

Página 71

1. a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot y = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot y + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot z = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot y + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot z = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot y + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot z = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Página 74

2. a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$

$A' = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rango}(A') = 2$

El sistema es compatible indeterminado y su solución depende de $3 - 2 = 1$ parámetro.

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$

$A' = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 1 & 8 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rango}(A') = 2$

Compatible indeterminado

$4 - 2 = 2$ parámetros

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rango}(A) = 3$

$A' = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rango}(A') = 3$

Compatible determinado

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$

$A' = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rango}(A') = 3$

Incompatible

Página 76

3. Los cuatro sistemas tienen el mismo número de ecuaciones que de incógnitas.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \det(A) = 41 \neq 0 \rightarrow \text{El}$

sistema es de Cramer

$x = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 1 & -1 \\ 15 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{41} = \frac{18}{41}$

$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 12 & -1 \\ -4 & 15 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{41} = \frac{225}{41}$

$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 12 \\ -4 & 1 & 15 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{41} = \frac{-231}{41}$

Solución:

$x = 18/41, y = 225/41, z = -231/41$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \det(A) = -39 \neq 0 \rightarrow \text{El}$

sistema es de Cramer

$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{-39} = -\frac{8}{39}$

$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-39} = -\frac{5}{39}$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{-39} = -\frac{6}{39} = -\frac{2}{13}$$

Solución: $x = -8/39$, $y = -5/39$, $z = -2/13$

c) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \det(A) = -4 \neq 0 \rightarrow$ El sistema es de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = -\frac{76}{4} = -19$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = -\frac{8}{4} = -2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix}}{-4} = -\frac{108}{4} = -27$$

Solución: $x = -19$, $y = -2$, $z = -27$

d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \det(A) = 3 \neq 0 \rightarrow$ El sistema es de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -5 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-42}{3} = -14$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & -5 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-12}{3} = -4$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & -5 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-45}{3} = -15$$

Solución: $x = -14$, $y = -4$, $z = -15$

Página 78

4. a) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$

El siguiente sistema es de Cramer:

$$\begin{cases} 2x + 4y = -1 + \lambda \\ -2x = 2 - \lambda \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 + \lambda & 4 \\ 2 - \lambda & 0 \end{vmatrix}}{8} = \frac{-8 + 4\lambda}{8} = -1 + \frac{\lambda}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 + \lambda \\ -2 & 2 - \lambda \end{vmatrix}}{10} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Solución:

$$x = -1 + \frac{\lambda}{2}, y = \frac{1}{4}, z = \lambda$$

b) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow$ El sistema es de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 9 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{1} = \frac{21}{1} = 21$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 9 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{1} = \frac{11}{1} = 11$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 9 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-11}{1} = -11$$

Solución:

$$x = 21, y = 11, z = -11$$

c) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ El sistema no es de Cramer

$$\begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ 2x - 2y - z = 0 \\ x - 2z = -2 \end{cases}$$

$$e_2 \rightarrow e_2 - 2e_1; e_3 \rightarrow e_3 - e_1 \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ 2y - 3z = -4 \\ 2y - 3z = -4 \end{cases}$$

$$e_3 \rightarrow e_3 - e_2 \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ 2y - 3z = -4 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

El siguiente sistema es de Cramer:

$$\begin{cases} x - 2y = 2 - \lambda \\ 2y = -4 + 3\lambda \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ -4 + 3\lambda & 2 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-4 + 4\lambda}{2} = -2 + 2\lambda$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 - \lambda \\ 0 & -4 + 3\lambda \end{vmatrix}}{2} = \frac{-4 + 3\lambda}{2} = -2 + \frac{3}{2}\lambda$$

Solución:

$$x = -2 + 2\lambda, y = -2 + \frac{3}{2}\lambda, z = \lambda$$

$$d) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

El siguiente sistema es de Cramer:

$$\begin{cases} x - 2y - z = 4 + \lambda \\ x + y + z = 2 - \lambda \\ x - y + z = -\lambda \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 + \lambda & -2 & -1 \\ 2 - \lambda & 1 & 1 \\ -\lambda & -1 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-2 + 2\lambda}{-2} = 1 - \lambda$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 + \lambda & -1 \\ 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{8 + 4\lambda}{-2} = -4 - 2\lambda$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 + \lambda \\ 1 & 1 & 2 - \lambda \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-10 - 4\lambda}{-2} = 5 + 2\lambda$$

Página 79

5. Los sistemas son homogéneos, por lo tanto, en todos los casos son compatibles:

a) $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A') = 2 \rightarrow$ Compatible indeterminado

Solución: $x = 0, y = -\lambda, z = \lambda$

b) $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A') = 3 \rightarrow$ Compatible determinado

Solución: $x = 0, y = 0, z = 0$

c) $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A') = 3 \rightarrow$ Compatible determinado

Solución: $x = 0, y = 0, z = 0$

d) $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A') = 3 \rightarrow$ Compatible indeterminado

Solución: $x = 0, y = -\lambda, z = \lambda, t = 0$

Página 81

6. a) $\det(A) = k^2 + k - 6$

$$\det(A) = 0 \rightarrow k = 2, k = -3$$

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \begin{cases} 2y + z = 1 \\ x - y - 3z = 0 \\ x + 3y - z = 2 \end{cases}$$

$$\text{Rango}(A) = 2$$

$$\text{Rango}(A') = 2$$

Sistema compatible indeterminado.

$$\text{Solución: } x = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\lambda, y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda, z = \lambda$$

$$\text{Si } k = -3 \rightarrow \begin{cases} 2y - 4z = 1 \\ x - y - 3z = 0 \\ x - 2y - z = 2 \end{cases}$$

$$\text{Rango}(A) = 2$$

$$\text{Rango}(A') = 3$$

Sistema incompatible.

Si $k \neq 2, -3 \rightarrow$ Sistema compatible determinado.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & k-1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 2 & k+1 & -1 \end{vmatrix}}{k^2 + k - 6} = \frac{-10 + 5k}{k^2 + k - 6} = \frac{5}{k+3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & k-1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{k^2 + k - 6} = \frac{-4 + 2k}{k^2 + k - 6} = \frac{2}{k+3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & k+1 & 2 \end{vmatrix}}{k^2 + k - 6} = \frac{-2 + k}{k^2 + k - 6} = \frac{1}{k+3}$$

Solución: $x = \frac{5}{k+3}, y = \frac{2}{k+3}, z = \frac{1}{k+3}$

b) $\det(A) = k^3 - k^2 - k + 1$

$\det(A) = 0 \rightarrow k = 1, k = -1$

Si $k = 1 \rightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$

Rango $(A) = 1$

Rango $(A') = 1$

Sistema compatible indeterminado:

Solución: $x = -2\lambda, y = \lambda$

Si $k = -1 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -3x = 2 \end{cases}$

Rango $(A) = 1$

Rango $(A') = 2$

Sistema incompatible.

Si $k \neq 1, -1 \rightarrow$ Sistema compatible determinado.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & k+1 \\ 1-k & k+1 \end{vmatrix}}{k^3 - k^2 - k + 1} = \frac{k^2 - 1}{k^3 - k^2 - k + 1} = \frac{1}{k-1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} k^2 & 0 \\ 2k-1 & 1-k \end{vmatrix}}{k^3 - k^2 - k + 1} = \frac{-k^3 + k^2}{k^3 - k^2 - k + 1} = -\frac{k^2}{k^2 - 1}$$

Solución: $x = \frac{1}{k-1}, y = -\frac{k^2}{k^2 - 1}$

c) $\det(A) = -k^2 + 2k - 1$

$\det(A) = 0 \rightarrow k = 1$

Si $k = 1 \rightarrow \begin{cases} -x - y = 1 \\ -x - y = 2 \\ -x - y + z = 0 \end{cases}$

Rango $(A) = 2$

Rango $(A') = 3$

Sistema incompatible.

