SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Págs. 51 a 69

Página 51

1. a) $24 - 24 = 0$

b) $6 - 2 = 4$

c) $(a + b)(a - b) + b^2 = a^2 - b^2 + b^2 = a^2$

2. a) $(2x - 4) - 2(2x + 5) = 0;$

$-2x - 14 = 0;$

$x = -7$

b) $(x + 3)(x - 2) - 6 = 0;$

$x^2 + x - 12 = 0;$

$x_1 = 3, x_2 = -4$

Página 52

3. a) $-6 + 72 - 4 - 12 = 50$

b) $4 - 4 + 3 + 16 = 19$

c) $4 - 1 + 1 - 24 = -20$

d) $-12 + 1 + 9 + 2 = 0$

Página 53

4. a) $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 7 = 7$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-1) = 1$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 4 = 4$

b) $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (-4) = -4$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 12 = -12$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot (-4) = -4$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot (-6) = -6$

$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot 2 = -2$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot 1 = 1$

$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot (-3) = 3$

$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot 1 = 1$

c) $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 2 = 2$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 5 = -5$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot 2 = 2$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-2) = 2$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot (-1) = -1$

$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot (-2) = 2$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot 6 = 6$

$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot 15 = -15$

$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot 14 = 14$

5. a) $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (-6) = -6$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-2) = 2$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 6 = -6$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 5 = 5$

b) $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (-3) = -3$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 1 = -1$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot (-8) = -8$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 0 = 0$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 0 = 0$

$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot (-2) = 2$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot 1 = 1$

$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot (-1) = 1$

$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot 4 = 4$

c) $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot a^2 = a^2$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot a = -a$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot (a^2 - 1) = a^2 - 1$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (2a + 1) = -2a - 1$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot (a^2 + a) = a^2 + a$

$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot a = -a$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot (-a) = -a$

$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot (-1) = 1$

$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot (a^2 - 2) = a^2 - 2$

Página 54

6. Queda a elección de los alumnos y alumnas la fila o columna por la que desarrollar el determinante. Los resultados son los siguientes:

a) 160

b) -76

c) $-8a^3 - 2a^2 - 2a + 2$

Página 55

7. a) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$ porque tiene una columna de ceros.

b) $\begin{vmatrix} 6 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \\ 6 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$ porque dos de las filas son iguales.

c) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$

d) $\begin{vmatrix} -1 & -5 & 3 \\ -2 & 2 & 6 \\ -3 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -5 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 9 \end{vmatrix} =$

$= 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -5 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

Página 56

Piensa y contesta

- Sean a_j las columnas de A, $1 \leq j \leq n$.

  Podemos escribir las matrices A y kA de la siguiente forma:

  $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$

  $kA = (ka_1, ka_2, ..., ka_n)$

  Entonces:

  $\det(kA) = \det(ka_1, ka_2, ..., ka_n) = k \cdot \det(a_1, ka_2, ..., ka_n) = k^2 \cdot \det(a_1, a_2, ka_3, ..., ka_n) = ... = k^{n-1} \cdot \det(a_1, a_2, ..., a_{n-1}, ka_n) = k^n \cdot \det(a_1, a_2, ..., a_n) = k^n \cdot \det(A)$

8. $\begin{vmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -8 & -4 & 6 \\ 12 & -6 & 9 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 9 \end{vmatrix} =$

$= 4 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & -2 & 6 \\ 3 & -3 & 9 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} =$

$= 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} =$

$= 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (-4) =$

$= -576$

9. $(-2) \cdot 35 = -70$

10. a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & -2 \\ 5 & -7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1+3 \\ 0 & 6 & 2-2 \\ 5 & -7 & 3+2 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 5 & -7 & 5 \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+5 & 1-1 & -2+4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0$

Página 57

Piensa y contesta

- $\det(A^2) = \det(A \cdot A) = \det(A) \cdot \det(A) = [\det(A)]^2$

  Por lo tanto, si $A^2 = A$:

  $[\det(A)]^2 = \det(A^2)$;

  $[\det(A)]^2 = \det(A)$;

  $[\det(A)]^2 - \det(A) = 0$;

  $\det(A)\,[\det(A) - 1] = 0$

  Por lo tanto, $\det(A) = 1$ o bien $\det(A) = 0$.

11. $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ 5-6 & 5-2 & -1-3 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ -6 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & -1 \end{vmatrix}$

12. $AB = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 3 \\ 8 & -14 & -2 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

$\det(A) = -2$

$\det(B) = -23$

$\det(AB) = 46$

En efecto, la propiedad se cumple.

