1 & 20 \\ 0 & 18 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} 2x + y + z = 20 \\ 5y + z = 20 \\ 18y = 0 \end{cases}$$

$$18y = 0 \rightarrow y = 0$$

$$0 + z = 20 \rightarrow z = 20$$

$$2x + 0 + 20 = 20 \rightarrow x = 0$$

$$\text{Solución: } x = 0, y = 0, z = 20$$

$$\text{f) } \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & -1 & 16 \end{array} \right)$$

$$F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1 \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 8 \\ 0 & -5 & 3 & -11 \\ 4 & 2 & -1 & 16 \end{array} \right)$$

$$F_3 \rightarrow F_3 - 4F_1 \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 8 \\ 0 & -5 & 3 & -11 \\ 0 & -10 & 3 & -16 \end{array} \right)$$

$$F_3 \rightarrow F_3 - 2F_2 \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 8 \\ 0 & -5 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x + 3y - z = 8 \\ -5y + 3z = -11 \\ -3z = 6 \end{cases}$$

$$-3z = 6 \rightarrow z = -2$$

$$-5y - 6 = -11 \rightarrow y = 1$$

$$x + 3 + 2 = 8 \rightarrow x = 3$$

$$\text{Solución: } x = 3, y = 1, z = -2$$

$$\text{19.a) } \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 20 \\ 2 & 1 & 1 & 20 \\ 2 & -2 & 0 & 20 \end{array} \right)$$

$$F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1 \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 20 \\ 0 & -3 & -1 & -20 \\ 2 & -2 & 0 & 20 \end{array} \right)$$

$$F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1 \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 20 \\ 0 & -3 & -1 & -20 \\ 0 & -6 & -2 & -20 \end{array} \right)$$

$$F_3 \rightarrow F_3 - 2F_2 \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 20 \\ 0 & -3 & -1 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{array} \right)$$

El sistema es incompatible.

$$\text{b) } \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & -1 \\ -3 & 1 & -2 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & -12 \end{array} \right)$$

$$F_2 \rightarrow F_2 + 3F_1 \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 7 & -17 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & -12 \end{array} \right)$$

$$F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1 \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 7 & -17 & 4 \\ 0 & -7 & 11 & -10 \end{array} \right)$$

$$F_3 \rightarrow F_3 + F_2 \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 7 & -17 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \end{array} \right)$$

2

$$\begin{cases} x + 2y - 5z = -1 \\ 7y - 17z = 4 \\ -6z = -6 \end{cases}$$

$$-6z = -6 \rightarrow z = 1$$

$$7y - 17 = 4 \rightarrow y = 3$$

$$x + 6 - 5 = -1 \rightarrow x = -2$$

$$\text{Solución: } x = -2, y = 3, z = 1$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & | & 10 \\ 2 & 1 & 1 & | & 5 \\ 2 & 2 & -1 & | & 16 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & | & 10 \\ 0 & -2 & 0 & | & -5 \\ 2 & 2 & -1 & | & 16 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow F_3 - F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & | & 10 \\ 0 & -2 & 0 & | & -5 \\ 0 & -1 & -2 & | & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 10 \\ -2y = -5 \\ -y - 2z = 6 \end{cases}$$

$$-2y = -5 \rightarrow y = 5/2$$

$$-5/2 - 2z = 6 \rightarrow z = -17/4$$

$$2x + 15/2 - 17/4 = 10 \rightarrow x = 27/8$$

$$\text{Solución: } x = 27/8, y = 5/2, z = -17/4$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 10 \\ 1 & -1 & 2 & | & 8 \\ 2 & 1 & 1 & | & 13 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 10 \\ 0 & -3 & 3 & | & -2 \\ 2 & 1 & 1 & | & 13 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 10 \\ 0 & -3 & 3 & | & -2 \\ 0 & -3 & 3 & | & -7 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow F_3 - F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 10 \\ 0 & -3 & 3 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & -5 \end{pmatrix}$$

El sistema es incompatible.

$$\text{20.a) } \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & -1 & | & 4 \\ -2 & -1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 3 & -1 & -2 & -2 & | & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & | & 4 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & -1 & | & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & | & -6 \\ 3 & -1 & -2 & -2 & | & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & | & 4 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow F_3 + 3F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & -1 & | & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & | & -6 \\ 0 & -7 & 1 & -5 & | & 14 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & | & 4 \end{pmatrix}$$

$$F_4 \rightarrow F_4 - F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & -1 & | & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & | & -6 \\ 0 & -7 & 1 & -5 & | & 14 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow 3F_3 + 7F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & -1 & | & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & | & -6 \\ 0 & 0 & -18 & 6 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_4 \rightarrow 3F_4 - F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & -1 & | & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & | & -6 \\ 0 & 0 & -18 & 6 & | & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & | & 6 \end{pmatrix}$$

$$F_4 \rightarrow 3F_4 + F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & -1 & | & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & | & -6 \\ 0 & 0 & -18 & 6 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & | & 18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x - 2y + z - t = 4 \\ 3y - 3z + 3t = -6 \\ -18z + 6t = 0 \\ -3t = 18 \end{cases};$$

$$-3t = 18 \rightarrow t = -6$$

$$-18z - 36 = 0 \rightarrow z = -2$$

$$3y + 6 - 18 = -6 \rightarrow y = 2$$

$$-x - 4 - 2 + 6 = 4 \rightarrow x = -4$$

$$\text{Solución: } x = -4, y = 2, z = -2, t = -6$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_4 \rightarrow F_4 + F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow 2F_3 - F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_4 \rightarrow 4F_4 + 3F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ -2y - 2z + t = -1 \\ -4z - t = -3 \\ 5t = -5 \end{cases}$$

$$5t = -5 \rightarrow t = -1$$

$$-4z + 1 = -3 \rightarrow z = 1$$

$$-2y - 2 - 1 = -1 \rightarrow y = -1$$

$$x - 1 + 1 - 1 = 1 \rightarrow x = 2$$

$$\text{Solución: } x = 2, y = -1, z = 1, t = -1$$

21. a) Compatible determinado.

$$\text{Solución: } x = 3, y = 1, z = 0$$

b) Incompatible.

c) Compatible indeterminado.

$$\text{Solución: } x = 0, y = \lambda, z = 6 - 2\lambda$$

d) Compatible determinado.