Si $k \neq 1 \rightarrow$ Sistema compatible determinado.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k & -k & k-1 \\ k+1 & -k & 0 \\ 0 & -1 & k^2 \end{vmatrix}}{-k^2 + 2k - 1} = \frac{k^3 - k^2 + 1}{-k^2 + 2k - 1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & k & k-1 \\ -1 & k+1 & 0 \\ -1 & 0 & k^2 \end{vmatrix}}{-k^2 + 2k - 1} = \frac{-1}{-k^2 + 2k - 1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -k & k \\ -1 & -k & k+1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-k^2 + 2k - 1} = \frac{k-1}{-k^2 + 2k - 1} = -\frac{1}{k-1}$$

Solución: $x = \frac{k^3 - k^2 + 1}{-k^2 + 2k - 1}, y = \frac{-1}{-k^2 + 2k - 1},$

$$z = -\frac{1}{k-1}$$

d) $\det(A) = 1 - k^2$

$\det(A) = 0 \rightarrow k = 1, k = -1$

Si $k = 1 \rightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

Rango $(A) = 2$

Rango $(A') = 3$

Sistema incompatible.

Si $k = -1 \rightarrow \begin{cases} -x + y + z = -1 \\ x - 2y = -2 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$

Rango $(A) = 2$

Rango $(A') = 3$

Sistema incompatible.

Si $k \neq 1, -1 \rightarrow$ Sistema compatible determinado.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k & 1 & -k \\ 2k & k-1 & 0 \\ 0 & k & -1 \end{vmatrix}}{1 - k^2} = \frac{-2k^3 - k^2 + 3k}{1 - k^2} = \frac{2k^2 + 3k}{k+1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} k & k & -k \\ 1 & 2k & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{1-k^2} = \frac{k}{1-k^2} = \frac{2k^2+3k}{k+1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} k & 1 & k \\ 1 & k-1 & 2k \\ 1 & k & 0 \end{vmatrix}}{1-k^2} = \frac{-2k^3+3k}{1-k^2}$$

Solución:

$$x = \frac{2k^2+3k}{k+1}, y = \frac{2k^2+3k}{k+1}, z = \frac{-2k^3+3k}{1-k^2}$$

e) $\det(A) = -k^2 + 6k - 5$

$$\det(A) = 0 \rightarrow k = 1, k = 5$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \begin{cases} x + y - z - t = 1 \\ 2x - y + t = 0 \\ x - y - z + t = 1 \\ x + y - z - t = 0 \end{cases}$$

$$\text{Rango}(A) = 3$$

$$\text{Rango}(A') = 4$$

Sistema incompatible.

$$\text{Si } k = 5 \rightarrow \begin{cases} x + y - z - t = 5 \\ 2x - y + t = 0 \\ 5x - y - z + t = 5 \\ x + 5y - z - t = 0 \end{cases}$$

$$\text{Rango}(A) = 3$$

$$\text{Rango}(A') = 3$$

Sistema compatible indeterminado.

Solución:

$$x = -\frac{5}{8} - \frac{1}{2}\lambda, y = -\frac{5}{4}, z = -\frac{55}{8} - \frac{3}{2}\lambda, t = \lambda$$

Si $k \neq 1, 5 \rightarrow$ Sistema compatible determinado.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ k & -1 & -1 & 1 \\ 0 & k & -1 & -1 \end{vmatrix}}{-k^2+6k-5} = \frac{0}{-k^2+6k-5} = 0$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & k & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ k & k & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{-k^2+6k-5} = \frac{-5k+k^2}{-k^2+6k-5} = -\frac{k}{k-1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & k & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ k & -1 & k & 1 \\ 1 & k & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-k^2+6k-5} = \frac{k^3-6k^2+5k}{-k^2+6k-5} = -k$$

$$t = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & k \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ k & -1 & -1 & k \\ 1 & k & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-k^2+6k-5} = \frac{k^2-5k}{-k^2+6k-5} = -\frac{k}{k-1}$$

$$\text{Solución: } x = 0, y = \frac{-k}{k+1}, z = -k, t = -\frac{k}{k+1}$$

Página 84

1. Un sistema de ecuaciones lineales es compatible si, y sólo si, el rango de la matriz de coeficientes A del sistema es igual al rango de la matriz ampliada A' .

$\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(A') \rightarrow$ Sistema incompatible.

$\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A') = k < n$, donde n el número es el número de incógnitas del sistema $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado dependiente de $n - k$ parámetros.

$\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A') = n \rightarrow$ Sistema compatible determinado.

2. Si n es el número de incógnitas, en el sistema original se cumple:

$$\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A') < n$$

Cambiando los términos independientes, el $\text{Rango}(A)$ no varía y, por lo tanto, $\text{Rango}(A')$ puede ser mayor o igual que en el sistema original.

Por lo tanto, el nuevo sistema puede ser compatible indeterminado o incompatible, en ningún caso puede tener una única solución.

3. Actividad personal. Deberá ocurrir $\text{Rango}(A) = 1$, $\text{Rango}(A') = 2$.

4. Actividad personal. El sistema obtenido al suprimir una de las ecuaciones podrá ser compatible indeterminado, nunca compatible determinado.

En el primer sistema se deberá cumplir $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(A')$.

En el sistema obtenido al suprimir una de las ecuaciones, $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A') \leq 2$.

5. Actividad personal. $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A') = 1$
6. No podemos asegurar que siempre tenga solución, puede ocurrir que $\text{Rango}(A) = 1$ y $\text{Rango}(A') = 2$ —dos las ecuaciones corresponden a planos paralelos y la tercera es combinación lineal de éstas—.

7. Si
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$
 es un sistema de

Cramer:

Si A es la matriz de coeficientes, X la de las variables y B la de los términos independientes.

A^{-1} existe ya que el sistema es de Cramer.

$$AX = B \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \rightarrow X = A^{-1}B$$

Y como:

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}}{|A|}, \text{ } A_{ij} \text{ es el adjunto de } a_{ij}, 1 \leq i, j \leq 3$$

Tenemos que:

$$X = A^{-1}B \rightarrow X = \frac{\begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3 \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + A_{32}b_3 \\ A_{13}b_1 + A_{23}b_2 + A_{33}b_3 \end{pmatrix}}{|A|}$$

Es decir:

$$x_i = \frac{A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + A_{3i}b_3}{|A|}, 1 \leq i \leq 3$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{|A|}$$

8. Actividad personal.
9. Porque requiere menos operaciones que el método de Cramer. Si el número de incógnitas es mayor que 3, los cálculos necesarios para aplicar la regla de Cramer se complican.
10. Un sistema homogéneo es aquél cuyos términos independientes son nulos.
- En todo sistema homogéneo $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A')$ ya que estas matrices se diferencian en una columna de ceros.
- Un sistema homogéneo admite más de una solución cuando $\text{Rango}(A) < \text{número de incógnitas}$.