Página 59

13. a) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 11 \rightarrow$ Orden 3

b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \rightarrow$ Orden 2

c) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -4 \rightarrow$ Orden 3

14. a) det (A) = 0 → rango (A) ≤ 4

Todos los menores de orden 3 son también nulos → rango (A) ≤ 2

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 24 \rightarrow$ rango (A) = 2

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & -6 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 48 \rightarrow$ rango (A) = 4

Página 60

Piensa y contesta

- $\det\left[A \cdot \left[\frac{1}{\det(A)} \cdot \mathrm{Adj}(A)\right]^t\right] = \det(I);$

$\det(A) \cdot \det\left[\left[\frac{1}{\det(A)} \cdot \mathrm{Adj}(A)\right]^t\right] = 1;$

$\det\left[\left[\frac{1}{\det(A)} \cdot \mathrm{Adj}(A)\right]^t\right] = \frac{1}{\det(A)};$

$\left[\frac{1}{\det(A)}\right]^n \cdot \det\left[[\mathrm{Adj}(A)]^t\right] = \frac{1}{\det(A)};$

$\det\left[[\mathrm{Adj}(A)]^t\right] = \frac{[\det(A)]^n}{\det(A)};$

$\det[\mathrm{Adj}(A)] = [\det(A)]^{n-1}$

15. a) $\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\mathrm{Adj}(B) = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 1 \\ 1 & -4 & -7 \\ -3 & -1 & -5 \end{pmatrix}$

c) $\mathrm{Adj}(C) = \begin{pmatrix} -7 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

16. a) $\mathrm{Adj}(D) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3\lambda \\ -\lambda & \lambda & -\lambda^2+\lambda \\ -\lambda & \lambda & -\lambda^2-2\lambda \end{pmatrix}$

Página 61

17. a) $A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 & 1 \\ 2/5 & -1/5 & 1 \\ 2/5 & -1/5 & 0 \end{pmatrix}$

b) det (A) = 0 → No tiene inversa.

c) $A^{-1} = -\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 & -4/5 \\ 2/5 & -1/5 & -1/5 \\ -2/5 & 6/5 & 1/5 \end{pmatrix}$

d) $A^{-1} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ -10 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/2 & -1/4 \\ -5/4 & 1/2 & -1/4 \\ 1/8 & 1/4 & 1/8 \end{pmatrix}$

Página 62

18. a) det (A) = 2 − 2λ = 0 → λ = 1 → La inversa no existe cuando λ = 1.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{\lambda+1}{2-2\lambda} & \frac{1}{\lambda-1} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\lambda^2+1}{2-2\lambda} & \frac{\lambda}{\lambda-1} & -\frac{\lambda+1}{2} \end{pmatrix}$$

b) det (A) = $3\lambda^2 - 4\lambda = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 4/3 \rightarrow$ La inversa no existe cuando $\lambda = 0,\ 4/3$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{4-3\lambda} & \dfrac{3\lambda-1}{\lambda(3\lambda-4)} & \dfrac{\lambda-1}{\lambda(3\lambda-4)} \\ \dfrac{-1}{4-3\lambda} & \dfrac{-3}{\lambda(3\lambda-4)} & \dfrac{2\lambda-3}{\lambda(3\lambda-4)} \\ \dfrac{1-\lambda}{4-3\lambda} & \dfrac{-1}{\lambda(3\lambda-4)} & \dfrac{-(\lambda-1)^2}{\lambda(3\lambda-4)} \end{pmatrix}$$

c) det (A) = $\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -4 \rightarrow$ La inversa no existe cuando $\lambda = 2,\ -4$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{-1}{\lambda-2} & \dfrac{1}{\lambda-2} & \dfrac{1}{\lambda-2} \\ -\dfrac{\lambda+1}{\lambda^2+2\lambda-8} & \dfrac{3}{\lambda^2+2\lambda-8} & \dfrac{2\lambda-1}{\lambda^2+2\lambda-8} \\ \dfrac{\lambda^2+2\lambda-2}{\lambda^2+2\lambda-8} & \dfrac{-2(\lambda+1)}{\lambda^2+2\lambda-8} & -\dfrac{\lambda^2+2}{\lambda^2+2\lambda-8} \end{pmatrix}$$

d) det (A) = $\lambda^3 - \lambda^2 + 2 = 0 \rightarrow \lambda = -1 \rightarrow$ La inversa no existe cuando $\lambda = -1$.