$$\text{Solución: } x = y = z = 0$$

$$22. \text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow 2F_2 - F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + y + z = 8 \\ y + z = 0 \end{cases};$$

$$z = \lambda$$

$$y + \lambda = 0 \rightarrow y = -\lambda$$

$$2x - \lambda + \lambda = 8 \rightarrow x = 4$$

$$\text{Solución: } x = 4, y = -\lambda, z = \lambda$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & 18 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow 2F_2 - F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & 18 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + y - z + 2t = 18 \\ y + 3z - 2t = 2 \end{cases}$$

$$z = \lambda$$

$$t = \mu$$

$$y + 3\lambda - 2\mu = 2 \rightarrow y = 2 - 3\lambda + 2\mu$$

$$2x + 2 - 3\lambda + 2\mu - \lambda + 2\mu = 18 \rightarrow x = 8 + 2\lambda - 2\mu$$

$$\text{Solución: } x = 8 + 2\lambda - 2\mu, y = 2 - 3\lambda + 2\mu, z = \lambda, t = \mu$$

c) 
$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 16 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 12 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

$$F_2 \rightarrow F_2 + F_1 \Rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 16 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 28 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

$$F_3 \rightarrow F_3 - F_1 \Rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 16 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 28 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & -12 \end{array} \right)$$

$$F_3 \rightarrow F_3 + 3F_2 \Rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 16 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 28 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 72 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x + y + 2z + t = 16 \\ 2y + z = 28 \\ 3y = 72 \end{cases}$$

$$3y = 72 \rightarrow y = 24$$

$$48 + z = 28 \rightarrow z = -20$$

$$x + 24 - 40 + t = 16 \rightarrow x = 32 - t$$

$$\text{Solución: } x = 32 - \lambda, y = 24, z = -20, t = \lambda$$

d) 
$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 12 \\ 1 & 2 & 0 & 8 \end{array} \right)$$

$$F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x + y - z = 12 \\ y + z = -4 \end{cases}$$

$$z = \lambda$$

$$y + \lambda = -4 \rightarrow y = -4 - \lambda$$

$$x - 4 - \lambda - \lambda = 12 \rightarrow x = 16 + 2\lambda$$

$$\text{Solución: } x = 16 + 2\lambda, y = -4 - \lambda, z = \lambda$$

e) 
$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 8 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \Rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$F_3 \rightarrow F_3 - F_1 \Rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -8 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x + y + z - t = 8 \\ -2y - 2z = -4 \\ -z = -8 \end{cases}$$

$$-z = -8 \rightarrow z = 8$$

$$-2y - 16 = -4 \rightarrow y = -6$$

$$x - 6 + 8 - t = 8 \rightarrow x = 6 + t$$

$$\text{Solución: } x = 6 + \lambda, y = -6, z = 8, t = \lambda$$

f) 
$$\left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -2 & 1 & 13 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$$F_2 \rightarrow F_2 + F_1 \Rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -2 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$$F_3 \rightarrow F_3 + 2F_1 \Rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -2 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -3 & 3 & 25 \end{array} \right)$$

$$F_3 \rightarrow F_3 - 5F_2 \Rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -2 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -10 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} -x + 2y - 2z + t = 13 \\ y - z + t = 7 \\ 2z - 2t = -10 \end{cases}$$

$$t = \lambda$$

$$2z - 2\lambda = -10 \rightarrow z = -5 + \lambda$$

$$y + 5 - \lambda + \lambda = 7 \rightarrow y = 2$$

$$-x + 4 + 10 - 2\lambda + \lambda = 13 \rightarrow x = -\lambda + 1$$

$$\text{Solución: } x = -\lambda + 1, y = 2, z = -5 + \lambda, t = \lambda$$

23.a) 
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -8 & -6 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow F_3 - F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -8 & -6 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema es incompatible.

b) 
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 6 \\ 3 & 3 & 1 & 10 \\ 2 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 10 \\ 2 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow F_3 - 3F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$F_4 \rightarrow F_4 - 2F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow F_3 - F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F_4 \rightarrow 2F_4 - F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -2z = 4 \end{cases}$$

$$-2z = 4 \rightarrow z = -2$$

$$x + y - 2 = 2 \rightarrow x = 4 - y$$

$$\text{Solución: } x = 4 - \lambda, y = \lambda, z = -2$$

24.a) 
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow 2F_2 - F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow 2F_3 - F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } x = 0, y = 0, z = 0$$

b) 
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow 3F_3 + F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$3y - 3z = 0 \rightarrow y = z$$

$$x - z + 2z = 0 \rightarrow x = -z$$

$$\text{Solución: } x = -\lambda, y = \lambda, z = \lambda$$

25.a) 
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 3 & -3 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

2

$$F_3 \rightarrow F_3 - 3F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$F_1 \rightarrow 2F_1 + F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$F_1 \rightarrow F_1 + 3F_3; F_2 \rightarrow F_2 - F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 28 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$F_1 \rightarrow F_1 / 2; F_2 \rightarrow F_2 / 2; F_3 \rightarrow -F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Solución:  $x = 14, y = 0, z = -6$ 

$$b) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow F_2 - F_1; F_3 \rightarrow F_3 - F_1; F_4 \rightarrow F_4 - F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \leftrightarrow F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_4 \leftrightarrow F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_1 \rightarrow 2F_1 + F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_1 \rightarrow F_1 + F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_1 \rightarrow 2F_1 + 3F_4; F_3 \rightarrow 2F_3 + F_4 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_1 \rightarrow F_1 / 4; F_2 \rightarrow -F_2 / 2; F_3 \rightarrow -F_3 / 4; F_4 \rightarrow -F_4 / 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:  $x = 3, y = -1, z = 0, t = 0$ 

$$c) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 3 & -3 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \leftrightarrow F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow F_2 - 3F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow F_3 - F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema es compatible indeterminado, por lo tanto, no se puede resolver por el método de Gauss-Jordan,

Solución:  $x = 14 + \lambda, y = \lambda, z = -6$ 

$$d) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 8 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow F_2 - F_1; F_3 \rightarrow F_3 - F_1; F_4 \rightarrow F_4 - F_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$F_4 \rightarrow F_4 - F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$F_1 \rightarrow 2F_1 + F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 & 12 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow F_2 - 2F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 & 12 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$F_1 \rightarrow F_1 + F_4 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$F_1 \rightarrow F_1 / 2; F_2 \rightarrow -F_2 / 2; F_3 \rightarrow -F_3; F_4 \rightarrow F_4 / 2$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } x = 8, y = -6, z = 8, t = 2$$