11. a) $\text{Rango}(A) = 2$
 $\text{Rango}(A') = 2$
 Compatible determinado
- b) $\text{Rango}(A) = 2$
 $\text{Rango}(A') = 3$
 Incompatible
- c) $\text{Rango}(A) = 3$
 $\text{Rango}(A') = 3$
 Compatible determinado
- d) $\text{Rango}(A) = 3$
 $\text{Rango}(A') = 3$
 Compatible indeterminado
12. a) $\text{Rango}(A) = 3$
 $\text{Rango}(A') = 3$
 Compatible determinado
- b) $\text{Rango}(A) = 2$
 $\text{Rango}(A') = 3$
 Incompatible
- c) $\text{Rango}(A) = 3$
 $\text{Rango}(A') = 3$
 Compatible determinado
- d) $\text{Rango}(A) = 3$
 $\text{Rango}(A') = 3$
 Compatible determinado

- e) Rango (A) = 3
Rango (A') = 3
Compatible indeterminado
- f) Rango (A) = 3
Rango (A') = 3
Compatible indeterminado

13. a) Rango (A) = 4
Rango (A') = 4
Compatible determinado

b) Rango (A) = 4
Rango (A') = 4
Compatible determinado

14. a) $\det(A) = -19 \rightarrow$ Sistema de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 8 & -7 \end{vmatrix}}{-19} = \frac{57}{19} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}}{-19} = \frac{19}{19} = 1$$

Solución: $x = 3, y = 1$

b) $\det(A) = 0 \rightarrow$ El sistema no es de Cramer
Solución: $x = \lambda, y = -2\lambda + 7$

c) $\begin{cases} -2x + y = 15 \\ -x + y = 9 \end{cases}$

$\det(A) = -1 \rightarrow$ Sistema de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 15 & 1 \\ 9 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = -\frac{6}{1} = -6$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 15 \\ -1 & 9 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{3}{1} = 3$$

Solución: $x = -6, y = 3$

d) $\det(A) = 13 \rightarrow$ Sistema de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -9 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}{13} = \frac{39}{13} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}{13} = \frac{13}{13} = 1$$

Solución: $x = 3, y = 1$

e) $\det(A) = -7 \rightarrow$ Sistema de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 16 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{28}{7} = 4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 16 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{7}{7} = 1$$

Solución: $x = 4, y = 1$

f) $\det(A) = -59 \rightarrow$ Sistema de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -9 & -4 \end{vmatrix}}{-59} = -\frac{59}{59} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 5 & -9 \end{vmatrix}}{-59} = \frac{59}{59} = 1$$

Solución: $x = -1, y = 1$

15. a) $\det(A) = 27 \rightarrow$ Sistema de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{27} = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{27} = \frac{41}{27}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}}{27} = \frac{17}{27}$$

Solución:

$$x = \frac{4}{9}, y = \frac{41}{27}, z = \frac{17}{27}$$

b) $\det(A) = -2 \rightarrow$ Sistema de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 4 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}}{-2} = -\frac{4}{2} = -2$$

Solución: $x = 2, y = 2, z = -2$

c) $\det(A) = 3 \rightarrow$ Sistema de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{8}{3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{3} = -\frac{4}{3}$$

Solución: $x = 3, y = \frac{8}{3}, z = -\frac{4}{3}$

d) $\det(A) = 4 \rightarrow$ Sistema de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{28}{4} = 7$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 8 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 8 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix}}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

Solución: $x = 7, y = 5, z = 4$

e) $\det(A) = 17 \rightarrow$ Sistema de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 13 & 2 & 1 \\ -7 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{17} = \frac{17}{17} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 13 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{17} = \frac{17}{17} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 13 \\ 2 & -1 & -7 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{17} = \frac{136}{17} = 8$$

Solución:

$x = 1, y = 1, z = 8$

f) $\det(A) = 9 \rightarrow$ Sistema de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 13 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \\ -14 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{9} = \frac{54}{9} = 6$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 13 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ -3 & -14 & 1 \end{vmatrix}}{9} = \frac{9}{9} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 13 \\ 1 & -1 & 5 \\ -3 & 4 & -14 \end{vmatrix}}{9} = \frac{0}{9} = 0$$

Solución:

$x = 6, y = 1, z = 0$

g) $\det(A) = 0 \rightarrow$ El sistema no es de Cramer

El sistema es incompatible.

h) $\det(A) = -21 \rightarrow$ Sistema de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 15 & 4 & -2 \\ 15 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-21} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 15 & -2 \\ 2 & 15 & 1 \\ -3 & 7 & -1 \end{vmatrix}}{-21} = \frac{155}{21}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 15 \\ 2 & 1 & 15 \\ -3 & 2 & 7 \end{vmatrix}}{-21} = \frac{154}{21} = \frac{22}{3}$$

Solución: $x = \frac{1}{7}, y = \frac{155}{21}, z = \frac{22}{3}$

Página 85

16.a) $\det(A) = 0 \rightarrow$ El sistema no es de Cramer

La tercera ecuación es suma de las otras dos, por lo tanto, consideramos el sistema que forman las dos primeras:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \rightarrow \text{El sistema } \begin{cases} x + 2y = 6 + \lambda \\ 2x + 3y = 12 + 4\lambda \end{cases} \text{ es de Cramer}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 + \lambda & 2 \\ 12 + 4\lambda & 3 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-6 - 5\lambda}{-1} = 6 + 5\lambda$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 + \lambda \\ 2 & 12 + 4\lambda \end{vmatrix}}{-1} = \frac{2\lambda}{-1} = -2\lambda$$

Solución: $x = 6 + 5\lambda, y = -2\lambda, z = \lambda$

b) $\det(A) = 0 \rightarrow$ El sistema no es de Cramer

$$e_2 \rightarrow e_2 - e_1; e_3 \rightarrow e_3 - e_1 \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -y = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$$

Consideramos el sistema formado por las dos primeras ecuaciones:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \rightarrow \text{El sistema } \begin{cases} x + 2y = 1 + \lambda \\ -y = 0 \end{cases} \text{ es de Cramer}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 + \lambda & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-1 - \lambda}{-1} = 1 + \lambda$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 + \lambda \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{0}{-1} = 0$$

Solución: $x = 1 + \lambda, y = 0, z = \lambda$

$$17.a) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \rightarrow \text{El sistema } \begin{cases} x + 2y = -3\lambda \\ x + 4y = 2 - 9\lambda \end{cases} \text{ es de Cramer}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3\lambda & 2 \\ 2 - 9\lambda & 4 \end{vmatrix}}{2} = \frac{6\lambda - 4}{2} = 3\lambda - 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3\lambda \\ 1 & 2 - 9\lambda \end{vmatrix}}{2} = \frac{2 - 6\lambda}{2} = 1 - 3\lambda$$

Solución: $x = 3\lambda - 2, y = 1 - 3\lambda, z = \lambda$

b) La tercera ecuación es la resta de las dos primeras, por lo tanto, consideramos el sistema que éstas forman.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \rightarrow \text{El sistema es de Cramer}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 1 \\ 27 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{39}{3} = 13$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 2 & 27 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-3}{3} = -1$$

Solución: $x = 13, y = -1$

18. Las soluciones son las siguientes:

a) $x = 0, y = 0, z = 0$

b) $x = \frac{3}{7}\lambda, y = \frac{4}{7}\lambda, z = \lambda$

c) $x = 2\lambda, y = 0, z = \lambda$

d) $x = \frac{1}{2}\lambda, y = \lambda, z = \frac{5}{4}\lambda$

e) $x = 0, y = 0, z = 0$

f) $x = 0, y = -\frac{1}{2}\lambda, z = \lambda$

19.a) $x = 0, y = 0, z = 0, t = 0$

b) $x = \lambda, y = \lambda, z = \lambda, t = -\lambda$

c) $x = \lambda, y = -3\lambda, z = 0, t = \lambda$

d) $x = -\frac{1}{2}\lambda, y = 0, z = \lambda, t = \frac{3}{2}\lambda$

20. Actividad personal. Una combinación lineal de las dos ecuaciones sirve.

21.a) $x = \frac{1}{4}\lambda, y = -\frac{3}{4}\lambda, z = \lambda$

b) Actividad personal.

c) Actividad personal.

Por ejemplo: $x + y + z = 0$

22.a) $\det(A) = -k^2 + 2k - 1$

$\det(A) = 0 \rightarrow k = 1$

Si $k = 1 \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

Rango $(A) = 1$

Rango $(A') = 1$

Sistema compatible indeterminado.