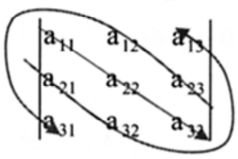
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{2\lambda-1}{\lambda^3-\lambda^2+2} & \dfrac{\lambda^2+1}{\lambda^3-\lambda^2+2} & \dfrac{\lambda+2}{\lambda^3-\lambda^2+2} \\ \dfrac{\lambda^2-\lambda+1}{\lambda^3-\lambda^2+2} & \dfrac{\lambda-1}{\lambda^3-\lambda^2+2} & \dfrac{\lambda}{\lambda^3-\lambda^2+2} \\ -\dfrac{\lambda(\lambda-2)}{\lambda^3-\lambda^2+2} & \dfrac{2}{\lambda^3-\lambda^2+2} & \dfrac{2-\lambda^2}{\lambda^3-\lambda^2+2} \end{pmatrix}$$

Página 66

1. Si A es de orden 1, es decir, A = $(a_{11}) \rightarrow$ det (A) = a_{11}

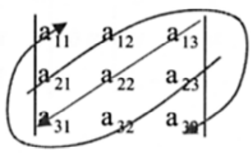
Si A es de orden 2 $\rightarrow$ det (A) = $a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$

2. La regla de Sarrus afirma que en el cálculo de los determinantes de matrices de orden 3, los siguientes términos se toman con signo positivo:



Es decir, $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$, $a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13}$ y $a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}$.

Mientras que los siguientes se toman con signo negativo:



Es decir, $a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$, $a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11}$ y $a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33}$.

Actividad personal.

3. 1. Si un determinante tiene una línea, fila o columna, de ceros, es nulo.

2. Si tiene dos líneas paralelas iguales, es nulo.

3. Si tiene dos líneas paralelas proporcionales, es nulo.

4. Si se intercambian dos líneas paralelas, cambia de signo.

5. Si se multiplica por un número real una línea del determinante, éste queda multiplicado por el mismo número.

6. Si los elementos de una línea de un determinante se separan en dos sumandos, el valor del determinante es la suma de dos determinantes, los que tienen en esa línea el primer sumando y el segundo sumando, respectivamente, permaneciendo igual el resto de líneas.

7. Si una de las líneas del determinante es combinación lineal de otras líneas paralelas, es nulo.

8. Si se suma a una línea de un determinante una combinación lineal de líneas paralelas a ella, el valor no cambia.

9. El determinante del producto de dos matrices cuadradas es el producto de sus determinantes.

Actividad personal.

4. *Menor complementario* de $a_{ij} \rightarrow$ es el determinante que se obtiene al suprimir de A la fila *i* y la columna *j*.

Adjunto de *aij* $\rightarrow$ es el producto entre $(-1)^{i+j}$ y el menor complementario de a_{ij}.

5. Cuando la matriz es de orden mayor que 3, el determinante se calcula desarrollando por una de las filas o columnas, es decir, sumando los productos de los elementos de esa fila o columna por sus adjuntos.

6. *Menor de orden* k $\rightarrow$ determinante de la matriz cuadrada que se forma con *k* filas y *k* columnas de una matriz cualquiera.

Menor principal $\rightarrow$ menor no nulo de orden máximo.

7. El rango de una matriz es el orden de sus menores principales.

8. La adjunta de una matriz cuadrada A es la matriz que se obtiene al sustituir cada elemento de A por su adjunto.

La propiedad fundamental es la siguiente:

$$A\cdot\left[\frac{1}{\det(A)}\cdot \mathrm{Adj}(A)\right]^t = I$$

siendo A una matriz con determinante no nulo.

9. $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot[\mathrm{Adj}(A)]^t$

10. El determinante de la matriz debe ser distinto de cero.

11. a) 7
b) 76
c) 30
d) –1
e) 22
f) 0
g) –20
h) –10
i) –10

12. a) –25
b) –11
c) –19
d) 18
e) –53
f) –32
g) 14
h) –7
i) –7

13. a) 45
b) –13
c) 3
d) 3

14. $A^t=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

$A-A^t=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$

Por lo tanto, $\det(A-A^t)=4$

15. a) $\det(-3A^t)=(-3)^2\cdot\det(A^t)=(-3)^2\cdot\det(A)=$
$=(-3)^2\cdot 4=36$

b) $\begin{vmatrix}2b & 2a\\ -3d & -3c\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}b & a\\ -3d & -3c\end{vmatrix}=2\cdot(-3)\cdot\begin{vmatrix}b & a\\ d & c\end{vmatrix}=$

$=2\cdot(-3)\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=2\cdot(-3)\cdot(-1)\cdot 4=24$

16. a) $\det(A)=-a^2$

Por lo tanto:

$\det(2A)=2^2\det(A)=-4a^2$

$\det(A^t)=\det(A)=-a^2$

$\det(A^{-1})=\frac{1}{\det(A)}=-\frac{1}{a^2}$

b) Para $a=0$.