## Página 47

$$26.a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -k & 4 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -k-2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ (-k-2)y = 2 \end{cases}$$

Si  $k \neq -2 \rightarrow$  Sistema compatible determinado.

$$(-k-2)y = 2 \rightarrow y = -\frac{2}{k+2}$$

$$x - \frac{4}{k+2} = 2 \rightarrow x = \frac{8+2k}{k+2}$$

$$\text{Solución: } x = \frac{8+2k}{k+2}, y = -\frac{2}{k+2}$$

Si  $k = -2 \rightarrow$  Sistema incompatible.

$$b) \begin{pmatrix} k & 4 & 2 \\ 1 & k & 6 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow kF_2 - F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} k & 4 & 2 \\ 0 & k^2-4 & 6k-2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} kx + 4y = 2 \\ (k^2-4)y = 6k-2 \end{cases}$$

Si  $k \neq \pm 2 \rightarrow$  Sistema compatible determinado.

$$(k^2-4)y = 6k-2 \rightarrow y = \frac{6k-2}{k^2-4}$$

$$kx + 4\left(\frac{6k-2}{k^2-4}\right) = 2 \rightarrow x = \frac{-24+2k}{k^2-4}$$

$$\text{Solución: } x = \frac{-24+2k}{k^2-4}, y = \frac{6k-2}{k^2-4}$$

Si  $k = \pm 2 \rightarrow$  Sistema incompatible.

$$c) \begin{pmatrix} k & 2 & 2 \\ 1 & k-1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow kF_2 - F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} k & 2 & 2 \\ 0 & k^2-k-2 & 4k-2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} kx + 2y = 2 \\ (k^2-k-2)y = 4k-2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} kx + 2y = 2 \\ (k-2)(k+1)y = 4k-2 \end{cases}$$

Si  $k \neq 2, k \neq -1 \rightarrow$  Sistema compatible determinado.

$$(k-2)(k+1)y = 4k-2 \rightarrow y = \frac{4k-2}{(k-2)(k+1)}$$

2

$$kx + 2\left(\frac{4k-2}{(k-2)(k+1)}\right) = 2 \rightarrow x = \frac{2k-10}{(k-2)(k+1)}$$

$$\text{Solución: } x = \frac{2k-10}{(k-2)(k+1)}, y = \frac{4k-2}{(k-2)(k+1)}$$

Si  $k = 2$  ó  $k = -1 \rightarrow$  Sistema incompatible.

$$\text{d) } \left( \begin{array}{cc|c} k^2 & 2 & 2 \\ k & k-1 & 4 \end{array} \right)$$

$$F_2 \rightarrow kF_2 - F_1 \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} k^2 & 2 & 2 \\ 0 & k^2 - k - 2 & 4k - 2 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} k^2x + 2y = 2 \\ (k^2 - k - 2)y = 4k - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k^2x + 2y = 2 \\ (k-2)(k+1)y = 4k - 2 \end{cases}$$

Si  $k \neq 2, -1, 0 \rightarrow$  Sistema compatible determinado.

$$(k-2)(k+1)y = 4k - 2 \rightarrow y = \frac{4k-2}{(k-2)(k+1)}$$

$$k^2x + 2\left(\frac{4k-2}{(k-2)(k+1)}\right) = 2 \rightarrow x = \frac{2k-10}{k(k-2)(k+1)}$$

$$\text{Solución: } x = \frac{2k-10}{k(k-2)(k+1)}, y = \frac{4k-2}{(k-2)(k+1)}$$

Si  $k = 2, -1, 0 \rightarrow$  Sistema incompatible.

$$\text{27. a) } \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & k & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & k+1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1 \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & k+1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & -2 \end{array} \right)$$

$$F_3 \rightarrow F_3 - 2F_2 \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & k+1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-2k & -4 \end{array} \right)$$

Si  $k \neq 1/2 \rightarrow$  Sistema compatible determinado.

$$(1-2k)z = -4 \rightarrow z = \frac{-4}{1-2k}$$

$$-2y + (k+1)\left(\frac{-4}{1-2k}\right) = 1 \rightarrow y = \frac{5+2k}{-2+4k}$$

$$x + \frac{5+2k}{-2+4k} + \frac{4}{1-2k} = 1 \rightarrow x = \frac{1+2k}{-2+4k}$$

$$\text{Solución: } x = \frac{1+2k}{-2+4k}, y = \frac{5+2k}{-2+4k}, z = \frac{-4}{1-2k}$$

Si  $k = 1/2 \rightarrow$  Sistema incompatible.

$$\text{b) } \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -k & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$F_2 \rightarrow F_2 + F_1 \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -k-1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$F_3 \rightarrow F_3 + F_1 \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -k-1 & 1 \\ 0 & k+1 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

Si  $k \neq -1 \rightarrow$  Sistema compatible determinado.

$$(k+1)y = 2 \rightarrow y = \frac{2}{k+1}$$

$$(-k-1)z = 1 \rightarrow z = -\frac{1}{k+1}$$

$$-x + \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+1} = 1 \rightarrow x = \frac{2-k}{k+1}$$

$$\text{Solución: } x = \frac{2-k}{k+1}, y = \frac{2}{k+1}, z = -\frac{1}{k+1}$$

Si  $k = -1 \rightarrow$  Sistema incompatible.

$$\text{c) } \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -k & 2 \\ 1 & k & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$F_2 \rightarrow F_2 + F_1 \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -k & 3 \\ 1 & k & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$F_3 \rightarrow F_3 + F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & -k & | & 3 \\ 0 & k+1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Si  $k \neq 0, -1 \rightarrow$  Sistema compatible determinado.

$$-kz = 3 \rightarrow z = -\frac{3}{k}$$

$$(k+1)y - \frac{3}{k} = 1 \rightarrow y = \frac{k+3}{k(k+1)}$$

$$-x + \frac{k+3}{k(k+1)} = 1 \rightarrow x = \frac{3-k^2}{k(k+1)}$$

$$\text{Solución: } x = \frac{3-k^2}{k(k+1)}, y = \frac{k+3}{k(k+1)}, z = -\frac{3}{k}$$

Si  $k = 0, -1 \rightarrow$  Sistema incompatible.