Solución: $x = 1 - \mu - \lambda, y = \lambda, z = \mu$

Si $k \neq 1 \rightarrow$ Sistema compatible determinado.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \end{vmatrix}}{-k^2 + 2k - 1} = \frac{-k^3 + 3k - 2}{-k^2 + 2k - 1} = k + 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-k^2 + 2k - 1} = \frac{k^2 - 2k + 1}{-k^2 + 2k - 1} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \end{vmatrix}}{-k^2 + 2k - 1} = \frac{k^2 - 2k + 1}{-k^2 + 2k - 1} = -1$$

b) $\det(A) = -k^2 + 2k$

$\det(A) = 0 \rightarrow k = 0, k = 2$

Si $k = 0 \rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Solución: } x = -\lambda, y = -2\lambda, z = \lambda$

Si $k = 2 \rightarrow \begin{cases} 2y + 2z = 0 \\ x + z = 0 \\ 4x - 2y + 2z = 2 \end{cases}$

Rango $(A) = 2$

Rango $(A') = 3$

Sistema incompatible.

Si $k \neq 0, 2 \rightarrow$ Sistema compatible determinado

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & k & k \\ 0 & 0 & 1 \\ k & -2 & k \end{vmatrix}}{-k^2 + 2k} = \frac{k^2}{-k^2 + 2k} = -\frac{k}{k-2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & k & k \end{vmatrix}}{-k^2 + 2k} = \frac{k^2}{-k^2 + 2k} = -\frac{k}{k-2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & k \end{vmatrix}}{-k^2 + 2k} = \frac{-k^2}{-k^2 + 2k} = \frac{k}{k-2}$$

Solución: $x = -\frac{k}{k-2}, y = -\frac{k}{k-2}, z = \frac{k}{k-2}$

23. $\det(A) = -1 \neq 0 \rightarrow$ El sistema es compatible determinado para todos los valores de k .

En este caso, la compatibilidad no depende de k .

Solución: $x = k - 2, y = 4 - 2k, z = -1 + k$

24. Rango $(A) = 2$

El sistema es compatible indeterminado para los valores de k tales que Rango $(A') = 2$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 4 - 2k = 0 \rightarrow k = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 + 2k \rightarrow k = 2$$

El sistema es compatible indeterminado cuando $k = 2$.

Solución: $x = \frac{3}{2} - \lambda, y = \frac{1}{2}, z = \lambda$

25. $\det(A) = 5 \rightarrow$ El sistema es compatible determinado para cualquier valor de k .

Solución: $x = \frac{6}{5}k - \frac{52}{5}, y = \frac{56}{5} - \frac{3}{5}k, z = -\frac{1}{5}k + \frac{52}{5}$

26.a) $\det(A) = -3k^2 + 2k^3$

$\det(A) = 0 \rightarrow k = 3/2, k = 0$

$$\text{Si } k = 3/2 \rightarrow \begin{cases} 3x/2 - 3y/2 + 3z/2 = 3/2 \\ 0 = 1 \\ x + y/2 = 0 \end{cases} \rightarrow$$

→ Sistema incompatible

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \begin{cases} 3z = 1 \\ x - y = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado.}$$

Solución: $x = \lambda, y = \lambda, z = 1/3$

Si $k \neq 0, 3/2 \rightarrow$ Sistema compatible determinado

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k & -k & k \\ 1 & 0 & 3-2k \\ 0 & k-1 & 0 \end{vmatrix}}{-3k^2 + 2k^3} = \frac{2k - 4k^2 + 2k^3}{-3k^2 + 2k^3} = \frac{2 - 4k + 2k^2}{-3k + 2k^2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} k & k & k \\ 0 & 1 & 3-2k \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{-3k^2 + 2k^3} = \frac{2k - 2k^2}{-3k^2 + 2k^3} = \frac{2 - 2k}{-3k + 2k^2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} k & -k & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & k-1 & 0 \end{vmatrix}}{-3k^2 + 2k^3} = \frac{-k^2}{-3k^2 + 2k^3} = \frac{-1}{-3 + 2k}$$

$$\text{Solución: } x = \frac{2 - 4k + 2k^2}{-3k + 2k^2}, y = \frac{2 - 2k}{-3k + 2k^2},$$

$$z = \frac{-1}{-3 + 2k}$$

b) $\det(A) = 2k^2 - 2k$

$$\det(A) = 0 \rightarrow k = 0, k = 1$$

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \begin{cases} -3x + 4z = 2 \\ x - 2z = -1 \\ -x + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Rango}(A) = 2$$

$$\text{Rango}(A') = 3$$

Sistema incompatible

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \begin{cases} -2x + 4z = 2 \\ x - 2z = -1 \\ -x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$\text{Rango}(A) = 2$$

$$\text{Rango}(A') = 2$$

Sistema compatible indeterminado:

$$x = -1 + 2\lambda, y = 0, z = \lambda$$

Si $k \neq 0, 1 \rightarrow$ Sistema compatible determinado.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ k & k & 2 \end{vmatrix}}{2k^2 - 2k} = \frac{0}{-3k^2 + 2k^3} = 0$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} k-3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & k & 2 \end{vmatrix}}{2k^2 - 2k} = \frac{k-1}{k}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} k-3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & k & k \end{vmatrix}}{2k^2 - 2k} = \frac{k^2 - k}{2k^2 - 2k} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Solución: } x = 0, y = \frac{k-1}{k}, z = 1/2$$

27.a) $\det(A) = 3m^2 + m$

$$\det(A) = 0 \rightarrow m = 0, m = -1/3$$

$$\text{Si } m = 0 \rightarrow \begin{cases} -z = 0 \\ 2x + z = 1 \\ x + 3z = 3 \end{cases}$$

$$\text{Rango}(A) = 2$$

$$\text{Rango}(A') = 3$$

Sistema incompatible.

$$\text{Si } m = -1/3 \rightarrow \begin{cases} -x/3 - z = -1/3 \\ 2x - y/3 + z = 1 \\ x + 3z = 3 \end{cases}$$

$$\text{Rango}(A) = 2$$

$$\text{Rango}(A') = 3$$

Sistema incompatible.

Si $m \neq 0, -1/3 \rightarrow$ Sistema compatible determinado.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & 0 & -1 \\ 1 & m & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{3m^2 + m} = \frac{3m^2 + 3m}{3m^2 + m} = \frac{3m + 3}{3m + 1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m & m & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{3m^2 + m} = \frac{-5m - 5}{3m^2 + m}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} m & 0 & m \\ 2 & m & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{3m^2 + m} = \frac{2m^2}{3m^2 + m} = \frac{2m}{3m+1}$$

$$\text{Solución: } x = \frac{3m+3}{3m+1}, y = \frac{-5m-5}{3m^2+m}, z = \frac{2m}{3m+1}$$

b) $\det(A) = 2m^2 - m$

$$\det(A) = 0 \rightarrow m = 0, m = 1/2$$

$$\text{Si } m = 0 \rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ -z = 0 \\ x + z = 1 \end{cases} \rightarrow \text{Sistema compatible}$$

indeterminado.

$$\text{Solución: } x = 1, y = \lambda, z = 0$$

$$\text{Si } m = 1/2 \rightarrow \begin{cases} x/2 + z = 1/2 \\ y/2 - z = -1/2 \\ x + y/2 + z = 1 \end{cases}$$

$$\text{Rango}(A) = 2$$

$$\text{Rango}(A') = 3$$

Sistema incompatible.