17. a) $\begin{vmatrix}4 & 2 & -8\\ -1 & 5 & 2\\ 3 & -1 & -6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & 2 & -2\cdot 4\\ -1 & 5 & -2\cdot(-1)\\ 3 & -1 & -2\cdot 3\end{vmatrix}=0$

b) $\begin{vmatrix}1 & 5 & -2\\ 0 & 3 & 0\\ -2 & 7 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 5 & -2\cdot(1)\\ 0 & 3 & -2\cdot 0\\ -2 & 7 & -2\cdot(-2)\end{vmatrix}=0$

18. a) $\begin{vmatrix}-3x & -y & -z\\ 3t & u & v\\ 3a & b & c\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}-x & -y & -z\\ t & u & v\\ a & b & c\end{vmatrix}=$

$=-3\cdot\begin{vmatrix}x & y & z\\ t & u & v\\ a & b & c\end{vmatrix}=-3\cdot(-6)=18$

b) $\begin{vmatrix}-2y & x & z\\ -2u & t & v\\ -2b & a & c\end{vmatrix}=-2\cdot\begin{vmatrix}y & x & z\\ u & t & v\\ b & a & c\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}x & y & z\\ t & u & v\\ a & b & c\end{vmatrix}=$

$=2\cdot(-6)=-12$

c) $\begin{vmatrix}x & y & z\\ t & u & v\\ 2x-a & 2y-b & 2z-c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x & y & z\\ t & u & v\\ 2x & 2y & 2z\end{vmatrix}-$

$-\begin{vmatrix}x & y & z\\ t & u & v\\ a & b & c\end{vmatrix}=0-(-6)=6$

d) $\begin{vmatrix}2t & 2u & 2v\\ x & y & z\\ -3a & -3b & -3c\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}x & y & z\\ 2t & 2u & 2v\\ -3a & -3b & -3c\end{vmatrix}=$

$=-2\cdot\begin{vmatrix}x & y & z\\ t & u & v\\ -3a & -3b & -3c\end{vmatrix}=6\cdot\begin{vmatrix}x & y & z\\ t & u & v\\ a & b & c\end{vmatrix}=6\cdot(-6)=$

$=-36$

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

19. Seguiremos la numeración de las propiedades que aparece en el libro de texto:

Propiedad 6 $\rightarrow$

$$\begin{vmatrix} k & x & 1+ax \\ 2k & y & 2+ay \\ 3k & z & 3+az \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & x & 1 \\ 2k & y & 2 \\ 3k & z & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k & x & ax \\ 2k & y & ay \\ 3k & z & az \end{vmatrix} =$$

Propiedad 5 $\rightarrow$

$$= k \cdot \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 2 & y & 2 \\ 3 & z & 3 \end{vmatrix} + k \cdot a \cdot \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 2 & y & y \\ 3 & z & z \end{vmatrix} =$$

Propiedad 2 $\rightarrow$

$$= k \cdot 0 + k \cdot a \cdot 0 = 0$$

Página 67

20. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ b+c & c+d & d+a & a+b \\ d & a & b & c \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a+b+c+d & a+b+c+d & a+b+c+d & a+b+c+d \\ d & a & b & c \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ d & a & b & c \end{vmatrix} = (a+b+c+d) \cdot 0 = 0$$

21. $$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ a & b & c \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ p & q & r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix}$$

$$= 0 + \begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ p & q & r \\ -x & -y & -z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ p & q & r \\ a & b & c \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} + 0$$

$$= -3 \cdot 7 = -21$$

22. a) $$\det(B) = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3d & 2e & f \\ 3g & 2h & i \\ 9a & 6b & 3c \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 3d & 2e & f \\ 3g & 2h & i \\ 3a & 2b & c \end{vmatrix} =$$

$$= 36 \cdot \begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix} = 36 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 36 \cdot 5 = 180$$

b) $$\det(C) = \begin{vmatrix} d & e & f+e \\ a & b & c+b \\ g & h & i+h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f & e & f+e \\ c & b & c+b \\ i & h & i+h \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & e & e \\ a & b & b \\ g & h & h \end{vmatrix} + 0 = \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} + 0 =$$

$$= -\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -5$$

23. $$\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 3x+2 \\ x & 2x+3 & 3x+4 \\ x & 2x+5 & 3x+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 2x & 3x+2 \\ x & 2x & 3x+4 \\ x & 2x & 3x+6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 3x+2 \\ x & 3 & 3x+4 \\ x & 5 & 3x+6 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + \begin{vmatrix} x & 1 & 3x \\ x & 3 & 3x \\ x & 5 & 3x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x & 3 & 4 \\ x & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} x & 1 & 2-1 \\ x & 3 & 4-3 \\ x & 5 & 6-5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x & 3 & 1 \\ x & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