$$\text{d) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ k & -1 & k & | & 0 \\ 1 & -k & 1 & | & 4 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow F_2 - kF_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -1-k & 2k & | & -k \\ 1 & -k & 1 & | & 4 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow F_3 - F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -1-k & 2k & | & -k \\ 0 & -k-1 & 2 & | & 3 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow F_3 - F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -1-k & 2k & | & -k \\ 0 & 0 & 2-2k & | & 3+k \end{pmatrix}$$

Si  $k \neq 1, -1 \rightarrow$  Sistema compatible determinado.

$$(2-2k)z = 3+k \rightarrow z = \frac{3+k}{2-2k}$$

$$(-1-k)y + 2k \left( \frac{3+k}{2-2k} \right) = -k \rightarrow y = \frac{-4k}{(k-1)(k+1)}$$

$$x - \frac{4k}{(k-1)(k+1)} - \frac{3+k}{2-2k} = 1 \rightarrow x = \frac{k+5}{2(k+1)}$$

$$\text{Solución: } x = \frac{k+5}{2(k+1)}, y = \frac{-4k}{(k-1)(k+1)}, z = \frac{3+k}{2-2k}$$

Si  $k = 1 \rightarrow$  Sistema incompatible.

Si  $k = -1 \rightarrow$  Sistema incompatible.

$$\text{28.a) } \begin{pmatrix} k & 1 & -1 & | & 0 \\ -1 & -1 & 2 & | & k \\ 1 & -1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow F_1 + F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} k & 1 & -1 & | & 0 \\ -1+k & 0 & 1 & | & k \\ 1 & -1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow F_1 + F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} k & 1 & -1 & | & 0 \\ -1+k & 0 & 1 & | & k \\ k+1 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Si  $k = -1 \rightarrow$  Sistema compatible indeterminado  $\rightarrow$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & | & 0 \\ -2 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$-2x + z = -1 \rightarrow z = 2x - 1$$

$$-x + y - 2x + 1 = 0 \rightarrow y = 3x - 1$$

$$\text{Solución: } x = \lambda, y = 3\lambda - 1, z = 2\lambda - 1$$

Si  $k \neq -1 \rightarrow$  Sistema compatible determinado.

$$(k+1)x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$0 + z = k \rightarrow z = k$$

$$0 + y - k = 0 \rightarrow y = k$$

$$\text{Solución: } x = 0, y = k, z = k$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 & | & 0 \\ -1 & 1 & -1 & | & k \\ 1 & 1 & -1 & | & k \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow F_2 + F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 & | & 0 \\ 0 & 1-k & -2 & | & k \\ 1 & 1 & -1 & | & k \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow F_3 - F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 & | & 0 \\ 0 & 1-k & -2 & | & k \\ 0 & 1+k & 0 & | & k \end{pmatrix}$$

Si  $k \neq -1 \rightarrow$  Sistema compatible determinado.

$$(1+k)y = k \rightarrow y = \frac{k}{1+k}$$

2

$$(1-k) \frac{k}{1+k} - 2z = k \rightarrow z = -\frac{k^2}{1+k}$$

$$x - \frac{k^2}{1+k} + \frac{k^2}{1+k} = 0 \rightarrow x = 0$$

$$\text{Solución: } x = 0, y = \frac{k}{1+k}, z = -\frac{k^2}{1+k}$$

Si  $k = -1 \rightarrow$  Sistema incompatible.

$$\text{c) } \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & k \\ 1 & 1 & -1 & k+1 \end{array} \right)$$

$$F_2 \rightarrow F_1 + F_2 \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & k \\ 1 & 1 & -1 & k+1 \end{array} \right)$$

$$F_3 \rightarrow F_3 - F_1 \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & k \\ 0 & 2 & 0 & k+1 \end{array} \right)$$

Sistema compatible determinado para todos los valores de  $k$ .

$$2y = k+1 \rightarrow y = \frac{k+1}{2}$$

$$-2z = k \rightarrow z = -\frac{k}{2}$$

$$x - \frac{k+1}{2} + \frac{k}{2} = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\text{Solución: } x = \frac{1}{2}, y = \frac{k+1}{2}, z = -\frac{k}{2}$$

$$\text{d) } \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -k & 0 \\ -1 & 1 & -1 & k-1 \\ 1 & 1 & -1 & k-1 \end{array} \right)$$

$$F_2 \rightarrow F_1 + F_2 \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -k & 0 \\ 0 & 0 & -1-k & k-1 \\ 1 & 1 & -1 & k-1 \end{array} \right)$$

$$F_3 \rightarrow F_3 - F_1 \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -k & 0 \\ 0 & 0 & -1-k & k-1 \\ 0 & 2 & -1+k & k-1 \end{array} \right)$$

Si  $k \neq -1 \rightarrow$  Sistema compatible determinado.

$$(-1-k)z = k-1 \rightarrow z = -\frac{k-1}{1+k}$$

$$2y - (-1+k) \left( \frac{k-1}{1+k} \right) = k-1 \rightarrow y = \frac{k(-1+k)}{1+k}$$

$$x - \frac{k(-1+k)}{1+k} + k \left( \frac{k-1}{1+k} \right) = 0 \rightarrow x = 0$$

$$\text{Solución: } x = 0, y = \frac{k(-1+k)}{1+k}, z = -\frac{k-1}{1+k}$$

Si  $k = -1 \rightarrow$  Sistema incompatible.

$$\text{29.a) } \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

$$F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & 0 & -1-m & 1 \end{array} \right)$$

Si  $m \neq -1 \rightarrow$  Sistema compatible indeterminado.

$$(-1-m)z = 1 \rightarrow z = -\frac{1}{1+m}$$

$$x + y - \frac{m}{1+m} = 1 \rightarrow x = -y + \frac{2m+1}{m+1}$$

$$\text{Solución: } x = -\lambda + \frac{2m+1}{m+1}, y = \lambda, z = -\frac{1}{1+m}$$

Si  $m = -1 \rightarrow$  Sistema incompatible.

$$\text{b) } \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -1 & 11 \\ 3 & -1 & m & 2 \end{array} \right)$$

$$F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & -2 & 6 \\ 3 & -1 & m & 2 \end{array} \right)$$

$$F_3 \rightarrow F_3 + F_1 \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & -2 & 6 \\ 4 & 0 & m+1 & 7 \end{array} \right)$$

$$F_3 \rightarrow F_3 - F_2 \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & m+3 & 1 \end{array} \right)$$

Si  $m \neq -3 \rightarrow$  Sistema compatible determinado.

$$(m+3)z = 1 \rightarrow z = \frac{1}{m+3}$$

$$4x - \frac{2}{m+3} = 6 \rightarrow x = \frac{10+3m}{2(m+3)}$$

$$\frac{10+3m}{2(m+3)} + y + \frac{1}{m+3} = 5 \rightarrow y = \frac{7m+18}{2(m+3)}$$

$$\text{Solución: } x = \frac{10+3m}{2(m+3)}, y = \frac{7m+18}{2(m+3)}, z = \frac{1}{m+3}$$

Si  $m = -3 \rightarrow$  Sistema incompatible.