Si $m \neq 0, 1/2 \rightarrow$ Sistema compatible determinado.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ -m & m & -1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}}{2m^2 - m} = \frac{m^2 - m}{2m^2 - m} = \frac{m-1}{2m-1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m & m & 1 \\ 0 & -m & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{2m^2 - m} = \frac{-m^2 + m}{2m^2 - m} = \frac{-m+1}{2m-1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} m & 0 & m \\ 0 & m & -m \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}}{2m^2 - m} = \frac{m^3}{2m^2 - m} = \frac{m^2}{2m-1}$$

$$\text{Solución: } x = \frac{m-1}{2m-1}, y = \frac{-m+1}{2m-1}, z = \frac{m^2}{2m-1}$$

28.a) $\det(A) = k^2 - 1$

$$\det(A) = 0 \rightarrow k = 1, k = -1$$

Si $k \neq -1, 1 \rightarrow$ Sistema compatible determinado.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -k \\ k+1 & -1 \end{vmatrix}}{k^2 - 1} = \frac{k^2 + k - 2}{k^2 - 1} = \frac{k+2}{k+1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ k & k+1 \end{vmatrix}}{k^2 - 1} = \frac{-k+1}{k^2 - 1} = -\frac{1}{k+1}$$

$$\text{Solución: } x = \frac{k+2}{k+1}, y = -\frac{1}{k+1}$$

b) Se debe cumplir:

$$2 = -\frac{1}{k+1}$$

$$k = -3/2$$

29.a) $\det(A) = -k^2 - k$

$$\det(A) = 0 \rightarrow k = 0, k = -1$$

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 3 \\ -y + z = 3 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

$$\text{Rango}(A) = 2$$

$$\text{Rango}(A') = 3$$

Sistema incompatible.

$$\text{Si } k = -1 \rightarrow \begin{cases} x - 2y - z = 3 \\ -x - y + z = 3 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$

$$\text{Rango}(A) = 2$$

$$\text{Rango}(A') = 2$$

Sistema compatible indeterminado

Si $k \neq 0, -1 \rightarrow$ Sistema compatible determinado.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & k-1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & k & -1 \end{vmatrix}}{-k^2 - k} = \frac{-2k-2}{-k^2 - k} = \frac{2}{k}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} k+2 & 3 & -1 \\ k & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-k^2 - k} = \frac{-2k-2}{-k^2 - k} = \frac{2}{k}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} k+2 & k-1 & 3 \\ k & -1 & 3 \\ 1 & k & 1 \end{vmatrix}}{-k^2 - k} = \frac{-k^2 - 3k - 2}{-k^2 - k} = \frac{k+2}{k}$$

Solución: $x = \frac{2}{k}, y = \frac{2}{k}, z = \frac{k+2}{k}$

b) Solución: $x = -1 + \lambda, y = -2, z = \lambda$

30. a) $\det(A) = -k + k^2$

$\det(A) = 0 \rightarrow k = 0, k = 1$

Si $k = 0 \rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \rightarrow \text{Compatible}$

indeterminado.

Solución: $x = 1 - \lambda, y = \lambda, z = 0$

Si $k = 1 \rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 0 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases}$

Rango (A) = 2

Rango (A') = 3

Sistema incompatible.

Si $k \neq 0, 1 \rightarrow$ Sistema compatible determinado.

$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ k+1 & k+1 & k \end{vmatrix}}{-k+k^2} = \frac{k^2}{-k+k^2} = \frac{k}{-1+k}$

$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & k+1 & k \end{vmatrix}}{-k+k^2} = \frac{-k}{-k+k^2} = \frac{-1}{-1+k}$

$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & k+1 & k+1 \end{vmatrix}}{-k+k^2} = \frac{k^2}{-k+k^2} = \frac{k}{-1+k}$

Solución: $x = \frac{k}{-1+k}, y = \frac{-1}{-1+k}, z = \frac{k}{-1+k}$

b) $x = \frac{2}{-1+2} = 2, y = \frac{-1}{-1+2} = -1, z = \frac{2}{-1+2} = 1$

31. a) $\det(A) = 2k - 36$

$\det(A) = 0 \rightarrow k = 18$

Si $k = 18 \rightarrow \begin{cases} y - t = 2 \\ -3y + 2z = 0 \\ x - 3z = -1 \\ -4x + 18t = -5 \end{cases}$

Rango (A) = 3

Rango (A') = 4

Sistema incompatible.

Si $k \neq 18 \rightarrow$ Sistema compatible determinado

$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & k \end{vmatrix}}{2k-36} = \frac{16k-45}{2k-36}$

$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \\ -4 & -5 & 0 & k \end{vmatrix}}{2k-36} = \frac{4k-18}{2k-36} = \frac{2k-9}{k-18}$

$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & -5 & k \end{vmatrix}}{2k-36} = \frac{6k-27}{2k-36}$

$t = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ -4 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}}{2k-36} = \frac{54}{2k-36} = \frac{27}{k-18}$

Solución: $x = \frac{16k-45}{2k-36}, y = \frac{2k-9}{k-18}, z = \frac{6k-27}{2k-36}$

$t = \frac{27}{k-18}$

b) $x = -67/22, y = -5/11, z = -15/22, t = -27/11$

32. a) $\det(A) = -2k + 2$

$\det(A) = 0 \rightarrow k = 1$

Si $k = 1 \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$

Rango (A) = 2

Rango (A') = 2

Sistema compatible indeterminado.

Si $k \neq 1 \rightarrow$ Sistema compatible determinado.b) Si $k = 1 \rightarrow x = 1 - \lambda, y = \lambda, z = 0$ Si $k \neq 1 \rightarrow$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-2k+2} = \frac{1-k}{-2k+2} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-2k+2} = \frac{1-k}{-2k+2} = \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2k+2} = \frac{k^2-2k+1}{-2k+2} = \frac{1-k}{2}$$

$$\text{Solución: } x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}, z = \frac{1-k}{2}$$

33.a) $\det(A) = 2k^2 - 2k$ $\det(A) = 0 \rightarrow 0, 1$

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + y = 0 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

Rango (A) = 2Rango (A') = 3

Sistema incompatible.

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + 2y - z = 2 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

Rango (A) = 2Rango (A') = 2

Sistema compatible indeterminado.

Solución: $x = -5\lambda, y = 1 + 3\lambda, z = \lambda$ Si $k \neq 0, 1 \rightarrow$ Sistema compatible determinado.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2k & k+1 & -k \\ 1 & k & k+1 \end{vmatrix}}{2k^2-2k} = \frac{-2k^2-k+3}{2k^2-2k} = \frac{-2k-3}{2k}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2k & -k \\ 1 & 1 & k+1 \end{vmatrix}}{2k^2-2k} = \frac{2k^2+k-3}{2k^2-2k} = \frac{2k+3}{2k}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & k+1 & 2k \\ 1 & k & 1 \end{vmatrix}}{2k^2-2k} = \frac{-2k^2+5k-3}{2k^2-2k} = \frac{-2k+3}{2k}$$

$$\text{Solución: } x = \frac{-2k-3}{2k}, y = \frac{2k+3}{2k}, z = \frac{-2k+3}{2k}$$

b) $\det(A) = -k^3 + k^2$ $\det(A) = 0 \rightarrow k = 0, 1$

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \begin{cases} -z = 0 \\ z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Sistema incompatible.}$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Rango (A) = 2Rango (A') = 3

Sistema incompatible.

Si $k \neq 0, 1 \rightarrow$ Sistema compatible determinado.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & k & k-1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k \end{vmatrix}}{-k^3+k^2} = \frac{-k^2+k-1}{-k^3+k^2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & k-1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & 0 & k \end{vmatrix}}{-k^3+k^2} = \frac{1-k}{k^2} = \frac{1}{k^2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & k & 0 \\ k & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-k^3+k^2} = \frac{k}{-k^3+k^2} = \frac{1}{-k^2+k}$$

$$\text{Solución: } x = \frac{-k^2+k-1}{-k^3+k^2}, y = \frac{1}{k^2}, z = \frac{1}{-k^2+k}$$

34.a) $\det(A) = -k^2 + 3k - 2$ $\det(A) = 0 \rightarrow k = 1, 2$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Rango (A) = 2

Rango (A') = 3

Sistema incompatible.

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

Rango (A) = 2

Rango (A') = 2

Sistema compatible indeterminado.