24. a) $$\begin{vmatrix} a & c & b \\ 3 & 3 & 3 \\ x & z & y \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 = 15$$

b) $$\begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 \\ a+2 & b+2 & c+2 \\ x/3 & y/3 & z/3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 \\ a & b & c \\ x/3 & y/3 & z/3 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 2 & 2 & 2 \\ x/3 & y/3 & z/3 \end{vmatrix} = \left(\frac{10}{3}\right) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + 0 = \frac{10}{3} \cdot 5 =$$

$$= \frac{50}{3}$$

25. *Propiedad 6* $\rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 3a-b & 6a+2b \\ 3c-d & 6c+2d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3a & 6a+2b \\ 3c & 6c+2d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -b & 6a+2b \\ -d & 6c+2d \end{vmatrix} =$$

Propiedad 6 →

$$= \begin{vmatrix} 3a & 6a \\ 3c & 6c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3a & 2b \\ 3c & 2d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -b & 6a \\ -d & 6c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -b & 2b \\ -d & 2d \end{vmatrix} =$$

Propiedad 3 →

$$= 0 + \begin{vmatrix} 3a & 2b \\ 3c & 2d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -b & 6a \\ -d & 6c \end{vmatrix} + 0 =$$

Propiedad 5 →

$$= 6 \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - 6 \cdot \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} =$$

Propiedad 4 →

$$= 6 \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 6 \cdot 5 + 6 \cdot 5 = 60$$

26. $x^2 - x = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1$

27. $-8x^3 - 8x^2 = 0 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 0$

28. $x^3 + x^2 - x = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\ x_3 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

29. El determinante vale: $1 - x^3$

Por lo tanto, se anula cuando $x = 1$

30. a) $-x^4 + 4x - 3 = 0 \rightarrow x = 1$

b) $x^2 (x^2 - 1) = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1$

31. *Ecuación de la izquierda* → $-3 - 2y + x = 0$

Ecuación de la derecha → $x + y = 0$

Solución: $x = 1,\ y = -1$

32. $\det(A) = 1 - 2x + x^2$

$\det(2A) = 2^3 (1 - 2x + x^2) = 8 - 16x + 8x^2$

$8 - 16x + 8x^2 = 8 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2$

33. $\det(B) = x^3 - x^2 + x - 1$

$\det(2B) = 2^3 (x^3 - x^2 + x - 1) = 8x^3 - 8x^2 + 8x - 8$

$8x^3 - 8x^2 + 8x - 8 = 160 \rightarrow x = 3$

34. $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & ab+bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix}$

$2A = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 0 & 2c \end{pmatrix}$

Por lo tanto:

$$A^2 - 2A + I = \begin{pmatrix} a^2-2a+1 & ab+bc-2b \\ 0 & c^2-2c+1 \end{pmatrix}$$

Se debe cumplir:

$$\begin{cases} a^2 - 2a + 1 = 0 \\ ab + bc - 2b = 0\,; \\ c^2 - 2c + 1 = 0 \end{cases}$$

1ª ecuación → $a = 1$

3ª ecuación → $c = 1$

2ª ecuación → $b + b - 2b = 0 \rightarrow 0 = 0 \rightarrow$ *b* puede tomar cualquier valor.

Por lo tanto:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

35. El determinante vale: $-2x^2 + 4x + 6$

Por lo tanto, se anula cuando $x = -1, 3$.

Por otra parte, como $-2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 + 6 = 6 > 0$, se obtiene que $-2x^2 + 4x + 6 > 0 \rightarrow x \in (-1, 3)$

36. a) $\det(A) = 0 \rightarrow$ Rango $(A) < 4$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \rightarrow \text{Rango }(A) = 3$$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \rightarrow$ Rango $(B) \geq 2$

Orlamos este menor:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Por lo tanto, Rango $(B) = 2$.

Página 68

37. $\det(A) = m^2 - 4m + 4$

$\det(A) = 0 \rightarrow m = 2$

Si $m \neq 2 \rightarrow$ Rango $(A) = 3$

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Si $m = 2 \rightarrow$ Rango (A) < 3

En este caso, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$ Las tres filas son proporcionales $\rightarrow$ Rango (A) = 1.

38. $\det(A) = \lambda(4\lambda - 2)$

$\det(A) = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1/2$

Si $\lambda \neq 0, 1/2 \rightarrow$ Rango (A) = 3

Si $\lambda = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ Rango (A) = 2 ya que, por ejemplo, $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$.

Si $\lambda = 1/2 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ Rango (A) = 2 ya que, por ejemplo, $\begin{vmatrix} 1/2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3/2$.