30.x: billetes de 10 euros

y: billetes de 20 euros

z: billetes de 50 euros

$$\begin{cases} 10x + 20y + 50z = 16.000 \\ x + y + z = 800 \\ 3y = 4z \end{cases};$$

$$\begin{cases} 10x + 20y + 50z = 16.000 \\ x + y + z = 800 \\ 3y - 4z = 0 \end{cases};$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 10 & 20 & 50 & 16.000 \\ 1 & 1 & 1 & 800 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \end{array} \right)$$

$$F_2 \rightarrow 10F_2 - F_1 \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 10 & 20 & 50 & 16.000 \\ 0 & -10 & -40 & -8.000 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \end{array} \right)$$

$$F_3 \rightarrow 10F_3 + 3F_2 \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 10 & 20 & 50 & 16.000 \\ 0 & -10 & -40 & -8.000 \\ 0 & 0 & -160 & -24.000 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} 10x + 20y + 50z = 16.000 \\ -10y - 40z = -8.000 \\ -160z = -24.000 \end{cases}$$

$$-160z = -24.000 \rightarrow z = 150$$

$$-10y - 6.000 = -8.000 \rightarrow y = 200$$

$$10x + 4.000 + 7.500 = 16.000 \rightarrow x = 450$$

Debe haber 450 billetes de 10 euros, 200 de 20 euros y 150 de 50 euros.

31.x: plazas vendidas en A

y: plazas vendidas en B

z: plazas vendidas en C

$$\begin{cases} x + y + z = 65 \\ x = 1,5z \\ 6.000z = 2.000x + 4.000y \end{cases};$$

$$\begin{cases} x + y + z = 65 \\ x - 1,5z = 0 \\ 2.000x + 4.000y - 6.000z = 0 \end{cases};$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 65 \\ 1 & 0 & -1,5 & 0 \\ 2.000 & 4.000 & -6.000 & 0 \end{array} \right)$$

Solución:  $x = 30, y = 15, z = 20$

Se han vendido 30 plazas de garaje en la urbanización A, 15 plazas en la B y 20 plazas en la C.

32.x: kg de pienso A

y: kg de pienso B

$$\begin{cases} 6x + 35y = 100 \\ 14x + 15y = 100 \end{cases};$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 6 & 35 & 100 \\ 14 & 15 & 100 \end{array} \right)$$

Solución:  $x = 5, y = 2$

La ganadera deberá proporcionar diariamente a cada res 5 kg de pienso del tipo A y 2 kg de pienso del tipo B.

33.x: unidades que demanda A

y: unidades que demanda B

z: unidades que demanda C

$$\begin{cases} x + y + z = 42 \\ 1,2\left(\frac{x}{2} + \frac{z}{3}\right) = y \\ x = y + z \end{cases};$$

$$\begin{cases} x + y + z = 42 \\ 0,6x - y + 0,4z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 42 \\ 0,6 & -1 & 0,4 & | & 0 \\ 1 & -1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:  $x = 21$ ,  $y = 15$ ,  $z = 6$

El establecimiento A solicitó 21 unidades, el B solicitó 15 unidades y el C solicitó 6 unidades.

34.x: cantidad que debe poner el mayor

y: cantidad que debe poner el mediano

z: cantidad que debe poner el pequeño

$$\begin{cases} x + y + z = 26 \\ y = 2z \\ 3x = 2y \end{cases};$$

$$\begin{cases} x + y + z = 26 \\ y - 2z = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 26 \\ 0 & 1 & -2 & | & 0 \\ 3 & -2 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:  $x = 8$ ,  $y = 12$ ,  $z = 6$

El mayor debe poner 8 euros, el mediano debe poner 12 euros y el pequeño debe poner 6 euros.

35.x: alumnos matriculados en primero

y: alumnos matriculados en segundo

z: alumnos matriculados en tercero

$$\begin{cases} x + y + z = 350 \\ x = y + 2z \\ y + 2x = 250 + 5z \end{cases};$$

$$\begin{cases} x + y + z = 350 \\ x - y - 2z = 0 \\ 2x + y - 5z = 250 \end{cases};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 350 \\ 1 & -1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 1 & -5 & | & 250 \end{pmatrix}$$

Solución:  $x = 200$ ,  $y = 100$ ,  $z = 50$

En primero hay matriculados 200 alumnos, en segundo hay matriculados 100 alumnos y en tercero, 50 alumnos.

36.x: metros de tela a 6 euros / m

y: metros de tela a 9 euros / m

z: metros de tela a 12 euros / m

$$\begin{cases} 6x + 9y + 12z = 300 \\ x + y + z = 32 \\ y = 1 + x \end{cases};$$

$$\begin{cases} 6x + 9y + 12z = 300 \\ x + y + z = 32 \\ -x + y = 1 \end{cases};$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 & 12 & | & 300 \\ 1 & 1 & 1 & | & 32 \\ -1 & 1 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:  $x = 9$ ,  $y = 10$ ,  $z = 13$

Se han comprado 9 metros de la más barata, 10 metros de la de precio mediano y 13 metros de la más cara.

37.x: km recorridos en taxi

y: km recorridos en ferrocarril

z: km recorridos en autobús

$$\begin{cases} x + y + z = 200 \\ 5x + 2y + 3z = 500 \\ y = 2(x + z) \end{cases};$$

$$\begin{cases} x + y + z = 200 \\ 5x + 2y + 3z = 500 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 200 \\ 5 & 2 & 3 & | & 500 \\ 2 & -1 & 2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:  $x = 50 / 3 = 16,67$ ;  $y = 400 / 3 = 133,33$ ;  $z = 50$

Se han recorrido 16,67 km en taxi, 133,33 km en ferrocarril y 50 km en autobús.