Solución: $x = 1 - \lambda$, $y = 0$, $z = \lambda$ Si $k \neq 1, 2 \rightarrow$ Sistema compatible determinado.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k-1 & 1 & 1 \\ k & 1 & k \\ 1 & k & 1 \end{vmatrix}}{-k^2 + 3k - 2} = \frac{-k^3 + 2k^2 + k - 2}{-k^2 + 3k - 2} = k + 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & k-1 & 1 \\ 2 & k & k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-k^2 + 3k - 2} = \frac{k^2 - 4k + 4}{-k^2 + 3k - 2} = \frac{2-k}{k-1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & k-1 \\ 2 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \end{vmatrix}}{-k^2 + 3k - 2} = \frac{k^2 - 2k}{-k^2 + 3k - 2} = -\frac{k}{k-1}$$

Solución: $x = k + 1$, $y = \frac{2-k}{k-1}$, $z = -\frac{k}{k-1}$

b) $\det(A) = 1 - k^2$

$\det(A) = 0 \rightarrow k = -1, 1$

$$\text{Si } k = -1 \rightarrow \begin{cases} x + y + z = -1 \\ x - y - z = 1 \\ -x - y - z = 0 \end{cases}$$

Rango (A) = 2

Rango (A') = 3

Sistema incompatible.

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ -x + y - z = 0 \end{cases}$$

Rango (A) = 2

Rango (A') = 3

Sistema incompatible.

Si $k \neq -1, 1 \rightarrow$ Sistema compatible determinado.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & -1 & k \\ 0 & k & -1 \end{vmatrix}}{1 - k^2} = \frac{-k^3 + 2k + 1}{1 - k^2} = \frac{k^2 - k - 1}{k - 1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{1 - k^2} = \frac{k - k^2}{1 - k^2} = \frac{k}{k + 1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & k & 0 \end{vmatrix}}{1 - k^2} = \frac{k^2 - 2k - 1}{1 - k^2}$$

Solución: $x = \frac{k^2 - k - 1}{k - 1}$, $y = \frac{k}{k + 1}$,

$$z = \frac{k^2 - 2k - 1}{1 - k^2}$$

35. $\det(A) = k^2 - 1$

$\det(A) = 0 \rightarrow k = -1, 1$

$$\text{Si } k = -1 \rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ x - z = -1 \\ -x - 2y + z = 3 \end{cases}$$

Rango (A) = 2

Rango (A') = 3

Sistema incompatible.

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ -x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

Rango (A) = 2

Rango (A') = 2

Sistema compatible indeterminado.

Solución:

$x = -2\lambda - 1/2$, $y = \lambda$, $z = 1/2$

Si $k \neq -1, 1 \rightarrow$ Sistema compatible determinado.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k-1 & 2 & k \\ k & k+1 & 2k+1 \\ 2-k & -2 & 1 \end{vmatrix}}{k^2-1} = \frac{k^3-k^2+1}{k^2-1} = \frac{k^2-k+1}{k+1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & k-1 & k \\ 1 & k & 2k+1 \\ -1 & 2-k & 1 \end{vmatrix}}{k^2-1} = \frac{0}{k^2-1} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & k-1 \\ 1 & k+1 & k \\ -1 & -2 & 2-k \end{vmatrix}}{k^2-1} = \frac{-1+k}{k^2-1} = \frac{1}{k+1}$$

$$x = \frac{k^2-k+1}{k+1}, y = 0, z = \frac{1}{k+1}$$

36.a) $\det(A) = k^2 + k$

$$\det(A) = 0 \rightarrow k = 0, -1$$

Si $k \neq 0, -1 \rightarrow$ El sistema es compatible determinado.

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ x + 2z = 0 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{1^2+1} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{1^2+1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{1^2+1} = \frac{2}{2} = 1$$

b) Si $k = 0 \rightarrow \begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ 2z = 0 \\ -z = 0 \end{cases}$

$$\text{Rango}(A) = 2$$

$$\text{Rango}(A') = 2$$

El sistema es compatible indeterminado.

$$\text{Solución: } x = -3\lambda + 5, y = \lambda, z = 0$$

c) Si $k = -1 \rightarrow \begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ -x + 2z = 0 \\ -y - z = -1 \end{cases}$

$$\text{Rango}(A) = 2$$

$$\text{Rango}(A') = 3$$

El sistema es incompatible.

37. $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \rightarrow \text{Rango}(A) \geq 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 2k = 0 \rightarrow k = 3 \rightarrow \text{Si } k = 3,$$

Rango(A) = 2, si no, Rango(A) = 3 pues el resto de menores de orden 3 se anulan también para $k = 3$, excepto el que no depende de k , que es nulo.

Por otra parte:

$$\det(A') = -2k^2 + 20k - 42$$

$$\det(A') = 0 \rightarrow k = 3, k = 7$$

Por lo tanto:

$$k = 3 \rightarrow A' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \rightarrow \text{Rango}(A') = 3 \rightarrow$$

Sistema incompatible ya que Rango(A) = 2

$$k = 7 \rightarrow A' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 7 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 7 \end{vmatrix} \rightarrow \text{Rango}(A') = 3 =$$

Rango(A) $\rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Si $k \neq 3, k \neq 7 \rightarrow \text{Rango}(A') = 4 \rightarrow$ Sistema incompatible.

Si $k = 7 \rightarrow$

$$e_2 \rightarrow e_2 - e_1; e_3 \rightarrow e_3 + e_1; e_4 \rightarrow e_4 - 2e_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 6x + 2z = -1 \\ 2x + 2z = 3 \\ 2x + 2z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 6x + 2z = -1 \\ 2x + 2z = 3 \end{cases}$$

$$\text{Solución: } x = 1, y = 11/2, z = 5/2$$

38.a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7 \rightarrow \text{Rango}(A) \geq 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -k \\ -k & 1 & k \\ -1 & 2k & 0 \end{vmatrix} = 2k^3 - 2k^2 - 4k = 0 \rightarrow k = 0, k =$$

$$= 2, k = -1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -k \\ -k & 1 & k \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -k^2 + 3k - 2 = 0 \rightarrow k = 1, k = 2,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -k \\ -1 & 2k & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 4k^2 - 5k + 6 = 0 \rightarrow k = 2, k = -3 /$$

$$/ 11$$

$$\begin{vmatrix} -k & 1 & k \\ -1 & 2k & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = k - 2 = 0 \rightarrow k = 2$$

Por otra parte, $\det(A') = k^3 - k^2 - 8k + 12 = 0 \rightarrow k = -3, k = 2$

Por lo tanto:

Si $k = 2 \rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$

$\text{Rango}(A') = 2 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado ya que $\text{Rango}(A) = 2$

Si $k = -3 \rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & -6 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$

$\text{Rango}(A') = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible determinado ya que $\text{Rango}(A) = 3$

Si $k \neq 2, k \neq -3 \rightarrow \text{Rango}(A') = 4 \rightarrow$ Sistema incompatible.

b) Si $k = 2 \rightarrow x = \frac{4}{7} + \frac{8}{7}\lambda, y = \frac{8}{7} + \frac{2}{7}\lambda, z = \lambda$

39.a) $\det(A) = k - 1$

Si $k = 1 \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + z = 1 = 0 \rightarrow \text{Incompatible.} \\ x + y + z = 2 \end{cases}$

Si $k \neq 1 \rightarrow$ Compatible determinado.

b) $x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ k & k-1 & 1 \\ k+1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{k-1} = \frac{-k^3 + k^2 + 2k - 1}{k-1}$

$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ k & k & 1 \\ 1 & k+1 & 1 \end{vmatrix}}{k-1} = \frac{k^3 - k}{k-1} = k^2 + k$

$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & k-1 & k \\ 1 & 1 & k+1 \end{vmatrix}}{k-1} = \frac{-k}{k-1}$

c) Hay que buscar un coeficiente tal que $\det(A)$ sea no nulo para cualquier valor de k .