39. $A + \lambda B = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1+\lambda \\ \lambda & 2+\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2\lambda \end{pmatrix}$

$\det(A + \lambda B) = -2\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda - 2$

$\det(A + \lambda B) = 0 \rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$

Si $\lambda \neq 1, -1 \rightarrow$ Rango $(A + \lambda B) = 3$

Si $\lambda = -1 \rightarrow A + \lambda B = A - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$ Rango (A − B) = 2 ya que, por ejemplo, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2$.

Si $\lambda = 1 \rightarrow A + \lambda B = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ Rango (A + B) = 2 ya que, por ejemplo, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2$.

40. $\det(A) = -3m - 45$

$\det(A) = 0 \rightarrow m = -15$

Si $m \neq -15 \rightarrow$ Rango (A) = 3

Si $m = -15 \rightarrow$ Rango (A) = 2 ya que $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -3$.

41. $\det(A) = m^2 - 4m + 3$

$\det(A) = 0 \rightarrow m_1 = 1, m_2 = 3$

Si $m = 1, 3 \rightarrow$ Rango (A) < 3

Por otra parte, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1$ y este menor no depende del valor de *m*, por lo tanto, para todo *m*, Rango (A) > 1.

42. $\det(B) = \lambda^3 - 2\lambda$

$\det(B) = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = \sqrt{2}, \lambda_3 = -\sqrt{2}$

Si $\lambda \neq 0, \pm\sqrt{2} \rightarrow$ Rango (A) = 3

Si $\lambda = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ Rango (A) = 2 ya que $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$.

Si $\lambda = \sqrt{2} \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 & 2 \\ 2 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \rightarrow$ Rango (A) = 2 ya que $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ 2 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = -2$.

Si $\lambda = -\sqrt{2} \rightarrow \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 & 2 \\ 2 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \rightarrow$ Rango (A) = 2 ya que $\begin{vmatrix} -\sqrt{2} & 2 \\ 2 & -\sqrt{2} \end{vmatrix} = -2$.

43. $\det(A) = -5b + 4a$

$\det(A) = 0 \rightarrow a = \frac{5}{4}b$

El menor $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$ 0 = 10 no depende de los parámetros y vale 10, por lo tanto, para los valores de los parámetros que anulan el determinante, el rango de la matriz es 2.

La única solución posible es a = 5, b = 4.

44. $\det(A) = -3x - 1$

$\det(A) = 0 \rightarrow x = -1/3$

Si $x \neq -1/3 \rightarrow$ Rango (A) = 3

Si $x = -1/3 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1/3 \end{pmatrix} \rightarrow$ Rango (A) = 2

ya que $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$.

45. a) $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$

b) $A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 1/2 \\ 3/2 & -1 & 1/2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

46. a) $A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -5 & -8 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 1/4 \\ -1/8 & 0 & 3/8 \\ 5/8 & 1 & 1/8 \end{pmatrix}$

b) $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -13 \\ 5 & 1 & -10 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/3 & 1/3 & -13/3 \\ 5/3 & 1/3 & -10/3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

47. a) det (A) = $m^2 - 4m + 3$

det (A) = 0 $\rightarrow m_1 = 1, m_2 = 3$

Existe la inversa para todos los valores de *m* excepto 1 y 3.

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m^2-4m+3} & \frac{m^2+m+3}{m^2-4m+3} & \frac{-m}{m^2-4m+3} \\ \frac{m-4}{m^2-4m+3} & \frac{-15}{m^2-4m+3} & \frac{3}{m^2-4m+3} \\ \frac{1}{m^2-4m+3} & \frac{5m}{m^2-4m+3} & \frac{-m}{m^2-4m+3} \end{pmatrix}$

48. $AB = \begin{pmatrix} 2\lambda+1 & 3+2\lambda \\ 1-\lambda & 1 \end{pmatrix}$

det (AB) = $2\lambda^2 + 3\lambda - 2$

det (AB) = 0 $\rightarrow \lambda_1 = 1/2, \lambda_2 = -2$

AB tiene inversa si $\lambda \neq 1/2, -2$

49. a) det (A) = $10x - 8y + 2z$

det (B) = $-x - 4y + 3z$

b) $AB = \begin{pmatrix} 2x+y+2z & x^2+y^2+z^2 & x-y-z \\ 1 & x+y-z & 1 \\ 21 & 3x+5y+5z & -7 \end{pmatrix}$

det (AB) = $-10x^2 + 32y^2 + 6z^2 - 32xy + 28xz - 32yz$

Por lo tanto, si x = y = z = 1, det (AB) = −10 + 32 + 6 − 32 + 28 − 32 = −8

c) Resolvemos el sistema: $\begin{cases} 10x - 8y + 2z = 0 \\ -x - 4y + 3z = 0 \end{cases}$;

Solución: $x = \lambda/3$, $y = 2\lambda/3$, $z = \lambda$

El sistema es compatible indeterminado y, por lo tanto, existen infinitos valores de *x*, *y*, *z* relacionados entre sí para los que ni A ni B tienen inversa.