## Página 48

38.x: trabajadores de la categoría A

y: trabajadores de la categoría B

z: trabajadores de la categoría C

$$\begin{cases} x + y + z = 36 \\ 900x + 1.500y + 3.000z = 54.900 \\ 0,95 \cdot 900x + 0,96 \cdot 1.500y + 0,93 \cdot 3.000z = 0,95 \cdot 54.900 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 36 \\ 900x + 1.500y + 3.000z = 54.900 \\ 855x + 1.440y + 2.790z = 52.155 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 36 \\ 900 & 1.500 & 3.000 & 54.900 \\ 855 & 1.440 & 2.790 & 52.155 \end{array} \right)$$

Solución:  $x = 11$ ,  $y = 20$ ,  $z = 5$

Hay 11 trabajadores de la categoría A, 20 de la categoría B y 5 de la categoría C.

39.  $x$ : modelos de 12.000 euros vendidos

$y$ : modelos de 15.000 euros vendidos

$z$ : modelos de 22.000 euros vendidos

$$\begin{cases} 12.000x + 15.000y + 22.000z = 1.265.000 \\ x = y + z \\ 3z = y \end{cases};$$

$$\begin{cases} 12x + 15y + 22z = 1.265 \\ -x + y + z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases};$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 12 & 15 & 22 & 1.265 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

Solución:  $x = 44$ ,  $y = 33$ ,  $z = 11$

Ha vendido 44 coches de 12.000 euros, 33 de 15.000 euros y 11 de 22.000 euros.

40.  $x$ : alumnos del grupo A

$y$ : alumnos del grupo B

$z$ : alumnos del grupo C

$$\begin{cases} x + y + z = 65 \\ \frac{x}{2} + \frac{4}{5}y + \frac{2}{3}z = 42; \\ \frac{3}{4}x + y + \frac{2}{3}z = 52 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 65 \\ 1/2 & 4/5 & 2/3 & 42 \\ 3/4 & 1 & 2/3 & 52 \end{array} \right)$$

Solución:  $x = 24$ ,  $y = 20$ ,  $z = 21$

Hay 24 alumnos del grupo A, 20 alumnos del B y 21 alumnos del C.

41.  $x$ : hojas que reparte Elena

$y$ : hojas que reparte Pedro

$z$ : hojas que reparte Juan

$$\begin{cases} y = 0,20(x + y + z) \\ z = x + 100 \\ x + y = 850 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 0,20x - 0,80y + 0,20z = 0 \\ x - z = -100 \\ x + y = 850 \end{cases};$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0,20 & -0,80 & 0,20 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -100 \\ 1 & 1 & 0 & 850 \end{array} \right)$$

Solución:  $x = 550$ ,  $y = 300$ ,  $z = 650$

Elena reparte 550 hojas, Pedro reparte 300 y Juan reparte 650 hojas.

42.  $x$ : gramos necesarios de complemento A

$y$ : gramos necesarios de complemento B

$$\begin{cases} 2x + 2y = 12 \\ 3x + y = 16 \\ 2x + 4y = 14 \end{cases};$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 12 \\ 3 & 1 & 16 \\ 2 & 4 & 14 \end{array} \right)$$

Solución:  $x = 5$ ,  $y = 1$

Son necesarios 5 gramos de complemento A y 1 gramo de complemento B.

43.  $x$ : precio del billete hacia A

$y$ : precio del billete hacia B

$z$ : precio del billete hacia C

$$\begin{cases} 10x + 5y = 1.050 \\ 12x + 8y = 1.440 \\ 6x + 5y + 8z = 1.810 \end{cases};$$

2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 5 & 0 & 1.050 \\ 12 & 8 & 0 & 1.440 \\ 6 & 5 & 8 & 1.810 \end{array}\right)$$

Solución:  $x = 60, y = 90, z = 125$ 

Los billetes hacia A cuestan 60 euros, hacia B cuestan 90 euros y hacia C cuestan 125 euros.

$$44. \begin{cases} A + B + C = 10.000 \\ 0,06A + 0,05B + 0,02C = 415 \\ 0,04A + 0,03B + 0,07C = 460 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10.000 \\ 0,06 & 0,05 & 0,02 & 415 \\ 0,04 & 0,03 & 0,07 & 460 \end{array}\right)$$

Solución:  $A = 2.000 \text{ €}, B = 4.500 \text{ €}, C = 3.500 \text{ €}$ 

45.x: pares vendidos con un 30% de descuento

y: pares vendidos con un 40% de descuento

$$\begin{cases} x + y = 300 \\ 0,70 \cdot 7x + 0,60 \cdot 7y = 1.386 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 300 \\ 4,9x + 4,2y = 1.386 \end{cases}$$

$$x = 300 - y;$$

$$0,49(300 - y) + 0,42y = 1386;$$

$$y = 120 \rightarrow x = 180$$

El descuento del 40% se ha aplicado a 120 pares de calcetines.

$$46. \begin{cases} A + 2B + C = 90 \\ mA + (m+3)B + 3C = 295 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 90 \\ m & m+3 & 3 & 295 \end{array}\right)$$

$$F_2 \rightarrow F_2 - mF_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 90 \\ 0 & -m+3 & 3-m & 295-90m \end{array}\right)$$

a) Si  $m = 3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 90 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{array}\right) \rightarrow$  El sistema es incompatible.

Si  $m \neq 3$  el sistema es compatible.

$$b) \text{ Si } m = 4 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 90 \\ 0 & -1 & -1 & -65 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} A + 2B + C = 90 \\ -B - C = -65 \end{cases}$$

$$-B - C = -65 \rightarrow C = -B + 65$$

$$A + 2B - B + 65 = 90 \rightarrow A = -B + 25$$

Solución:  $A = -\lambda + 25, B = \lambda, C = -\lambda + 65$ 

El sistema es compatible indeterminado y, por lo tanto, las posibilidades son múltiples, no es posible saber el coste de los productos.