Si la última ecuación es $x + y + (-k^2 - 1)z = k + 1$, $\det(A) = k^2 + k + 1$ que no se anula para ningún valor de k .

40.a) $\det(A) = 0 \rightarrow$ Tenemos que buscar valores para los que el sistema sea compatible indeterminado.

$\text{Rango}(A) = 2$

Por otra parte:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & k \end{vmatrix} = 30 - 5k$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & k \end{vmatrix} = 5k - 30$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & k \end{vmatrix} = 5k - 30$$

Si $k \neq 6 \rightarrow \text{Rango}(A') = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible.

Si $k = 6 \rightarrow \text{Rango}(A') = 2 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

b) $x = -\lambda, y = 3 + \lambda, z = \lambda$

41.x: edad del niño

y: edad del padre

z: edad del abuelo

$$\begin{cases} y = kx \\ x + y + 2z = 180 \\ 2x + z = 99 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} kx - y = 0 \\ x + y + 2z = 180 \\ 2x + z = 99 \end{cases}$$

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y + 2z = 180 \\ 2x + z = 99 \end{cases}$$

$\det(A) = -1$

$$x = - \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 180 & 1 & 2 \\ 99 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 18$$

$$y = - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 180 & 2 \\ 2 & 99 & 1 \end{vmatrix} = 36$$

$$z = - \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 180 \\ 2 & 0 & 99 \end{vmatrix} = 63$$

Solución: $x = 18$, $y = 36$, $z = 63$

$$\text{Si } k = 3 \rightarrow \begin{cases} 3x - y = 0 \\ x + y + 2z = 180 \\ 2x + z = 99 \end{cases}$$

$\text{Rango}(A) = 2$

$\text{Rango}(A') = 3$

El sistema es incompatible.

$$\text{Si sustituimos } 180 \text{ por } 198 \rightarrow \begin{cases} 3x - y = 0 \\ x + y + 2z = 198 \\ 2x + z = 99 \end{cases}$$

$\text{Rango}(A) = 2$

$\text{Rango}(A') = 2$

El sistema es compatible indeterminado.

$$\text{Solución: } x = \frac{\lambda}{3}, y = \lambda, z = -\frac{2}{3}\lambda + 99$$

Si $k = -6,8$, el sistema es compatible determinado pues $\text{Rango}(A) = 2$, $\text{Rango}(A') = 3$.

Si $k = -2$, el sistema es compatible indeterminado pues $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A') = 2$.

$$\text{Solución: } x = -\frac{7}{5} + \frac{12}{5}\lambda, y = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}\lambda, z = \lambda$$

$$\text{Si } \lambda = 1 \rightarrow x = y = z = 1$$

Por lo tanto, si $k = -2$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ es solución del sistema.

$$43. \det(A) = k^3 - 3k^2 + 2k$$

$$\det(A) = 0 \rightarrow k = 0, 1, 2$$

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - y = -1 \\ x - y - 2z = 1 \end{cases}$$

$\text{Rango}(A) = 2$

$\text{Rango}(A') = 2$

Sistema compatible indeterminado:

$$\text{Solución: } x = -1 + \lambda, y = \lambda, z = -1$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - y = 1 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

$\text{Rango}(A) = 2$

$\text{Rango}(A') = 3$

Sistema incompatible.

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y = -1 \\ x + y = -3 \end{cases} \rightarrow \text{Incompatible.}$$

Si $k \neq 1 \rightarrow$ Compatible determinado.

$$x = \frac{3-k^2}{k-2}, y = \frac{1}{k-2}, z = \frac{2-k^2}{k-2}$$

$$44. a) \det(A) = k^3 - 3k^2 + 2k$$

$$\det(A) = 0 \rightarrow k = 0, 1, 2$$

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ -y + z = 2 \\ x + 2y = -2 \end{cases} \rightarrow \text{Incompatible}$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + 2y + 2z = 2 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$$

Página 87

$$42. \det(A) = -k^5 - 8k^4 - 7k^3 + 8k^2 + 8$$

$$\det(A) = 0 \rightarrow k = 1; -2; -6,8$$

Si $k = 1$, el sistema es incompatible pues $\text{Rango}(A) = 2$, $\text{Rango}(A') = 3$.

$$\text{Rank}(A) = 2$$

$$\text{Rank}(A') = 3$$

Sistema incompatible.

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + 5y + 5z = 2 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Rango}(A) = 2$$

$$\text{Rango}(A') = 2$$

Sistema compatible indeterminado.

Si $k \neq 0, 1, 2 \rightarrow$ Compatible determinado.

b) Si $k = 2 \rightarrow$ Solución: $x = -4, y = 2 - \lambda, z = \lambda$

Si $k \neq 0, 1, 2 \rightarrow$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & k \\ 2 & 3k-1 & 1+k^2 \\ k-2 & 2 & k^2-k \end{vmatrix}}{k^3-3k^2+2k} = \frac{-k^3-k^2+8k-4}{k^3-3k^2+2k}$$

$$= \frac{k^2+3k-2}{k^2-k}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & k \\ k & 2 & 1+k^2 \\ 1 & k-2 & k^2-k \end{vmatrix}}{k^3-3k^2+2k} = \frac{k^2-5k+2}{k^3-3k^2+2k} = \frac{2k-1}{k^2-k}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ k & 3k-1 & 2 \\ 1 & 2 & k-2 \end{vmatrix}}{k^3-3k^2+2k} = \frac{k^2-3k+2}{k^3-3k^2+2k} = \frac{1}{k}$$

$$\text{Solución: } x = \frac{k^2+3k-2}{k^2-k}, y = \frac{2k-1}{k^2-k}, z = \frac{1}{k}$$

$$45. \det(A) = k^3 - 4k$$

$$\det(A) = 0 \rightarrow k = 0, -2, 2$$

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \begin{cases} x - 2z = 1 \\ x - 4z = 3 \\ -4z = 2 \end{cases}$$

$$\text{Rango}(A) = 2$$

$$\text{Rango}(A') = 3$$

Incompatible.

$$\text{Si } k = -2 \rightarrow \begin{cases} x - 2y - 4z = 1 \\ x - 4y - 6z = 3 \\ -2x + 4y + 8z = -2 \end{cases}$$

$$\text{Rango}(A) = 2$$

$$\text{Rango}(A') = 2$$

Sistema compatible indeterminado.

Solución:

$$x = -1 + 2\lambda, y = -1 - \lambda, z = \lambda$$

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + 4y - 2z = 3 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases} \rightarrow \text{Incompatible.}$$

Si $k \neq 0, -2, 2 \rightarrow$ Compatible determinado.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & k & k-2 \\ 3 & 2k & k-4 \\ 2k+2 & k^2 & 2k^2-2k-4 \end{vmatrix}}{k^3-4k} = \frac{-2k^3-2k^2+4k}{k^3-4k} = \frac{-2k+2}{k-2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & k-2 \\ 1 & 3 & k-4 \\ k & 2k+2 & 2k^2-2k-4 \end{vmatrix}}{k^3-4k} = \frac{2k^2+2k-4}{k^3-4k} = \frac{2k-2}{k^2-2k}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & 2k & 3 \\ k & k^2 & 2k+2 \end{vmatrix}}{k^3-4k} = \frac{2k^2+2k}{k^3-4k} = \frac{1}{k-2}$$

Solución:

$$x = \frac{-2k+2}{k-2}, y = \frac{2k-2}{k^2-2k}, z = \frac{1}{k-2}$$

$$46. a) \text{ Se debería cumplir: } \begin{cases} k-2=0 \\ k^2+k-6=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k=2 \\ k=-3, k=2 \end{cases}$$

Por lo tanto, si $k = 2$, el sistema es homogéneo.

$$b) \det(A) = k^2 + 2k$$

$$\det(A) = 0 \rightarrow k = 0, -2$$

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ x + 3z = -2 \\ -x + 3z = -6 \end{cases}$$

$$\text{Rango}(A) = 2$$

$$\text{Rango}(A') = 3$$

Sistema incompatible.

$$\text{Si } k = -2 \rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + 3z = -4 \\ -x - 4y + z = -4 \end{cases}$$

$$\text{Rango}(A) = 2$$

$$\text{Rango}(A') = 2$$

Sistema compatible indeterminado.