50. a) det $[M(\lambda)] = \lambda^2 - 2\lambda + 2 \neq 0$ para todo $\lambda \rightarrow$ $\rightarrow [M(\lambda)]^{-1}$ existe para cualquier λ.

b) $\begin{pmatrix} -\frac{2\lambda+1}{\lambda^2-2\lambda+2} & \frac{\lambda^2+3}{\lambda^2-2\lambda+2} & \frac{6-\lambda}{\lambda^2-2\lambda+2} \\ \frac{2\lambda+2}{\lambda^2-2\lambda+2} & -\frac{\lambda^2+4}{\lambda^2-2\lambda+2} & \frac{2\lambda-8}{\lambda^2-2\lambda+2} \\ \frac{\lambda}{\lambda^2-2\lambda+2} & \frac{-\lambda}{\lambda^2-2\lambda+2} & \frac{-2}{\lambda^2-2\lambda+2} \end{pmatrix}$

c) det (A) = 1 / 50

det (B) = 1 / 10

det (C) = 1 / 5

Por lo tanto:

$\det(A \cdot B^{-1} \cdot C^{-1}) = \det(A) \cdot \det(B^{-1}) \cdot \det(C^{-1}) =$

$= \det(A) \cdot \frac{1}{\det(B)} \cdot \frac{1}{\det(C)} = \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{1/10} \cdot \frac{1}{1/5} = 1$

51. det (A) = $\lambda^2 - 3\lambda - 4$

det (A) = 0 $\rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4$

La matriz es inversible para todos los valores de λ diferentes de −1 y 4.

Si $\lambda = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix}$

52. det (A) = $-3\lambda^2 + 10\lambda - 15 \neq 0$ para todo λ.

La inversa de A existe para todos los valores de λ.

Página 69

53. Por inducción:

$n = 1 \Rightarrow \det(A^1) = \det(A)$

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

$n \to n + 1 \Rightarrow \det(A^{n+1}) = \det(A^n \cdot A) = \det(A^n) \cdot \det(A) = [\det(A)]^n \cdot \det(A) = [\det(A)]^{n+1}$

54. Por la Regla de Sarrus:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \to \det(A) = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{32} a_{21} a_{13} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{23} a_{32} a_{11}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \to \det(A^t) = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{23} a_{12} a_{31} - a_{31} a_{22} a_{13} - a_{21} a_{12} a_{33} - a_{32} a_{23} a_{11}$$

En efecto, $\det(A) = \det(A^t)$.

55. Por inducción sobre el orden de la matriz:

$n = 1 \Rightarrow \det(A) = |a_{11}| = a_{11}$

$n \to n + 1 \Rightarrow$ Por hipótesis de inducción, el determinante de la matriz compuesta por las *n* primeras filas y columnas de una matriz triangular A de orden *n* + 1 es $a_{11} \cdot \ldots \, a_{nn}$, por lo tanto, desarrollando el determinante por la última fila:

$\det(A) = (a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}) \cdot a_{n+1,n+1} = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{n+1,n+1}$

56. $kA \to$ se multiplican todos los elementos de la matriz por *k*, el resultado es una matriz

$k\det(A) = \det\left(\sqrt[n]{k} \cdot A\right) \to$ el resultado es un número real.

57. $$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 9 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto: $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 9 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 49$

58. No, por ejemplo, $\det I_2 = 1$, $\det B = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{vmatrix} = 1$ y, por lo tanto, $\det I_2 \cdot \det B = 1$ pero las matrices no son inversas.

59. Por una parte:

$[\mathrm{Adj}(A)]^t = \det(A) \cdot A^{-1}$

Por otra parte:

$(A^t)^{-1} = \dfrac{1}{\det(A^t)} \cdot [\mathrm{Adj}(A^t)]^t;$

$[\mathrm{Adj}(A^t)]^t = \det(A^t) \cdot (A^t)^{-1};$

$\mathrm{Adj}(A^t) = [\det(A^t) \cdot (A^t)^{-1}]^t;$

$\mathrm{Adj}(A^t) = \det(A^t) \cdot [(A^t)^{-1}]^t;$

$\mathrm{Adj}(A^t) = \det(A) \cdot [(A^t)^t]^{-1};$

$\mathrm{Adj}(A^t) = \det(A) \cdot A^{-1}$

Por lo tanto, $[\mathrm{Adj}(A)]^t = \mathrm{Adj}(A^t) = \det(A) \cdot A^{-1}$.