Nota: el sistema es compatible indeterminado para todos los valores  $m \neq 3$ , la solución general es:

$$A = \frac{-90m + 320 + (m-3)\lambda}{m-3}$$

$$B = \frac{90m - 295 - (m-3)\lambda}{m-3}$$

$$C = \lambda$$

Finalmente, si  $C = 5A$  y  $m = 4$ :

$$\begin{cases} A + 2B + C = 90 \\ -B - C = -65 \\ C = 5A \end{cases}$$

$$\begin{cases} A + 2B + C = 90 \\ -B - C = -65 \\ 5A - C = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 90 \\ 0 & -1 & -1 & -65 \\ 5 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Solución:  $A = 10 \text{ €}, B = 15 \text{ €}, C = 50 \text{ €}$ 

## Página 48

$$47. \left(\begin{array}{cc|c} m & 1 & m^2 \\ 1 & m & m-1 \end{array}\right)$$

Si  $m \neq \pm 1$ , el sistema es compatible determinado.

$$(m^2 - 1)y = -m \rightarrow y = \frac{-m}{m^2 - 1}$$

$$mx - \frac{m}{m^2 - 1} = m^2 \rightarrow x = \frac{m^3 - m + 1}{m^2 - 1}$$

$$\text{Solución: } x = \frac{m^3 - m + 1}{m^2 - 1}, y = \frac{-m}{m^2 - 1}$$

$$F_2 \rightarrow mF_2 - F_1 \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & m^2 \\ 0 & m^2 - 1 & -m & -m \end{array} \right)$$

Si  $m = \pm 1$ , el sistema es incompatible.

$$48. \left( \begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \end{array} \right)$$

$$F_2 \rightarrow kF_2 - F_1 \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k^2 - 1 & k - 1 & k - 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \end{array} \right)$$

$$F_3 \rightarrow kF_3 - F_1 \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k^2 - 1 & k - 1 & k - 1 \\ 0 & k - 1 & k^2 - 1 & k - 1 \end{array} \right)$$

$$F_3 \rightarrow (k+1)F_3 - F_2 \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k^2 - 1 & k - 1 & k - 1 \\ 0 & 0 & k^3 + k^2 - 2k & k^2 - k \end{array} \right)$$

$$\text{Si } k^3 + k^2 - 2k = 0 \rightarrow k = 0, 1, -2$$

Si  $k \neq 0, 1, -2 \rightarrow$  Compatible determinado  $\rightarrow$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k^2 - 1 & k - 1 & k - 1 \\ 0 & 0 & k^3 + k^2 - 2k & k^2 - k \end{array} \right)$$

$$(k^3 + k^2 - 2k)z = k^2 - k \rightarrow z = \frac{k^2 - k}{k^3 + k^2 - 2k} = \frac{1}{k+2}$$

$$(k^2 - 1)y + (k - 1)\frac{1}{k+2} = k - 1 \rightarrow y = \frac{1}{k+2}$$

$$kx + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+2} = 1 \rightarrow x = \frac{1}{k+2}$$

$$\text{Solución: } x = \frac{1}{k+2}, y = \frac{1}{k+2}, z = \frac{1}{k+2}$$

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} y + z = 1 \\ x + z = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

determinado  $\rightarrow$  Solución:  $x = 1/2, y = 1/2, z = 1/2$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \text{Compatible indeterminado}$$

$\rightarrow$  Solución:  $x = 1 - \lambda - \mu, y = \lambda, z = \mu$

$$\text{Si } k = -2 \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right) \rightarrow \text{Incompatible}$$

$$49. a) \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & b - a \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$F_3 \rightarrow F_3 - F_1 \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & b - a \\ 0 & 0 & 0 & -a \end{array} \right)$$

Por lo tanto, el sistema es incompatible si  $a \neq 0$  o bien  $b \neq a$ .

En caso contrario, es decir,  $a = b = 0$ , es compatible indeterminado y su solución es:

$$x = -\lambda - \mu, y = \lambda, z = \mu$$

$$b) \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & -1 & b \\ 1 & 1 & -1 & c \end{array} \right)$$

$$F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & 0 & 0 & b - a \\ 1 & 1 & -1 & c \end{array} \right)$$

$$F_3 \rightarrow F_3 - F_1 \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & 0 & 0 & b - a \\ 0 & 0 & 0 & c - a \end{array} \right)$$

El sistema es incompatible si  $a \neq b$  o bien  $a \neq c$ .

En caso contrario, es decir,  $a = b = c$ , es compatible indeterminado y su solución es:

$$x = a - \lambda + \mu, y = \lambda, z = \mu$$

50. Sean  $x, y, z$  los tres números ordenados en forma decreciente:

$$\begin{cases} \frac{x+y+z}{3} = 27; \\ x = y + z + 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 81; \\ x - y - z = 9 \end{cases}$$

2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 81 \\ 1 & -1 & -1 & | & 9 \end{pmatrix}$$

Solución:  $x = 45$ ,  $y = 36 - \lambda$ ,  $z = \lambda$

Las soluciones válidas son, por lo tanto:

$$x = 45, y = 36, z = 0$$

$$x = 45, y = 35, z = 1$$

...

$$x = 45, y = 19, z = 17$$

$$x = 45, y = 18, z = 18$$

Hay 19 soluciones válidas.

51.x: edad actual de la madre

y: edad actual del hermano mayor

z: edad actual del hermano pequeño

t: años que faltan para que el hermano mayor cumpla x años.

$$\begin{cases} x - 4 = 5(y - 14 + z - 14) \\ x + 10 = y + 10 + z + 10 \\ z + t = 42 \\ x = y + t \end{cases}; \quad \begin{cases} x - 5y - 5z = -136 \\ x - y - z = 10 \\ z + t = 42 \\ x - y - t = 0 \end{cases};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & -5 & 0 & | & -136 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & | & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 42 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:  $x = 44$ ,  $y = 18$ ,  $z = 16$ ,  $t = 26$

La madre tiene 44 años, el hijo mayor tiene 18 años y el pequeño, 16 años.

52.x: rentabilidad del terreno urbano

y: rentabilidad del terreno industrial

z: rentabilidad del terreno rústico

La primera constructora invierte  $500.000 + 250.000 + 250.000 = 1.000.000$  €.

La segunda,  $125.000 + 250.000 + 125.000 = 500.000$  €.