Si $k \neq 0, -2 \rightarrow$ Compatible determinado.

c) Si $k = -2 \rightarrow$ Solución: $x = -4 - 3\lambda, y = 2 + \lambda, z = \lambda$

Si $k \neq 0, -2 \rightarrow$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -k & 1 \\ k-2 & 0 & 3 \\ k^2+k-6 & 2k & k+3 \end{vmatrix}}{k^2+2k} = \frac{-2k^3+8k}{k^2+2k} =$$

$$= -2k + 4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & k-2 & 3 \\ -1 & k^2+k-6 & k+3 \end{vmatrix}}{k^2+2k} = \frac{4-k^2}{k^2+2k} = \frac{-k+2}{k}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -k & 0 \\ 1 & 0 & k-2 \\ -1 & 2k & k^2+k-6 \end{vmatrix}}{k^2+2k} = \frac{k^3-4k}{k^2+2k} = k-2$$

$$x = -2k + 4, y = \frac{-k+2}{k}, z = k-2$$

47. Si el rango de la matriz de coeficientes es mayor o igual que 1, el sistema puede tener como solución un plano, que en este caso será el determinado por los puntos dados:

Los puntos determinan un plano:

$$Ax + By + Cz - D = 0$$

Se debe cumplir:

$$\begin{cases} A - D = 0 \\ 2B - D = 0; \\ 3C - D = 0 \end{cases}$$

$$A = 3\lambda, B = 3\lambda/2, C = \lambda, D = 3\lambda$$

El plano es:

$$3\lambda x + 3\lambda y/2 + \lambda z - 3\lambda = 0;$$

$$3x + 3y/2 + z - 3 = 0;$$

Este plano es la solución del sistema, por lo tanto, la solución se puede escribir de la siguiente forma:

$$x = -\lambda/2 - \mu/3 + 1$$

$$y = \lambda$$

$$z = \mu$$

Autoevaluación

1. $\text{Rango}(A) = 2$

$$\text{Rango}(A') = 2$$

El sistema es compatible indeterminado.

Solución:

$$x = 1, y = 2 - \lambda, z = \lambda$$

2. $\det(A) = 6 \rightarrow$ Es de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 40 & -1 & 5 \\ 20 & 1 & -1 \\ 20 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{6} = \frac{-60}{6} = -10$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 40 & 5 \\ 2 & 20 & -1 \\ -1 & 20 & -2 \end{vmatrix}}{6} = \frac{420}{6} = 70$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 & 40 \\ 2 & 1 & 20 \\ -1 & 1 & 20 \end{vmatrix}}{6} = \frac{180}{6} = 30$$

Solución:

$$x = -10, y = 70, z = 30$$

$$3. a) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 8 \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{El sistema } \begin{cases} x + 3y + z = -t \\ 2x - y - 2z = t \\ x - 2y - 3z = 2t \end{cases} \text{ es de Cramer}$$

Solución:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 1 \\ \lambda & -1 & -2 \\ 2\lambda & -2 & -3 \end{vmatrix}}{8} = -\frac{2\lambda}{8} = -\frac{\lambda}{4}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 2 & \lambda & -2 \\ 1 & 2\lambda & -3 \end{vmatrix}}{8} = \frac{0}{8} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -\lambda \\ 2 & -1 & \lambda \\ 1 & -2 & 2\lambda \end{vmatrix}}{8} = -\frac{6\lambda}{8} = -\frac{3\lambda}{4}$$

Solución:

$$x = -\frac{\lambda}{4}, y = 0, z = -\frac{3\lambda}{4}, t = \lambda$$

b) Actividad personal, por ejemplo:

$$x + y + z + 2t = 0$$

$$4. \det(A) = 18k - 28 - 2k^2$$

$$k = 2, k = 7$$

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \begin{cases} 6x + 2y + 2z = 6 \\ 2x + 2y + z = 2 \\ 5x + 3y + 2z = 5 \end{cases}$$

$$\text{Rango}(A) = 2$$

$$\text{Rango}(A') = 2$$

Sistema compatible indeterminado

Solución:

$$x = 1 - \frac{\lambda}{4}, y = -\frac{\lambda}{4}, z = \lambda$$

$$\text{Si } k = 7 \rightarrow \begin{cases} 6x + 2y + 2z = 6 \\ 7x + 2y + z = 7 \\ 5x + 3y + 7z = 5 \end{cases}$$

$$\text{Rango}(A) = 2$$

$$\text{Rango}(A') = 2$$

Sistema compatible indeterminado

Solución:

$$x = 1 + \lambda, y = -4\lambda, z = \lambda$$

Si $k \neq 2, 7 \rightarrow$ Sistema compatible determinado

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 & 2 \\ k & 2 & 1 \\ 5 & 3 & k \end{vmatrix}}{18k - 28 - 2k^2} = \frac{18k - 28 - 2k^2}{18k - 28 - 2k^2} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 6 & 2 \\ k & k & 1 \\ 5 & 5 & k \end{vmatrix}}{18k - 28 - 2k^2} = \frac{0}{18k - 28 - 2k^2} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 & 6 \\ k & 2 & k \\ 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}}{18k - 28 - 2k^2} = \frac{0}{18k - 28 - 2k^2} = 0$$

Solución:

$$x = 1, y = 0, z = 0$$

$$5. \det(A) = k - k^3$$

$$\det(A) = 0 \rightarrow k = 0, k = 1, k = -1$$

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Compatible indeterminado.}$$

Solución:

$$x = 0, y = \lambda, z = 0$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \begin{cases} y + 2z = 1 \\ x + z = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

$$\text{Rango}(A) = 2$$

$$\text{Rango}(A') = 2$$

Sistema compatible indeterminado

$$\text{Solución: } x = 1 - \lambda, y = 1 - 2\lambda, z = \lambda$$

$$\text{Si } k = -1 \rightarrow \begin{cases} -y = -1 \\ -x + z = -1 \\ x - z = -1 \end{cases}$$

$$\text{Rango}(A) = 2$$

$$\text{Rango}(A') = 3$$

Sistema incompatible

Si $k \neq 0, -1, 1 \rightarrow$ Sistema compatible determinado

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k & k & k+1 \\ k & 0 & 1 \\ k & 0 & k \end{vmatrix}}{k-k^3} = \frac{k^2-k^3}{k-k^3} = \frac{k}{k+1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & k & k+1 \\ k & k & 1 \\ 1 & k & k \end{vmatrix}}{k-k^3} = \frac{0}{k-k^3} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & k & k \\ k & 0 & k \\ 1 & 0 & k \end{vmatrix}}{k-k^3} = \frac{k^2-k^3}{k-k^3} = \frac{k}{k+1}$$

Solución: $x = \frac{k}{k+1}$, $y = 0$, $z = \frac{k}{k+1}$

6. a) Un sistema homogéneo es siempre compatible.

El sistema tiene soluciones distintas a la trivial cuando $\text{Rango}(A) \leq 2$:

$$\det(A) = -2 - k + k^2 = 0 \rightarrow k = 2, k = -1$$

Si $k = 2$ o bien $k = -1$, el sistema tiene soluciones distintas de la trivial.

b) Si $k = 2 \rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$

Solución: $x = -\lambda/3$, $y = \lambda$, $z = 5\lambda/3$

Si $k = -1 \rightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Solución: $x = \lambda$, $y = 0$, $z = \lambda$