Actividad personal.

60. a) $$\begin{vmatrix} a^2 & ab & ab \\ ab & a^2 & b^2 \\ ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix} = a^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & b & b \\ b & a^2 & b^2 \\ b & b^2 & a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{a^2}{b} \cdot \begin{vmatrix} b & b^2 & b^2 \\ b & a^2 & b^2 \\ b & b^2 & a^2 \end{vmatrix} = \frac{a^2}{b} \cdot \begin{vmatrix} b & b^2 & b^2 \\ 0 & a^2 - b^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 - b^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{a^2}{b} b\left(a^2 - b\right) = a^2 (a^2 - b^2)^2$$

b) $$A = \begin{pmatrix} a^2 & -a^2 & -a^2 \\ -a^2 & a^2 & a^2 \\ -a^2 & a^2 & a^2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, en este caso, Rang (A) = 1.

61. a) $\det(A) = x^4 - x^2$

$\det(A) = 0 \to x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1$

Si $x \neq 0,. 1, -1 \to$ Rango (A) = 4

Si $x = 0 \to A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$ Rango (A) = 3

ya que $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1.$

Si $x = 1 \to A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$ Rango (A) = 3

ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1.$

Si $x = -1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$ Rango

(A) = 3 ya que $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1.$

b) La matriz tiene inversa para todos los valores de x diferentes de los calculados en el apartado anterior, es decir, 0, 1 y –1.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2-1} & \frac{1}{x(x^2-1)} & \frac{x^3-x+1}{x^2(x^2-1)} & -\frac{1}{x^2(x^2-1)} \\ \frac{x}{x^2-1} & -\frac{1}{x^2-1} & -\frac{1}{x(x^2-1)} & \frac{1}{x(x^2-1)} \\ -\frac{1}{x^2-1} & \frac{x}{x^2-1} & \frac{1}{x^2-1} & -\frac{1}{x^2-1} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{x} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

Autoevaluación

1. Actividad personal, el resultado es 80.

2. $\begin{vmatrix} 5m & -5n & 5p \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \cdot \begin{vmatrix} m & n & p \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} m & n & p \\ 5 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$

$= -1$

3. $\begin{vmatrix} z & 3z & z+2 \\ x & 3x+1 & x+2 \\ y & 3y-1 & y+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z & 3z & z+2 \\ x & 3x & x+2 \\ y & 3y & y+2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z & 0 & z+2 \\ x & 1 & x+2 \\ y & -1 & y+2 \end{vmatrix} =$

$= 0 + \begin{vmatrix} z & 0 & z \\ x & 1 & x \\ y & -1 & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z & 0 & 2 \\ x & 1 & 2 \\ y & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} z & 0 & 2 \\ x & 1 & 2 \\ y & -1 & 2 \end{vmatrix} =$

$= -\begin{vmatrix} z & 0 & 2 \\ x & -1 & 2 \\ y & 1 & 2 \end{vmatrix} = -7$

4. $2x^3 - x^2 + x + 1 = 0 \rightarrow x = -1/2$

5. $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -6 \rightarrow$ Rango (A) ≥ 2

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ \lambda & 3 & \lambda \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -18 - 6x$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ \lambda & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3x + 9$

$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & \lambda & -1 \\ 3 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 - 3x$

Los tres determinantes se anulan cuando x = -3, por lo tanto, si x = -3, Rango (A) = 2, en caso, contrario, Rango (A) = 2.

6. $A^{-1} = \frac{1}{28} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ 8 & 7 & 11 \\ 0 & -7 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/7 & 1/4 & -5/28 \\ 2/7 & 1/4 & 11/28 \\ 0 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$

7. det (A) = $6 - \lambda$

El determinante se anula, y por lo tanto, no existe la inversa cuando $\lambda = 6$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda-2}{6-\lambda} & \frac{-4}{6-\lambda} & \frac{2\lambda}{6-\lambda} \\ \frac{2}{6-\lambda} & \frac{2}{6-\lambda} & \frac{-\lambda}{6-\lambda} \\ \frac{-1}{6-\lambda} & \frac{-1}{6-\lambda} & \frac{3}{6-\lambda} \end{pmatrix}$$

8. a) det (A) = $-9\lambda^2 + 3\lambda^3 = 0 \rightarrow \lambda = 0, 3$

La matriz no tiene inversa si $\lambda = 0, 3$.

b) Si $\lambda = 0$, rango = 3.

Si $\lambda = 3$, rango = 3.