La tercera,  $100.000 + 100.000 + 200.000 = 400.000$  €.

$$\begin{cases} 500.000x + 250.000y + 250.000z = 0,1375 \cdot 1.000.000 \\ 125.000x + 250.000y + 125.000z = 0,1125 \cdot 500.000 \\ 100.000x + 100.000y + 200.000z = 0,10 \cdot 400.000 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 500.000x + 250.000y + 250.000z = 137.500 \\ 125.000x + 250.000y + 125.000z = 56.250 \\ 100.000x + 100.000y + 200.000z = 40.000 \end{cases};$$

$$\begin{pmatrix} 500.000 & 250.000 & 250.000 & | & 137.500 \\ 125.000 & 250.000 & 125.000 & | & 56.250 \\ 100.000 & 100.000 & 200.000 & | & 40.000 \end{pmatrix}$$

$$x = 1/5 = 0,20; y = 1/10 = 0,10; z = 1/20 = 0,05$$

Los terrenos urbanos tienen una rentabilidad del 20%, los terrenos industriales del 10% y los terrenos rústicos del 5%.

### Autoevaluación

1. a)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -5 & -3 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) Actividad personal.

2.  $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & | & 1 \\ 1 & 3 & 1 & | & 2 \\ 1 & -1 & -1 & | & 4 \end{pmatrix}$

$$F_2 \rightarrow 2F_2 - F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 3 & | & 3 \\ 1 & -1 & -1 & | & 4 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow 2F_3 - F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 3 & | & 3 \\ 0 & -6 & -1 & | & 7 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow F_3 + 3F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 3 & | & 3 \\ 0 & 0 & 8 & | & 16 \end{pmatrix}$$

$$8z = 16 \rightarrow z = 2$$

$$2y + 6 = 3 \rightarrow y = -3/2$$

$$2x - 6 - 2 = 1 \rightarrow x = 9/2$$

Solución:  $x = 9/2$ ,  $y = -3/2$ ,  $z = 2$

$$3. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & | & 12 \\ -1 & 1 & -2 & | & 6 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow 2F_2 + F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & | & 12 \\ 0 & 1 & 0 & | & 24 \end{pmatrix}$$

$$y = 24$$

$$2x - 24 + 4z = 12 \rightarrow x = 18 - 2z$$

$$\text{Solución: } x = 18 - 2\lambda, y = 24, z = \lambda$$

Dando valores a  $\lambda$  obtenemos soluciones particulares, por ejemplo:

$$\lambda = 0 \rightarrow x = 18, y = 24, z = 0$$

$$\lambda = 1 \rightarrow x = 16, y = 24, z = 1$$

$$4. \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & | & 0 \\ 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 2 & 1 & -2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & | & 0 \\ 0 & -3 & 2 & | & 0 \\ 2 & 1 & -2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & | & 0 \\ 0 & -3 & 2 & | & 0 \\ 0 & -3 & 2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow F_3 - F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & | & 0 \\ 0 & -3 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$-3y + 2z = 0 \rightarrow z = \frac{3y}{2}$$

$$x + 2y - 3y = 0 \rightarrow x = y$$

$$\text{Solución: } x = \lambda, y = \lambda, z = \frac{3\lambda}{2}$$

Si  $z = 3/2 \rightarrow \lambda = 1$  y, por lo tanto, la solución correspondiente es:

$$x = 1, y = 1, z = 3/2$$

$$5. a) \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 & | & 0 \\ -1 & 1 & -2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow 2F_2 - F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & -7 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$-7z = 0 \rightarrow z = 0$$

$$-2x + 2y = 0 \rightarrow x = y$$

$$\text{Solución: } x = \lambda, y = \lambda, z = 0$$

b) Actividad personal, por ejemplo, con la ecuación  $x + y + z = 0$ , el sistema tiene como única solución,  $x = 0, y = 0, z = 0$ .

$$6. a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 1 & k & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow F_3 - F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & k-1 & -2 & | & -1 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow F_3 - (k-1)F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2k & | & -1 \end{pmatrix}$$

Si  $k = 0$ , el sistema es incompatible.

Si  $k \neq 0$ , el sistema es compatible determinado.

$$b) \text{ Si } k \neq 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2k & | & -1 \end{pmatrix}$$

$$-2kz = -1 \rightarrow z = \frac{1}{2k}$$

$$y + \frac{1}{k} = 0 \rightarrow y = -\frac{1}{k}$$

$$x - \frac{1}{k} + \frac{1}{2k} = 1 \rightarrow x = \frac{2k+1}{2k}$$

$$\text{Solución: } x = \frac{2k+1}{2k}, y = -\frac{1}{k}, z = \frac{1}{2k}$$

$$c) \text{ Si } k = 1/2 \rightarrow x = 2, y = -2, z = 1$$

$$7. a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & | & 0 \\ -1 & -m & 1 & | & 2 \\ m & 1 & 0 & | & 2 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow F_2 + F_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & | & 0 \\ 0 & -m+1 & m+1 & | & 2 \\ m & 1 & 0 & | & 2 \end{pmatrix}$$

2

$$F_3 \rightarrow F_3 - mF_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 0 \\ 0 & -m+1 & m+1 & 2 \\ 0 & 1-m & -m^2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow F_3 - F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 0 \\ 0 & -m+1 & m+1 & 2 \\ 0 & 0 & -m^2-m-1 & 0 \end{pmatrix}$$

$-m^2 - m - 1 \neq 0$  para todo  $m$

Si  $m = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$  El sistema es

incompatible.

Si  $m \neq 1$ , el sistema es compatible determinado.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 0 \\ 0 & -m+1 & m+1 & 2 \\ 0 & 0 & -m^2-m-1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(-m^2 - m - 1)z = 0 \rightarrow z = 0$$

$$(-m+1)y + 0 = 2 \rightarrow y = \frac{2}{-m+1}$$

$$x + \frac{2}{-m+1} + 0 = 0 \rightarrow x = -\frac{2}{-m+1}$$

$$\text{Solución: } x = -\frac{2}{-m+1}, y = \frac{2}{-m+1}, z = 0$$

b) Si  $m = 2 \rightarrow x = 2, y = -2, z = 0$

8. Sean  $x, y, z$  las medidas de los ángulos ordenados en forma decreciente:

$$\begin{cases} x + y + z = 180 \\ x = 2y \\ 4z = x + y \end{cases};$$

$$\begin{cases} x + y + z = 180 \\ x - 2y = 0 \\ x + y - 4z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 180 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x = 96, y = 48, z = 36$$

El ángulo mayor mide  $96^\circ$ , el mediano mide  $48^\circ$  y el menor mide  $36^\circ$ .